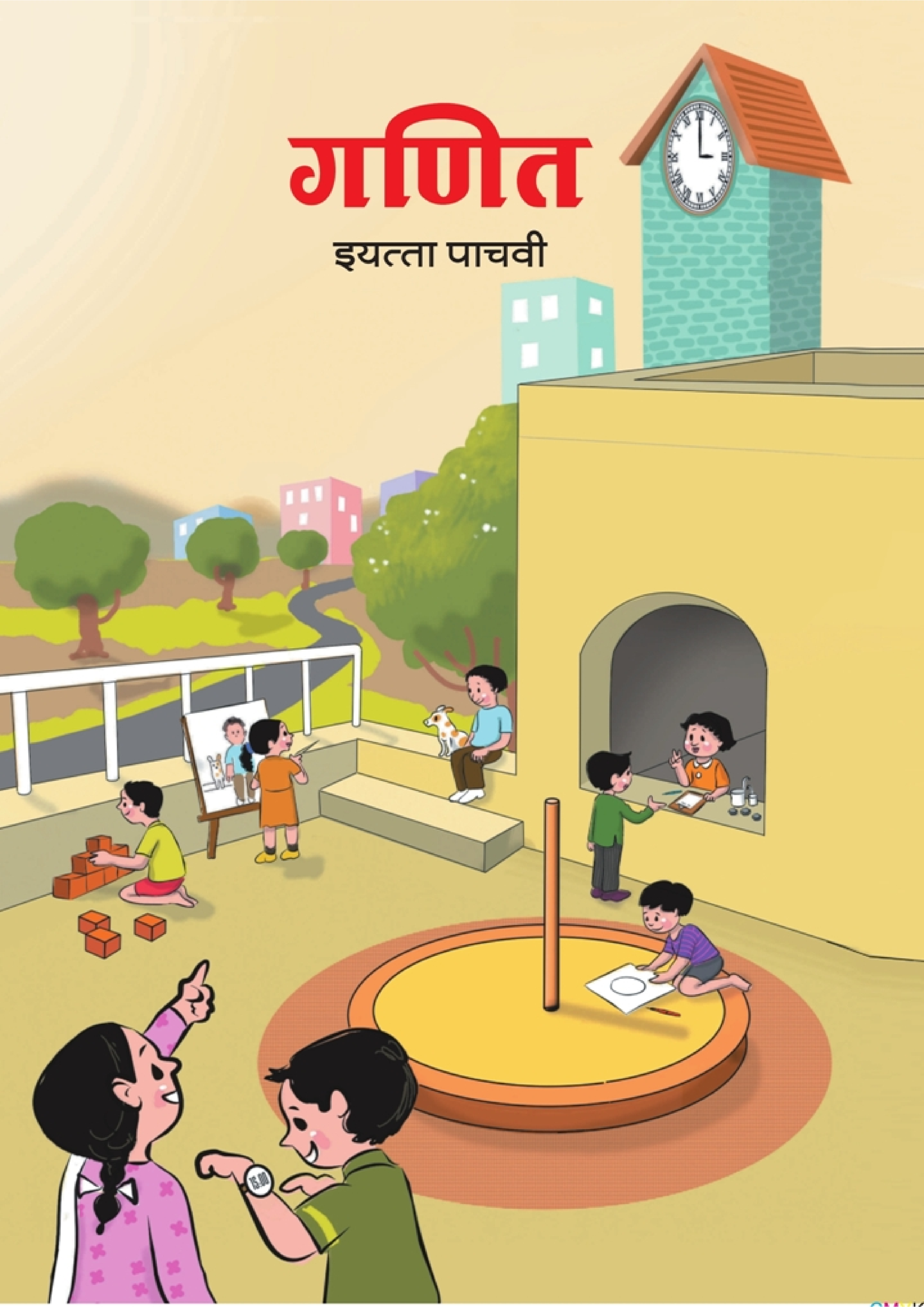
गणित

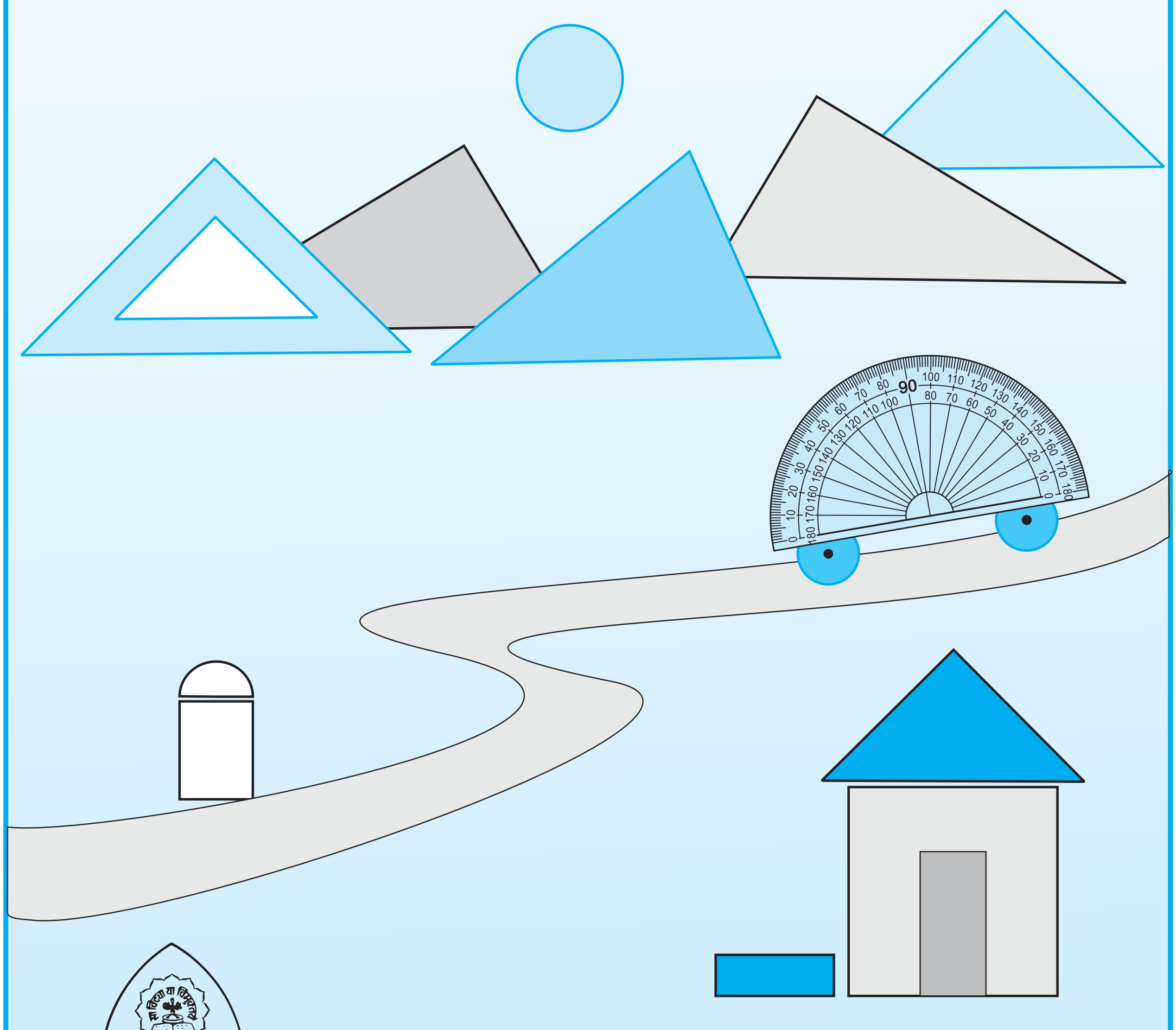
इयत्ता पाचवी



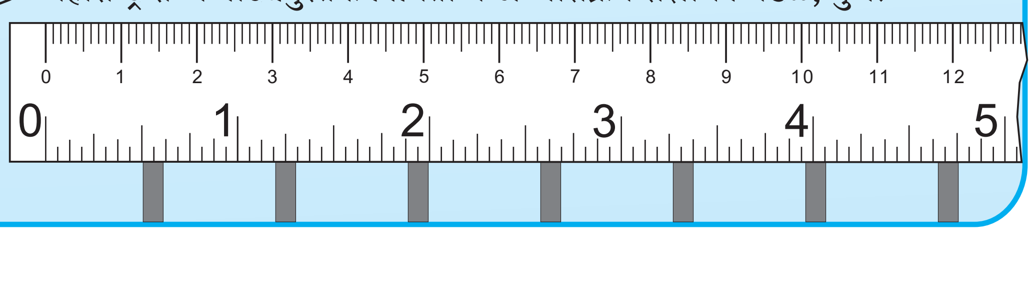
शिक्षण खात्याचा मंजुरी क्रमांक : प्राशिसं/ २०१४–१५ / १४९ / मंजुरी/ड–५०५ / ३४४ दिनांक १४.१.२०१५

गणित

इयत्ता पाचवी



महाराष्ट्र राज्य पाठ्यपुस्तक निर्मिती व अभ्यासक्रम संशोधन मंडळ, पुणे.



प्रथमावृत्ती : २०१५

© **महाराष्ट्र राज्य पाठ्यपुस्तक निर्मिती व अभ्यासक्रम संशोधन मंडळ, पुणे – ४११ ००४.**

महाराष्ट्र राज्य पाठ्यपुस्तक निर्मिती व अभ्यासक्रम संशोधन मंडळाकडे या पुस्तकाचे सर्व हक्क राहतील. या पुस्तकातील कोणताही भाग संचालक, महाराष्ट्र राज्य पाठ्यपुस्तक निर्मिती व अभ्यासक्रम संशोधन मंडळ यांच्या लेखी परवानगीशिवाय उद्धृत करता येणार नाही.

गणित विषय समिती

डॉ. शशिकांत अ. कात्रे (अध्यक्ष)
डॉ. श्रीमती मंगला नारळीकर (सदस्य)
डॉ. विनायक मा. सोलापूरकर (सदस्य)
डॉ. सौ. वैजयंता पाटील (सदस्य)
डॉ. के. सुब्रमण्यम (सदस्य)
श्री. राजेंद्र गोसावी (सदस्य)
श्री. प्रमोद तु. खर्चे (सदस्य)
श्रीमती मंगल पवार (सदस्य)
श्रीमती उज्ज्वला गोडबोले (सदस्य-सचिव)

गणित विषय कार्यगट सदस्य

डॉ. एम. एम. शिकारे
डॉ. कैलास बोंदार्डे
डॉ. जयश्री अत्रे
डॉ. अनिल वैद्य
श्री. हेमंत देशपांडे
श्री. नागेश मोने
श्री. रवींद्र येवले
श्री. पुरुषोत्तम शर्मा
श्री. सुरेश शिंदे
कु. भारती ताठे
श्री. कल्याण शिंदे
श्री. प्रदीप गोडसे
श्री. सुधीर नाचणे
श्री. राजेश वैरागडे
सौ. वैशाली पाटील
श्री. मारुती बारस्कर

संयोजन : उज्ज्वला श्रीकांत गोडबोले
प्र. विशेषाधिकारी, गणित
पाठ्यपुस्तक मंडळ, पुणे.

मुखपृष्ठ व सजावट : रेश्मा बर्वे, पुणे
संगणकीय आरेखन : संदीप कोळी, मुंबई

निर्मिती : सच्चितानंद आफळे
मुख्य निर्मिती अधिकारी
संजय कांबळे
निर्मिती अधिकारी
प्रशांत हरणे
निर्मिती सहायक

अक्षरजुळणी : गणित विभाग,
पाठ्यपुस्तक मंडळ, पुणे.

कागद : ७० जी.एस.एम. क्रीमवोव्ह

मुद्रणादेश :

मुद्रक :

प्रकाशक
विवेक उत्तम गोसावी, नियंत्रक
पाठ्यपुस्तक निर्मिती मंडळ, प्रभादेवी, मुंबई-२५.

भारताचे संविधान

उद्देशिका

आम्ही, भारताचे लोक, भारताचे एक सार्वभौम समाजवादी धर्मनिरपेक्ष लोकशाही गणराज्य घडविण्याचा व त्याच्या सर्व नागरिकांस:

सामाजिक, आर्थिक व राजनैतिक **न्याय;**
विचार, अभिव्यक्ती, विश्वास, श्रद्धा
व उपासना यांचे **स्वातंत्र्य;**
दर्जाची व संधीची **समानता;**

निश्चितपणे प्राप्त करून देण्याचा
आणि त्या सर्वांमध्ये व्यक्तीची प्रतिष्ठा
व राष्ट्राची एकता आणि एकात्मता
यांचे आश्वासन देणारी **बंधुता**
प्रवर्धित करण्याचा संकल्पपूर्वक निर्धार करून;

आमच्या संविधानसभेत
आज दिनांक सव्वीस नोव्हेंबर, १९४९ रोजी
याद्वारे हे संविधान अंगीकृत आणि अधिनियमित करून स्वत:प्रत अर्पण करीत आहोत.

राष्ट्रगीत

जनगणमन–अधिनायक जय हे
भारत–भाग्यविधाता ।
पंजाब, सिंधु, गुजरात, मराठा,
द्राविड, उत्कल, बंग,
विंध्य, हिमाचल, यमुना, गंगा,
उच्छल जलधितरंग,
तव शुभ नामे जागे, तव शुभ आशिस मागे,
गाहे तव जयगाथा,
जनगण मंगलदायक जय हे,
भारत–भाग्यविधाता ।
जय हे, जय हे, जय हे,
जय जय जय, जय हे ।।

प्रतिज्ञा

भारत माझा देश आहे. सारे भारतीय माझे बांधव आहेत.

माझ्या देशावर माझे प्रेम आहे. माझ्या देशातल्या समृद्ध आणि विविधतेने नटलेल्या परंपरांचा मला अभिमान आहे. त्या परंपरांचा पाईक होण्याची पात्रता माझ्या अंगी यावी म्हणून मी सदैव प्रयत्न करीन.

मी माझ्या पालकांचा, गुरुजनांचा आणि वडीलधाऱ्या माणसांचा मान ठेवीन आणि प्रत्येकाशी सौजन्याने वागेन.

माझा देश आणि माझे देशबांधव यांच्याशी निष्ठा राखण्याची मी प्रतिज्ञा करीत आहे. त्यांचे कल्याण आणि त्यांची समृद्धी ह्यांतच माझे सौख्य सामावले आहे.

प्रस्तावना

'बालकांचा मोफत व सक्तीच्या शिक्षणाचा अधिकार अधिनियम – २००९' आणि 'राष्ट्रीय अभ्यासक्रम आराखडा – २००५' डोळ्यांसमोर ठेवून महाराष्ट्र राज्यात 'प्राथमिक शिक्षण अभ्यासक्रम – २०१२' तयार करण्यात आला. या शासनमान्य अभ्यासक्रमावर आधारित गणित विषयाच्या पाठ्यपुस्तकांची नवीन माला २०१३–२०१४ या शालेय वर्षापासून टप्प्याटप्प्याने पाठ्यपुस्तक मंडळ प्रकाशित करत आहे. या मालेतील गणित इयत्ता पाचवीचे हे पाठ्यपुस्तक आपल्या हाती देताना आम्हांला विशेष आनंद वाटतो.

सर्व अध्ययन–अध्यापन प्रक्रिया बालकेंद्रित असावी, ज्ञानरचनावादावर भर दिला जावा, प्राथमिक शिक्षणाच्या अखेरीस विद्यार्थ्यांने किमान क्षमता प्राप्त कराव्या, तसेच शिक्षणाची प्रक्रिया रंजक आणि आनंददायी व्हावी, हा दृष्टिकोन समोर ठेवून या पुस्तकाची रचना करण्यात आली आहे.

विद्यार्थ्यांमध्ये असलेली स्वत: काहीतरी करण्याची धडपड लक्षात घेऊन हे पुस्तक कृतिप्रधान ठेवण्याचा प्रयत्न केला आहे. यासाठी कृती व उपक्रम देण्यात आले आहेत. गणित विषय समजण्यासाठी पूरक अशी चित्रे व आकृत्या यांचा समावेश पाठ्यपुस्तकात केला आहे.

गणित संबोधांची उजळणी व्हावी, त्यांचे स्थिरीकरण व्हावे, स्वयंअध्ययन सुलभ व्हावे, म्हणून पुस्तकात श्रेणीबद्ध (Graded) उदाहरणसंग्रहांचा समावेश करण्यात आला आहे. उदाहरणसंग्रहांतील प्रश्न विद्यार्थ्यांनी स्वप्रयत्नाने सोडवावे अशी अपेक्षा आहे. उदाहरणसंग्रहांत कृतियुक्त आणि मुक्तोत्तरी प्रश्नांचा समावेश केला आहे. उदाहरणसंग्रह कंटाळवाणे होऊ नयेत, यासाठी त्यांमध्ये विविधता आणण्याचा प्रयत्न केला आहे.

काही पाठांच्या संदर्भात शिक्षकांनी जी भाषा विद्यार्थ्यांसमोर मांडावी अशी अपेक्षा आहे, ती पाठ्यपुस्तकात संवादरूपात दिली आहे. ज्यांचा वापर विद्यार्थ्यांना गणिताच्या अभ्यासात वारंवार करावा लागतो, असे गुणधर्म व नियम चौकटींत दिले आहेत. तसेच, विचार करा, गणिती कोडी, शोधा म्हणजे सापडेल, खेळ यांचा वापर करून गणित विषय मनोरंजक करण्याचा प्रयत्न केला आहे.

हे पाठ्यपुस्तक जास्तीत जास्त निर्दोष व दर्जेदार व्हावे, या दृष्टीने महाराष्ट्राच्या सर्व भागांतील निवडक शिक्षक, तसेच काही शिक्षणतज्ज्ञ व विषयतज्ज्ञ यांच्याकडून या पुस्तकाचे समीक्षण करून घेण्यात आले आहे. शिक्षक, पालक यांच्याकडून आलेल्या पत्रांतील सूचनांचा योग्य तो विचार करून गणित विषय समितीने या पुस्तकाला अंतिम स्वरूप दिले आहे.

मंडळाचे गणित समिती सदस्य, कार्यगट सदस्य, श्री. वि. दि. गोडबोले (निमंत्रित) व चित्रकार यांच्या आस्थापूर्वक परिश्रमांतून हे पुस्तक तयार झाले आहे. मंडळ या सर्वांचे मन:पूर्वक आभारी आहे.

विद्यार्थी, शिक्षक व पालक या पुस्तकाचे स्वागत करतील अशी आशा आहे.

(चं. रा. बोरकर)
संचालक
महाराष्ट्र राज्य पाठ्यपुस्तक निर्मिती व
अभ्यासक्रम संशोधन मंडळ, पुणे.

पुणे
दिनांक : २७ नोव्हेंबर, २०१४
६ अग्रहायण, १९३६

✦ शिक्षकांशी हितगुज ✦

- पाठ्यपुस्तक हे अध्ययन-अध्यापन प्रक्रियेतील अतिशय महत्त्वाचे साधन आहे. आपणांस आपल्या परिसरातील विविध अनुभव व विद्यार्थ्यांचे स्वत:चे अनुभव यांचा उपयोग करून अध्यापन करता यावे, या दृष्टीने या पाठ्यपुस्तकाची रचना केली आहे. त्यात दिलेल्या पुढील बाबींचा आवर्जून उपयोग करावा.
- खेळ, गोष्टी, प्रात्यक्षिके, उपक्रम, कोडी इत्यादींच्या साहाय्याने गणितातील संकल्पना, संबोध स्पष्ट करावे. विद्यार्थ्यांकडून पाठ्यपुस्तकातील संवादांचे नाट्यीकरण करून घ्यावे.
- प्रात्यक्षिकांचा अधिकाधिक वापर करून गणित विषयाचे अध्यापन करावे.
- एखादी संकल्पना विद्यार्थ्यांना समजण्यासाठी जास्त वेळ लागला, तर सावकाश अध्यापन करावे.
- पृष्ठावरील पाठ्यांशाच्या संदर्भाने विद्यार्थ्यांशी प्रश्नोत्तररूपाने चर्चा करावी. शैक्षणिक साहित्याच्या मदतीने अध्ययन-अनुभव द्यावेत.
- संबंधित पृष्ठावरील कृतींबाबत विद्यार्थ्यांशी चर्चा करावी / स्पष्टीकरण द्यावे / स्पष्ट सूचना द्याव्यात.
- या कृती पूर्ण करण्यासाठी आवश्यक वाटल्यास गटातील सहकाऱ्यांशी चर्चा करण्याबाबत सूचना द्यावी.
- विद्यार्थी कृती करत असताना शिक्षकांनी गटागटांत फिरून विद्यार्थ्यांच्या कृतींचे निरीक्षण करावे. आवश्यक तेथे मार्गदर्शन करावे.
- विद्यार्थी किती वेगाने उदाहरणे सोडवतात यापेक्षा योग्य रीत समजून घेऊन उदाहरण सोडवतात का, हे शिक्षकांनी पाहावे.
- विद्यार्थ्यांनी सोडवलेली उदाहरणे बरोबर आहेत, याची खात्री करण्यासाठी विद्यार्थ्यांना पडताळा घेण्याची सवय लावावी.
- पृष्ठावर दिलेल्या उपक्रमांच्या मदतीने सराव करून घ्यावा.
- गरजेनुसार आणखी उपक्रम आणि शैक्षणिक साहित्य शिक्षकांनी स्वत: तयार करावे. त्यांच्या मदतीने अध्यापन करावे.
- दुसऱ्या दिवशी आधीच्या पृष्ठावरील पाठ्यांशाच्या संदर्भातील प्रश्न विचारून पाठ्यांशाचे आकलन झाल्याची खात्री करावी.
- अडचणींबाबत प्रश्न विचारण्यास विद्यार्थ्यांना प्रवृत्त करावे. प्रश्न विचारण्याची सवय विकसित करावी.
- संख्यांचे वाचन-लेखन, तसेच मनातल्या मनात आकडेमोड करण्याची विद्यार्थ्यांची क्षमता विकसित करण्याच्या दृष्टीने सातत्याने प्रयत्न करावेत.
- उदाहरणांची व्यवस्थित पायरीपायरीने तर्कशुद्ध मांडणी करणे ही क्षमता विकसित होईल या दृष्टीने प्रयत्न करावेत.
- अभ्यासक्रमात सुचवलेल्या शक्य तेवढ्या आंतरक्रियांचा समावेश या पाठ्यपुस्तकात केला आहे. इतर आंतरक्रियांचाही विचार शिक्षकांनी करावा.

अनुक्रमणिका

विभाग पहिला

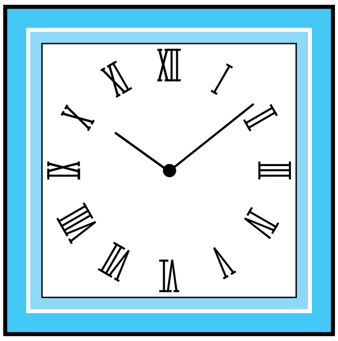
1. रोमन संख्याचिन्हे 1
2. संख्याज्ञान 3
3. बेरीज व वजाबाकी 10
4. गुणाकार व भागाकार 15
5. अपूर्णांक 21
6. कोन 34
7. वर्तुळ 41

विभाग दुसरा

8. विभाज्य आणि विभाजक 46
9. दशांश अपूर्णांक 52
10. कालमापन 59
11. मापनावरील उदाहरणे 64
12. परिमिती व क्षेत्रफळ 68
13. त्रिमितीय वस्तू व घडणी 75
14. चित्रालेख 79
15. आकृतिबंध 83
16. बीजगणिताची पूर्वतयारी 86

विभाग पहिला

1. रोमन संख्याचिन्हे



गीता : या घड्याळाच्या तबकडीवर संख्यांच्या जागी वेगळीच चिन्हं दिसत आहेत.

शिक्षक : हो, अगदी बरोबर. या तबकडीवरील चिन्हं ही रोमन संख्याचिन्हं आहेत. पूर्वी युरोपमध्ये संख्यालेखनासाठी कॅपिटल रोमन अक्षरं वापरली जात होती. 1 साठी I, 5 साठी V आणि 10 साठी X ही अक्षरं संख्याचिन्हं म्हणून वापरली जात, म्हणून संख्या लिहिण्याच्या या पद्धतीला 'रोमन संख्यालेखन पद्धती' म्हणतात.

या पद्धतीत शून्यासाठी कोणतंही चिन्ह वापरलं जात नव्हतं. अंकांची किंमत स्थानाप्रमाणे बदलत नव्हती. रोमन संख्याचिन्हांच्या साहाय्यानं संख्या लिहिण्यासाठी काही नियम तयार केले आहेत.

या नियमांचा आणि I, V, X या चिन्हांचा उपयोग करून 20 पर्यंतच्या संख्या कशा लिहायच्या ते पाहू.

नियम 1 : I व X यांपैकी एखादे चिन्ह दोनदा किंवा तीनदा एकापुढे एक लिहिल्यास त्यांची बेरीज करून संख्या मिळतात.

उदा., II = 1 + 1 = 2   XX = 10 + 10 = 20   III = 1 + 1 + 1 = 3

नियम 2 : I आणि X ही चिन्हे एकापुढे एक जास्तीत जास्त तीन वेळा लिहितात.
V हे चिन्ह एकापुढे एक लिहीत नाहीत.

नियम 3 : I किंवा V यांपैकी एखादे चिन्ह मोठ्या संख्येच्या चिन्हाच्या उजवीकडे लिहिले, तर त्याची किंमत मोठ्या संख्येच्या चिन्हाच्या किमतीत मिळवली जाते.

उदा.,

VI = 5 + 1 = 6	XI = 10 + 1 = 11	XV = 10 + 5 = 15
VII = 5 + 2 = 7	XII = 10 + 2 = 12	XVI = 10 + 5 + 1 = 16
VIII = 5 + 3 = 8	XIII = 10 + 3 = 13	

नियम 4 : I हे चिन्ह V किंवा X या चिन्हाच्या डावीकडे लिहिले, तर त्याची किंमत V किंवा X च्या किमतीतून वजा केली जाते, मात्र I हे चिन्ह V किंवा X च्या मागे एकापेक्षा जास्त वेळा लिहीत नाहीत.

उदा., IV = 5 – 1 = 4 , IX = 10 – 1 = 9
8 ही संख्या IIX अशी लिहीत नाहीत.

14 व 19 या संख्या जरा वेगळा विचार करून लिहाव्या लागतात.

14 = 10 + 1 + 1 + 1 + 1; परंतु 1 साठी I हे चिन्ह जास्तीत जास्त तीन वेळाच वापरता येते, म्हणून 14 ही संख्या 10 + 4 अशी विचारात घेऊ. 4 साठी IV हे चिन्ह वापरून, 14 ही संख्या XIV अशी लिहितात. तसेच 19 ही संख्या 10 + 9 अशी विचारात घेऊन XIX अशी लिहितात.

20 पर्यंतच्या संख्या लिहिण्यासाठी प्रथम ती संख्या 10, 5 व 1 अशा गटांत विभागून, वरील नियमांनुसार रोमन संख्याचिन्हे वापरून लिहितात.

जसे, 12 = 10 + 1 + 1 = XII,   7 = 5 + 1 + 1 = VII,   18 = 10 + 5 + 3 = XVIII

उदाहरणसंग्रह 1

1. 1 ते 20 या संख्या रोमन संख्याचिन्हे वापरून लिहा.

2. पुढील संख्या आंतरराष्ट्रीय संख्याचिन्हांत लिहा.

(1) V (2) VII (3) X (4) XIII (5) XIV (6) XVI (7) XVIII (8) IX

3. रिकाम्या चौकटी भरा.

संख्या	तीन		सहा		पंधरा	
रोमन संख्याचिन्ह		VIII		XII		XIX

4. रोमन संख्याचिन्हांचा उपयोग करून संख्या लिहा.

(1) 9 ☐ (2) 2 ☐ (3) 17 ☐

(4) 4 ☐ (5) 11 ☐ (6) 18 ☐

5. पुढे आंतरराष्ट्रीय अंकातील प्रत्येक संख्या रोमन संख्याचिन्हात लिहिलेली आहे. रोमन संख्याचिन्ह वापरून लिहिलेली संख्या बरोबर असल्यास त्याखाली '✓' अशी खूण करा. चूक असल्यास '×' अशी खूण करा आणि ती दुरुस्त करून लिहा.

आंतरराष्ट्रीय अंकांत लेखन	4	6	8	16	15
रोमन संख्याचिन्हांत लेखन	IIII	VI	IIX	XVI	VVV
बरोबर/चूक (चूक असल्यास दुरुस्ती)					

अधिक माहितीसाठी : L, C, D, M ही आणखी काही रोमन संख्याचिन्हे आहेत.

रोमन संख्याचिन्हे	I	V	X	L	C	D	M
संख्या	1	5	10	50	100	500	1000

उपक्रम : घड्याळाप्रमाणेच रोमन संख्याचिन्हांचा वापर आणखी कोठे कोठे केलेला दिसतो, याची नोंद करा.

दशमान संख्यालेखन पद्धती

रोमन पद्धतीने संख्या लिहिणे व वाचणे सोपे नसते. या पद्धतीत संख्या लिहून बेरीज-वजाबाकी करणेही बरेच अवघड असते. आपण 0 ते 9 हे दहा अंक वापरून संख्या लिहितो. यात स्थानांनुसार अंकांची किंमत ठरवतो. संख्या लिहिण्याच्या या पद्धतीला 'दशमान संख्यालेखन पद्धती' म्हणतात.

पुरातनकाली भारतीय गणितींनी संख्यालेखनासाठी दशमान पद्धतीचा वापर प्रथम सुरू केला. नंतर जगभर हीच पद्धत सोपी व सोईची म्हणून स्वीकारली गेली.

✦✦✦

2. संख्याज्ञान

दशमान संख्यालेखन पद्धतीत 0 ते 9 हे दहा अंक वापरून संख्या कशा लिहायच्या व वाचायच्या हे आपण पाहिले आहे.

❒ उजळणी

उदाहरणसंग्रह 2

1. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0 या अंकांचा वापर करून दोन अंकी, तीन अंकी, चार अंकी, पाच अंकी अशा प्रत्येकी दहा संख्या लिहा व वाचा.
2. देवनागरी संख्याचिन्हे व आंतरराष्ट्रीय संख्याचिन्हे यांचा वापर करून संख्या अंकांत व अक्षरांत लिहा.

देवनागरी संख्याचिन्हात	आंतरराष्ट्रीय संख्याचिन्हात	संख्येचे अक्षरी लेखन
(1) २,३५९	2,359	दोन हजार तीनशे एकोणसाठ
(2) ३२,७५६	---------------	-----------------------------
(3) ---------------	67,859	-----------------------------
(4) १,०३४	---------------	-----------------------------
(5) ---------------	---------------	सत्तावीस हजार आठशे पंचाण्णव

3. 'प्लॅस्टिकचा वापर टाळा' या योजनेअंतर्गत जिल्हापरिषदेच्या शाळांनी कागदाच्या पिशव्या बनवून किराणा दुकानदारांना व भाजीविक्रेत्यांना दिल्या. त्या पिशव्यांची तालुकानिहाय संख्या वाचा व ती संख्या अक्षरी लिहा.

कोपरगाव	शेवगाव	कर्जत	संगमनेर
12,740	28,095	31,608	10,972

4. एकूण किती रुपये होतील ते लिहा.
   (1) 1 हजार रुपयांच्या 20 नोटा, 100 रुपयांच्या 5 नोटा आणि 10 रुपयांच्या 14 नोटा.
   (2) 1 हजार रुपयांच्या 15 नोटा, 100 रुपयांच्या 12 नोटा, 10 रुपयांच्या 8 नोटा व 1 रुपयाची 5 नाणी.
5. 4, 5, 0, 3, 7 हे अंक एकेकदा वापरून सर्वांत मोठी व सर्वांत लहान पाच अंकी संख्या लिहा.
6. गाव व त्या गावाची लोकसंख्या दिलेली आहे. या माहितीवरून पुढील प्रश्नांची उत्तरे लिहा.

तळा : 40,642	गगनबावडा : 35,777	बोधवड : 91,256
मोरेगाव : 87,012	भामरागड : 35,950	वेल्हे : 54,497
आष्टी : 76,201	वाशी : 92,173	मोरवाडा : 85,890

   (1) सर्वांत जास्त लोकसंख्या असलेले गाव कोणते ? त्याची लोकसंख्या किती ?
   (2) मोरवाडा व मोरेगाव या दोन गावांपैकी कोणत्या गावाची लोकसंख्या जास्त आहे ?
   (3) सर्वांत कमी लोकसंख्या असलेले गाव कोणते ? त्याची लोकसंख्या किती ?

❐ सहा अंकी संख्यांची ओळख

शिक्षक : एखादया चारचाकी गाडीची किंमत किती असेल ?

अजय : अंदाजे सहा-सात लाख रुपये.

शिक्षक : तुला लाख म्हणजे नक्की किती माहीत आहे का ?

अजय : लाख रुपये म्हणजे खूप जास्त असतात ना ? 10 हजारापेक्षाही जास्त ना ?

शिक्षक : होय. तेच आपण शिकूया. 999 + 1 म्हणजे किती होतात ?

अजय : एक हजार.

शिक्षक : आता 99000 कसे लिहायचे तुला माहीत आहे. त्यात आणखी 1000 मिळवले की शंभर हजार होतात. त्यालाच 1 लाख म्हणतात.

विजय : 9999 + 1 ही बेरीज करून 10,000 (दहा हजार) मिळतात. त्यासाठी आपण दशहजाराचे स्थान तयार केले होते. तसे लाखासाठी सुद्धा स्थान करता येईल का ?

शिक्षक : हो तर. 99,999 + 1 ही बेरीज करून पाहा.

येथे हातचे मिळवत मिळवत दशहजाराच्या डावीकडे लाख म्हणजे लक्ष याचे स्थान तयार केले आणि शेवटचा हातचा एक, लक्ष या नवीन स्थानावर लिहिला. बेरीज करून आलेली संख्या 'एक लक्ष' किंवा 'एक लाख' अशी वाचतात.

$$\begin{array}{r} 99,999 \\ +\quad 1 \\ \hline 1,00,000 \end{array}$$

विजय : किशाकाकांना एक जुनी मोटार अडीच लाख रुपयांना मिळाली.

अजय : अडीच म्हणजे दोन आणि अर्धा हे माहीत आहे; पण अडीच लाख म्हणजे किती ?

शिक्षक : 1 लाख म्हणजे 100 हजार, तर अर्धा लाख म्हणजे 50 हजार, कारण 100 च्या निम्मे पन्नास.

विजय : अडीच लाख म्हणजे दोन लाख आणि पन्नास हजार.

शिक्षक : आता ही संख्या अंकांत लिही बरं.

विजय : 2,50,000

शिक्षक : शंभर हजार म्हणजे 1 लाख हे आपण पाहिले. 100 रुपयांच्या हजार नोटा असतील तर किती रुपये होतील ? 1000 रुपयांच्या 100 नोटा घेतल्या की किती रुपये होतील ?

विजय : 100 रुपयांच्या 1000 नोटा एकत्र करून 1 लाख रुपये होतील आणि 1000 रुपयांच्या 100 नोटा एकत्र केल्या तरी 1 लाख रुपये म्हणजेच एक लक्ष रुपये होतील.

❐ सहा अंकी संख्यांचे वाचन

(1) 2,35,705 : दोन लक्ष पस्तीस हजार सातशे पाच

(2) 8,00,363 : आठ लाख तीनशे त्रेसष्ट

(3) 3,07,899 : तीन लक्ष सात हजार आठशे नव्याण्णव

(4) 9,00,049 : नऊ लक्ष एकोणपन्नास

(5) 5,30,735 : पाच लाख तीस हजार सातशे पस्तीस

❐ सहा अंकी संख्यांचे अंकांत लेखन

(1) आठ लक्ष नऊ हजार त्रेचाळीस : या संख्येत लक्ष या स्थानी 8, हजाराच्या स्थानी 9, दशकस्थानी 4 व एककस्थानी 3 आहेत. दशहजार व शतकस्थानी काही नाही, म्हणून या स्थानांवर 0 लिहायचे, म्हणून आठ लक्ष नऊ हजार त्रेचाळीस ही संख्या 8,09,043 अशी लिहितात.

संख्या अंकांत लिहिताना प्रथम सर्वांत मोठ्या स्थानावरील अंक लिहावा. त्यापेक्षा लहान अशा प्रत्येक स्थानावर 1 ते 9 पैकी योग्य तो अंक लिहावा. एखाद्या स्थानावर अंक नसेल तर त्या स्थानावर 0 हा अंक लिहावा. जसे, 'आठ लक्ष नऊ हजार त्रेचाळीस' ही संख्या '89043' अशी लिहिल्यास ती 'एकोणनव्वद हजार त्रेचाळीस' होते व ते चूक आहे म्हणून 'आठ लक्ष नऊ हजार त्रेचाळीस' ही संख्या '8,09,043' अशी लिहितात. येथे दशहजार या स्थानावर शून्य लिहावे लागले.

(2) चार लक्ष वीस हजार पाचशे : या संख्येत हजारस्थानी, दशकस्थानी व एककस्थानी 0 लिहावा लागेल; म्हणून चार लक्ष वीस हजार पाचशे ही संख्या 4,20,500 अशी लिहितात.

उदाहरणसंग्रह 3

1. संख्या वाचा व अक्षरांत लिहा.

(1) 7,65,234 (2) 4,73,225 (3) 3,27,001 (4) 8,75,375 (5) 1,50,437

(6) 2,03,174 (7) 6,47,851 (8) 9,00,999 (9) 5,75,010 (10) 4,03,005

2. संख्या वाचा व अंकांत लिहा.

(1) एक लाख पस्तीस हजार आठशे पंचावन्न (2) सात लक्ष सत्तावीस हजार

(3) चार लक्ष पंचवीस हजार तीनशे (4) नऊ लक्ष नऊ हजार नव्याण्णव

(5) सात लक्ष एकोणपन्नास हजार तीनशे बासष्ट (6) आठ लाख

3. 0 ते 9 यांपैकी प्रत्येक अंक एकेकदाच वापरून सहा अंकी पाच संख्या तयार करा.

❒ सात अंकी संख्या : ओळख, लेखन व वाचन

शिक्षक : आता आपण सात अंकी संख्यांची ओळख करून घेऊ.
समजा, एका सहकारी बँकेकडून प्रत्येकी 1,00,000 रुपये याप्रमाणे 10 शेतकऱ्यांनी कर्ज घेतले. तर सहकारी बँकेने त्यांना एकूण किती रुपये कर्ज दिले ?

अजित : 1,00,000 ची 10 पट करावी लागेल. म्हणजे एक लाख या संख्येला 10 ने गुणावे लागेल. 10 ने गुणणे म्हणजे ज्या संख्येस गुणायचे त्या संख्येपुढे एक शून्य लिहिणे.

अजय : $1,00,000 \times 10 = 10,00,000$

शिक्षक : ही सात अंकी संख्या झाली. तिचे वाचन '10 लक्ष' असे करतात. त्यासाठी आणखी एक स्थान लक्षच्या डावीकडे तयार होते, त्याचे नाव 'दशलक्ष'. यावरून 1 दशलक्ष = 10 लक्ष = 10,00,000.

संख्या वाचताना जसे दशहजार व हजार यांचे वाचन एकत्र करतात, तसेच दशलक्ष आणि लक्ष एकत्र वाचतात. 18, 35, 614 चे वाचन 'अठरा लक्ष पस्तीस हजार सहाशे चौदा' असे करतात.

काही सात अंकी संख्यांचे लेखन अंकांत व अक्षरांत पुढे दिले आहे, ते अभ्यासा.

(1) 31,25,745 : एकतीस लक्ष पंचवीस हजार सातशे पंचेचाळीस (2) 91,00,006 : एक्याण्णव लक्ष सहा

(3) 63,00,988 : त्रेसष्ट लक्ष नऊशे अठ्ठ्याऐंशी (4) 88,00,400 : अठ्ठ्याऐंशी लक्ष चारशे

(5) बाहत्तर लक्ष पंचाण्णव : 72,00,095 (6) सत्तर लक्ष दोन हजार तीनशे : 70,02,300

उदाहरणसंग्रह 4

1. खालील संख्या वाचा व अक्षरांत लिहा.

(1) 25,79,899 (2) 30,70,506 (3) 45,71,504 (4) 21,09,900

(5) 43,07,854 (6) 50,00,000 (7) 60,00,010 (8) 70,00,100

(9) 80,01,000 (10) 90,10,000 (11) 91,00,000 (12) 99,99,999

2. काही जिल्ह्यांतील महिला सहकारी पतपेढ्यांतील ठेवी खाली दिल्या आहेत. त्या संख्या वाचा.

पुणे : ₹ 94,29,408 नाशिक : ₹ 61,07,187 नागपूर : ₹ 46,53,570 अहमदनगर : ₹ 45,43,159

औरंगाबाद : ₹ 37,01,282 यवतमाळ : ₹ 27,72,348 सिंधुदुर्ग : ₹ 58,49,651

❒ संख्येचे विस्तारित रूप व अंकांची स्थानिक किंमत

ताई : 27,65,043 या संख्येतील प्रत्येक अंकाची स्थानिक किंमत पाहा.

अंक	2	7	6	5	0	4	3
स्थान	दशलक्ष	लक्ष	दशहजार	हजार	शतक	दशक	एकक
अंकाची स्थानिक किंमत	20,00,000	7,00,000	60,000	5,000	0	40	3

हमीद : अंकांच्या स्थानिक किमती बेरजेच्या रूपात लिहिल्या, की संख्येचे विस्तारित रूप मिळते.
27,65,043 या संख्येचे विस्तारित रूप
20,00,000 + 7,00,000 + 60,000 + 5,000 + 0 + 40 + 3 हे येते.

ताई : आता 95,04,506 चे विस्तारित रूप काय येईल सांगा बरं !

सोनी : 90,00,000 + 5,00,000 + 0 + 4,000 + 500 + 0 + 6 असे विस्तारित रूप येईल.

ताई : शाबास ! हेच विस्तारित रूप 90,00,000 + 5,00,000 + 4,000 + 500 + 6 असेही लिहिता येईल. हे पाहा मी आता विस्तारित रूप देते त्यावरून संख्या लिहा.
4,00,000 + 90,000 + 200

आशा : येथे संख्येच्या लक्षस्थानी 4, दशहजारस्थानी 9, हजारस्थानी काही नाही म्हणून 0, शतकस्थानी 2, दशक व एककस्थानी काही नाही म्हणून 0 लिहू, म्हणून ती संख्या 4,90,200 आहे.

ताई : <u>5</u>9,30,478 या संख्येत अधोरेखित अंकाची स्थानिक किंमत सांगा.

सोनी : येथे अधोरेखित अंक 5 आहे. हा अंक दशलक्षस्थानी आहे, म्हणून त्याची स्थानिक किंमत 5 दशलक्ष म्हणजेच 50 लक्ष.

उदाहरणसंग्रह 5

1. खालील संख्यांतील अधोरेखित अंकांची स्थानिक किंमत लिहा.

(1) 78, 95,210 (2) 14, 95,210 (3) 3,52,749 (4) 50,000 (5) 89, 99,988

2. खालील संख्या विस्तारित रूपात लिहा.

(1) 56, 43, 215 (2) 70, 815 (3) 8, 35, 999 (4) 8, 88, 889 (5) 92, 32, 992

3. खालील संख्यांतील प्रत्येक अंकाचे स्थान व त्याची स्थानिक किंमत लिहा.

(1) 35, 705 (2) 7, 82, 899 (3) 82, 74, 508

4. संख्येचे विस्तारित रूप दिले आहे. त्यावरून संख्या लिहा.

(1) 60, 000 + 4000 + 600 + 70 + 9 (2) 9, 00, 000 + 20,000 + 7000 + 800 + 5

(3) 20,00,000 + 3,00,000 + 60,000 + 9000 + 500 + 10 + 7

(4) 7,00,000 + 80,000 + 4000 + 500 (5) 80,00,000 + 50,000 + 1000 + 600 + 9

फासा घेऊन खेळण्याचा एक मजेदार खेळ पाहा.

खालीलप्रमाणे प्रत्येक खेळाडूचे नाव असलेली सारणी करा.
प्रत्येक नावापुढे सात अंकी संख्या बनवण्यासाठी चौकटी आहेत.

खेळाडूंची नावे	दल	ल	दह	ह	श	द	ए	तयार होणारी संख्या
अजय	1							
मेघा				3				
पुष्कर्णी	6							
विजय		2						

खेळ 1 : पहिल्या खेळाडूने फासा टाकून दान घ्यावे. ते दान स्वत:च्या नावापुढील कुठल्याही चौकटीत भरावे. एका चौकटीत अंक लिहिला, की जागा बदलता येणार नाही. प्रत्येक चौकटीत एकच अंक लिहायचा. मग क्रमाने प्रत्येक खेळाडूने फासा टाकून आपले दान, आपल्या नावापुढच्या कुठल्याही रिकाम्या चौकटीत भरावे. याप्रमाणे हळूहळू सर्व चौकटी भरतील व प्रत्येकाची एक सात अंकी संख्या तयार होईल. ज्याची संख्या सर्वांत मोठी, तो जिंकणार.

खेळ 2 : सारणी व त्यातील चौकटी खेळ नं. 1 प्रमाणेच; पण फासा टाकून मिळालेले दान प्रत्येक खेळाडू कुणाच्याही नावापुढील कुठल्याही रिकाम्या चौकटीत लिहू शकेल. ज्याची संख्या सर्वांत मोठी तो जिंकणार.

खेळ 3 : खेळण्याचे सगळे नियम खेळ 2 प्रमाणे. सर्वांच्या सात अंकी संख्या तयार झाल्यावर ज्याची संख्या सर्वांत लहान तो जिंकणार.

❒ संख्यांचा लहान-मोठेपणा (क्रमसंबंध)

हमीद : सहा अंकी किंवा सात अंकी संख्या दिल्यास, त्यांपैकी लहान-मोठी संख्या कशी ठरवायची ?

शिक्षक : पाच अंकांपर्यंतच्या संख्यांचा लहान-मोठेपणा कसा ठरवायचा हे तुम्हांला माहीत आहे. ज्या संख्येचा दशहजारस्थानचा अंक मोठा ती संख्या मोठी. दशहजार या स्थानावरील अंक सारखे असल्यास हजारस्थानचा अंक तपासा. नंतर दिलेल्या संख्यांचा क्रम ठरवता येतो.

यावरून सहा किंवा सात अंकी संख्यांतील लहान-मोठेपणा ठरवण्याची रीत सुचते का पाहा.

हमीद : हो, सांगता येईल. सुरुवातीला दशलक्षस्थानचे अंक पाहू. दशलक्षस्थानचे अंक सारखे असल्यास लक्षस्थानचे अंक बघून ठरवू. लक्षस्थानचे अंकदेखील सारखे असल्यास दशहजारस्थानचे अंक बघून संख्यांचा लहान-मोठेपणा ठरवता येईल. शिवाय दिलेल्या संख्या किती अंकी आहेत, यावरूनही संख्यांचा लहान-मोठेपणा ठरवता येईल, हो ना ?

शिक्षक : अगदी बरोबर ! ज्या संख्येमध्ये अंक जास्त ती संख्या मोठी असते.

उदाहरणसंग्रह 6

1. चौकटींत < , > यांपैकी योग्य चिन्ह लिहा.

(1) 5,705	<	15,705	(2) 22,74,705		12,74,705
(3) 35,33,302		35,32,302	(4) 99,999		9,99,999
(5) 4,80,009		4,90,008	(6) 35,80,177		35,88,172

2. खालील उदाहरणे सोडवा.

(1) स्वयंसिद्धा महिला बचतगटाने उडदाचे 3,45,000 पापड तयार केले आणि स्वाभिमानी बचतगटाने उडदाचे 2,95,000 पापड तयार केले, तर कोणत्या गटाने अधिक पापड तयार केले ?

(2) अहमदनगर जिल्ह्यातील प्राथमिक शाळेतील मुलांनी 2,00,000 बिया जमा केल्या, तर पुणे जिल्ह्यातील प्राथमिक शाळेतील मुलांनी 3,25,000 बिया जमा केल्या. जास्त बिया कोणत्या जिल्ह्यातील मुलांनी जमा केल्या ?

(3) प्रजासत्ताक दिनाच्या दिवशी पंढरपूर तालुक्यातील 2,01,306 स्त्री-पुरुषांनी झेंडावंदन केले. माळशिरस तालुक्यातील 1,97,208 स्त्री-पुरुषांनी झेंडावंदन केले, तर कोणत्या तालुक्यात जास्त स्त्री-पुरुषांनी झेंडावंदन केले ?

(4) एका प्रदर्शनात अन्नपूर्णा महिला बचतगटाने 5,12,345 रुपयांच्या वस्तूंची विक्री केली. निर्माण महिला बचतगटाने 4,12,900 रुपयांच्या वस्तूंची विक्री केली. सृजन महिला बचतगटाने 4,33,000 रुपयांच्या वस्तूंची विक्री केली व सावित्रीबाई फुले महिला बचतगटाने 5,11,937 रुपयांच्या वस्तूंची विक्री केली, तर सर्वांत जास्त विक्री कोणत्या बचत गटाने केली ? कोणत्या बचत गटाची विक्री सर्वांत कमी झाली ? बचतगटांनी केलेली विक्री चढत्या क्रमाने लिहा.

❐ कोटीची ओळख

99,99,999 ही सर्वांत मोठी सात अंकी संख्या आहे. या संख्येत 1 ही संख्या मिळवली, की 1,00,00,000 ही आठ अंकी लहानांत लहान संख्या तयार होते. या संख्येचे वाचन 'एक कोटी' असे करतात. ही संख्या लिहिण्यासाठी जे नवे संख्यास्थान निर्माण केले जाते, त्याला 'कोटी' चे स्थान म्हणतात.

आठ अंकी संख्यांचे वाचन कसे करतात हे खालील उदाहरणांवरून समजून घ्या.

संख्या	वाचन
8,45,12,706	आठ कोटी पंचेचाळीस लक्ष बारा हजार सातशे सहा
5,61,63,589	पाच कोटी एकसष्ट लाख त्रेसष्ट हजार पाचशे एकोणनव्वद
6,09,04,034	सहा कोटी नऊ लाख चार हजार चौतीस

अधिक माहितीसाठी

कोटी या स्थानाच्या डावीकडे दहा-दहा पटींनी वाढणारी; अनुक्रमे दशकोटी, अब्ज, दशअब्ज ही स्थाने आहेत. 2011 च्या जनगणनेनुसार आपल्या देशाची लोकसंख्या 1,21,01,93,422 होती. या संख्येचे वाचन 'एक अब्ज एकवीस कोटी एक लाख त्र्याण्णव हजार चारशे बावीस' असे आहे.

एकपासून एक अब्जपर्यंतच्या दहा-दहा पटींतील संख्या.

संख्या	वाचन	एकापुढील शून्यांची संख्या
1	एक	–
10	दहा	1
100	शंभर	2
1,000	एक हजार	3
10,000	दहा हजार/दशहजार	4
1,00,000	लक्ष/लाख	5
10,00,000	दशलक्ष	6
1,00,00,000	कोटी	7
10,00,00,000	दशकोटी	8
1,00,00,00,000	अब्ज	9

3. बेरीज व वजाबाकी

❒ बेरीज – उजळणी

पुढील उदाहरण अभ्यासा.

क्रिकेटच्या एका सामन्यासाठी पहिल्या दिवशी 23,456 व दुसऱ्या दिवशी 14,978 तिकिटे विकली गेली, तर एकूण किती तिकिटे विकली गेली ?

```
   2 3 4 5 6
+  1 4 9 7 8
------------
   3 8 4 3 4
------------
```

एकूण 38,434 तिकिटे विकली गेली.

उदाहरणसंग्रह 7

खालील बेरजा करा.

(1) 40722 + 13819 = ______

(2) 56427 + 10648 = ______

(3) 64027 + 28409 = ______

(4) 33216 + 28540 = ______

❒ सहा व सात अंकी संख्यांची बेरीज

मागील इयत्तेत पाच अंकांपर्यंतच्या संख्यांची बेरीज कशी करायची हे आपण पाहिले आहे. याच पद्धतीने पाचपेक्षा अधिक अंक असलेल्या संख्यांची बेरीज करता येते.

पुढील उदाहरणे अभ्यासा.

बेरीज करा.

उदा. (1) 1,43,057 + 4,21,689

	ल	दह	ह	श	द	ए
				1	1	
	1	4	3	0	5	7
+	4	2	1	6	8	9
	5	6	4	7	4	6

उदा. (2) 26,42,073 + 7,39,478

	दल	ल	दह	ह	श	द	ए
	1		1		1	1	
	2	6	4	2	0	7	3
+		7	3	9	4	7	8
	3	3	8	1	5	5	1

उदा. (3) 3,12,469 + 758 + 24,092

```
   3 1 2 4 6 9
+        7 5 8
+    2 4 0 9 2
--------------
   3 3 7 3 1 9
--------------
```

उदा. (4) 64 + 409 + 5,13,728

```
           6 4
+        4 0 9
+  5 1 3 7 2 8
--------------
   5 1 4 2 0 1
--------------
```

वरील उदाहरणांत हातचे मनात ठेवून बेरीज केली आहे.

उदाहरणसंग्रह 8

बेरीज करा.

(1) 42,311 + 65,36,624
(2) 3,17,529 + 8,04,613
(3) 12,42,746 + 4,83,748
(4) 24,12,636 + 23,19,058
(5) 2,654 + 71,209 + 5,03,789
(6) 29 + 726 + 51,36,274
(7) 14,02,649 + 524 + 28,13,749
(8) 23,45,678 + 9,87,654
(9) 22 + 6,047 + 3,84,527
(10) 2,345 + 65,432 + 76,54,369

पुढील शाब्दिक उदाहरण अभ्यासा.

✦ पोलिओ निर्मूलनाच्या अभियानामध्ये 2012 साली एका जिल्ह्यात 3,17,658 बालकांना व दुसऱ्या जिल्ह्यात 2,04,969 बालकांना पोलिओ डोस देण्यात आले, तर एकूण किती बालकांना पोलिओ डोस देण्यात आले ?

$$\begin{array}{r} 3\,1\,7\,6\,5\,8 \\ +\ 2\,0\,4\,9\,6\,9 \\ \hline 5\,2\,2\,6\,2\,7 \\ \hline \end{array}$$

एकूण 5,22,627 बालकांना पोलिओ डोस देण्यात आले.

उदाहरणसंग्रह 9

खालील उदाहरणे सोडवा.

1. एका निवडणुकीत 13,47,048 स्त्रियांनी व 14,29,638 पुरुषांनी मतदान केले, तर एकूण मतदान किती झाले ?

2. सहा अंकी सर्वांत मोठी संख्या व सहा अंकी सर्वांत लहान संख्या यांची बेरीज किती येईल ?

3. सुरेखाताईंनी 8,07,957 रुपयांचा ट्रॅक्टर व 32,609 रुपयांचे मळणीयंत्र खरेदी केले, तर त्यांनी एकूण किती रुपये खर्च केले ?

4. एका गिरणीत मागील वर्षी 17,24,938 मीटर कापड तयार झाले. यावर्षी 23,47,056 मीटर कापड तयार झाले, तर दोन्ही वर्षांत मिळून किती कापड तयार झाले ?

5. राज्यशासनाने शाळांना 34,62,940 रुपयांचे संगणक व 3,26,578 रुपयांचे दूरदर्शनसंच दिले, तर शासनाने एकूण किती रुपयांचे साहित्य दिले ?

❒ वजाबाकी – उजळणी

पुढील उदाहरण अभ्यासा.

एका परीक्षेला मागील वर्षी 38,796 विद्यार्थी बसले. यावर्षी 47,528 विद्यार्थी बसले, तर यावर्षी परीक्षेला किती जास्त विद्यार्थी बसले ?

$$\begin{array}{r} 4\,7\,5\,2\,8 \\ -\ 3\,8\,7\,9\,6 \\ \hline 0\,8\,7\,3\,2 \\ \hline \end{array}$$

यावर्षी परीक्षेला 8,732 विद्यार्थी जास्त बसले.

येथे हातचे मनात धरून वजाबाकी केली आहे.

उदाहरणसंग्रह 10

वजाबाकी करा.

(1)	(2)	(3)	(4)
64293	37058	71540	50432
− 28547	− 23469	− 58628	− 48647

❒ सहा व सात अंकी संख्यांची वजाबाकी

पाच अंकी संख्यांची वजाबाकी करण्यास आपण शिकलो आहोत. त्याच पद्धतीने पाचपेक्षा अधिक अंकी संख्यांची वजाबाकी करता येते.

पुढील उदाहरणे अभ्यासा.

वजाबाकी करा.

उदा. (1) 65,07,843 – 9,25,586

	14				13	
5	~~4~~	10		7	~~3~~	13
~~6~~	~~5~~	~~0~~	7	~~8~~	~~4~~	~~3~~
−	9	2	5	5	8	6
5	5	8	2	2	5	7

उदा. (2) 34,61,058 – 27,04,579

3	4	6	1	0	5	8
− 2	7	0	4	5	7	9
0	7	5	6	4	7	9

वरील उदाहरणात दाखवल्याप्रमाणे हातचे वर न लिहिता मनात धरण्याची सवय करा.

वजाबाकीची आणखी एक रीत

दोन संख्यांची वजाबाकी करताना त्या दोन्ही संख्यांमध्ये प्रत्येकी 1 दशक किंवा 1 शतक मिळवून आलेल्या संख्यांची वजाबाकी केली, तरी वजाबाकी तीच येते. याचा उपयोग करू.

उदा. वजाबाकी करा. 724 – 376

	12	14
7	2	4
− 3 (1)	7 (1)	6
3	4	8

4 एककांतून 6 वजा होत नाहीत, म्हणून वरच्या व खालच्या, दोन्ही संख्यांत 1 दशक मिळवू. वरच्या संख्येत 1 दशक सुटा करून ते 10 एकक, 4 एककांत मिळवू व खालच्या संख्येत 1 दशक मिळवण्यासाठी तो दशकांच्या घरात लिहू. 14 एककांतून 6 वजा करू.

2 दशकांतून (7 + 1) म्हणजे 8 दशक वजा होत नाहीत, म्हणून वरच्या व खालच्या दोन्ही संख्यांत एक शतक मिळवू. वरच्या संख्येत एक शतक मोकळा करून दशकांत मिळवू व 1 शतक खालच्या संख्येत मिळवण्यासाठी शतकांच्या घरात लिहू. 12 दशकांतून 8 दशक वजा करू. 7 शतकांतून (3 + 1) म्हणजे 4 शतक वजा करू. यावरून वजाबाकी आली 348.

उदा. (1)

4	0	5	8	2	5
–		9	8	7	6
1	1	1	1	1	
3	9	5	9	4	9

उदा. (2)

2	5	2	0	2	1	1
–	2	1	8	9	5	0
		1	1	1		
2	3	0	1	2	6	1

उदाहरणसंग्रह 11

वजाबाकी करा.

(1) 8,57,513 – 4,82,256 (2) 13,17,519 – 10,07,423 (3) 68,34,501 – 23,57,823

(4) 45,43,827 – 12,05,938 (5) 70,12,345 – 28,64,547 (6) 38,01,213 – 37,54,648

पुढील शाब्दिक उदाहरण अभ्यासा.

एका शहराची लोकसंख्या 2001 साली 21,43,567 होती. ती 2011 साली 28,09,878 झाली, तर लोकसंख्येत किती वाढ झाली ?

```
  2809878
– 2143567
---------
  0666311
```

शहराची लोकसंख्या 6,66,311 ने वाढली.

उदाहरणसंग्रह 12

1. प्रथमेशला 27,450 रुपयांचा एक लॅपटॉप घ्यायचा आहे. त्याच्याजवळ 22,975 रुपये आहेत, तर लॅपटॉप घेण्यासाठी त्याला आणखी किती रक्कम लागेल ?
2. एका वर्षी एका कंपनीने 44,730 स्कूटर्स तयार केल्या. दुसऱ्या वर्षी 43,150 स्कूटर्स तयार केल्या, तर कंपनीने पहिल्या वर्षी किती जास्त स्कूटर्स तयार केल्या ?
3. एका शहरात पुरुषांची संख्या 16,37,856 असून स्त्रियांची संख्या 16,52,978 आहे, तर स्त्रियांची संख्या पुरुषांच्या संख्येपेक्षा किती जास्त आहे ?
4. एका संस्थेने सामाजिक उपक्रमासाठी 25,00,000 रुपये जमा करण्याचे ठरवले होते. लोकवर्गणी व इतर मदतीतून संस्थेला 26,57,340 रुपये मिळाले, तर संस्थेला ठरवल्यापेक्षा किती रक्कम जास्त मिळाली ?
5. 23,849 व 27,056 या संख्या घेऊन वजाबाकीचे उदाहरण तयार करा व सोडवा.

मिश्र उदाहरणे

पुढे सोडवून दिलेली दोन उदाहरणे अभ्यासा.

उदा. (1) 4,13,758 + 2,09,542 – 5,16,304

```
  413758      623300
+ 209542    – 516304
--------    --------
  623300      106996
```

4,13,758 + 2,09,542 – 5,16,304 = 1,06,996

उदा. (2) 345678 – 162054 + 600127

```
  345678      183624
– 162054    + 600127
--------    --------
  183624      783751
```

345678 – 162054 + 600127 = 7,83,751

या उदाहरणांमध्ये बेरीज आणि वजाबाकी या दोन क्रिया आहेत. ज्या क्रमाने क्रिया दिल्या आहेत, त्याच क्रमाने त्या करून उदाहरणे सोडवली आहेत. व्यवहारात कोणती क्रिया आधी करायची हे ठरवावे लागते.

उदा. (3) एका घराच्या बांधकामासाठी एकूण खर्च 87,14,530 रुपये आला. त्यांपैकी प्लॉटसाठी 24,72,615 रुपये व बांधकाम साहित्यासाठी 50,43,720 रुपये लागले आणि उरलेली रक्कम मजुरीसाठी खर्च झाली, तर मजुरीसाठी किती रक्कम लागली ?

रीत : 1

```
  8714530 ⟶ एकूण खर्च
– 2472615 ⟶ प्लॉटची किंमत
  -------
  6241915 ⟶ बांधकाम साहित्य व मजुरीचा खर्च
  -------

  6241915 ⟶ बांधकाम साहित्य व मजुरीचा खर्च
– 5043720 ⟶ बांधकाम साहित्य खर्च
  -------
  1198195 ⟶ मजुरीसाठी लागलेली रक्कम
  -------
```

रीत : 2

```
  2472615 ⟶ प्लॉटची किंमत
+ 5043720 ⟶ बांधकाम साहित्य खर्च
  -------
  7516335 ⟶ प्लॉट व बांधकाम साहित्याचा खर्च
  -------

  8714530 ⟶ एकूण खर्च
– 7516335 ⟶ प्लॉट व बांधकाम साहित्याचा खर्च
  -------
  1198195 ⟶ मजुरीचा खर्च
  -------
```

आपण दोन रीतींनी शोधलेले उत्तर बरोबर आहे ना ते ताळा करून पाहू.

```
  2472615 ⟶ प्लॉटची किंमत
+ 5043720 ⟶ बांधकाम साहित्य खर्च
+ 1198195 ⟶ मजुरीचा खर्च
  -------
  8714530 ⟶ एकूण खर्च
```

सर्व खर्चांची बेरीज करून मिळालेला एकूण खर्च दिलेल्या एकूण खर्चाशी जुळतो म्हणजे आपले उत्तर बरोबर आहे.

उदाहरणसंग्रह 13

1. वनविभागाने खैराची 23,078 झाडे, बेहड्याची 19,476 झाडे व उरलेली इतर प्रकारची झाडे लावली. जर वनविभागाने एकूण 50,000 झाडे लावली असतील, तर इतर प्रकारची किती झाडे लावली ?
2. एका शहराची लोकसंख्या 37,04,926 आहे. त्यामधील पुरुषांची संख्या 11,24,069 आहे आणि स्त्रियांची संख्या 10,96,478 आहे व उरलेली मुले आहेत, तर त्या शहरातील मुलांची संख्या किती ?
3. कारखान्याच्या व्यवस्थापनाकडे 25,40,600 रुपये एवढा कामगार कल्याण निधी होता. त्यातील 12,37,865 रुपये वैद्यकीय बाबींवर व 8,42,317 रुपये कामगारांच्या मुलांच्या शिक्षणासाठी खर्च केले व शिल्लक निधी उपाहारगृहासाठी राखून ठेवला, तर उपाहारगृहासाठी किती निधी राखून ठेवला ?
4. क्रिकेटच्या सामन्यासाठी पहिल्या दिवशी 13,608 तिकिटे, दुसऱ्या दिवशी 8,955 तिकिटे आणि तिसऱ्या दिवशी काही तिकिटे विकली गेली. तीन दिवसांत एकूण 36,563 तिकिटे विकली गेली, तर तिसऱ्या दिवशी किती तिकिटे विकली गेली ?

4. गुणाकार व भागाकार

❒ गुणाकार

दिलेल्या संख्येला तीन अंकांपर्यंतच्या संख्येने गुणणे

उदा. (1) एका शाळेत 754 विद्यार्थी आहेत. एका विद्यार्थ्याच्या गणवेशाचा खर्च 368 रुपये येतो, तर सर्व विद्यार्थ्यांच्या गणवेशाचा एकूण खर्च किती येईल ?

```
       7 5 4
    ×  3 6 8
   ----------
     6 0 3 2 ------ 8 एककाने गुणून      →   754 × 8 = 6032
+  4 5 2 4 0 ------ 6 दशकाने गुणून      →   754 × 60 = 45240
+ 2 2 6 2 0 0 ------ 3 शतकाने गुणून     →   754 × 300 = 226200
   ----------
  2 7 7 4 7 2
```

गणवेशाचा एकूण खर्च ₹ 2,77,472 येईल.

या उदाहरणात 754 हा गुण्य, 368 हा गुणक आणि 2,77,472 हा गुणाकार आहे.

लक्षात घ्या : 754 ही संख्या 368 वेळा घेऊन त्यांची बेरीज करूनही गणवेशाचा एकूण खर्च काढता आला असता; परंतु गुणाकार करून तेच उत्तर कमी वेळात व कमी श्रमांत मिळते.

उदा. (2) 3429 × 507 = किती ?

```
        3 4 2 9
    ×     5 0 7
   ------------
      2 4 0 0 3 ------ 7 एककाने गुणून     →   3429 × 7 = 24003
+     0 0 0 0 0 ------ 0 दशकाने गुणून     →   3429 × 0 = 00000
+ 1 7 1 4 5 0 0 ------ 5 शतकाने गुणून     →   3429 × 500 = 1714500
   ------------
  1 7 3 8 5 0 3
```

उदा. (3) 25,634 व 78 या दोन संख्या वापरून गुणाकाराचे शाब्दिक उदाहरण तयार करा व सोडवा.

दुकानदाराने 25634 रुपयांस एक याप्रमाणे 78 टीव्ही सेट्स खरेदी केले. तर त्यांची एकूण किंमत किती ?

```
    2 5 6 3 4  ------ एका टीव्हीची किंमत
×         7 8  ------ टीव्हींची संख्या
-------------
  2 0 5 0 7 2  ------ 8 एककाने गुणून
+ 1 7 9 4 3 8 0  ------ 7 दशकाने गुणून
-------------
  1 9 9 9 4 5 2
-------------
```

```
  2 5 6 3 4
×         8
-----------
2 0 5 0 7 2
```

```
    2 5 6 3 4
×         7 0
-------------
1 7 9 4 3 8 0
```

एकूण किंमत 1999452 होईल.

गुणाकार करताना आलेले हातचे मनात ठेवण्याची सवय करा.

उदाहरणसंग्रह 14

1. गुणाकार करा.

(1) 327 × 92 (2) 807 × 126 (3) 567 × 890 (4) 4317 × 824

(5) 6092 × 203 (6) 1177 × 99 (7) 456 × 187 (8) 6543 × 79

(9) 2306 × 832 (10) 6429 × 509 (11) 4,321 × 678 (12) 20,304 × 87

2. 'प्लॅस्टिक टाळा' या अभियानात 745 विद्यार्थ्यांनी प्रत्येकी 25 कागदी पिशव्या तयार केल्या, तर एकूण किती कागदी पिशव्या तयार झाल्या ?

3. एका वनराईमध्ये एका रांगेत 215 याप्रमाणे 132 रांगांत औषधी वनस्पतींची रोपे लावली, तर त्या वनराईमध्ये एकूण किती रोपे लावण्यात आली ?

4. एका संगणकाची किंमत 27,540 रुपये आहे तर तशाच 18 संगणकांची किंमत काढा.

5. 'इन्स्पायर ॲवॉर्ड' या योजने अंतर्गत विज्ञान प्रकल्पाचे साहित्य खरेदी करण्यासाठी एका विद्यार्थ्याला ₹ 5000 देण्यात आले. एका तालुक्यातील 154 विद्यार्थ्यांना या योजनेचा लाभ मिळाला, तर त्या तालुक्यात या योजनेसाठी किती निधी देण्यात आला ?

6. एका दुचाकी वाहनाची किंमत 53, 670 रुपये आहे, तर अशा 35 वाहनांची किंमत काढा.

7. एका तासात 3600 सेकंद असतात, तर 365 तासांत किती सेकंद असतील ?

8. 5473 व 627 या संख्या वापरून गुणाकाराचे शाब्दिक उदाहरण तयार करा व सोडवा.

9. चार अंकी सर्वांत मोठी संख्या व तीन अंकी सर्वांत मोठी संख्या यांचा गुणाकार करा.

10. यात्रेसाठी एका यात्रेकरूला 7,650 रुपये खर्च येतो, तर अशा 26 यात्रेकरूंसाठी किती खर्च येईल ?

❒ दोन समूहांतील वस्तूंच्या वेगवेगळ्या प्रकारे जोड्या

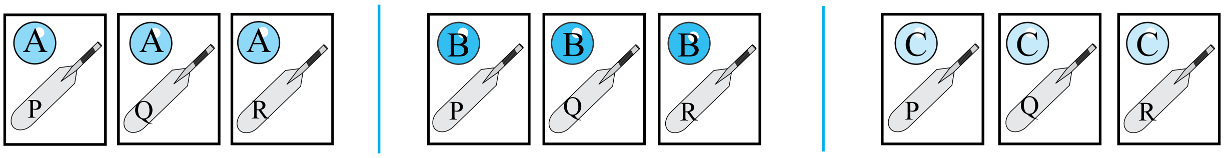
(1) अजयला प्रवासाला जाण्यासाठी कमीत कमी सामान न्यायचे आहे, म्हणून त्याने एक लाल, एक हिरवा, एक निळा असे तीन शर्ट आणि एक काळी व एक पांढरी अशा दोन पँट बरोबर घेतल्या. तर त्याला शर्ट व पँटच्या जोड्या किती प्रकारे वापरता येतील ?

वेगवेगळ्या प्रकारे वापरता येतील अशा जोड्या –

(लाल शर्ट, काळी पँट) (हिरवा शर्ट, काळी पँट) (निळा शर्ट, काळी पँट)
(लाल शर्ट, पांढरी पँट) (हिरवा शर्ट, पांढरी पँट) (निळा शर्ट, पांढरी पँट)

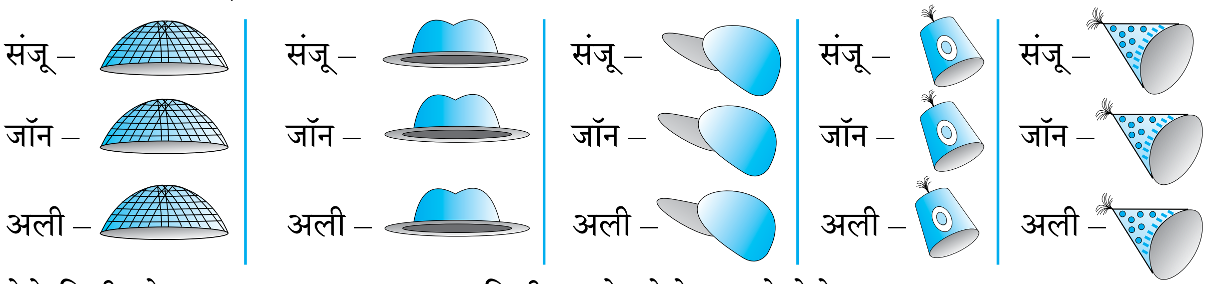
एकूण 6 जोड्या होतील.

(2) सुरेशकडे A, B, C या वेगवेगळ्या रंगांचे तीन चेंडू व P, Q, R असे लिहिलेल्या तीन बॅटी आहेत. त्याला एक बॅट व एक चेंडू घेऊन मैदानावर जायचे आहे, तर बॅट व चेंडू यांच्या किती प्रकारे जोड्या होतील ?



येथे किती प्रकारे जोड्या तयार झाल्या ?

(3) संजू, जॉन व अली हे 3 मित्र जत्रेला गेले होते. तिथे एका टोप्यांच्या दुकानात 5 प्रकारच्या टोप्या होत्या. प्रत्येकाने प्रत्येक प्रकारची टोपी आपल्या डोक्यावर घालून स्वत:चा फोटो काढून घेतला. एकूण किती फोटो काढले गेले ?



येथे किती जोड्या तयार झाल्या ? एकूण किती प्रकारे फोटो काढले गेले ?

✦ दिलेल्या संख्येएवढ्या वस्तू असणारे दोन समूह घ्या. त्यांच्या किती प्रकारे जोड्या होतात ते करून पाहा व खालील सारणी पूर्ण करा.

एका समूहातील वस्तू	दुसऱ्या समूहातील वस्तू	किती प्रकारे जोड्या होतील ?
3	2	
5	2	
2	4	
3	4	

सारणीवरून कोणता निष्कर्ष मिळतो ?

दोन समूहांतील वस्तूंच्या वेगवेगळ्या प्रकाराने तयार होणाऱ्या जोड्यांची संख्या ही दोन्ही समूहांतील वस्तूंच्या संख्यांच्या गुणाकाराएवढी असते.

❑ भागाकार

सर : आतापर्यंत आपण भागाकारासंबंधी काही बाबी शिकलो आहोत. जसं, भागाकार म्हणजे दिलेल्या संख्येची समान वाटणी करणं किंवा दिलेल्या संख्येतून एखादी संख्या पुन्हा पुन्हा वजा करणं. आणखी काही आठवतं का ?

शुभा : हो सर, एका गुणाकारावरून आपल्याला दोन भागाकार मिळतात.
$9 \times 4 = 36$, यावरून $36 \div 4 = 9$ आणि $36 \div 9 = 4$ हे दोन भागाकार मिळतात.

सर : शाबास ! आता भागाकार या क्रियेसंबंधी मूलत: नवीन शिकण्यासारखं असं काही नाही. फक्त भाज्य आणि भाजकातील अंकांची संख्या वाढत जाईल. तोंडी सांगा, $354 \div 6$ म्हणजे किती ?

सारंग : 354 म्हणजे 300 + 54.
300 ला 6 ने भागले, की भागाकार 50 येतो आणि $54 \div 6 = 9$, म्हणून भागाकार $50 + 9 = 59$.

सर : बरोबर. आता आपण चार अंकी संख्येला एक अंकी संख्येनं कसं भागायचं, हे पायरी-पायरीनं शिकू. त्यासाठी 4925 ला 7 नं भागून भागाकार आणि बाकी किती येईल, हे सांगा.

शुभा : 4 हजार हे 7 गटांत हजाराच्या रूपात समान वाटता येणार नाहीत. 4 हजार = 40 शतक आणि पुढील 9 शतक असे 49 शतक वाटू. $49 \div 7 = 7$ म्हणून प्रत्येकाला 7 शतक मिळतील. आता 2 दशक 7 जणांत समान वाटता येत नाहीत, म्हणून भागाकारात दशकाच्या जागी शून्य लिहावं लागेल.
नंतर 25 ला 7 नं भागल्यावर भागाकार 3 येईल आणि बाकी 4, म्हणजे भागाकार 703, बाकी 4.

सर : शाबास ! आता $7439 \div 9$ हा भागाकार करा.

सारंग : तोंडी सोडवणं जरा कठीण आहे. मांडणी करून कागदावर सोडवतो.
भागाकार 826 आणि बाकी 5 आली.

```
     0826
9) 7439
  - 0
   74
  -72
    23
   -18
     59
    -54
      5
```

सर : चार अंकी संख्येला दोन अंकी संख्येनं याच पद्धतीनं भागतात. भागताना गरज वाटली, तर भाजक संख्येचा पाढा तयार करून घ्यावा लागतो.

पुढे काही उदाहरणे सोडवून दाखवली आहेत. ती अभ्यासा.

उदा. (1)

```
      0170
25) 4254
   - 0
     42
   - 25
    175
  - 175
    0004
  - 0000
    0004
```

$25 \times 1 = 25$
$25 \times 2 = 50$
$25 \times 3 = 75$
$25 \times 4 = 100$
$25 \times 5 = 125$
$25 \times 6 = 150$
$25 \times 7 = 175$

भागाकार 170, बाकी 4

उदा. (2)

```
      0305
32) 9783
   - 0
     97
   - 96
     18
   - 00
     183
   - 160
      23
```

$32 \times 1 = 32$
$32 \times 2 = 64$
$32 \times 3 = 96$
$32 \times 4 = 128$
$32 \times 5 = 160$
$32 \times 6 = 192$

भागाकार 305, बाकी 23

उदा. (3) भागाकार करा. $9842 \div 45$

```
      0218
45)  9842
    - 90
     084
   -  45
      392
   -  360
      032
```

हे उदाहरण 45 चा पाढा तयार करून सोडवता येईल; परंतु भाजक मोठा असतो तेव्हा अंदाजाने भाग ठरवूनही उदाहरण सोडवता येते. ही रीत आता समजून घेऊ.

भागाकारात हजाराच्या स्थानी 0 येईल.

आता 98 ला 45 ने भागताना, भाग कितीचा लागेल याचा अंदाज करण्यासाठी भाज्य व भाजकातील पहिले अंक विचारात घेऊ. हे अनुक्रमे 9 व 4 आहेत.

9 ला 4 ने भागल्यास 2 चा भाग लागतो, म्हणून 98 ला 45 ने भागताना 2 चा भाग लागतो का पाहू.

$45 \times 2 = 90$. $90 < 98$, म्हणजे 2 चा भाग लागेल, म्हणून भागाकारात शतकाच्या स्थानी 2 लिहिले.

पुढे 84 ला कितीचा भाग लागेल हे ठरवताना, $90 > 84$ असल्याने भाग 1 चा लागेल, हे सहज लक्षात येते, म्हणून भागाकारात दशकस्थानी 1 लिहू.

आता 392 ला 45 ने भागायचे. $3 < 4$, म्हणून 392 मधील पहिल्या दोन अंकांनी होणारी 39 ही संख्या भागाकाराचा अंदाज करण्यासाठी विचारात घेऊ.

$4 \times 9 = 36$ आणि $36 < 39$, म्हणून 9 चा भाग लागतो का हे पाहू. $45 \times 9 = 405$ आणि $405 > 392$, म्हणून 9 चा भाग लागणार नाही.

आता 8 चा भाग लागतो का हे पाहू. $45 \times 8 = 360$.

$360 < 392$, म्हणून 8 चा भाग लागेल. ते 8 भागाकारात एककस्थानी लिहू. तो भाग देऊन भागाकार पूर्ण करू. भागाकार 218 आला आणि बाकी 32 उरली.

उदा. (4) 35 किलोग्रॅम गव्हाची किंमत 910 रुपये आहे, तर गव्हाचा दर काय आहे ?

गव्हाचे किलोग्रॅममधील वजन × गव्हाचा दर = गव्हाची किंमत

म्हणून 35 × गव्हाचा दर = 910

गव्हाचा दर म्हणजे 1 किलोग्रॅम गव्हाची किंमत.

म्हणजे 910 ला 35 ने भागले, की गव्हाचा दर मिळेल.

```
      26
35)  910
   -  70
     210
   - 210
     000
```

गव्हाचा दर एक किलोग्रॅमला 26 रुपये आहे.

उदाहरणसंग्रह 15

1. खालील उदाहरणे सोडवा. भागाकार व बाकी लिहा.

   (1) $1284 \div 32$ (2) $5586 \div 87$ (3) $1207 \div 27$

   (4) $8543 \div 41$ (5) $2304 \div 43$ (6) $56{,}741 \div 26$

2. ताशी 48 किमी वेगाने 336 किमी अंतर जाण्यासाठी किती तास लागतील ?
3. गिरिजाला 1400 पुस्तके भरण्यासाठी 35 खोकी लागली. प्रत्येक खोक्यातील पुस्तकांची संख्या समान आहे, तर प्रत्येक खोक्यात तिने किती पुस्तके भरली ?
4. सहलीसाठी प्रत्येकाने 65 रुपये वर्गणी दिली. एकूण 2925 रुपये जमले, तर किती जणांनी वर्गणी दिली ?
5. कोणत्या संख्येला 56 ने गुणल्यास गुणाकार 9688 येतो ?

6. एक वही तयार करण्यास 48 कागद लागतात, तर 5880 कागदांच्या किती वह्या होतील? किती कागद उरतील?
7. पाच अंकी सर्वांत लहान संख्येला चार अंकी सर्वांत लहान संख्येने भागल्यास भागाकार किती येईल ?

मिश्र उदाहरणे

एका शेतकऱ्याने मिरचीच्या रोपांचे 140 ट्रे आणले. प्रत्येक ट्रेमध्ये 24 रोपे होती. त्याने एका ओळीत 32 याप्रमाणे ती सर्व रोपे आपल्या शेतात लावली, तर त्या रोपांच्या किती ओळी झाल्या ?

एका ट्रेमध्ये 24 रोपे, अशा 140 ट्रेमधील रोपांची एकूण संख्या काढू. यासाठी 140 व 24 यांचा गुणाकार करू.

$$\begin{array}{r} 140 \\ \times\ 24 \\ \hline 560 \\ +\ 2800 \\ \hline 3360 \end{array}$$

एकूण रोपे 3,360.

एका ओळीत 32 रोपे, याप्रमाणे 3,360 रोपांच्या किती ओळी झाल्या, हे काढण्यासाठी 3,360 ला 32 ने भागू.

$$\begin{array}{r} 105 \\ 32\overline{)\ 3360} \\ -32 \\ \hline 016 \\ -\ 00 \\ \hline 160 \\ -\ 160 \\ \hline 000 \end{array}$$

भागाकार 105 आला. म्हणून त्या रोपांच्या 105 ओळी झाल्या.

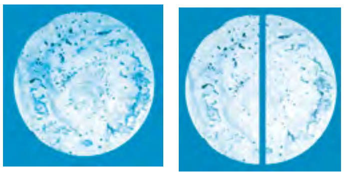
105 × 32 हा गुणाकार करा व ताळा करून पाहा.

उदाहरणसंग्रह 16

1. आबांनी 10,000 रुपयांपैकी 7,000 रुपये शाळेला देणगी दिली. उरलेली रक्कम प्रत्येक इयत्तेत सर्वांगीण प्रगती दाखवणारा एक याप्रमाणे सहा विद्यार्थ्यांना बक्षीस म्हणून समान वाटण्यास सांगितले, तर त्या प्रत्येक विद्यार्थ्याला किती रुपयांचे बक्षीस मिळेल ?
2. सहलीसाठी 50 मुलांकडून प्रत्येकी 260 रुपये वर्गणी जमा केली. त्यांपैकी 11,450 रुपये सहलीसाठी खर्च झाला, तर किती रुपये शिल्लक राहिले ?
3. एका दुकानदाराने साखरेचे 50 किग्रॅ वजनाचे पोते 1750 रुपयांस आणले. साखरेचा भाव कमी झाल्यामुळे त्याला ती साखर प्रति किग्रॅ 32 रुपये दराने विकावी लागली, तर त्याला किती रुपये कमी मिळाले ?
4. दुकानदाराने 1870 रुपयांस एक याप्रमाणे 7 कुकर खरेदी केले. ते सर्व कुकर 14,230 रुपयांस विकले, तर त्याला किती रुपये जास्त किंवा कमी मिळाले ?
5. एका सोसायटीतील 14 कुटुंबांनी मिळून गव्हाची प्रत्येकी 98 किलोग्रॅम वजनाची 8 पोती आणली. त्यातील गहू त्या सर्व कुटुंबांनी समान वाटून घेतला, तर प्रत्येक कुटुंबाच्या वाट्याला किती किलोग्रॅम गहू आला ?
6. एका इमारतीवरील टाकीची धारकता 3000 लीटर आहे. त्या इमारतीत 16 कुटुंबे राहतात. प्रत्येक कुटुंबाने रोज 225 लीटर पाणी वापरले, तर त्या टाकीतील पाणी सर्व कुटुंबांना पुरेल का ? पुरणार नसल्यास रोज किती पाणी कमी पडेल ?

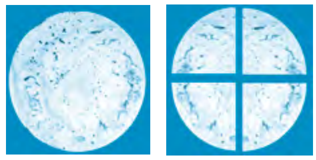
5. अपूर्णांक

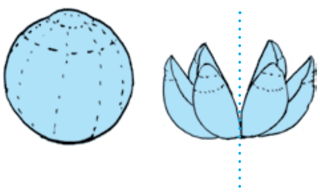
❒ सममूल्य अपूर्णांक

✦ 

एक भाकरी दोन जणांत समान वाटली, तर प्रत्येकाला **अर्धी** भाकरी मिळेल. अर्धा हा अपूर्णांक $\frac{1}{2}$ असा दाखवतात. येथे 1 हा अंश व 2 हा छेद आहे.

✦ एका भाकरीचे 4 समान भाग केले. त्यांपैकी 2 भाग एकाला दिले. हे $\frac{2}{4}$ असे दाखवतात. यात 2 हा अंश व 4 हा छेद आहे. याचा अर्थही **अर्धी** भाकरी दिली, असाच आहे ना ?

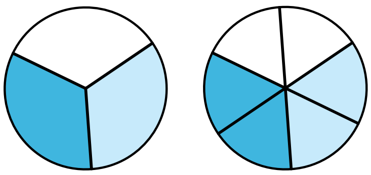


✦ 

एका खरबुजाचे 6 समान भाग केले. ते 2 जणांत समान वाटले, म्हणजे प्रत्येकाला मिळालेला भाग $\frac{3}{6}$ आहे. येथे प्रत्येकाला खरबुजाचा **अर्धाच** भाग मिळाला आहे, म्हणजे $\frac{3}{6}$ हे चिन्हसुद्धा अर्धा हाच अपूर्णांक दर्शवते.

वरील तीन उदाहरणांमध्ये, 'अर्धा' हाच अपूर्णांक अनुक्रमे $\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}$ या चिन्हांनी दाखवला आहे; म्हणजे $\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}$ या तीनही अपूर्णांकांची किंमत समान आहे. हेच '$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6}$' असे लिहितात.

अशा समान किंमत असलेल्या अपूर्णांकांना **सममूल्य अपूर्णांक** म्हणतात.

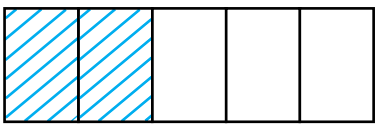
✦ 

येथे दोन समान वर्तुळांमधील रंगवलेल्या भागांचे निरीक्षण करा. एका वर्तुळाचे 3 समान भाग करून त्यांपैकी 2 भाग रंगवले आहेत, म्हणजे रंगवलेला भाग पूर्ण वर्तुळाच्या $\frac{2}{3}$ आहे.

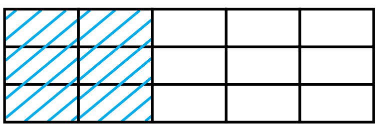
त्याच आकाराच्या दुसऱ्या वर्तुळाचे 6 समान भाग करून त्यांपैकी 4 भाग रंगवलेले आहेत, म्हणजे पूर्ण वर्तुळाचा $\frac{4}{6}$ भाग रंगवला आहे; परंतु रंगवलेले दोन्ही भाग समान आहेत. यावरून $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$

म्हणजे $\frac{2}{3}$ व $\frac{4}{6}$ हे सममूल्य अपूर्णांक आहेत.

❒ सममूल्य अपूर्णांक तयार करणे

✦ 

आकृतीच्या 5 समान भागांपैकी 2 भाग रंगवले आहेत. रंगवलेला भाग पूर्ण आकृतीच्या $\frac{2}{5}$ आहे.



त्याच आकृतीत दोन आडव्या रेघा काढल्यामुळे या आकृतीचे 15 समान भाग झालेले दिसतात. त्यामुळे आता रंगवलेला भाग दर्शवणारा अपूर्णांक $\frac{6}{15}$ असा आहे.

परंतु रंगवलेला भाग बदललेला नाही, म्हणून येथे $\frac{2}{5} = \frac{6}{15}$.

शिक्षिका : $\frac{2}{5}$ आणि $\frac{6}{15}$ या अपूर्णांकांच्या अंशांमध्ये आणि छेदांमध्ये काही विशेष संबंध दिसतो का ?

सोनू : 2 ची तिप्पट 6 व 5 ची तिप्पट 15 आहे.

शिक्षिका : आपण हेही पाहिलं आहे, की $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$, $\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$ आणि $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$. म्हणजे सममूल्य अपूर्णांकांपैकी एकाचे अंश व छेद, दुसऱ्याच्या अंश व छेदाच्या समान पट आहेत.
यावरून लक्षात घ्या.

> अपूर्णांकातील अंशाला व छेदाला, एकाच शून्येतर संख्येने गुणले तर त्या अपूर्णांकाशी सममूल्य असलेला अपूर्णांक मिळतो.

नंदू : अपूर्णांकाच्या अंशाला व छेदाला समान संख्येनं भागून सममूल्य अपूर्णांक मिळवता येईल का ?

शिक्षिका : जरूर. अंश व छेद या दोघांना एकाच संख्येनं भाग जात असेल, तर त्या संख्येनं अंश व छेद या दोघांना भागून मिळालेला अपूर्णांक दिलेल्या अपूर्णांकाशी सममूल्य असतो. $\frac{6}{15}$ या अपूर्णांकाच्या अंशाला व छेदाला 3 नं भाग जातो. तसा भाग दिला, तर $\frac{2}{5}$ हा अपूर्णांक मिळतो,
म्हणजे $\frac{6}{15} = \frac{2}{5}$.

> अपूर्णांकातील अंश व छेद या दोघांनाही एकाच संख्येने भाग जात असेल, तर भाग दिल्यावर मिळणारा अपूर्णांक दिलेल्या अपूर्णांकाशी सममूल्य असतो.

शिक्षिका : आता $\frac{6}{12}$ या अपूर्णांकाच्या अंशाला व छेदाला एकाच संख्येनं भागून सममूल्य अपूर्णांक मिळवा.

सोनूने मिळवलेला अपूर्णांक $\frac{6}{12} = \frac{6 \div 2}{12 \div 2} = \frac{3}{6}$	मिनूने मिळवलेला अपूर्णांक $\frac{6}{12} = \frac{6 \div 3}{12 \div 3} = \frac{2}{4}$

नंदू : 6 व 12 या संख्यांना 6 नं सुद्धा भाग जातो. 6 नं भागलं तर चालेल का ?

शिक्षिका : हो. $\frac{6}{12} = \frac{6 \div 6}{12 \div 6} = \frac{1}{2}$.

लक्षात घ्या, की $\frac{6}{12}$ या अपूर्णांकाच्या अंशाला व छेदाला 2 नं भागून, 3 नं भागून, 6 नं भागून मिळालेले अपूर्णांक $\frac{6}{12}$ या अपूर्णांकाशी सममूल्य आहेत, म्हणजेच $\frac{6}{12} = \frac{3}{6} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

उदा. (1) $\frac{5}{6}$ या अपूर्णांकाचा छेद 30 होईल असा सममूल्य अपूर्णांक लिहा.

$\frac{5}{6} = \frac{\square}{30}$. येथे चौकटीतील संख्या शोधू.

येथे छेदस्थानच्या 6 ची 5 पट 30, म्हणून अंशस्थानच्या 5 ची 5 पट करू.

$\frac{5}{6} = \frac{5 \times 5}{6 \times 5} = \frac{\boxed{25}}{30}$. यावरून छेद 30 असलेला, $\frac{25}{30}$ हा अपूर्णांक $\frac{5}{6}$ शी सममूल्य आहे.

उदा. (2) $\frac{15}{40}$ या अपूर्णांकाशी सममूल्य असणारा व छेद 8 असलेला अपूर्णांक मिळवा.

$\frac{15}{40} = \frac{\square}{8}$ येथे चौकटीतील संख्या काढू.

40 ला 5 ने भागले की 8 मिळतात. 15 ला 5 ने भागले की चौकटीतील संख्या मिळेल. 15 ÷ 5 = 3

म्हणून $\frac{15}{40} = \frac{\boxed{3}}{8}$

म्हणजे $\frac{3}{8}$ हा अपूर्णांक $\frac{15}{40}$ या अपूर्णांकाशी सममूल्य आहे.

उदाहरणसंग्रह 17

1. चौकटींत योग्य संख्या लिहा.

(1) $\frac{1}{2} = \frac{\square}{20}$ (2) $\frac{3}{4} = \frac{15}{\square}$ (3) $\frac{9}{11} = \frac{18}{\square}$ (4) $\frac{10}{40} = \frac{\square}{8}$

(5) $\frac{14}{26} = \frac{\square}{13}$ (6) $\frac{\square}{3} = \frac{4}{6}$ (7) $\frac{1}{\square} = \frac{4}{20}$ (8) $\frac{\square}{5} = \frac{10}{25}$

2. पुढीलपैकी प्रत्येक अपूर्णांकाशी सममूल्य असलेला आणि छेद 18 असणारा अपूर्णांक मिळवा.

$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{4}{6}, \frac{2}{9}, \frac{7}{9}, \frac{5}{3}$

3. पुढीलपैकी प्रत्येक अपूर्णांकाशी सममूल्य असलेला आणि छेद 5 असणारा अपूर्णांक मिळवा.

$\frac{6}{15}, \frac{10}{25}, \frac{12}{30}, \frac{6}{10}, \frac{21}{35}$

4. खाली दिलेल्या अपूर्णांकांमधून सममूल्य अपूर्णांकांच्या जोड्या शोधा.

$\frac{2}{3}, \frac{5}{7}, \frac{5}{11}, \frac{7}{9}, \frac{14}{18}, \frac{15}{33}, \frac{18}{27}, \frac{10}{14}$

5. खालील अपूर्णांकांशी सममूल्य असे प्रत्येकी दोन सममूल्य अपूर्णांक तयार करा.

$\frac{7}{9}, \frac{4}{5}, \frac{3}{11}$

❐ समच्छेद व भिन्नछेद अपूर्णांक

ज्या अपूर्णांकांचे छेद समान असतात त्या अपूर्णांकांना ‘समच्छेद अपूर्णांक’ म्हणतात. जसे, $\frac{1}{7}, \frac{4}{7}, \frac{6}{7}$.

ज्या अपूर्णांकांचे छेद भिन्न असतात, त्या अपूर्णांकांना ‘भिन्नछेद अपूर्णांक’ म्हणतात. जसे, $\frac{1}{3}, \frac{4}{8}, \frac{9}{11}$

❐ भिन्नछेद अपूर्णांकांचे समच्छेद अपूर्णांकांत रूपांतर करणे

उदा. (1) $\frac{5}{6}, \frac{7}{9}$ या अपूर्णांकांचे छेद समान करा, म्हणजे त्यांचे समच्छेद अपूर्णांकांत रूपांतर करा.

येथे 6 व 9 या दोन्ही संख्यांच्या पटीतील संख्या शोधायला हवी.

6 च्या पटीतील संख्या : 6, 12, 18, 24, 30, 36, ...

9 च्या पटीतील संख्या : 9, 18, 27, 36, 45, ...

येथे 18 ही संख्या दोन्ही संख्यांच्या पटीतील संख्या आहे, म्हणून अपूर्णांकांचा छेद 18 करू.

$\frac{5}{6} = \frac{5\times3}{6\times3} = \frac{15}{18}$ $\quad\quad$ $\frac{7}{9} = \frac{7\times2}{9\times2} = \frac{14}{18}$

$\frac{15}{18}$ व $\frac{14}{18}$ हे अनुक्रमे $\frac{5}{6}$ व $\frac{7}{9}$ या अपूर्णांकाचे समान छेद असलेले (समच्छेद) अपूर्णांक तयार झाले.

येथे 18 ही संख्या दोन्ही संख्यांच्या पटीतील संख्या आहे; पण 18 प्रमाणे 36, 54 या संख्यादेखील समान छेद म्हणून घेता येतील.

उदा. (2) $\frac{4}{8}$ व $\frac{5}{16}$ यांचे समच्छेद अपूर्णांकांत रूपांतर करा.

येथे 8 ची दुप्पट 16 आहे, दोघांचे छेद 16 करणे सोपे आहे.

$\frac{4}{8} = \frac{4\times2}{8\times2} = \frac{8}{16}$. $\frac{8}{16}$ व $\frac{5}{16}$ हे समच्छेद अपूर्णांक तयार झाले.

उदा. (3) $\frac{4}{7}$ व $\frac{3}{4}$ यांचे छेद समान करा.

7 व 4 या दोन्ही छेदांच्या पटीत येणारी संख्या 28 आहे, म्हणून दोन्ही अपूर्णांकांचा छेद 28 करू.

$\frac{4}{7} = \frac{4\times4}{7\times4} = \frac{16}{28}$, $\frac{3}{4} = \frac{3\times7}{4\times7} = \frac{21}{28}$, म्हणून $\frac{16}{28}$ व $\frac{21}{28}$ हे दिलेल्या अपूर्णांकांचे समच्छेद अपूर्णांक तयार झाले.

उदाहरणसंग्रह 18

दिलेल्या अपूर्णांकांचे समच्छेद अपूर्णांकांत रूपांतर करा.

(1) $\frac{3}{4}, \frac{5}{8}$ $\quad$ (2) $\frac{3}{5}, \frac{3}{7}$ $\quad$ (3) $\frac{4}{5}, \frac{3}{10}$ $\quad$ (4) $\frac{2}{9}, \frac{1}{6}$

(5) $\frac{1}{4}, \frac{2}{3}$ $\quad$ (6) $\frac{5}{6}, \frac{4}{5}$ $\quad$ (7) $\frac{3}{8}, \frac{1}{6}$ $\quad$ (8) $\frac{1}{6}, \frac{4}{9}$

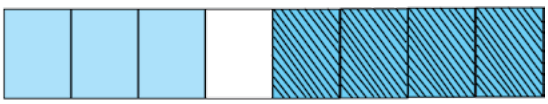
❒ समच्छेद अपूर्णांक : लहान-मोठेपणा (तुलना)

उदा. (1) एका पट्टीचे 5 समान भाग केले, म्हणजे प्रत्येक भाग $\frac{1}{5}$ आहे.

रंगवलेला भाग $\frac{3}{5} = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5}$

न रंगवलेला भाग $\frac{2}{5} = \frac{1}{5} + \frac{1}{5}$. रंगवलेला भाग हा न रंगवलेल्या भागापेक्षा मोठा आहे. यावरून $\frac{3}{5}$ हा अपूर्णांक $\frac{2}{5}$ या अपूर्णांकापेक्षा मोठा आहे. हे $\frac{3}{5} > \frac{2}{5}$ असे लिहितात.

उदा. (2) या आकृतीत एका पट्टीचे 8 समान भाग केले. त्यांपैकी 3 भाग एका रंगाने व 4 भाग दुसऱ्या रंगाने रंगवलेले आहेत. येथे $\frac{3}{8} < \frac{4}{8}$



समच्छेद अपूर्णांकांमध्ये, ज्याचा अंश मोठा तो अपूर्णांक मोठा असतो.

❒ अंश समान असलेल्या अपूर्णांकांचा लहान-मोठेपणा

अंश 1 असलेल्या अपूर्णांकांचा छेद जसजसा मोठा होत जातो, तसतशी त्या अपूर्णांकांची किंमत कमी होत जाते हे आपल्याला माहीत आहे.

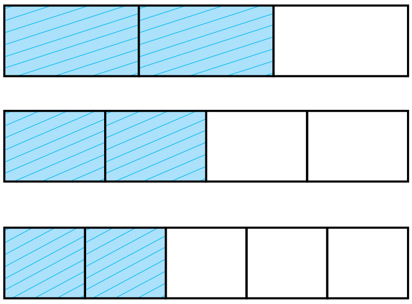
अपूर्णांकांचा अंश 1 पेक्षा वेगळा परंतु समान असेल, तर अशा अपूर्णांकांसाठीही हाच नियम असतो, हे पुढील आकृत्यांवरून समजून घ्या.

आकृत्यांमधील सर्व पट्ट्या एकसारख्या आहेत.

पट्टीच्या 3 समान भागांपैकी 2 भाग — $\frac{2}{3}$

पट्टीच्या 4 समान भागांपैकी 2 भाग — $\frac{2}{4}$

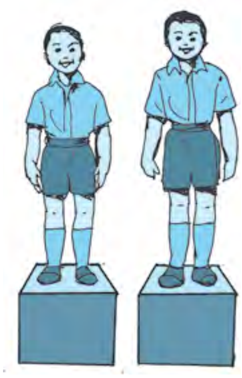
पट्टीच्या 5 समान भागांपैकी 2 भाग — $\frac{2}{5}$



आकृतीवरून $\frac{2}{3} > \frac{2}{4} > \frac{2}{5}$.

> समान अंश असलेल्या अपूर्णांकांमध्ये ज्या अपूर्णांकाचा **छेद मोठा** असतो तो **अपूर्णांक लहान** असतो.

❒ भिन्न छेद असलेल्या अपूर्णांकांचा लहान-मोठेपणा



शिक्षिका : समजा, $\frac{3}{5}$ व $\frac{4}{7}$ या छेद भिन्न असलेल्या अपूर्णांकांतील लहान-मोठेपणा ठरवायचा आहे.
अशा अपूर्णांकांतील लहान-मोठेपणा कसा ठरवायचा हे समजण्यासाठी आपण एक उदाहरण पाहू.
ही दोन मुले दोन ठोकळ्यांवर उभी आहेत. त्यांच्यापैकी कोण उंच हे कसं ठरवायचं ?

सोनू : येथे ठोकळ्यांची उंची कमी-जास्त आहे. ती जर समान असेल, तर कोणाची उंची कमी व कोणाची उंची जास्त हे ठरवणं सोपं जाईल.

नंदू : आता मुलं समान उंचीच्या ठोकळ्यांवर उभी राहिल्यावर उजवीकडचा मुलगा उंच आहे हे सांगता येतं.

शिक्षिका : इथे जसं, ठोकळ्यांची उंची समान केल्यावर मुलांच्या उंचीतील कमी-जास्तपणा ठरवता येईल, तसंच दिलेल्या दोन्ही अपूर्णांकांचे छेद समान केल्यावर त्यांचा लहान-मोठेपणा त्यांच्या अंशांच्या लहान-मोठेपणावरून ठरवता येईल.

नंदू : समजलं ! आधी आम्ही $\frac{3}{5}$ व $\frac{4}{7}$ या दोन्ही अपूर्णांकांचे छेद समान करून घेऊ.

सोनू : 5 × 7 ला 5 आणि 7 या दोन्ही छेदांनी भाग जाईल, म्हणून दोन्ही अपूर्णांकांचा छेद 5 × 7 म्हणजे 35 करू.

$\frac{3}{5} = \frac{3\times7}{5\times7} = \frac{21}{35}$ $\qquad$ $\frac{4}{7} = \frac{4\times5}{7\times5} = \frac{20}{35}$

$\frac{21}{35} > \frac{20}{35}$ म्हणून $\frac{3}{5} > \frac{4}{7}$

अपूर्णांकांचे छेद भिन्न असतील तर त्यांचे समान छेद असणारे सममूल्य अपूर्णांक तयार करून अपूर्णांकांचा लहान–मोठेपणा अंशांवरून ठरवता येतो.

उदाहरणसंग्रह 19

खालील अपूर्णांकांच्या जोड्यांमधील चौकटींत <, > किंवा = यांपैकी योग्य चिन्ह लिहा.

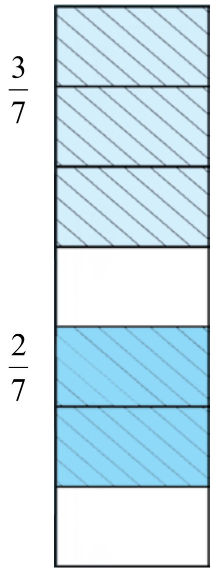
(1) $\frac{3}{7}$ ☐ $\frac{3}{7}$ (2) $\frac{3}{8}$ ☐ $\frac{2}{8}$ (3) $\frac{2}{11}$ ☐ $\frac{10}{11}$ (4) $\frac{5}{15}$ ☐ $\frac{10}{30}$

(5) $\frac{5}{8}$ ☐ $\frac{5}{9}$ (6) $\frac{4}{7}$ ☐ $\frac{4}{11}$ (7) $\frac{10}{11}$ ☐ $\frac{10}{13}$ (8) $\frac{1}{5}$ ☐ $\frac{1}{9}$

(9) $\frac{5}{6}$ ☐ $\frac{1}{8}$ (10) $\frac{5}{12}$ ☐ $\frac{1}{6}$ (11) $\frac{7}{8}$ ☐ $\frac{14}{16}$ (12) $\frac{4}{9}$ ☐ $\frac{4}{9}$

(13) $\frac{5}{18}$ ☐ $\frac{1}{9}$ (14) $\frac{2}{3}$ ☐ $\frac{4}{7}$ (15) $\frac{3}{7}$ ☐ $\frac{5}{9}$ (16) $\frac{4}{11}$ ☐ $\frac{1}{5}$

❐ समच्छेद अपूर्णांकांची बेरीज



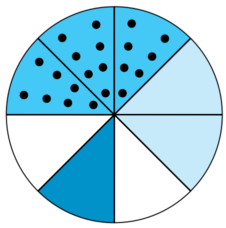
उदा. (1) $\frac{3}{7} + \frac{2}{7}$ = किती ?

एका पट्टीचे 7 समान भाग करू. त्यांपैकी 3 भाग एका रंगाने व 2 भाग दुसऱ्या रंगाने रंगवू.

एका रंगाने रंगवलेला भाग $\frac{3}{7}$ व दुसऱ्या रंगाने रंगवलेला भाग $\frac{2}{7}$ आहे.

एकूण रंगवलेला भाग दर्शवणारा अपूर्णांक $\frac{5}{7}$ आहे.

यावरून, $\frac{3}{7} + \frac{2}{7} = \frac{3+2}{7} = \frac{5}{7}$.



उदा. (2) $\frac{3}{8} + \frac{2}{8} + \frac{1}{8}$ यांची बेरीज करा.

रंगवलेला एकूण भाग, $\frac{3}{8} + \frac{2}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3+2+1}{8} = \frac{6}{8}$.

समच्छेद अपूर्णांकांची बेरीज करताना अपूर्णांकांच्या अंशांची बेरीज करतात व त्या अपूर्णांकांचा छेद बेरजेच्या छेदस्थानी तसाच लिहितात.

उदा. (3) बेरीज करा. $\frac{2}{6} + \frac{4}{6}$

$\frac{2}{6} + \frac{4}{6} = \frac{2+4}{6} = \frac{6}{6}$ परंतु $\frac{6}{6}$ म्हणजे आकृतीच्या 6 समान भागांपैकी 6 भाग घेतले हे आपल्याला माहीत आहे. याचा अर्थ ती 1 पूर्ण आकृती घेतली, म्हणून $\frac{6}{6} = 1$

यावरून लक्षात घ्या, **अपूर्णांकाचे अंश व छेद समान असतील, तर त्या अपूर्णांकाची किंमत 1 असते.**

म्हणून $\frac{7}{7} = 1$; $\frac{10}{10} = 1$; $\frac{2}{5} + \frac{3}{5} = \frac{2+3}{5} = \frac{5}{5} = 1$

लक्षात घ्या, एका आकृतीचे भाग न करता ती पूर्ण ठेवली, तरी ती 1 अशी दाखवता येते.

यावरून $1 = \frac{1}{1} = \frac{2}{2} = \frac{3}{3}$ इत्यादी.

आपल्याला माहीत आहे, की अपूर्णांकातील अंश व छेद यांचा भाजक समान असेल, तर त्या भाजकाने अंश व छेद या दोघांना भागल्यावर मिळणारा अपूर्णांक दिलेल्या अपूर्णांकाशी सममूल्य असतो.

यावरून $\frac{5}{5} = \frac{5 \div 5}{5 \div 5} = \frac{1}{1} = 1$

उदाहरणसंग्रह 20

1. बेरीज करा.

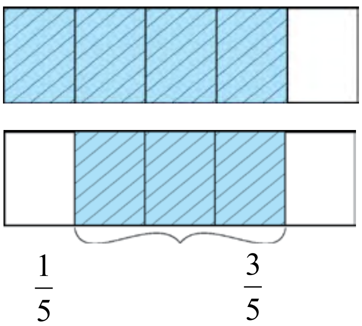
(1) $\frac{1}{5} + \frac{3}{5}$ (2) $\frac{2}{7} + \frac{4}{7}$ (3) $\frac{7}{12} + \frac{2}{12}$ (4) $\frac{2}{9} + \frac{7}{9}$ (5) $\frac{3}{15} + \frac{4}{15}$

(6) $\frac{2}{7} + \frac{1}{7} + \frac{3}{7}$ (7) $\frac{2}{10} + \frac{4}{10} + \frac{3}{10}$ (8) $\frac{4}{9} + \frac{1}{9}$ (9) $\frac{5}{8} + \frac{3}{8}$

2. आईने एक पेरू आणला. त्यातील $\frac{3}{8}$ भाग मीनाला व $\frac{2}{8}$ भाग गीताला दिला, तर दोघींना मिळून किती भाग दिला ?

3. एका मैदानाचा $\frac{3}{4}$ भाग पाचवीच्या मुलांनी व $\frac{1}{4}$ भाग चौथीच्या मुलांनी स्वच्छ केला, तर त्या मैदानाचा एकूण किती भाग स्वच्छ झाला ?

❐ समच्छेद अपूर्णांकांची वजाबाकी



एका आकृतीचे 5 समान भाग करून त्यांपैकी 4 भाग रंगवले, म्हणजे आकृतीचा $\frac{4}{5}$ भाग रंगवला आहे.

रंगवलेल्या भागांपैकी एका भागाचा रंग पुसून टाकला.

म्हणजे $\frac{4}{5}$ मधून $\frac{1}{5}$ वजा केले.

आता रंगवलेला भाग $\frac{3}{5}$ उरला, म्हणून $\frac{4}{5} - \frac{1}{5} = \frac{4-1}{5} = \frac{3}{5}$

दोन समच्छेद अपूर्णांकांची वजाबाकी करताना त्या अपूर्णांकांच्या अंशांची वजाबाकी अंशस्थानी लिहून छेदस्थानी दिलेल्या अपूर्णांकांचा छेद तसाच लिहितात.

उदा. (1) वजाबाकी करा. $\frac{7}{13} - \frac{5}{13}$

या दोन्ही अपूर्णांकांचा छेद समान आहे, म्हणून या अपूर्णांकांची वजाबाकी करताना, अंशांची वजाबाकी करू व छेद तसाच लिहू. $\frac{7}{13} - \frac{5}{13} = \frac{7-5}{13} = \frac{2}{13}$.

उदा. (2) एका उसाचा $\frac{5}{12}$ भाग राजूला व $\frac{3}{12}$ भाग संजूला दिल्यास राजूला किती जास्त भाग मिळाला?

किती जास्त भाग मिळाला हे काढण्यासाठी वजाबाकी करावी लागेल.

$$\frac{5}{12} - \frac{3}{12} = \frac{5-3}{12} = \frac{2}{12}$$

राजूला $\frac{2}{12}$ भाग जास्त मिळाला.

उदाहरणसंग्रह 21

1. वजाबाकी करा.

(1) $\frac{5}{7} - \frac{1}{7}$ (2) $\frac{5}{8} - \frac{3}{8}$ (3) $\frac{7}{9} - \frac{2}{9}$ (4) $\frac{8}{11} - \frac{5}{11}$

(5) $\frac{9}{13} - \frac{4}{13}$ (6) $\frac{7}{10} - \frac{3}{10}$ (7) $\frac{9}{12} - \frac{2}{12}$ (8) $\frac{10}{15} - \frac{3}{15}$

2. एका भिंतीचा $\frac{7}{10}$ भाग रंगवायचा आहे. त्यापैकी $\frac{4}{10}$ भाग रामूने रंगवला, तर अजून किती भाग रंगवायचा राहिला ?

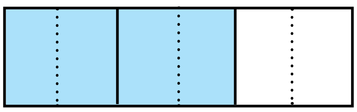
❑ भिन्नछेद अपूर्णांकांची बेरीज व वजाबाकी

उदा. (1) बेरीज करा. $\frac{2}{3} + \frac{1}{6}$

प्रथम एका पट्टीच्या तीन समान भागांपैकी दोन भाग रंगवून $\frac{2}{3}$ हा अपूर्णांक दर्शवू.

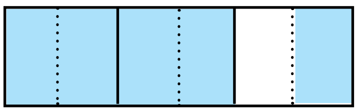
छेद समान असलेल्या अपूर्णांकांची बेरीज-वजाबाकी कशी करायची, हे आपल्याला माहीत आहे.

$\frac{2}{3}$ या अपूर्णांकात $\frac{1}{6}$ हा अपूर्णांक मिळवायचा आहे.



म्हणून याच पट्टीच्या प्रत्येक भागाचे दोन समान भाग करून $\frac{2}{3}$ चा $\frac{4}{6}$ हा सममूल्य अपूर्णांक मिळवू.

$\frac{2}{3}$ मध्ये म्हणजेच $\frac{4}{6}$ मध्ये $\frac{1}{6}$ हा अपूर्णांक मिळवायचा आहे, म्हणून या पट्टीच्या सहा भागांपैकी आणखी एक भाग रंगवू. आता पट्टीचा एकूण रंगवलेला भाग $\frac{5}{6}$ आहे.



यावरून $\frac{4}{6} + \frac{1}{6} = \frac{4+1}{6} = \frac{5}{6}$

म्हणजेच $\frac{2}{3} + \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

उदा. (2) बेरीज करा. $\frac{1}{2} + \frac{2}{5}$

येथे छेदांची सर्वांत लहान समान पट 10 आहे,

म्हणून अपूर्णांकांचे छेद 10 करू.

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{5} = \frac{1\times5}{2\times5} + \frac{2\times2}{5\times2}$$
$$= \frac{5}{10} + \frac{4}{10}$$
$$= \frac{5+4}{10} = \frac{9}{10}$$

उदा. (3) बेरीज करा. $\frac{3}{8} + \frac{1}{16}$

येथे 16 ही 8 ची दुप्पट आहे,

म्हणून दोन्ही अपूर्णांकांचा छेद 16 करू.

$$\frac{3}{8} + \frac{1}{16} = \frac{3\times2}{8\times2} + \frac{1}{16}$$
$$= \frac{6}{16} + \frac{1}{16}$$
$$= \frac{6+1}{16} = \frac{7}{16}$$

उदा. (4) वजाबाकी करा.

$\frac{3}{4} - \frac{5}{8}$

दोन्ही अपूर्णांकांचा 8 हा समान छेद करू.

$$\frac{3}{4} - \frac{5}{8} = \frac{3\times2}{4\times2} - \frac{5}{8}$$
$$= \frac{6}{8} - \frac{5}{8}$$
$$= \frac{6-5}{8}$$
$$= \frac{1}{8}$$

उदा. (5) वजाबाकी करा.

$\frac{4}{5} - \frac{2}{3}$

छेदांची सर्वांत लहान समान पट 15 आहे,

म्हणून अपूर्णांकांचे छेद 15 करू.

$$\frac{4}{5} - \frac{2}{3} = \frac{4\times3}{5\times3} - \frac{2\times5}{3\times5}$$
$$= \frac{12}{15} - \frac{10}{15}$$
$$= \frac{12-10}{15}$$
$$= \frac{2}{15}$$

उदाहरणसंग्रह 22

1. बेरीज करा.

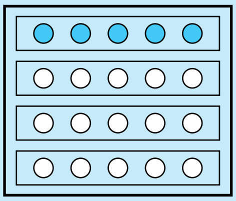
(1) $\frac{1}{8} + \frac{3}{4}$ (2) $\frac{2}{21} + \frac{3}{7}$ (3) $\frac{2}{5} + \frac{1}{3}$ (4) $\frac{2}{7} + \frac{1}{2}$ (5) $\frac{3}{9} + \frac{3}{5}$

2. वजाबाकी करा.

(1) $\frac{3}{10} - \frac{1}{20}$ (2) $\frac{3}{4} - \frac{1}{2}$ (3) $\frac{6}{14} - \frac{2}{7}$ (4) $\frac{4}{6} - \frac{3}{5}$ (5) $\frac{2}{7} - \frac{1}{4}$

❑ समूहाच्या संदर्भात अपूर्णांक व अपूर्णांकांची पट : चित्ररूप माहितीतून अनुभव

✦ 20 ठिपक्यांच्या समूहाचा $\frac{1}{4}$



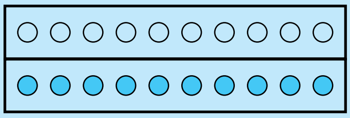
20 चा $\frac{1}{4} = 5$

$20 \div 4 = 5$

✦ 20 ठिपक्यांच्या समूहाचा $\frac{1}{2}$

20 चा $\frac{1}{2}$ म्हणजे 10

$20 \div 2 = 10$

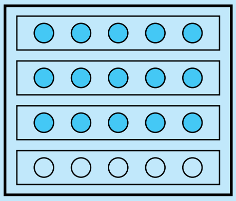


✦ 20 ठिपक्यांच्या समूहाचा $\frac{3}{4}$

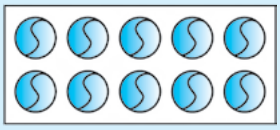
$\frac{3}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$

20 चा $\frac{3}{4}$ म्हणजे 20 चा $\frac{1}{4}$ असे 3 भाग म्हणजे 15 ठिपके

$20 \div 4 = 5,\ 5 \times 3 = 15$



✦ 5 ची दुप्पट 10



5 चेंडूंच्या 2 ओळी

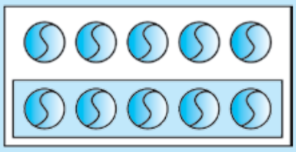
$5 \times 2 = 10$

5 ची दुप्पट 10

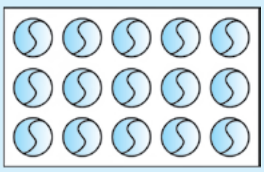
✦ 10 ची $\frac{1}{2}$ पट

10 च्या $\frac{1}{2} = 5$

10 ची $\frac{1}{2}$ पट $= 5$



✦ 5 ची 3 पट



एकूण चेंडू 15

5 ची 3 पट 15

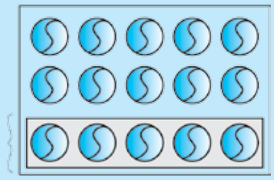
म्हणजे $5 \times 3 = 15$

✦ 15 ची $\frac{1}{3}$ पट

15 ची $\frac{1}{3}$ पट

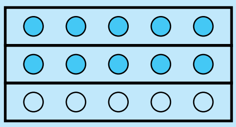
म्हणून $15 \times \frac{1}{3} = 5$

$15 \div 3 = 5$



✦ 15 ची $\frac{2}{3}$ पट

15 ची $\frac{2}{3}$ पट करणे म्हणजे 15 ची $\frac{1}{3}$ पट करून त्याची दुप्पट करणे.



✦ मीनाजवळ 5 रुपये आहेत. तिच्याजवळ असलेल्या रुपयांच्या दुप्पट रुपये टीनाजवळ आहेत, म्हणजे टीनाजवळ $5 \times 2 = 10$ रुपये आहेत. मीनाजवळ टीनाच्या निमपट म्हणजे 10 च्या $\frac{1}{2}$ रुपये आहेत, म्हणजेच 5 रुपये आहेत.

✦ रामूला 20 किलोमीटर अंतर जायचे होते. त्यांपैकी $\frac{4}{5}$ अंतर त्याने मोटारीने पार केले, म्हणजे त्याने किती किलोमीटर अंतर पार केले ?

20 किलोमीटरची $\frac{4}{5}$ पट म्हणजे $20 \times \frac{4}{5}$ म्हणजे 20 ची $\frac{1}{5}$ पट करून त्याची 4 पट करणे.

20 चे $\frac{1}{5} = 4$, त्याची 4 पट म्हणजे $4 \times 4 = 16$.

यावरून $20 \times \frac{4}{5} = 16$.

रामूने 16 किमी अंतर मोटारीने पार केले.

उदाहरणसंग्रह 23

1. खालील प्रत्येक समूहाचा $\frac{1}{3}$ म्हणजे किती ?

(1) 15 पेन्सिली (2) 21 फुगे (3) 9 मुले (4) 18 पुस्तके

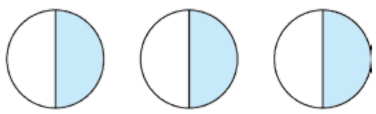
2. खालील प्रत्येकाचा $\frac{1}{5}$ म्हणजे किती ?

(1) 20 रुपये (2) 30 किमी (3) 15 लीटर (3) 25 सेमी

3. खालील संख्यांचा दिलेल्या अपूर्णांकाएवढा भाग काढा.

(1) 30 चा $\frac{2}{3}$ (2) 22 चा $\frac{7}{11}$ (3) 64 चा $\frac{3}{8}$ (4) 65 चा $\frac{5}{13}$

❒ पूर्णांकयुक्त अपूर्णांक



$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$

तीन वर्तुळांपैकी प्रत्येक वर्तुळाचा अर्धा भाग रंगवला आहे, म्हणजे प्रत्येक वर्तुळाचा $\frac{1}{2}$ भाग असे 3 भाग रंगवलेले आहेत.

रंगवलेला भाग $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ म्हणजे $1 + \frac{1}{2}$ किंवा $\frac{3}{2}$.

$1 + \frac{1}{2}$ हे थोडक्यात $1\frac{1}{2}$ असे लिहितात. $1\frac{1}{2}$ याचे वाचन 'एक पूर्णांक एक छेद दोन' असे करतात.

$1\frac{1}{2}$ या अपूर्णांकात 1 हा पूर्णांक भाग आणि $\frac{1}{2}$ हा अपूर्णांक भाग आहे, म्हणून अशा अपूर्णांकाला **पूर्णांकयुक्त अपूर्णांक** म्हणतात. $2\frac{1}{4}$, $3\frac{2}{5}$, $7\frac{4}{9}$ हे पूर्णांकयुक्त अपूर्णांक आहेत.

ज्या अपूर्णांकाचा अंश त्याच्या छेदापेक्षा मोठा असेल, त्याला **अंशाधिक अपूर्णांक** असे म्हणतात.

$\frac{3}{2}$, $\frac{5}{3}$ हे अंशाधिक अपूर्णांक आहेत. अंशाधिक अपूर्णांकाचे रूपांतर पूर्णांकयुक्त अपूर्णांकात करता येते.

जसे, $\frac{3}{2} = \frac{2+1}{2} = \frac{2}{2} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2} = 1\frac{1}{2}$

उपक्रम

1. टोप्या रंगवा.

शेजारील चित्रातील

$\frac{1}{3}$ टोप्या लाल रंगाने रंगवा.

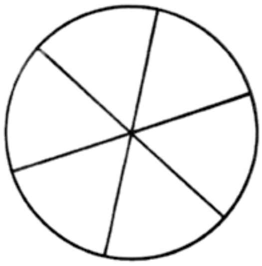
$\frac{3}{5}$ टोप्या निळ्या रंगाने रंगवा.

तुम्ही लाल रंगाने रंगवलेल्या टोप्या किती ?

तुम्ही निळ्या रंगाने रंगवलेल्या टोप्या किती ?

किती टोप्या रंगवायच्या राहिल्या ?

2. जादूची भिंगरी तयार करा.



पांढऱ्या रंगाची कार्डबोर्डची एक वर्तुळाकार चकती घ्या. त्या चकतीवर आकृतीत दाखवल्याप्रमाणे 6 समान भाग करा.

ते भाग अनुक्रमे लाल, केशरी, पिवळा, हिरवा, निळा, जांभळा या रंगांनी रंगवा. वर्तुळाकार चकतीच्या केंद्रापाशी छिद्र पाडून त्यात एक टोकदार काडी बसवा. तुमची भिंगरी तयार झाली.

रंगवलेला प्रत्येक भाग चकतीचा किती भाग आहे ?

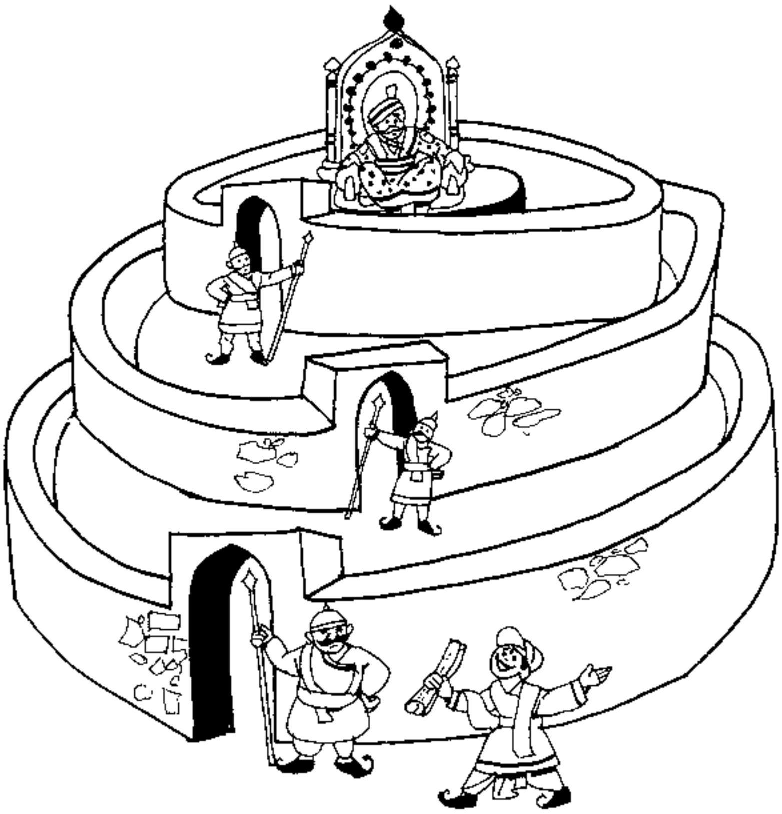
भिंगरी जोरात फिरवा. तुम्हांला कोणता रंग दिसतो ?

जरा हसूया.

नंदू : आजोबा म्हणतात, की मी व ताई दीड शहाणे आहोत, म्हणजे आम्ही दोघं मिळून तीन झालो ना ? मग आम्हांला दोघांना मिळून तीन चॉकलेटं हवीत.

आई : दोघांचं मिळून शहाणपण तीन माणसांइतकं असलं तरी तुम्ही व्यक्ती मात्र दोनच आहात बरं !

चतुर कवी



एक साहित्यप्रेमी राजा होता. उत्तम कविता पाहिली, की तो खूश होऊन बक्षीस देतो, हे एका कवीला माहीत होते. एकदा त्या कवीला छान कविता सुचली. ती राजाला दाखवून बक्षीस मिळते का पाहावे, म्हणून तो राजवाड्यापाशी गेला; पण राजापर्यंत पोहोचणे सोपे नव्हते. वाटेत वेगवेगळे चौकीदार अडवत असत. पहिल्या चौकीदाराने कशासाठी जात आहे ते विचारले. कवीने जाण्याचे कारण सांगितले. राजाकडून बक्षीस मिळण्याची शक्यता पाहिल्यावर चौकीदार म्हणाला, ''मला बक्षिसाचा $\frac{1}{10}$ भाग देण्याचे कबूल कर, तर तुला आत सोडेन.'' कवीला कबूल करावेच लागले. दुसऱ्या चौकीदाराने अडवले. तो म्हणाला, ''मला बक्षिसाचा $\frac{2}{5}$ भाग देणार असलास तर आत सोडतो.'' तिसरा चौकीदारसुद्धा लोभी होता. तो म्हणाला, ''बक्षिसाचा $\frac{1}{4}$ भाग मला देणार असशील, तर आत सोडेन.'' आता राजाचा महाल समोरच होता. कवीने चौकीदाराला म्हटले, ''पाव ऐवजी अर्धा भाग तुला देतो.'' चौकीदार खूश होऊन 'हो' म्हणाला.

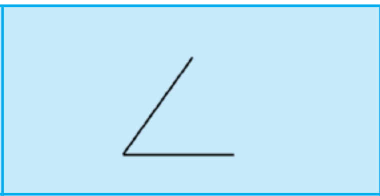
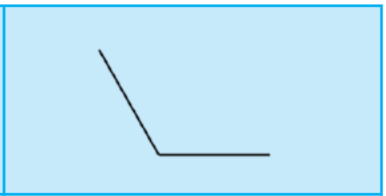
राजाला कविता आवडली. त्याने विचारले, ''बक्षीस काय हवे ?'' कवी म्हणाला, ''कृपा करा आणि मला बक्षीस म्हणून 100 फटके द्या.'' राजाला फार आश्चर्य वाटले. तो म्हणाला, ''तू वेडा आहेस का ? फटके मागून घेणारा कोणी पाहिला नव्हता.'' कवी म्हणाला. '' याचं कारण हवं असेल, तर तुमच्या तीनही चौकीदारांना बोलवा.'' चौकीदार आल्यावर कवी राजाला म्हणाला, ''तुम्ही मला बक्षिसाचे 100 फटके देऊ केलेत ना ? त्यात हे लोक वाटेकरी आहेत. प्रत्येकाने आधीच आपापला बक्षिसाचा वाटा ठरवून घेतला आहे. पहिल्या चौकीदाराला बक्षीसाच्या $\frac{1}{10}$ म्हणजे □ फटके, दुसऱ्याला $\frac{2}{5}$ म्हणजे □ तर तिसऱ्याला अर्धे बक्षीस म्हणजे □ फटके असे वाटे ठरले आहेत.''

चौकीदारांचा लोभीपणा व कवीचे चातुर्य राजाच्या लक्षात आले. राजाने चौकीदारांना योग्य तेवढे फटके दिले. चांगल्या कवितेबद्दल कवीला बक्षीस दिले, शिवाय कवीने चौकीदारांचा लोभीपणा दाखवून दिला, म्हणून त्याला आणखी 100 मोहरा बक्षीस दिल्या.

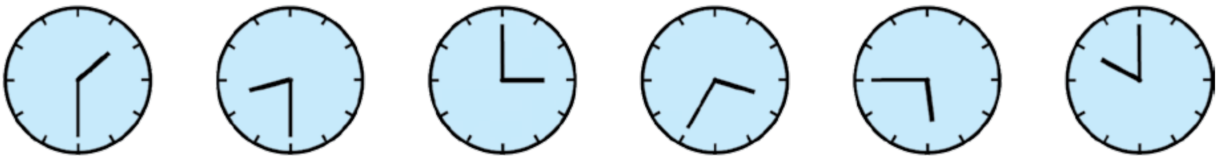
विचार करून सांगा, कवीचे कोणते चातुर्य राजाच्या लक्षात आले ?

6. कोन

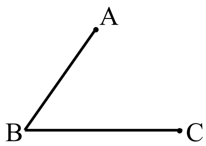
❒ उजळणी

		
हा काटकोन आहे.	हा लघुकोन आहे.	हा विशालकोन आहे.

घड्याळांची खालील चित्रे पाहा. त्यांच्या काट्यांमधील कोन काटकोन आहे, लघुकोन आहे की विशालकोन आहे ते ओळखा व लिहा.



❒ कोनाचे घटक व कोनाचे नाव



शिक्षक : मोनू, शेजारील आकृती कशाची आहे ?

मोनू : शेजारील आकृती कोनाची आहे. सर कोनाला नाव असतं का ?

शिक्षक : होय, कोनाला नाव असतं. मला सांग आकृतीमध्ये तुला रेघा दिसतात का ? त्यांची नावे सांग बरं !

मोनू : होय. या आकृतीमधे BA व BC या दोन रेघा आहेत.

शिक्षक : त्या दोन रेघांमध्ये कोणता बिंदू सामाईक आहे ?

मोनू : B हा बिंदू दोन्ही रेघांना सामाईक दिसतो.

शिक्षक : या दोन रेघांनी मिळून कोन तयार झाला आहे. B या सामाईक बिंदूला या कोनाचा 'शिरोबिंदू' म्हणतात. BA व BC यांना त्या कोनाच्या 'बाजू' किंवा 'भुजा' असं म्हणतात.

मोनू : सर, मग कोनाचं नाव कसं सांगायचं ?

शिक्षक : हे बघ मोनू, कोनाचं नाव तीन अक्षरांनी सांगितलं जातं. या तीन अक्षरांतील मधलं अक्षर हे कोनाचा शिरोबिंदू दाखवतं.

मोनू : म्हणजेच सर, कोनाचं नाव ABC, असंच ना ?

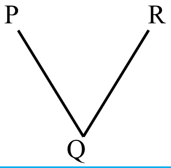
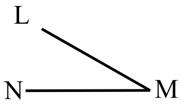
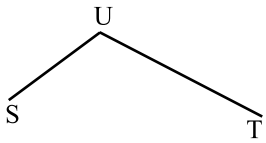
शिक्षक : कोनाचं नाव सांगताना 'कोन ABC' असं सांगतात.

मोनू : सर 'कोन ABC' असं न सांगता 'कोन CBA' असे सांगितलं तर चालेल का ?

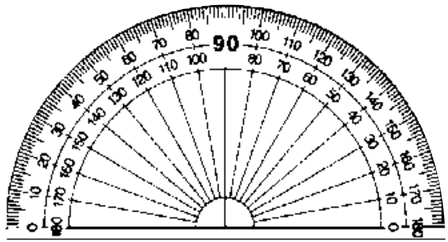
शिक्षक : होय. चालेल. ‘कोन ABC’ किंवा ‘कोन CBA’ अशा दोन्ही पद्धतीनं कोनाचं नाव सांगतात. ‘कोन’ या शब्दासाठी ‘∠’ हे चिन्ह वापरतात. या चिन्हाचा वापर करून ‘कोन ABC’ चं लेखन ‘∠ABC’ असं करतात.

उदाहरणसंग्रह 24

खालील तक्ता पूर्ण करा.

आकृती	कोनाचे नाव	कोनाचा शिरोबिंदू	कोनाच्या बाजू
	‘∠PQR’ किंवा ‘∠RQP’	Q	बाजू QP व बाजू QR
			
			

❐ कोनमापकाची ओळख



दिलेल्या कोनाचे माप मोजण्यासाठी व दिलेल्या मापाचा कोन काढण्यासाठी कंपासपेटीतील ‘कोनमापक’ हे साधन वापरतात.

शेजारील चित्र कोनमापकाचे आहे.

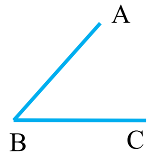
कोनमापक हे साधन अर्धवर्तुळाकृती असते. कोनमापकाच्या अर्धवर्तुळाकार कडेचे समान 180 भाग केलेले असतात. प्रत्येक भाग म्हणजे ‘एक अंश’ होय. ‘एक अंश’ हे चिन्ह वापरून ‘1°’ असे लिहितात.

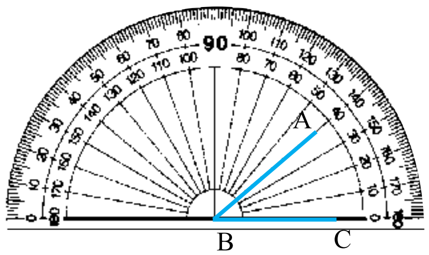
कोनमापकावरील भागांचे म्हणजेच अंशांचे क्रमांक दोन प्रकारे लिहिलेले असतात. त्यांपैकी एका प्रकारात 0, 10, 20, 30, ..., 180 या भागदर्शक संख्यांच्या खुणा घड्याळाच्या काट्याच्या विरुद्ध दिशेने म्हणजेच उजवीकडून डावीकडे क्रमाने केलेल्या असतात; तर दुसऱ्या प्रकारात 0, 10, 20, 30, ..., 180 या भागदर्शक संख्यांच्या खुणा घड्याळाच्या काट्याच्या दिशेने म्हणजेच डावीकडून उजवीकडे क्रमाने केलेल्या असतात.

कोनमापक ज्या वर्तुळाचा निम्मा भाग असतो, त्या वर्तुळाच्या केंद्राला कोनमापकाचे केंद्र म्हणतात व त्याच्या व्यासाला कोनमापकाची ‘संदर्भरेघ’ किंवा ‘तळरेघ’ म्हणतात.

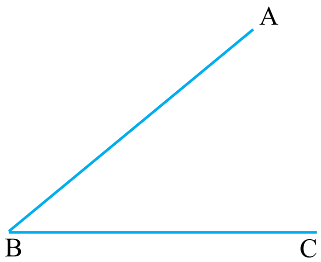
❒ कोनमापन

कोनमापकाच्या साहाय्याने शेजारी दिलेला ∠ABC कसा मोजायचा हे पाहा.



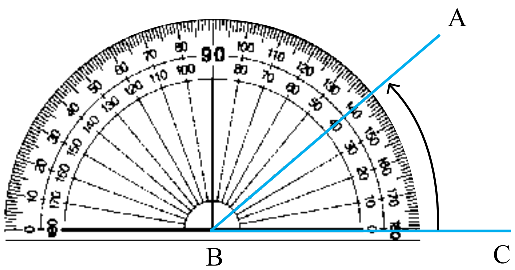


1. प्रथम कोनमापकाचा केंद्रबिंदू कोनाच्या शिरोबिंदू B वर ठेवा. कोनमापकाची संदर्भरेघ बाजू BC वर जुळवून ठेवा. कोनाच्या भुजा कोनमापकावरील खुणांपर्यंत आलेल्या नाहीत.



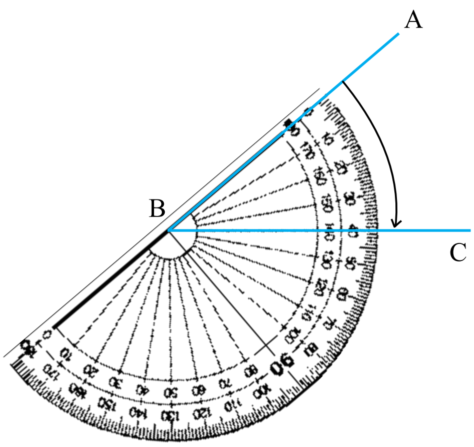
2. अशा वेळी कोनमापक बाजूला करून भुजा पुरेशा वाढवून घ्याव्या.

   भुजा वाढवल्यामुळे कोनाचे माप बदलत नाही.



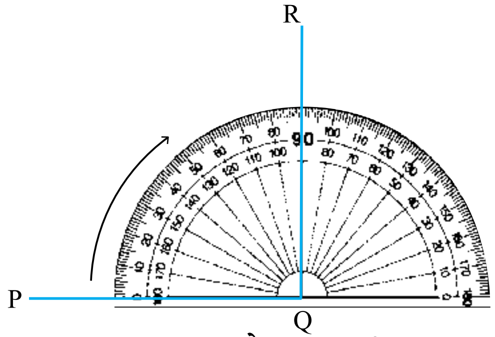
3. कोनाच्या शिरोबिंदूच्या ज्या दिशेला कोनाची बाजू असते, त्या बाजूकडील शून्याच्या खुणेपासून कोन मोजतात. येथे कोनाची BC ही बाजू, B या शिरोबिंदूच्या उजवीकडे आहे, म्हणून B या बिंदूच्या उजवीकडील 0 पासून क्रमाने वाढत जाणाऱ्या कोनमापकावरील खुणा पाहा. कोनाची दुसरी बाजू BA ही कोनमापकावरील कोणत्या खुणेशी जुळते ते पाहा. त्या खुणेवरील संख्या वाचा. ही संख्या म्हणजेच कोनाचे माप होय. आकृतीतील ∠ABC चे माप 40° आहे.

हाच ∠ABC आपल्याला त्या कोनावर वेगळ्या प्रकारे कोनमापक ठेवूनही मोजता येतो.

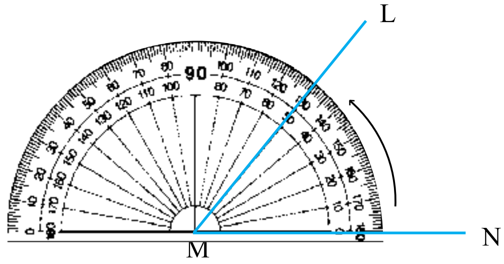


1. प्रथम कोनमापकाचा केंद्रबिंदू कोनाच्या शिरोबिंदू B वर ठेवा. कोनमापकाची संदर्भरेघ बाजू BA वर जुळवून ठेवा.
2. बाजू BA वरील कोनमापकाच्या संदर्भरेघेची 0 ची खूण पाहा. A बिंदूकडील 0 पासून क्रमाने वाढत जाणाऱ्या कोनमापकावरील खुणा पाहा. कोनाची दुसरी बाजू BC ही कोनमापकावरील कोणत्या खुणेशी जुळते ते पाहा. त्या खुणेवरील संख्या वाचा.
   येथेही ∠ABC चे माप 40° हेच आहे, हे पाहा.

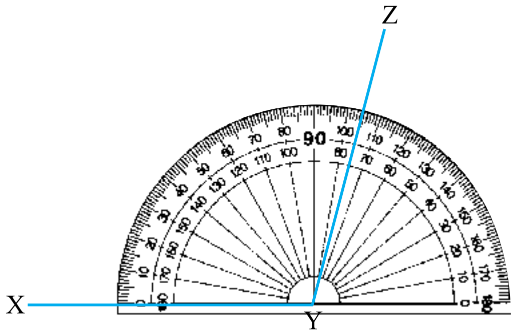
✤ कोनमापकाच्या साहाय्याने खालील कोन कसे मोजले आहेत, ते पाहा.



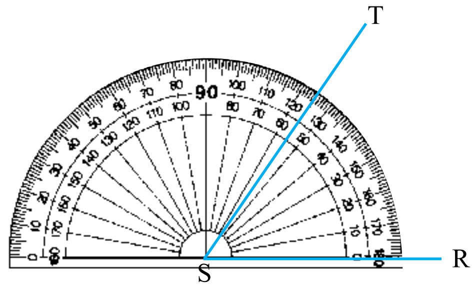
∠PQR चे माप 90°



∠LMN चे माप 50°



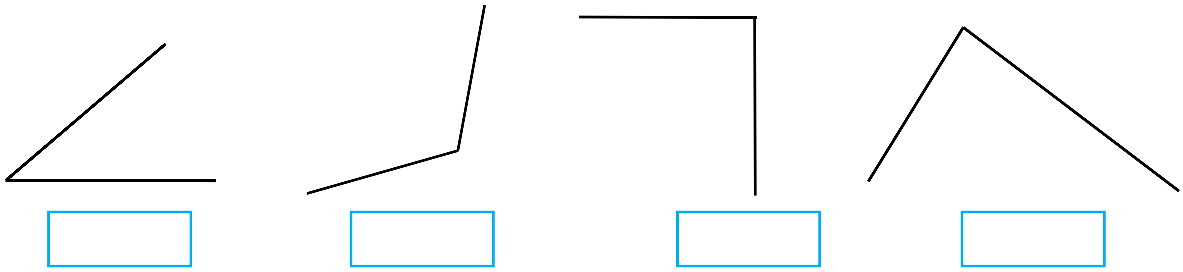
∠XYZ चे माप 105°



∠RST चे माप 55°

उदाहरणसंग्रह 25

खालील कोन मोजा व त्यांची मापे कोनाखाली लिहा.



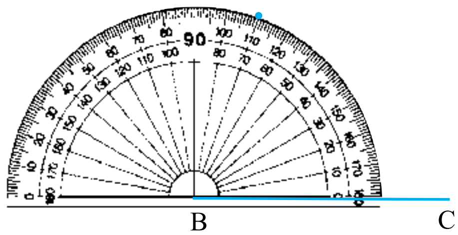
❒ दिलेल्या मापाचा कोन काढणे

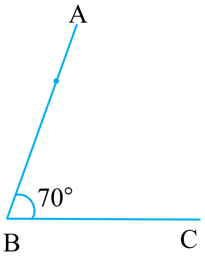
उदा. 70° मापाचा ∠ABC काढा.

∠ABC चा B हा शिरोबिंदू असून रेघ BA व रेघ BC या कोनाच्या बाजू आहेत.

1. प्रथम पट्टीच्या साहाय्याने बाजू BC काढा.
2. B हा शिरोबिंदू असल्यामुळे त्या बिंदूपाशी 70° मापाचा कोन काढायचा आहे.

   कोनमापकाचा केंद्रबिंदू B बिंदूवर ठेवा. कोनमापकाची संदर्भरेघ बाजू BC शी जुळेल अशा प्रकारे कोनमापक ठेवा. बिंदू C ज्या बाजूला आहे, त्या बाजूकडील 0° च्या खुणेपासून क्रमाने वाढणाऱ्या संख्या पाहा. 70° च्या खुणेलगत पेन्सिलने बिंदू काढा. कोनमापक उचला.



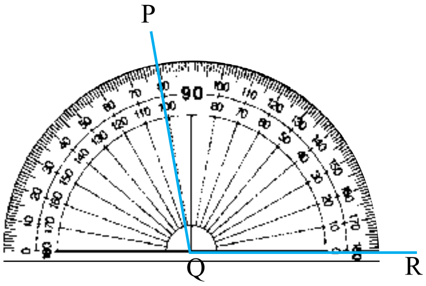


बिंदू B पासून 70° च्या खुणेलगत काढलेल्या बिंदूतून जाणारी रेघ काढा. रेघेच्या दुसऱ्या टोकाला A हे नाव द्या.

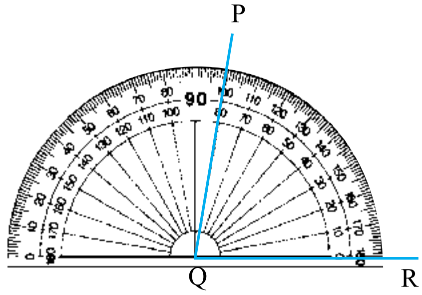
∠ABC हा 70° मापाचा कोन आहे.

✤ राहुल आणि सायली यांनी 80° मापाचा ∠PQR खालीलप्रमाणे काढला.

राहुलने काढलेला कोन



सायलीने काढलेला कोन



शिक्षक : राहुल व सायलीनं काढलेले कोन बरोबर आहेत का ?

शलाका : सर, राहुलनं काढलेला कोन चुकीचा आहे. सायलीचा कोन बरोबर आहे.

शिक्षक : राहुलचं काय चुकलं आहे ?

राहुल : मी डाव्या बाजूनं 10, 20, 30,... असं मोजत गेलो व कोनाची भुजा 80 वर काढली.

शिक्षक : राहुलनं डाव्या बाजूनं कोन मोजला. Q या शिरोबिंदूच्या डाव्या बाजूला तळरेघेखाली कोनाची भुजा नाही. ती भुजा Q च्या उजव्या बाजूला आहे, म्हणून R बिंदूच्या बाजूनं म्हणजे Q च्या उजव्या बाजूनं मोजून 80° पाशी त्यानं खूण करायला हवी होती.

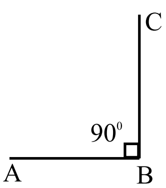
उदाहरणसंग्रह 26

कोनमापकाचा उपयोग करून पुढील मापांचे कोन काढा व त्यांना नावे द्या.

(1) 60° (2) 120° (3) 90° (4) 150° (5) 30° (6) 165° (7) 45°

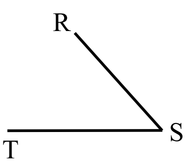
❒ कोनाचे प्रकार

काटकोन



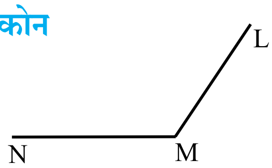
∠ABC हा काटकोन आहे. **90° मापाच्या कोनाला काटकोन म्हणतात.**

लघुकोन



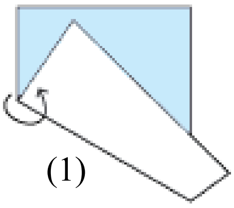
∠RST चे माप 90° पेक्षा म्हणजे काटकोनापेक्षा कमी आहे. **काटकोनापेक्षा कमी मापाच्या कोनाला लघुकोन म्हणतात.** ∠RST हा लघुकोन आहे.

विशालकोन

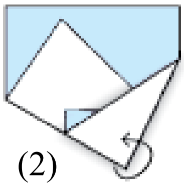


∠LMN चे माप 90° पेक्षा म्हणजे काटकोनापेक्षा जास्त आहे. **काटकोनापेक्षा जास्त मापाच्या कोनाला विशालकोन म्हणतात.** ∠LMN हा विशालकोन आहे.

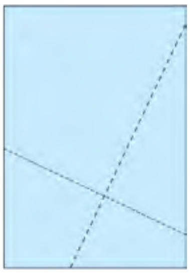
उपक्रम : घडी पद्धतीने काटकोन



(1)



(2)



(3)

(1) एक कागद घ्या. कागदाला साधारण मधे एक घडी घाला.

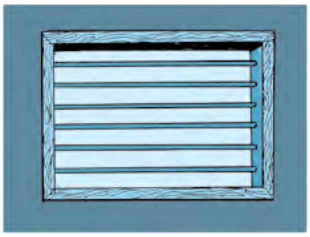
(2) चित्रात दाखवल्याप्रमाणे घडीवरील एका बिंदूशी आणखी एक घडी घाला.

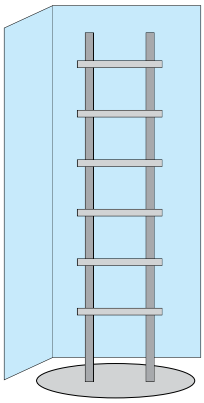
(3) आता कागद उलगडा. एकूण दोन रेघा दिसतील. त्या रेघांमधील कोन काटकोन होईल.

या कोनाचे माप 90° आहे, हे कोनमापकाने मोजून पाहा.

❒ समांतर रेघा व लंब रेघा

❒ समांतर रेघा





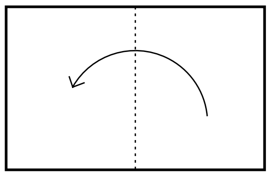
चित्रातील **खिडकीचे गज** परस्परांना **समांतर** आहेत.

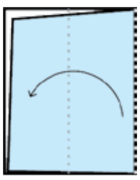
चित्रातील **शिडीच्या पायऱ्या** परस्परांना **समांतर** आहेत.

शिडीच्या **उभ्या बाजू** परस्परांना **समांतर** आहेत.

1. एक आयताकृती कागद घ्या.

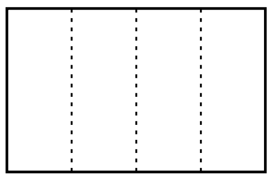
2. त्याला अशी घडी घाला, की एक कड समोरच्या कडेशी तंतोतंत जुळेल.





3. अशाच प्रकारे आणखी एक घडी घाला.

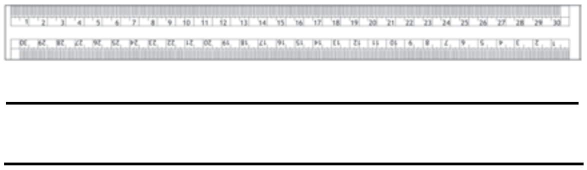
4. त्यानंतर घड्या उलगडा. कागदावर दिसणाऱ्या घड्यांच्या रेघा पेन्सिलने गिरवा.



पेन्सिलने गिरवलेल्या रेघा परस्परांना समांतर आहेत.

बाजूच्या आकृतीतील रेघा सारख्या लांबीच्या नाहीत, तरीसुद्धा त्या रेघा **समांतर** आहेत.

समांतर रेघा कोणत्याही बाजूला कितीही वाढवल्या तरी एकमेकींना मिळत नाहीत.

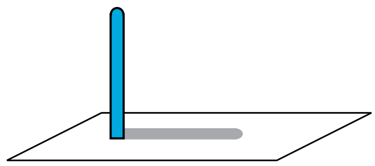


चित्रात दाखवल्याप्रमाणे एक पट्‌टी घ्या. पट्‌टीच्या दोन्ही बाजूंनी पट्‌टीच्या कडांना लागून पेन्सिलने रेघा काढा. पट्‌टी बाजूला करा. या रेघा एकमेकींना समांतर आहेत.

अशा प्रकारे विविध आयताकृती वस्तूंच्या साहाय्याने आपल्याला समांतर रेघा काढता येतात.

❒ लंब रेघा

आपण अनेक वस्तू जमिनीवर सरळ उभ्या असलेल्या पाहिल्या आहेत. त्या वस्तू आपापल्या सावलीशी काटकोन करतात.



जसे, सरळ उभा खांब आणि त्याची जमिनीवरील सावली यांच्यामधील कोन 90° म्हणजे काटकोन असतो. त्याचप्रमाणे फळ्याच्या लगतच्या बाजू, पुस्तकाच्या लगतच्या बाजू यांमधील कोनदेखील 90° असतो.

जेव्हा दोन रेघा एकमेकींशी 90° मापाचा कोन करतात, तेव्हा त्या रेघा एकमेकींना **लंब** आहेत, असे म्हणतात. दोन रेघा लंब आहेत हे समजावे यासाठी आकृतीत दाखवल्याप्रमाणे त्या रेघांना जोडणारी खूण करतात.

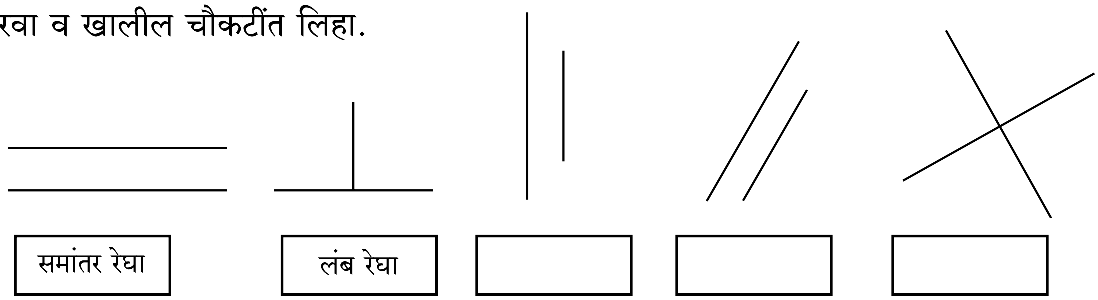
वहीच्या लगतच्या बाजूंमधील कोन मोजून पाहा.

तो काटकोन आहे, म्हणून वहीच्या लगतच्या बाजू एकमेकींना लंब आहेत.

बाजूच्या चित्रातील वहीचे पान पाहा.
पानावरील आडव्या रेघा समांतर आहेत, तर पानावरील समासाची उभी रेघ, आडव्या असणाऱ्या रेघांशी काटकोन करते, म्हणून ती रेघ आडव्या रेघांना लंब आहे.

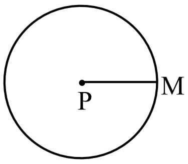
उदाहरणसंग्रह 27

1. परिसरात आढळणाऱ्या समांतर रेघांची दोन उदाहरणे सांगा.
2. परिसरात आढळणाऱ्या लंब रेघांची दोन उदाहरणे सांगा.
3. खालील आकृत्या पाहा. प्रत्येक आकृतीतील दिलेल्या रेघा परस्परांना समांतर आहेत, की लंब आहेत ते ठरवा व खालील चौकटींत लिहा.



7. वर्तुळ

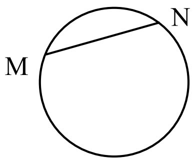
❒ त्रिज्या, जीवा, व्यास



1. वर्तुळाचा केंद्रबिंदू आणि वर्तुळावरील बिंदू यांना जोडणारी रेघ म्हणजे वर्तुळाची **त्रिज्या** होय.

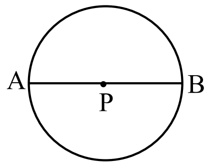
   आकृतीत P हा वर्तुळाचा केंद्रबिंदू असून M हा वर्तुळावरील बिंदू आहे. रेघ PM ही वर्तुळाची त्रिज्या आहे.

   एका वर्तुळाला अनेक त्रिज्या असतात आणि त्या सर्व त्रिज्या समान लांबीच्या असतात.



2. वर्तुळावरील कोणतेही दोन बिंदू जोडणारी रेघ म्हणजेच वर्तुळाची **जीवा** होय.

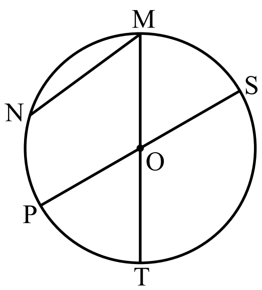
   आकृतीत M व N हे वर्तुळावरील बिंदू आहेत. रेघ MN ही वर्तुळाची जीवा आहे.



3. वर्तुळकेंद्रातून जाणाऱ्या जीवेला वर्तुळाचा **व्यास** म्हणतात. आकृतीत, जीवा AB वर P हे वर्तुळकेंद्र आहे, म्हणून जीवा AB हा वर्तुळाचा व्याससुद्धा आहे.

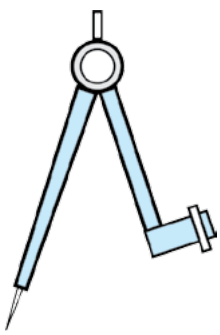
   एका वर्तुळाला अनेक जीवा व अनेक व्यास असतात.

- खालील आकृतीतील वर्तुळाचा O हा केंद्रबिंदू आहे. आकृतीत आणखीही काही बिंदू व रेघा दाखवल्या आहेत. या वर्तुळातील त्रिज्या, व्यास व जीवा ओळखा व त्यांची नावे लिहा.



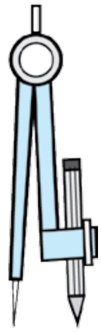
त्रिज्या	
व्यास	
जीवा	

❒ वर्तुळ काढणे

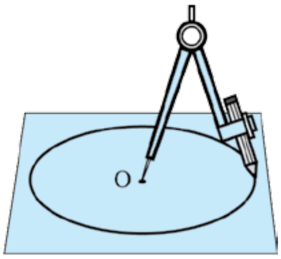


वर्तुळ काढण्यासाठी कंपास हे उपकरण वापरतात. कंपासच्या एका भुजेला धातूचे टोक असून दुसऱ्या भुजेला पेन्सिल अडकवण्याची सोय असते. कंपासला योग्य लांबीची पेन्सिल लावतात.

कंपासच्या साहाय्याने वर्तुळ काढण्याची कृती



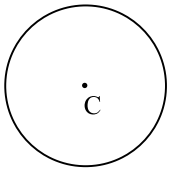
- प्रथम कंपासला पेन्सिल अडकवा. कंपासचे धातूचे टोक आणि पेन्सिलचे टोक चित्रात दाखवल्याप्रमाणे जुळवून घ्या.

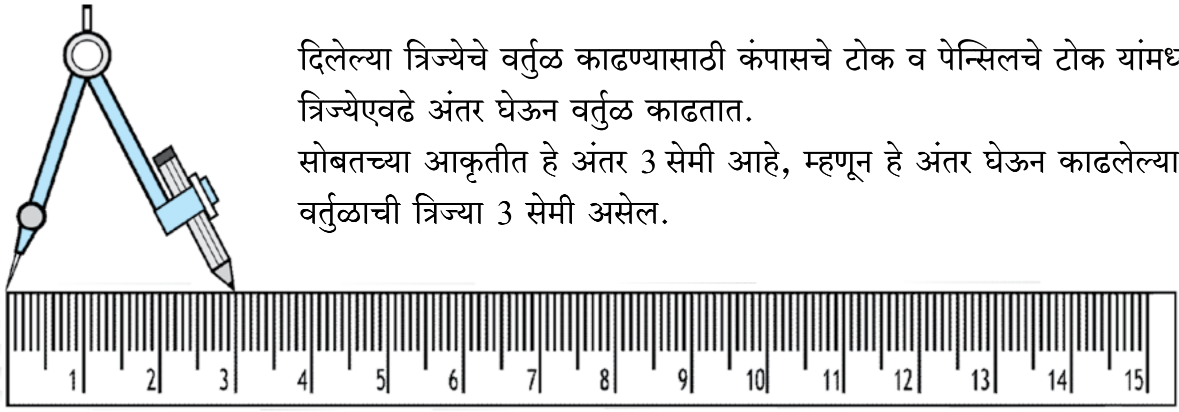


- धातूचे टोक आणि पेन्सिलचे टोक यांमध्ये सोईस्कर अंतर घ्या.
- कागदावर योग्य जागी एक बिंदू घ्या.
- धातूचे टोक त्या बिंदूवर स्थिर ठेवून पेन्सिलचे टोक कागदावर फिरवा.

पेन्सिलने तयार झालेली आकृती वर्तुळाची असेल.

ज्या बिंदूवर कंपासचे टोक ठेवलेले असते,
तो त्या वर्तुळाचा केंद्रबिंदू असतो.
आकृतीत C बिंदू हा वर्तुळाचा केंद्रबिंदू आहे.





दिलेल्या त्रिज्येचे वर्तुळ काढण्यासाठी कंपासचे टोक व पेन्सिलचे टोक यांमध्ये त्या त्रिज्येएवढे अंतर घेऊन वर्तुळ काढतात.
सोबतच्या आकृतीत हे अंतर 3 सेमी आहे, म्हणून हे अंतर घेऊन काढलेल्या वर्तुळाची त्रिज्या 3 सेमी असेल.

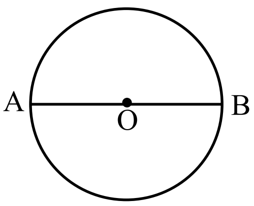
उदाहरणसंग्रह 28

1. पुढे दिलेल्या त्रिज्यांची वर्तुळे काढा.

(1) 2 सेमी (2) 4 सेमी (3) 3 सेमी

2. कोणत्याही त्रिज्येचे एक वर्तुळ काढा. त्या वर्तुळाचा एक व्यास, एक त्रिज्या व एक जीवा दाखवा.

त्रिज्या व व्यास यांमधील संबंध



शेजारील आकृतीचे निरीक्षण करा. पुढील प्रश्नांच्या आधारे विचार करा.

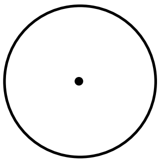
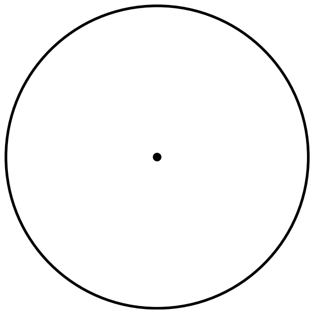
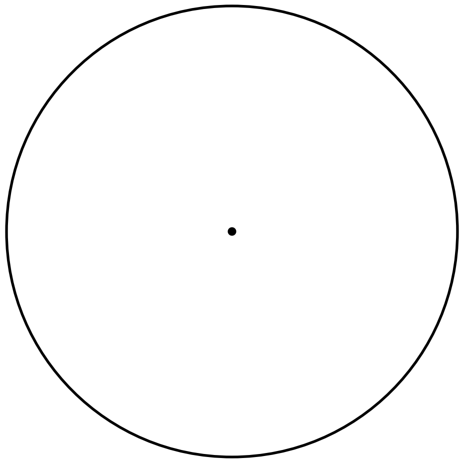
- आकृतीमध्ये त्रिज्या कोणत्या आहेत ?
- AB हा व्यास किती त्रिज्यांनी मिळून झाला आहे ?
- एका त्रिज्येची लांबी 3 सेंटिमीटर असेल, तर व्यासाची लांबी किती असेल ?
- व्यासाची लांबी त्रिज्येच्या लांबीच्या किती पट आहे ?

वर्तुळाचा व्यास हा त्रिज्येच्या दुप्पट लांबीचा असतो.

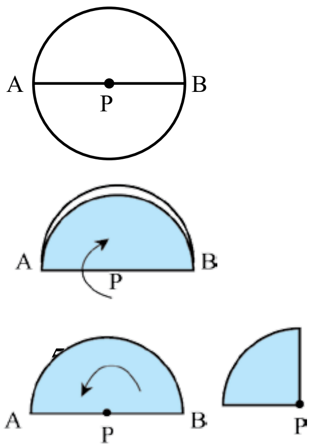
- याच वर्तुळाचा, रेघ CD हा दुसरा व्यास काढला तर त्याची लांबी AB या व्यासाच्या लांबी एवढीच असेल का ?

एका वर्तुळाचे सर्व व्यास समान लांबीचे असतात.

पडताळा 1. : खालील वर्तुळांच्या त्रिज्या व व्यास पट्टीच्या साहाय्याने मोजून त्रिज्या व व्यास यांमधील संबंधाचा पडताळा घ्या.

आकृती			
त्रिज्या	1 सेमी		
व्यास	2 सेमी		

पडताळा 2.



1. कागदावर एक वर्तुळ काढून वर्तुळाकार कागद कापून घ्या.
2. वर्तुळकेंद्राला P नाव द्या.
3. वर्तुळाचा व्यास काढून त्याला AB नाव द्या. PA आणि PB या त्रिज्या आहेत, हे लक्षात घ्या.
4. आकृतीत दाखवल्याप्रमाणे व्यास AB वर वर्तुळाकार कागदाला घडी घाला.

नंतर बिंदू P वर अशी घडी घाला, की बिंदू B हा बिंदू A शी जुळेल. त्रिज्या PA व त्रिज्या PB एकमेकींशी तंतोतंत जुळलेल्या दिसतात.

यावरून वर्तुळाची प्रत्येक त्रिज्या व्यासाच्या निम्म्या लांबीची आहे, हे दिसते.

उदाहरणसंग्रह 29

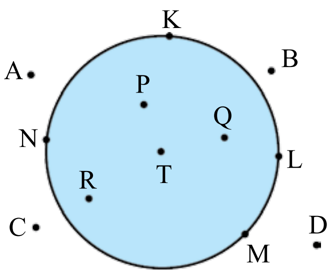
1. वर्तुळाची त्रिज्या 5 सेमी असेल, तर व्यास किती आहे ?
2. वर्तुळाचा व्यास 6 सेमी असेल, तर त्रिज्या किती आहे ?

3. रिकाम्या जागा भरून खालील तक्ता पूर्ण करा.

त्रिज्या	4 सेमी		9 सेमी	
व्यास		16 सेमी		22 सेमी

❒ वर्तुळाचा अंतर्भाग व बाह्यभाग

आपण मैदानात एक वर्तुळ काढून 'तळ्यात-मळ्यात' हा खेळ खेळतो. या खेळात जी मुले वर्तुळाच्या आत असतात त्यांना आपण 'तळ्यात' म्हणतो, तर जी मुले वर्तुळाच्या बाहेर असतात त्यांना 'मळ्यात' म्हणतो.



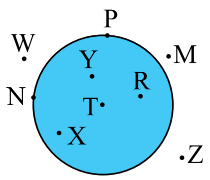
बाजूच्या आकृतीत T केंद्र असलेल्या वर्तुळावर K, L, M, N हे बिंदू आहेत.

वर्तुळाच्या आत असलेल्या भागाला वर्तुळाचा अंतर्भाग म्हणतात. बाजूच्या आकृतीत रंगीत केलेला भाग हा त्या वर्तुळाचा अंतर्भाग आहे. बिंदू P, Q, R, T हे वर्तुळाच्या अंतर्भागातील बिंदू आहेत.

वर्तुळाबाहेरील भागाला त्या वर्तुळाचा बाह्यभाग म्हणतात. बिंदू A, B, C, D हे वर्तुळाच्या बाह्यभागात आहेत.

उदाहरणसंग्रह 30

आकृतीतील वर्तुळाच्या अंतर्भागातील, बाह्यभागातील व वर्तुळावरील बिंदूंची नावे सारणीत लिहा.

आकृती	अंतर्भागातील बिंदू	बाह्यभागातील बिंदू	वर्तुळावरील बिंदू
			

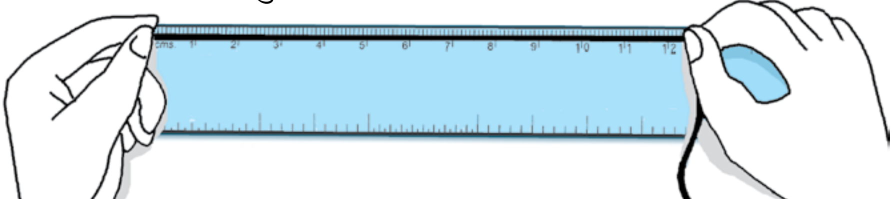
❒ वर्तुळाचा परीघ

वर्तुळाकार कड असलेली एक वाटी घ्या.

वाटीभोवती दोऱ्याचा एक फेरा घेऊन दोऱ्याचे वर्तुळ तयार करा.

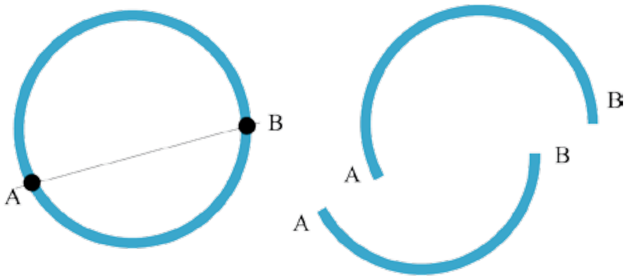
गुंडाळलेला दोरा बाजूला काढून तो सरळ करा.

पट्टीच्या साहाय्याने सरळ केलेल्या दोऱ्याची लांबी मोजा. मिळणारी लांबी म्हणजेच दोऱ्याने तयार झालेल्या वर्तुळाचा परीघ होय.

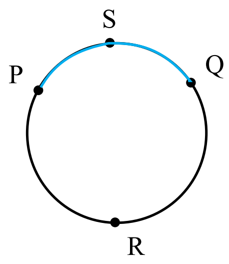


वर्तुळाचा परीघ 12 सेमी 3 मिमी आहे.

❒ वर्तुळकंस



बाजूला एक प्लॅस्टिकची वर्तुळाकार बांगडी आहे. ही बांगडी A व B या बिंदूंपाशी तुटली, तर चित्रात दाखवल्याप्रमाणे या बांगडीचे दोन भाग होतील. हा प्रत्येक भाग **वर्तुळकंस** आहे.



बाजूच्या आकृतीत वर्तुळावर P आणि Q असे दोन बिंदू आहेत. या बिंदूंमुळे वर्तुळाचे दोन भाग झाले आहेत. हा प्रत्येक भाग **वर्तुळाचा कंस** आहे.

म्हणजे P आणि Q या बिंदूंमुळे दोन कंस तयार झाले आहेत. P आणि Q हे बिंदू त्या प्रत्येक कंसाची टोके आहेत.

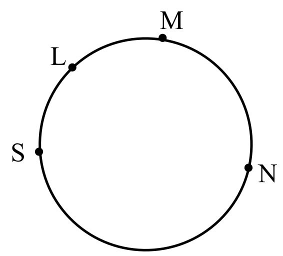
'कंस PQ' या नावावरून, झालेल्या दोन कंसांपैकी कोणता कंस हे निश्चितपणे समजत नाही. ते समजण्यासाठी प्रत्येक कंसावर आणखी एक बिंदू घेतात. त्या बिंदूचा वापर करून कंसाला तीन अक्षरी नाव देतात. आकृतीत कंस PSQ आणि कंस PRQ हे दोन कंस आहेत.

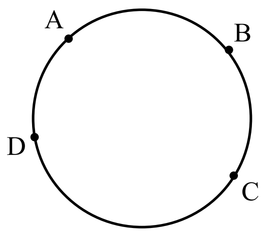
उदाहरणसंग्रह 31

1. शेजारील आकृतीत वर्तुळावर S, L, M, N हे बिंदू आहेत. आकृतीच्या आधारे विचारलेल्या प्रश्नांची उत्तरे लिहा.

(1) ज्या कंसांची टोके S आणि M आहेत, त्या कंसांची नावे लिहा.

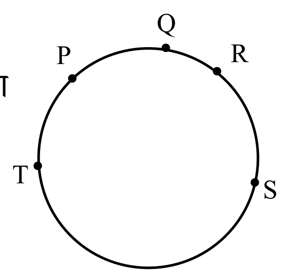
(2) ज्या कंसांची टोके L आणि N आहेत, त्या कंसांची नावे लिहा.



2. 

शेजारील वर्तुळाच्या आकृतीतील A, B, C आणि D या बिंदूंनी तयार झालेल्या कंसांची नावे लिहा.

3. शेजारील वर्तुळाच्या आकृतीतील P, Q, R, S आणि T या बिंदूंनी तयार झालेल्या कंसांची नावे लिहा.



4. निरनिराळ्या वर्तुळाकार वस्तूंचा परीघ मोजा व लिहा.
(शिवणकामात वापरला जाणारा टेप परीघ मोजण्यासाठी सोईचा असतो.)

✦✦✦

8. विभाज्य आणि विभाजक

दादा : माझ्याकडे 12 पेढे आहेत. किती-कितीच्या गटांत पेढे वाटले, तर एकही पेढा शिल्लक राहणार नाही ?

संजू : वाटायचे म्हणजे भागायचे. एकही पेढा शिल्लक राहणार नाही, म्हणजे बाकी 0 राहील.

अंजू : 2 च्या पाढ्यात 12 येतात, म्हणजे पेढ्यांचे दोन-दोनचे गट करता येतील.

मंजू : 3 च्या पटीत 12 येतात, म्हणजे तीन-तीनचे गट करता येतील.

सागर : चार-चारचे पण गट करता येतील.

अनिता : पाच-पाचचे गट करता येतील का ?

मंजू : नाही, कारण 5 च्या पाढ्यात 12 येत नाहीत.

अंजू : सहानं बाराला भाग जातो, म्हणून सहा-सहाचे देखील गट करता येतील.

मंजू : 7, 8, 9, 10, 11 चे गट करता येणार नाहीत, कारण या संख्यांच्या पाढ्यांत 12 येत नाहीत.

संजू : 12 चा 1 गट करून देखील एकाला देता येईल. एक-एक पेढा 12 जणांना देखील वाटता येईल.

दादा : छान विचार केला तुम्ही. 1, 2, 3, 4, 6, 12 या सर्व संख्यांनी 12 ला नि:शेष भाग जातो, म्हणजे बाकी शून्य उरते; म्हणून या सर्वांना 12 चे **विभाजक** किंवा **अवयव** म्हणतात.
याचप्रमाणे 1, 2, 4, 8, 16 हे 16 चे विभाजक आहेत.

उदाहरणसंग्रह 32

खालील संख्यांचे विभाजक लिहा.

(1) 8 (2) 5 (3) 14 (4) 10 (5) 7 (6) 22 (7) 25 (8) 32 (9) 33

❒ विभाज्य

दादा : भाजक व भाज्य म्हणजे काय हे तुम्हांला माहीत आहे, पण विभाज्य म्हणजे काय हे माहीत आहे का ?

अंजू : विभाज्य म्हणजे काय, हे माहीत नाही; पण भाज्याशी त्याचा संबंध असावा असं मला वाटतं.

दादा : उदाहरणाद्वारे मी समजावून सांगतो. 20 ÷ 5 हा भागाकार तुम्हांला येतो ना ?

अंजू : हो. 20 या भाज्यास 5 या भाजकानं भागल्यास भागाकार 4 येतो व बाकी शून्य उरते.

दादा : जेव्हा भाजकानं भाज्याला भागल्यावर बाकी शून्य उरते, तेव्हा त्या भाज्यालाच **विभाज्य** म्हणतात, म्हणजे या ठिकाणी 20 ही संख्या 5 नं विभाज्य आहे. आता 21 ÷ 5 हा भागाकार बघा. 21 ला 5 नं भागल्यावर बाकी 1 उरते, म्हणजे 21 ही संख्या 5 नं विभाज्य नाही.
वेगळ्या शब्दांत, जेव्हा भागाकारात बाकी शून्य उरते, तेव्हा भाजकाला विभाजक आणि भाज्याला विभाज्य म्हणतात.
आता सांगा. 84 खडू आहेत, त्यांचे सहा-सहाचे गट होतील का ?

सूरज : मी 6 नं भागून बघतो. 84 ला 6 नं नि:शेष भाग जातो व भागाकार 14 येतो, म्हणजेच सहा-सहाचे 14 गट तयार होतील. येथे 84 हा विभाज्य आणि 6 हा विभाजक आहे.

दादा : खडूंची संख्या 6, 12, 18, 36, 84 अशी असेल, तर 6-6 चे गट करून ते खडू संपतील, म्हणजेच 6, 12, 18, 36, 84 या संख्या 6 नं विभाज्य आहेत किंवा त्या संख्यांना 6 नं नि:शेष भाग जातो. खडूंची संख्या 6 नं विभाज्य आहे का, हे पाहण्यासाठी खडूंच्या संख्येला 6 नं भागून पाहावं. बाकी 0 असेल तर ती संख्या 6 नं विभाज्य असते. 3 च्या पाढ्यात येणाऱ्या प्रत्येक संख्येला 3 नं नि:शेष भाग जातो किंवा त्या संख्या 3 नं विभाज्य असतात. तसंच 7 च्या पाढ्यातील संख्या 7 नं विभाज्य असतात. 9 च्या पाढ्यातील संख्या 9 नं विभाज्य असतात.

विभाज्यता ही संकल्पना आपण व्यवहारातही वापरतो. मी काही प्रश्न विचारतो. त्यावरून तुमच्या हे लक्षात येईल.

माझ्याजवळ 200 मिलिलीटरचं माप आहे. त्याच्या साहाय्यानं मला 1 लीटर दूध मोजता येईल का?

सूरज : 1 लीटर म्हणजे 1000 मिली. $1000 = 200 \times 5$ म्हणजे 1000 ही संख्या 200 नं विभाज्य आहे, म्हणून 200 मिलिलीटरच्या मापानं 1 लीटर दूध मोजता येईल. 200 मिलीची 5 मापं म्हणजे 1 लिटर होय.

दादा : 200 मिलीच्या मापाने दीड लीटर दूध मोजता येईल का ?

अंजू : दीड लीटर म्हणजे 1500 मिली. 1500 ही संख्या 200 च्या पटीत नाही, म्हणजे 1500 ही संख्या 200 नं विभाज्य नाही, म्हणून 200 मिलीच्या मापानं दीड लीटर दूध मोजता येणार नाही.

दादा : माझ्याकडे 400 ग्रॅम चणे आहेत. मला 60-60 ग्रॅमच्या चण्याच्या पुड्या करायच्या आहेत. त्या करता येतील का ?

अंजू : नाही. कारण 400 ही संख्या 60 नं विभाज्य नाही.

दादा : आणखी कमीत कमी किती चणे आणले म्हणजे 60 ग्रॅमची एक पुडी याप्रमाणे पुड्या करता येतील?

अंजू : 400 नंतर लगेच येणारी, 60 नं विभाज्य संख्या शोधावी लागेल. $60 \times 6 = 360$, $60 \times 7 = 420$ म्हणून आणखी 20 ग्रॅम चणे आणावे लागतील.

❒ विभाज्यतेच्या कसोट्या

2 च्या पाढ्याचे निरीक्षण करून एककस्थानी कोणकोणते अंक येतात ते बघा. तसेच 52, 74, 80, 96, 98 या संख्यांना 2 ने नि:शेष भाग जातो हे प्रत्यक्ष भागाकार करून पाहा. यावरून एखादी संख्या 2 ने विभाज्य आहे की नाही हे ठरवण्याचा कोणता नियम मिळतो ?

आता 5 च्या आणि 10 च्या पाढ्यांचे निरीक्षण करा.

5 चा आणि 10 चा विभाज्यतेचा कोणता नियम दिसतो, ते शोधा.

2 ने विभाज्यतेची कसोटी :	संख्येच्या एककस्थानी 0, 2, 4, 6, 8 यांपैकी कोणताही अंक असेल, तर ती संख्या 2 ने विभाज्य असते, म्हणजेच त्या संख्येला 2 ने भाग जातो.
5 ने विभाज्यतेची कसोटी :	संख्येच्या एककस्थानी 0, 5 यांपैकी कोणताही अंक असेल, तर ती संख्या 5 ने विभाज्य असते.
10 ने विभाज्यतेची कसोटी :	संख्येच्या एककस्थानी 0 असेल, तर ती संख्या 10 ने विभाज्य असते.

1. (1) 2 ने विभाज्य असणाऱ्या तीन अंकी पाच संख्या लिहा.
   (2) 5 ने विभाज्य असणाऱ्या तीन अंकी पाच संख्या लिहा.
   (3) 10 ने विभाज्य असणाऱ्या तीन अंकी पाच संख्या लिहा.
2. 2 आणि 3 या दोन्ही संख्यांनी विभाज्य असणाऱ्या पाच संख्या लिहा.
3. 3 मीटर लांबीची एक रिबन आहे. तिचे असे तुकडे करता येतील का, की प्रत्येक तुकडा 50 सेमी लांबीचा असेल ? कारण लिहा.
4. 3 मीटर लांबीची एक रिबन आहे. रिबनचे 40 सेमी लांबीचे 8 तुकडे हवे आहेत, तर त्यासाठी किती लांबीची रिबन कमी पडेल ?
5. खालील सारणीत दिलेल्या संख्येला दिलेल्या भाजकाने नि:शेष भाग जात असल्यास '✓' अशी खूण करा व भाग जात नसल्यास '×' अशी खूण करा.

संख्या \ भाजक	2	5	10
15	×	✓	×
30			
34			
46			

संख्या \ भाजक	2	5	10
55			
63			
70			
84			

❒ मूळ संख्या, संयुक्त संख्या

खालील तक्त्यांत काही संख्या दिल्या आहेत. त्या संख्यांचे सर्व विभाजक लिहा.

संख्या	विभाजक
2	1, 2
3	1, 3
4	1, 2, 4
5	
6	

संख्या	विभाजक
11	
12	
16	
19	
25	

दादा : तक्त्यावरून काय लक्षात येते ?

अजय : प्रत्येक संख्येचा 1 हा विभाजक आहे. काही संख्यांचे 1 व स्वत: ती संख्या असे दोनच विभाजक आहेत. जसे 3 चे विभाजक फक्त 1 व 3 हेच आहेत. त्याचप्रमाणे 2 चे विभाजक 1 व 2 आणि 19 चे विभाजक 1 व 19 हेच आहेत. काही संख्यांचे विभाजक दोनपेक्षा जास्त आहेत.

दादा : 2, 3, 19 अशा फक्त दोनच विभाजक असणाऱ्या संख्यांना मूळ संख्या म्हणतात.

ज्या संख्येचे 1 व ती संख्या असे दोनच विभाजक असतात, ती मूळ संख्या असते.

अजय : 4, 6, 16 अशा संख्यांना दोनपेक्षा अधिक विभाजक असतात, त्या संख्यांना काय म्हणायचं ?

दादा : 4, 6, 16 अशा संख्यांना संयुक्त संख्या म्हणतात.

ज्या संख्येचे दोनपेक्षा जास्त विभाजक असतात, ती संयुक्त संख्या असते.

दादा : 1 ही संख्या संयुक्त आहे, की मूळ संख्या आहे, हे विचार करून सांगा.

अजय : 1 या संख्येला 1 हा एकच विभाजक आहे, म्हणून मला तसं सांगता येत नाही.

दादा : बरोबर. 1 ही संख्या मूळ संख्या मानत नाहीत आणि संयुक्त संख्याही मानत नाहीत.

1 ही संख्या संयुक्तही नाही आणि मूळही नाही.

उदाहरणसंग्रह 34

1. 1 पासून 20 पर्यंतच्या संख्यांपैकी सर्व मूळ संख्या लिहा.

2. 21 ते 50 या संख्यांपैकी सर्व संयुक्त संख्या लिहा.

3. खालील संख्यांपैकी मूळ संख्येभोवती ◯ अशी खूण करा.

22, 37, 43, 48, 53, 60, 91, 57, 59, 77, 79, 97, 100

4. मूळ संख्यांपैकी समसंख्या कोणत्या ?

❒ सहमूळ संख्या

दादा : 12 व 18 या संख्यांचे सगळे विभाजक सांगा.

अंजू : मी 12 चे विभाजक सांगते : 1, 2, 3, 4, 6, 12.

मंजू : मी 18 चे विभाजक सांगते : 1, 2, 3, 6, 9, 18.

दादा : आता 12 व 18 या दोन संख्यांचे सामाईक विभाजक शोधा.

अंजू : सामाईक म्हणजे काय ?

दादा : 1, 2, 3, 6 हे विभाजक दोन्ही गटांत आहेत, म्हणजे 1, 2, 3, 6 हे 12 व 18 यांचे सामाईक विभाजक आहेत. आता 10 आणि 21 यांचे विभाजक सांगा.

संजू : 10 चे विभाजक : 1, 2, 5, 10

मंजू : 21 चे विभाजक : 1, 3, 7, 21

दादा : विभाजकांच्या या दोन गटांत कोणते विभाजक सामाईक आहेत ?

संजू : फक्त 1 हा एकच विभाजक सामाईक आहे.

दादा : फक्त 1 हा एकच विभाजक सामाईक असणाऱ्या दोन संख्यांना **सहमूळ संख्या** म्हणतात, म्हणून 10 व 21 या सहमूळ संख्या आहेत. 12 व 18 यांचे सामाईक विभाजक 1, 2, 3, 6; म्हणजे एकापेक्षा जास्त आहेत. म्हणून 12 व 18 या सहमूळ संख्या नाहीत.
आता 8 आणि 10 या संख्या सहमूळ आहेत का ते बघा बरं.

मंजू : 8 चे विभाजक 1, 2, 4, 8 आणि 10 चे विभाजक 1, 2, 5, 10 या दोन संख्यांचे 1 आणि 2 हे दोन विभाजक सामाईक आहेत, म्हणून 8 आणि 10 या सहमूळ संख्या नाहीत.

खालील जोड्यांमधील संख्या सहमूळ संख्या आहेत का हे ठरवा.

(1) 22, 24	(2) 14, 21	(3) 10, 33	(4) 11, 30
(5) 5, 7	(6) 15, 16	(7) 50, 52	(8) 17, 18

उपक्रम 1 :
- 1 पासून 60 पर्यंतच्या संख्या लिहा.
- 2 ने विभाज्य असणाऱ्या संख्यांभोवती निळ्या रंगाचे वर्तुळ काढा.
- 4 ने विभाज्य असणाऱ्या संख्यांभोवती लाल रंगाचे वर्तुळ काढा.
- ज्या संख्यांभोवती निळ्या रंगाचे वर्तुळ आहे, त्या सर्व संख्यांभोवती लाल रंगाचे वर्तुळसुद्धा आहे का, ते पाहा.
- ज्या संख्यांभोवती लाल रंगाचे वर्तुळ आहे, त्या सर्व संख्यांभोवती निळ्या रंगाचे वर्तुळसुद्धा आहे का, ते पाहा.
- 2 ने विभाज्य असणाऱ्या सर्व संख्या 4 ने सुद्धा विभाज्य आहेत का, ते पाहा.
- 4 ने विभाज्य असणाऱ्या सर्व संख्या 2 ने सुद्धा विभाज्य आहेत का, ते पाहा.

उपक्रम 2 :
- 1 ते 60 पर्यंतच्या संख्या लिहा.
- त्यांपैकी 2 ने विभाज्य संख्यांभोवती त्रिकोण काढा.
- 3 ने विभाज्य असणाऱ्या संख्यांभोवती वर्तुळ काढा.
- आता 6 ने विभाज्य असलेल्या संख्या शोधा. निरीक्षण करा. त्यावरून एखादा गुणधर्म लक्षात येतो का, हे सांगा.

❒ मूळ संख्या शोधण्याची इराटोस्थेनिसची पद्धत

इराटोस्थेनिस हा गणिती इसवीसनापूर्वी सुमारे 250 वर्षे या काळात ग्रीसमध्ये होऊन गेला. त्याने मूळ संख्या शोधण्याची एक पद्धत शोधून काढली. तिला **इराटोस्थेनिसची चाळणी** म्हणतात. या पद्धतीने 1 पासून 100 पर्यंतच्या मूळ संख्या कशा शोधतात ते पाहू.

1	11	21	31	41	51	61	71	81	91
2	12	22	32	42	52	62	72	82	92
3	13	23	33	43	53	63	73	83	93
4	14	24	34	44	54	64	74	84	94
5	15	25	35	45	55	65	75	85	95
6	16	26	36	46	56	66	76	86	96
7	17	27	37	47	57	67	77	87	97
8	18	28	38	48	58	68	78	88	98
9	19	29	39	49	59	69	79	89	99
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

○ 1 ही संयुक्त संख्या नाही किंवा मूळ संख्याही नाही. तिच्याभोवती ☐ अशी खूण करा.

○ 2 ही मूळ संख्या आहे, म्हणून तिच्याभोवती वर्तुळ काढा.

○ नंतर 2 ने विभाज्य असलेल्या सर्व संख्या रेघा मारून बाद करा. येथे 100 पैकी जवळ जवळ निम्म्या संख्या मूळ संख्या असणार नाहीत. हे लक्षात येते.

- 2 नंतर येणारी व बाद न झालेली 3 ही पहिली संख्या आहे. ती मूळ संख्या आहे.
- 3 भोवती वर्तुळ काढा. 3 ने विभाज्य असलेल्या सर्व संख्या रेघा मारून बाद करा.
- 3 नंतरची बाद न झालेली 5 ही पहिली संख्या आहे. ती मूळ संख्या आहे.
- 5 भोवती वर्तुळ काढा. 5 ने विभाज्य असलेल्या सर्व संख्या रेघा मारून बाद करा.
- 5 नंतर बाद न झालेली 7 ही पहिली संख्या आहे. ती मूळ संख्या आहे.
- 7 भोवती वर्तुळ काढा. 7 ने विभाज्य असलेल्या सर्व संख्या रेघा मारून बाद करा.

याप्रमाणे करत गेल्यास 1 ते 100 पैकी प्रत्येक संख्येभोवती वर्तुळ तरी असेल किंवा ती बाद झाली असेल. ज्या संख्यांभोवती वर्तुळे काढली आहेत, त्या सर्व संख्या मूळ संख्या आहेत. बाद झालेल्या सर्व संख्या संयुक्त संख्या आहेत.

मूळ संख्या शोधण्याची आणखी एक रीत

1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36
-	-	-	-	-	-
-	-	-	-	-	-

- सोबतच्या तक्त्यात 1 ते 36 या संख्या सहा स्तंभांत कशा लिहिल्या आहेत, हे पाहा. याचप्रमाणे 102 पर्यंतच्या संख्या याच सहा स्तंभांत लिहा.
- आता 2, 3, 4 व 6 यांच्या स्तंभांतील 2 व 3 या मूळ संख्या वगळता, उरलेल्या सर्व संख्या संयुक्त आहेत हे पाहा, म्हणजे उरलेल्या सर्व मूळ संख्या 1 व 5 यांच्या स्तंभातच असणार. त्या शोधणे आता सोपे झाले ना ? त्या संख्या शोधा.

अधिक माहितीसाठी

- ज्या मूळ संख्यांमध्ये 2 चा फरक असतो, त्या संख्यांना जुळ्या मूळ संख्या म्हणतात. 3 व 5, 5 व 7, 29 व 31, 71 व 73 या जुळ्या मूळ संख्यांच्या काही जोड्या आहेत.
  5347421 आणि 5347423 ही देखील जुळ्या मूळ संख्यांची एक जोडी आहे.
- 1 पासून 100 पर्यंतच्या संख्यांमध्ये जुळ्या मूळ संख्यांच्या आठ जोड्या आहेत. हे पडताळून पाहा.
- युक्लिड हा गणिती, इसवीसनपूर्वी सुमारे 300 वर्षे या काळात ग्रीसमध्ये होऊन गेला. त्याने असे सिद्ध केले, की 2, 3, 5, 7,.............., अशा क्रमाने मूळ संख्या लिहीत गेल्यास त्यांची यादी कधीच संपणार नाही, म्हणजेच मूळ संख्या अनंत आहेत.

9. दशांश अपूर्णांक

सौमित्र : सर, आज मी औषधाच्या एका खोक्यावर MRP ₹ 24.50 असं लिहिलेलं पाहिलं. याचा अर्थ काय ?

सर : याचा अर्थ, विक्रेत्याला त्या औषधाची किंमत जास्तीत जास्त 24 रुपये 50 पैसे घेता येईल.

रेखा : पण '₹ 24.50' याचा अर्थ 'चोवीस रुपये पन्नास पैसे' कसा होतो ?

सर : 24.50 हे लेखन दशांश पद्‌धतीत केलं आहे, म्हणून तुझ्या प्रश्नाचं उत्तर कळण्यासाठी तुम्हांला आधी दशांश अपूर्णांक आणि ते लिहिण्याची वेगळी पद्‌धत समजून घ्यायला हवी.

❒ दशांश अपूर्णांक

ज्या अपूर्णांकांचे छेद 10, 100, 1000 असे, म्हणजे 10 किंवा 10 च्या दहा-दहा पटींत असतात, त्यांना दशांश अपूर्णांक म्हणतात. जसे, $\frac{5}{10}$, $\frac{68}{100}$, $\frac{285}{100}$ इत्यादी. हे अपूर्णांक अंश-छेद रूपात लिहिले आहेत.

हे अपूर्णांक वेगळ्या पद्‌धतीने लिहिणे सोईचे असते. ही पद्‌धत समजण्यासाठी आपण आपली संख्यालेखन पद्‌धती आठवू. या पद्‌धतीत आपण क्रमाने दशक, शतक, हजार अशी दहा-दहा पट होत जाणारी स्थाने निर्माण करतो. जसे, 10 एककांचा 1 दशक, 10 दशकांचे 1 शतक इत्यादी.

आता आपण उलट विचार करू. एका शतकाचे 10 समान भाग केले, की प्रत्येक भाग 1 दशक असतो. दशकाचे स्थान शतकाला लागून उजवीकडे आहे. एका दशकाचे दहा समान भाग केले. प्रत्येक भाग 1 एकक असतो. त्याचे स्थान दशकाला लागून उजवीकडे आहे.

तसेच 1 एककाचे 10 समान भाग केले, की प्रत्येक भाग $\frac{1}{10}$ असेल. त्याच्यासाठी एककस्थानच्या उजवीकडे स्थान निर्माण करतात. $\frac{1}{10}$ म्हणजे 'एक छेद दहा' म्हणजेच 'एक दशांश' (दश म्हणजे 10 आणि अंश म्हणजे भाग, म्हणून दशांश म्हणजे दहावा भाग), म्हणून या स्थानाला दशांशस्थान म्हणतात.

❒ दशांशचिन्ह

दशांश हे स्थान अपूर्णांक लेखनासाठी निर्माण करतात. संख्यालेखन करताना, संख्येतील पूर्णांक भाग संपल्याची खूण म्हणून, पूर्णांकातील शेवटच्या अंकानंतर '·' असे एक टिंब लिहितात. या खुणेला **दशांशचिन्ह** म्हणतात. दशांशचिन्ह वापरून $8\frac{5}{10}$ हा अपूर्णांक 8.5 असा लिहितात. याचे वाचन 'आठ पूर्णांक पाच दशांश' असे किंवा सोईसाठी 'आठ दशांशचिन्ह पाच' असे करतात.

$20\frac{3}{10}$ चे लेखन 20.3 असे करतात.

'सात दशांश' या अपूर्णांकाचे लेखन '$\frac{7}{10}$' आणि '0.7' असे दोन प्रकारे करता येते. यांपैकी '$\frac{7}{10}$' ही लेखनाची व्यवहारी पद्‌धत आहे आणि '0.7' ही दशांश पद्‌धत आहे.

उदाहरणसंग्रह 36

खालील अपूर्णांक दशांश पद्धतीत लिहा आणि वाचा.

(1) $3\frac{9}{10}$ (2) $1\frac{4}{10}$ (3) $5\frac{3}{10}$ (4) $\frac{8}{10}$ (5) $\frac{5}{10}$

❒ शतांशस्थान

$\frac{1}{10}$ या अपूर्णांकाचे 10 समान भाग केले, तर प्रत्येक भाग $\frac{1}{100}$ म्हणजे एक शतांश होतो, म्हणून 1 दशांश = 10 शतांश किंवा ·1 = ·10 हे लक्षात घ्या. $\frac{1}{100}$ ला 10 ने गुणल्यावर $\frac{10}{100} = \frac{1}{10}$ हा अपूर्णांक मिळतो, म्हणून दशांशस्थानाला लागून उजवीकडे शतांशस्थान तयार करता येते. शतांशाचे स्थान तयार करून $\frac{14}{100}$ हा अपूर्णांक 0·14 असा लिहितात.

$$\frac{14}{100} = \frac{10+4}{100} = \frac{10}{100} + \frac{4}{100} = \frac{1}{10} + \frac{4}{100}$$

म्हणून $\frac{14}{100}$ चे दशांश रूपात लेखन करताना दशांशस्थानात 1 आणि शतांशस्थानात 4 हा अंक येतो.

या अपूर्णांकाचे लेखन 0.14 आणि वाचन 'शून्य पूर्णांक चौदा शतांश' किंवा सोईसाठी 'शून्य दशांशचिन्ह एक चार' असे करतात. त्याचप्रमाणे $6\frac{57}{100}$ चे लेखन 6.57 आणि $50\frac{71}{100}$ चे लेखन 50.71 असे होते.

$\frac{3}{100}$ चे लेखन करताना **दशांशस्थानात काही नाही** हे लक्षात घेऊन त्या स्थानावर 0 हा अंक लिहावा लागतो, म्हणजे $\frac{3}{100}$ चे लेखन 0.03 असे होते.

खालील सारणीत काही दशांश अपूर्णांकांचे लेखन व वाचन दाखवले आहे. ते अभ्यासा.

व्यवहारी अपूर्णांक	दशक	एकक	दशांश	शतांश	दशांश अपूर्णांक रूपात लेखन	वाचन
$7\frac{5}{10}$		7	5		7.5	सात दशांशचिन्ह पाच
$7\frac{5}{100}$		7	0	5	7.05	सात दशांशचिन्ह शून्य पाच
$\frac{82}{100}$		0	8	2	0.82	शून्य दशांशचिन्ह आठ दोन
$25\frac{6}{100}$	2	5	0	6	25.06	पंचवीस दशांशचिन्ह शून्य सहा

उदाहरणसंग्रह 37

खालील अपूर्णांक दशांश रूपात लिहा आणि वाचा.

(1) $9\frac{1}{10}$ (2) $9\frac{1}{100}$ (3) $4\frac{53}{100}$ (4) $\frac{78}{100}$ (5) $\frac{5}{100}$ (6) $\frac{5}{10}$ (7) $\frac{2}{10}$ (8) $\frac{20}{100}$

❐ दशांश अपूर्णांकातील अंकांची स्थानिक किंमत

पूर्णांक संख्यांतील अंकांची स्थानिक किंमत आपण ठरवतो. त्याच पद्धतीनं दशांश अपूर्णांकातील अंकांची स्थानिक किंमत ठरवता येते.

उदा. (1) 73.82 या संख्येत 7 या अंकाची स्थानिक किंमत $7 \times 10 = 70$ आणि 3 या अंकाची स्थानिक किंमत $3 \times 1 = 3$, तसेच 8 या अंकाची स्थानिक किंमत $8 \times \frac{1}{10} = \frac{8}{10} = 0.8$ आणि 2 या अंकाची स्थानिक किंमत $2 \times \frac{1}{100} = \frac{2}{100} = 0.02$

उदा. (2) 210.86 या संख्येतील अंकांची स्थानिक किंमत

अंक	2	1	0	8	6
स्थान	शतक	दशक	एकक	दशांश	शतांश
स्थानिक किंमत	2×100 $= 200$	1×10 $= 10$	0 0	$8 \times \frac{1}{10}$ $= 0.8$	$6 \times \frac{1}{100}$ $= 0.06$

उदाहरणसंग्रह 38

खालील अपूर्णांक वाचा आणि प्रत्येक अंकाची स्थानिक किंमत लिहा.

(1) 6.13 (2) 48.84 (3) 72.05 (4) 3.4 (5) 0.59

❐ दशांश अपूर्णांकाचा उपयोग

सर : आता आपण '24.50 रुपये म्हणजे 24 रुपये 50 पैसे,' हे कसं हे पाहू. 1 पैसा म्हणजे किती रुपये?

सौमित्र : 100 पैसे म्हणजे 1 रुपया, म्हणून 1 पैसा म्हणजे 1 शतांश रुपया, म्हणजेच 0.01 रुपया.

सर : आणि 50 पैसे म्हणजे ?

सौमित्र : 50 शतांश रुपया, म्हणजेच 0.50 रुपया, म्हणून 24.50 रुपये म्हणजे 24 रुपये 50 पैसे.

सर : जेव्हा एखाद्या राशीच्या मोठ्या एककाचे 10 किंवा 100 भाग करून लहान एकक निश्चित केलेली असतात, तेव्हा त्या राशींचं लेखन दशमान पद्धतीत करणं फारच सोईच असतं. जसं आता आपण पाहिलं, 100 पैसे = 1 रुपया. तसं 100 सेमी = 1 मीटर, म्हणून 75 सेमी म्हणजे 0.75 मी.

10 मिलिमीटर = 1 सेंटिमीटर, म्हणून 1 मिमी म्हणजे 0.1 सेमी. 3 मिमी म्हणजे 0.3 सेमी. 6.3 सेमी म्हणजे 6 सेमी 3 मिमी.

आता पुढील सारणी अभ्यासा.

100 पैसे = 1 रुपया	100 सेमी = 1 मी
1 पैसा = $\frac{1}{100}$ रुपया = 0.01 रुपया	1 सेमी = $\frac{1}{100}$ मी = 0.01 मी.
50 पैसे = $\frac{50}{100}$ रुपया = 0.50 रुपया	25 सेमी = $\frac{25}{100}$ मी = 0.25 मी.
75 पैसे = $\frac{75}{100}$ रुपया = 0.75 रुपया	60 सेमी = $\frac{60}{100}$ मी = 0.60 मी = 0.6 मी.

1 रुपया = 100 पैसे		1 मी = 100 सेमी	
5 रुपये = 500 पैसे		8 मी = 800 सेमी	
0.50 रुपया = 0.5 रुपया = 50 पैसे		0.3 मी = 30 सेमी	
0.07 रुपया = 7 पैसे		0.40 मी = 40 सेमी	
4.5 रुपये = 4 रुपये 50 पैसे		2.65 मी = 2 मी 65 सेमी	
17.65 रुपये = 17 रुपये 65 पैसे		14.9 मी = 14 मी 90 सेमी	

उदाहरणसंग्रह 39

1. किती रुपये आणि किती पैसे, हे लिहा.

(1) ₹ 58.43 (2) ₹ 9.30 (3) ₹ 2.30 (4) ₹ 2.3

2. किती रुपये हे दशांश पद्धतीत लिहा.

(1) 6 रुपये 25 पैसे (2) 15 रुपये 70 पैसे (3) 8 रुपये 5 पैसे (4) 22 रुपये 4 पैसे (5) 720 पैसे

3. किती मीटर आणि किती सेंटिमीटर हे लिहा.

(1) 58.75 मी (2) 9.30 मी (3) 0.30 मी (4) 0.3 मी

(5) 1.62 मी (6) 91.4 मी (7) 7.02 मी (8) 0.09 मी

4. किती मीटर हे दशांश पद्धतीत लिहा.

(1) 1 मी 50 सेमी (2) 50 मी 40 सेमी (3) 50 मी 4 सेमी (4) 734 सेमी

(5) 10 सेमी (6) 2 सेमी

5. किती सेमी आणि किती मिमी हे लिहा.

(1) 6.9 सेमी (2) 20.4 सेमी (3) 0.8 सेमी (4) 0.5 सेमी

6. किती सेमी हे दशांश पद्धतीत लिहा.

(1) 7 सेमी 1 मिमी (2) 16 मिमी (3) 144 मिमी (4) 8 मिमी

❏ अर्धा, पाव, पाऊण, सव्वा इत्यादींचे दशांश अपूर्णांकांत लेखन

'अर्धा' याचे व्यवहारी अपूर्णांकात लेखन आपण $\frac{1}{2}$ असे करतो. याच अपूर्णांकाचे लेखन दशांश पद्धतीत करण्यासाठी $\frac{1}{2}$ चे छेद 10 असणाऱ्या सममूल्य अपूर्णांकात रूपांतर करावे लागेल.

$\frac{1}{2} = \frac{1\times5}{2\times5} = \frac{5}{10}$ म्हणून, $\frac{1}{2}$ चे दशांश अपूर्णांकात लेखन $\frac{5}{10}$ किंवा 0.5 असे होते.

लक्षात घ्या, की अर्धा $= \frac{1}{2} = \frac{1\times5}{2\times5} = \frac{5}{10} = 0.5$ तसेच $\frac{1}{2} = \frac{1\times50}{2\times50} = \frac{50}{100} = 0.50$

म्हणून 'अर्धा' याचे लेखन दशांश अपूर्णांकात 0.5 किंवा 0.50 असेही करता येते.

'पाव' आणि 'पाऊण' यांचे लेखन व्यवहारी अपूर्णांकात अनुक्रमे $\frac{1}{4}$ आणि $\frac{3}{4}$ असे करतात. यांचे दशांश अपूर्णांकात रूपांतर करू. 4 च्या पटीत 10 येत नाहीत, म्हणून $\frac{1}{4}$ आणि $\frac{3}{4}$ यांचे छेद 10 असणाऱ्या

अपूर्णांकात रूपांतर करता येणार नाही, पण $4 \times 25 = 100$ म्हणून छेद 100 करता येईल.

पाव $= \frac{1}{4} = \frac{1\times25}{4\times25} = \frac{25}{100} = 0.25$ आणि पाऊण $= \frac{3}{4} = \frac{3\times25}{4\times25} = \frac{75}{100} = 0.75$

सव्वा $= 1\frac{1}{4} = 1.25$ दीड $= 1\frac{1}{2} = 1.50 = 1.5$

पावणेदोन $= 1\frac{3}{4} = 1.75$ साडेसतरा $= 17\frac{1}{2} = 17.50 = 17.5$

उदाहरणसंग्रह 40

खालील अपूर्णांकांचे लेखन दशांश अपूर्णांकांत करा.

(1) अडीच (2) सव्वादोन (3) पावणेतीन (4) साडेदहा

(5) पावणेपंधरा (6) सव्वासोळा (7) साडेअठ्ठावीस

दशांश अपूर्णांकांची बेरीज

सर : समजा, एका पेन्सिलची किंमत अडीच रुपये आणि एका पेनची किंमत साडेचार रुपये आहे, तर त्यांची एकूण किंमत किती ?

सौमित्र : अडीच रुपये म्हणजे दोन आणि अर्धा रुपया आणि साडेचार रुपये म्हणजे चार आणि अर्धा रुपया. 4 रुपये आणि 2 रुपये मिळून झाले 6 रुपये आणि दोन अर्धे रुपये मिळून 1 रुपया, म्हणून दोन्ही वस्तूंचे एकूण $6 + 1$ म्हणजे 7 रुपये.

सर : बरोबर ! आता हीच बेरीज दशांश पद्धतीत कशी केली आहे, हे पाहा. शतांशस्थानच्या शून्यांची बेरीज 0 आली.

$0.5 + 0.5$ म्हणजे $\frac{5}{10} + \frac{5}{10} = \frac{5+5}{10} = \frac{10}{10} = \frac{1}{1} = 1$

$$\begin{array}{r} {}^{1} \\ 2.50 \\ +\ 4.50 \\ \hline 7.00 \end{array}$$

हा एक, हातचा म्हणून एककस्थानात नेला. बेरजेत दशांशस्थानी काही नाही, म्हणून त्या स्थानी शून्य लिहिले. एककस्थानातील $2 + 4 = 6$ अधिक हातचा $1 = 7$ म्हणून 2.50 रुपये आणि 4.50 रुपये यांची बेरीज 7.00 रुपये.

पूर्णांक संख्यालेखनासाठी आपण दशमान पद्धत वापरतो. तीच पद्धत विस्तारून दशांश अपूर्णांक लिहितो; म्हणून आपण पूर्णांकांची बेरीज जशी करतो, अगदी तशीच दशांश अपूर्णांकांची बेरीज करता येते.

आता मी बेरजेची आणखी काही उदाहरणं सोडवून दाखवतो. ती अभ्यासा.

(1) $\begin{array}{r} 3.7 \\ +\ 12.2 \\ \hline 15.9 \end{array}$ (2) $\begin{array}{r} 6.8 \\ +\ 5.5 \\ \hline 12.3 \end{array}$ (3) $\begin{array}{r} 16.9 \\ +\ 7.5 \\ \hline 24.4 \end{array}$

सौमित्र : पहिल्या बेरजेत हातचा आलेला नाही. दुसऱ्या व तिसऱ्या बेरजेत हातचे आहेत.

रेखा : पूर्णांकांची बेरीज करताना आपण एककांत एकक आधी मिळवतो. तसंच इथे आधी दशांशात दशांश मिळवले आहेत. दुसऱ्या उदाहरणात दशांशस्थानच्या अंकांची बेरीज 13 आली आहे. 13 दशांश म्हणजे 10 दशांश + 3 दशांश = 1 एकक + 3 दशांश.

सौमित्र : म्हणून बेरजेत दशांशस्थानात 3 हा अंक राहिला आणि 1 एकक हातचा म्हणून एककाच्या स्थानी गेला. बेरीज 6 + 5 आणि हातचा 1 मिळून 12 आली.

सर : तुमची निरीक्षणं अगदी बरोबर आहेत. पूर्णांकांची बेरीज करताना दिलेल्या संख्यांतील अंक जसे आपण त्यांची स्थानं लक्षात घेऊन एकाखाली एक लिहितो, तसेच ते इथंही लिहायचे. संख्या लिहिताना आणि त्यांच्या बेरजेतही, दशांशचिन्ह एकाखाली एक आलं पाहिजे, हेही लक्षात घ्या.

✤ खालील बेरजा अभ्यासा. (लक्षात घ्या : 10 दशांश = 1 एकक. 10 शतांश = 1 दशांश)

उदा. (1) बेरीज करा : 7.09 + 54.93

आधी शतांशस्थानच्या अंकांची बेरीज केली. 9 + 3 = 12

	1	1		1	
+		7	.	0	9
	5	4	.	9	3
	6	2	.	0	2

शतांशस्थानच्या 12 मधील 1 हातचा दशांशस्थानी नेला व 2 शतांशस्थानात लिहिले. दशांशस्थानचे पहिले 9 आणि हातचा 1 मिळून 10 दशांश झाले. 10 दशांश म्हणजे 1 एकक. तो 1 एककस्थानी हातचा म्हणून नेला. बेरजेत दशांशस्थानी काही राहिले नाही, म्हणून 0 लिहिले. याप्रमाणे बेरीज पूर्ण केली.

उदा. (2) बेरीज करा : 45.83 + 167.4

```
   45.83
+ 167.4
--------
```

अंकांची स्थाने आणि दशांशचिन्हे एकाखाली एक येतील अशा रीतीने संख्यांची मांडणी केली.

	1	1	1			
+		4	5	.	8	3
	1	6	7	.	4	0
	2	1	3	.	2	3

$\frac{4}{10} = \frac{4\times10}{10\times10} = \frac{40}{100}$, म्हणून अपूर्णांकांचे छेद समान होण्यासाठी 167.4 हे 167.40 असे लिहिले. नंतर दोन्ही अपूर्णांकांची बेरीज केली.

नेहमीप्रमाणे सर्वांत कमी स्थानिक किमतीच्या अंकांची बेरीज करून क्रमाने मोठ्या स्थानिक किमतीच्या अंकांची बेरीज केली.

उदा. (3)

```
   10.46 रुपये
+  35.92 रुपये
--------------
   46.38 रुपये
```

उदा. (4)

```
   48.80 मी
+   2.57 मी
-----------
   51.37 मी
```

उदा. (5)

```
    7.5 सेमी
+  14.2 सेमी
+   9.6 सेमी
------------
   31.3 सेमी
```

उदाहरणसंग्रह 41

1. दशांश अपूर्णांकात रूपांतर करून खालील बेरजा करा.

(1) दीड मीटर आणि अडीच मीटर (2) पावणेपाच रुपये आणि सव्वासात रुपये

(3) साडेसहा मीटर आणि पावणेतीन मीटर

2. (1) 23.4 + 87.9 (2) 35.74 + 816.6 (3) 6.95 + 74.88 (4) 41.03 + 9.98

3. (1) 51.4 सेमी + 68.5 सेमी (2) 94.7 मी + 1738.45 मी (3) 5158.75 रुपये + 841.25 रुपये

❒ दशांश अपूर्णांकांची वजाबाकी

पुढे दिलेली दशांश अपूर्णांकांची वजाबाकी अभ्यासा.

$$\begin{array}{r} 15.41 \\ -\ \ 8.58 \\ \hline 6.83 \end{array}$$

दशक	एकक	दशांश	शतांश
	14	13	
0	4	3	11
– ~~1~~	~~5~~ . 8	~~4~~ 5	1 8
0	6 .	8	3

1 शतांशातून 8 शतांश वजा होत नाहीत, म्हणून 4 दशांशांपैकी 1 दशांशाचे 10 शतांश केले. ते 10 आणि आधीचा 1 मिळून 11 शतांश झाले. या 11 शतांशांतून 8 शतांश वजा केले. 3 शतांश राहिले. ते शतांशस्थानात रेषेखाली लिहिले. नंतरच्या स्थानांसाठी याप्रमाणेच कृती करून वजाबाकीचे उदाहरण पूर्ण केले.

उदाहरणसंग्रह 42

1. वजाबाकी करा.

(1) 25.74 – 13.42 (2) 206.35 – 168.22 (3) 63.4 – 31.8 (4) 63.43 – 31.8

(5) 63.4 – 31.83 (6) 8.23 – 5.45 (7) 18.23 – 9.45 (8) 78.03 – 41.65

2. वृंदाची उंची 1.48 मी होती. एक वर्षानंतर तिची उंची 1.53 मी झाली. एका वर्षात तिची उंची किती सेमी वाढली ?

अधिक माहितीसाठी

❒ मापनाची दशमान एकके

अंतर, वस्तुमान (वजन) आणि आकारमान यांचे मापन ही दैनंदिन गरज आहे. मापनासाठी आपण गरजेनुसार लहान-मोठी एकके वापरतो. अंतरासाठी किलोमीटर, मीटर, सेंटिमीटर; आकारमानासाठी लीटर, मिलिलीटर आणि वस्तुमानासाठी किलोग्रॅम, ग्रॅम ही एकके नित्य वापरातील आहेत.

ही सर्व एकके दशमान मापन पद्धतीतील आहेत. या पद्धतीत वस्तुमान, अंतर आणि आकारमान यांच्यासाठी अनुक्रमे ग्रॅम, मीटर आणि लीटर ही मूळ एकके मानतात. त्यांपासून तयार केलेली मोठी एकके त्यांच्या 10-10 पटीने वाढतात व लहान एकके $\frac{1}{10}$ पटीत लहान होतात.

या एककांचा खालील तक्ता पाहा.

राशी	किलो (हजार)	हेक्टो (शतक)	डेका (दशक)	मापनाचे मूळ एकक	डेसि (दशांश)	सेंटि (शतांश)	मिलि (हजारांश)
अंतर	1 किमी = 1000 मी	1 हेक्टोमीटर = 100 मी	1 डेकामीटर = 10 मी	मीटर	1 डेसिमीटर $= \frac{1}{10}$ मी	1 सेंटिमीटर $= \frac{1}{100}$ मी	1 मिलिमीटर $= \frac{1}{1000}$ मी
वस्तुमान				ग्रॅम			
आकारमान				लीटर			

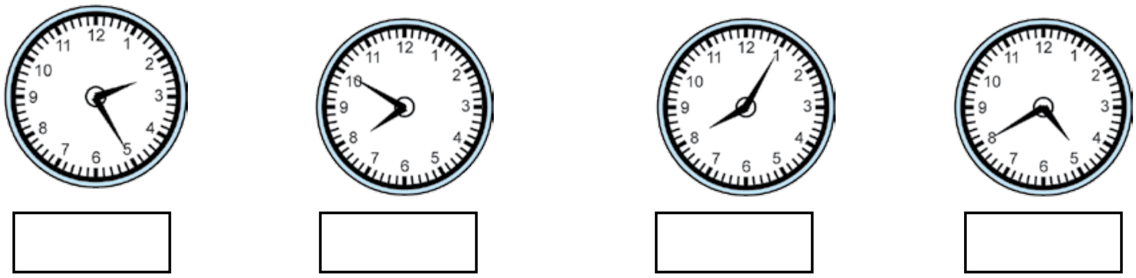
किलो, हेक्टो, ... मिली या शब्दांचे मूळ ग्रीक किंवा लॅटिन भाषेत आहे. त्यांचे या संदर्भात असलेले मराठीतील अर्थ त्या शब्दांशेजारी कंसात दिले आहेत.

10. कालमापन

❐ उजळणी

उदाहरणसंग्रह 43

1. प्रत्येक घड्याळात दाखवलेली वेळ त्याखालील चौकटीत लिहा.



2. चौकटीत लिहिलेली वेळ त्यावरील घड्याळात काट्यांनी दाखवा.

साडेचार	सव्वानऊ	पावणेपाच	11 वाजून 20 मि

3. नाशिकहून पहाटे 5 वाजता निघालेली बस पुण्याला त्याच दिवशी सकाळी साडेदहा वाजता पोहोचते, तर या प्रवासास किती वेळ लागतो ?
4. रात्री सव्वानऊ वाजता सुरू होणारे नाटक वीज गेल्यामुळे अर्धा तास उशिरा सुरू झाले, म्हणजे ते नाटक किती वाजता सुरू झाले ?
5. मुंबईहून रात्री 10 वाजून 15 मिनिटांनी निघालेली रेल्वे नागपूरला दुसऱ्या दिवशी दुपारी 1 वाजून 40 मिनिटांनी पोहोचली, तर या प्रवासास किती वेळ लागला ?

❐ सेकंदाची ओळख

या घड्याळात 3 वाजून 5 मिनिटे झाली आहेत, हे आपल्याला तासकाटा व मिनिटकाटा कुठे आहे यावरून समजते. याच घड्याळात अजून एक काटा दिसत आहे. तो 10 वर आहे. या काट्याला सेकंदकाटा म्हणतात. हा काटा भराभर फिरताना दिसतो. एक मिनिटापेक्षा कमी वेळ मोजण्यासाठी सेकंद हे अगदी लहान एकक वापरतात.

घड्याळाच्या तबकडीवर पूर्ण वर्तुळाचे 60 भाग केलेले असतात. सेकंदकाटा 1 घर पुढे जातो, तेव्हा 1 सेकंद होतो. तो एक फेरी पूर्ण करतो, म्हणजे 60 घरे फिरतो. तेव्हा 60 सेकंद होतात. तेवढ्याच वेळात मिनिटकाटा 1 घर पुढे जातो, म्हणजे 1 मिनिट होते.

यावरून, 1 मिनिट म्हणजे 60 सेकंद होतात.

1 मिनिट = 60 सेकंद

चित्रातील घड्याळात 3 वाजून 5 मिनिटे आणि 50 सेकंद झाले आहेत.

7 वाजून 20 मिनिटे 10 सेकंद

10 वाजून 15 मिनिटे 40 सेकंद

तापमापकाने ताप मोजताना, छातीचे ठोके मोजताना किंवा धावण्याच्या शर्यतीत अशा वेगवेगळ्या कारणांसाठी वेळ मोजण्याकरता सेकंदांचा उपयोग होतो.

❒ मध्यान्हपूर्व व मध्यान्होत्तर

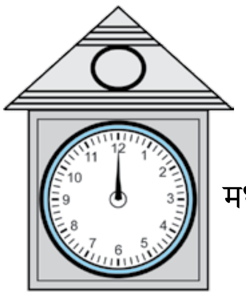
श्रीपती रात्री दमून बसला होता. घरी पाहुणे आले होते. त्यांनी विचारले, ''आज शेतात बरंच काम झालं वाटतं ? किती वेळ शेतावर होतास ?''

श्रीपती म्हणाला, ''सहापासून आठ वाजेपर्यंत मी शेतावरच होतो.''

पाहुणा म्हणाला, ''म्हणजे दोनच तास शेतावर होतास तर एवढा दमलास ?''

श्रीपती म्हणाला, ''नाही, नाही. सकाळी 6 वाजल्यापासून रात्री 8 वाजेपर्यंत शेतावर होतो, म्हणजे किती तास शेतावर होतो, तुम्हीच सांगा.''

श्रीपतीने सांगितलेले पाहुण्याला नीट समजले नाही. असे होऊ नये म्हणून आंतरराष्ट्रीय संकेतानुसार रात्री 12 वाजता एक दिवस संपून दुसरा दिवस सुरू झाला असे मानतात. तेव्हापासून दुसऱ्या दिवसाची वेळ घड्याळात दिसते. रात्री 12 वाजून गेल्यावर 1 तास झाला, की 1 वाजतो. नंतर क्रमाने 2, 3, 4, ..., 12 वाजतात. दुपारचे 12 वाजून गेल्यावरही तसेच 1, 2, 3, ..., 12 वाजतात. दुपारच्या 12 च्या आधीची वेळ मध्यान्हपूर्व किंवा am अशी सांगतात, तर दुपारच्या 12 च्या नंतरची वेळ मध्यान्होत्तर किंवा pm अशी सांगतात.



कालमापनाच्या या पद्धतीला 12 ताशी कालमापन पद्धत म्हणतात.

श्रीपती 6 am पासून 8 pm पर्यंत म्हणजे 14 तास शेतावर होता.

❒ 24 ताशी कालमापन

मध्यान्हपूर्व आणि मध्यान्होत्तर अशी विभागणी टाळण्यासाठी 24 ताशी कालमापन पद्धत वापरली जाते. रेल्वे, विमान, बस, लांबच्या बोटी यांच्या वेळापत्रकांसाठी ही पद्धत वापरतात. या पद्धतीत दुपारी 12 नंतर पुन्हा 1, 2, 3, ..., 12 याऐवजी 13, 14, 15, ..., 24 असे तास मोजतात. 24 तासांच्या डिजिटल घड्याळात वेळ केवळ अंकात दाखवली जाते. त्यात काटे नसतात. डिजिटल घड्याळात सकाळचे 6 वाजून 20 मिनिटे ही वेळ '6:20' अशी, तर संध्याकाळचे 6 वाजून 20 मिनिटे ही वेळ '18:20' अशी दाखवली जाते.

23:59 म्हणजे 23 वाजून 59 मिनिटांनंतर आणखी एक मिनिट झाले, की 24 तास पूर्ण होतात. दिवस बदलतो व डिजिटल घड्याळात 00:00 अशी वेळ दिसते. त्या वेळी आपल्या नेहमीच्या 12 ताशी घड्याळात मध्यरात्रीचे 12 वाजतात.

पूर्ण दिवसातील वेगवेगळ्या वेळा 12 ताशी आणि 24 ताशी कालमापन पद्धतीत कशा दाखवल्या जातात, हे खालील सारणीवरून पाहा.

12 ताशी कालमापन		24 ताशी कालमापन	12 ताशी कालमापन		24 ताशी कालमापन
0:05 am	रात्री 12 वाजून 5 मिनिटे	00:05	12:05 pm	दुपारी 12 वाजून 5 मिनिटे	12:05
1:20 am	रात्री 1 वाजून 20 मिनिटे	01:20	1:20 pm	दुपारी 1 वाजून 20 मिनिटे	13:20
6:55 am	सकाळी 6 वाजून 55 मिनिटे	06:55	6:55 pm	सायंकाळी 6 वाजून 55 मिनिटे	18:55
10:15 am	सकाळी 10 वाजून 15 मिनिटे	10:15	10:15 pm	रात्री 10 वाजून 15 मिनिटे	22:15
12:00	दुपारी 12 वाजले	12:00	12:00	रात्री 12 वाजले	00:00 म्हणजेच 24:00

बडनेऱ्याहून सुटून नागपूरला जाणाऱ्या काही आगगाड्यांचे वेळापत्रक खाली दिले आहे. त्यात केलेला 24 ताशी घड्याळाचा वापर पाहा व समजून घ्या.

गाडीचे नाव	गाडीचा क्रमांक	बडनेऱ्याहून सुटते	नागपूरला पोहोचते
हावडा मेल	12809	07 : 45	11:05
शालीमार एक्सप्रेस	18024	09 : 45	13:10
मुंबई मेल	21028	13 : 05	17:20
मालदा टाउन एक्सप्रेस	13426	23 : 10	01:55

उदाहरणसंग्रह 44

1. खाली 12 ताशी घड्याळातील वेळ दिली आहे. ती 24 ताशी घड्याळात किती दाखवली जाईल, ते लिहा.

मध्यान्हपूर्व 10 वाजून 30 मिनिटे		मध्यान्हपूर्व 8 वाजून 10 मिनिटे	
मध्यान्होत्तर 1 वाजून 20 मिनिटे		मध्यान्होत्तर 5 वाजून 40 मिनिटे	

2. जोड्या लावा.

12 ताशी कालमापन	**24 ताशी कालमापन**
सकाळी 9:10	23:10
दुपारी 2:10	7:25
सायंकाळी 5:25	14:10
रात्री 11:10	9:10
सकाळी 7:25	17:25

❒ कालमापनावर आधारित उदाहरणे

उदा. (1) अब्दुलने संगणकावर काम करण्यास सकाळी 11 वाजता सुरुवात केली व दुपारी 3:30 वाजता त्याचे काम संपले, तर त्याने किती वेळ काम केले ?

रीत 1 : सकाळी 11 ते दुपारी 12 पर्यंत म्हणजे 1 तास
दुपारी 12 ते 3:30 पर्यंत म्हणजे 3 तास 30 मिनिटे
म्हणजे एकूण 4 तास 30 मिनिटे

रीत 2 : 24 ताशी कालमापनाप्रमाणे
सकाळी 11 म्हणजे 11:00 आणि
दुपारी 3:30 म्हणजे 15:30

	तास	मिनिटे
	15	30
–	11	00
	4	30

अब्दुलने एकूण 4 तास 30 मिनिटे, म्हणजेच साडेचार तास काम केले.

उदा. (2) बेरीज करा.

4 तास 30 मि. + 2 तास 45 मि.

	तास	मिनिटे
	4	30
+	2	45
	6	75
	7	15

75 मिनिटे
= 1 तास 15 मि.

उदा. (3) वजाबाकी करा.

5 तास 30 मि. – 2 तास 45 मि.

	तास	मिनिटे
	4	60 + 30
	~~5~~	30
–	2	45
	2	45

30 मिनिटातून 45 मिनिटे वजा करता येत नाहीत म्हणून 1 तास मोकळा करून त्याची 60 मिनिटे केली.

उदा. (4) अमृताने 3 तास 40 मिनिटे बसने व 1 तास 45 मिनिटे मोटरसायकलने प्रवास केला, तर तिने एकूण किती वेळ प्रवास केला ?

	तास	मिनिटे	
	3	40	बसच्या प्रवासाचा वेळ
+	1	45	मोटरसायकलच्या प्रवासाचा वेळ
	4	85	
	5	25	एकूण प्रवासाचा वेळ

85 मिनिटे म्हणजे (60 + 25) मिनिटे
म्हणजेच 1 तास 25 मिनिटे.
हा 1 तास 4 तासांत मिळवू,

म्हणून अमृताने एकूण 5 तास 25 मिनिटे प्रवास केला.

उदाहरणसंग्रह 45

1. बेरीज करा.

(1) 2 तास 30 मिनिटे + 4 तास 55 मिनिटे
(2) 3 तास 50 मिनिटे + 4 तास 20 मिनिटे
(3) 3 तास 45 मिनिटे + 1 तास 35 मिनिटे
(4) 4 तास 15 मिनिटे + 2 तास 50 मिनिटे

2. वजाबाकी करा.

(1) 3 तास 10 मिनिटे – 2 तास 40 मिनिटे
(2) 5 तास 20 मि. – 2 तास 35 मिनिटे
(3) 4 तास 25 मिनिटे – 1 तास 55 मिनिटे
(4) 6 तास 15 मि. – 2 तास 45 मिनिटे

3. एक सरकारी कार्यालय सकाळी 7 वाजता सुरू होते व दुपारी 3 वाजता बंद होते, तर ते कार्यालय किती वेळ चालू असते ?

4. दुपारी 3 वाजून 45 मिनिटांनी सुरू झालेला चित्रपट अडीच तासांनी संपला, म्हणजे तो किती वाजता संपला ?

5. सखारामने सकाळी 8 पासून दुपारी 12:30 पर्यंत शेत नांगरले व तो घरी जाण्यास निघाला. दुपारी 1:30 वाजता तो घरी पोहोचला. तर त्याने किती वेळ शेत नांगरले ? घरी येण्यासाठी त्याला किती वेळ लागला ?

6. रामभाऊंनी रात्री साडेदहा वाजता पाण्याचा पंप सुरू केला व त्याच रात्री पावणेबारा वाजता बंद केला, तर त्यांनी किती वेळ पंप चालू ठेवला ?

7. गीताने सकाळी 2 तास 25 मिनिटे व दुपारी 1 तास 45 मिनिटे वर्गात शिकवले, तर तिने एकूण किती वेळ वर्गात शिकवले ?

8. बँकेचे कामकाज सकाळी 10 पासून दुपारी 4:30 पर्यंत चालते, तर बँकेचे कामकाज किती वेळ चालते ?

9. एक दुकान 9:30 am ला उघडते आणि 10 pm ला बंद होते, तर ते दुकान किती वेळ उघडे असते ?

10. कोल्हापूरहून 15:30 वाजता सुटणारी महाराष्ट्र एक्सप्रेस गोंदिया येथे दुसऱ्या दिवशी 20:15 वाजता पोहोचते, तर कोल्हापूर ते गोंदिया या प्रवासाला किती वेळ लागतो ?

11. मापनावरील उदाहरणे

दैनंदिन व्यवहारात आपण लांबी, वस्तुमान, धारकता मोजण्यासाठी अनुक्रमे मीटर, ग्रॅम, लीटर ही एकके वापरतो. बाजारहाट करताना रुपये, पैसे ही एकके वापरतो, तसेच कालावधी मोजण्यासाठी दिवस, तास, मिनिटे या एककांचा उपयोग करतो. बेरीज, वजाबाकी, गुणाकार, भागाकार या चार मूलभूत क्रिया मापनाच्या या एककांमध्ये कशा करायच्या हे आपण पाहू.

उदा. (1) बेरीज करा.

37 किमी 250 मी + 15 किमी 950 मी

	किमी	मी
	11	
+	37	250
	15	950
	53	200

250 + 950 = 1200

1200 मी = 1 किमी + 200 मी

53 किमी 200 मी

उदा. (2) वजाबाकी करा.

7 ली 150 मिली – 2 ली 500 मिली

	ली	मिली
	6	1150
–	~~7~~	~~150~~
	2	500
	4	650

150 मधून 500 वजा होत नाहीत. 1 लीचे 1000 मिली केले.

4 ली 650 मिली

उदाहरणसंग्रह 46

1. बेरीज करा.

(1) 9 रुपये 50 पैसे + 14 रु. 60 पै.

(2) 6 सेमी 5 मिमी + 7 सेमी 9 मिमी

(3) 22 मी 50 सेमी + 25 मी 75 सेमी

(4) 15 किमी 740 मी + 13 किमी 950 मी

(5) 25 किग्रॅ 650 ग्रॅ + 29 किग्रॅ 770 ग्रॅ

(6) 19 ली 840 मिली + 25 ली 250 मिली

2. वजाबाकी करा.

(1) 19 रुपये 50 पैसे – 12 रुपये 60 पैसे

(2) 24 सेमी 2 मिमी – 3 सेमी 8 मिमी

(3) 20 मी 30 सेमी – 17 मी 60 सेमी

(4) 40 किमी 255 मी – 17 किमी 960 मिमी

(5) 35 किग्रॅ 150 ग्रॅ – 26 किग्रॅ 470 ग्रॅम

(6) 46 ली 200 मिली – 38 ली 750 मिली

❐ शाब्दिक उदाहरणे

खालील उदाहरणे अभ्यासा.

उदा. (1) एका दुकानदाराने 150 किग्रॅ 500 ग्रॅम तांदळापैकी 75 किग्रॅ 750 ग्रॅम तांदूळ विकला, तर त्याच्याकडे किती तांदूळ शिल्लक राहिला ?

	किग्रॅ	ग्रॅ
	149	1500
–	~~150~~	~~500~~
	75	750
	74	750

74 किग्रॅ 750 ग्रॅम तांदूळ शिल्लक राहिला.

उदा. (2) दुधाच्या एका कॅनमध्ये 20 लीटर 450 मिली दूध आहे. दुसऱ्या कॅनमध्ये 18 लीटर 800 मिली दूध आहे, तर दोन्ही कॅनमध्ये मिळून एकूण किती दूध आहे ?

एकूण दूध 39 लीटर 250 मिली आहे.

	ली	मिली
	1	
	20	450
+	18	800
	39	250

उदा. (3) एका आगगाडीचा वेग ताशी 90 किमी आहे, तर ती अडीच तासांत किती अंतर जाईल ?

आगगाडीचा वेग ताशी 90 किमी आहे, म्हणजे ती आगगाडी एका तासात 90 किमी जाते.

दुसऱ्या तासात आणखी 90 किमी.

पुढील अर्ध्या तासात $90 \div 2 = 45$ किमी.

एकूण कापलेले अंतर $90 + 90 + 45 = 225$ किमी.

उदा. (4) एका ड्रेससाठी 3 मीटर 25 सेमी कापड लागते, तर 4 ड्रेससाठी किती कापड लागेल ?

मंजूची रीत :

	3 मी 25 सेमी	पहिल्या ड्रेससाठी
+	3 मी 25 सेमी	दुसऱ्या ड्रेससाठी
+	3 मी 25 सेमी	तिसऱ्या ड्रेससाठी
+	3 मी 25 सेमी	चौथ्या ड्रेससाठी
	12 मी 100 सेमी	

100 सेमीचा 1 मीटर, म्हणून $12 + 1 = 13$ मी

कुणालची रीत :

	मी	सेमी
	3	25
×		4
	12	100

12 मी 100 सेमी = 13 मी

उदा. (5) 9 मीटर 50 सेमी लांबीच्या तारेचे, 5 सेमीचा एक याप्रमाणे तुकडे केले, तर किती तुकडे तयार होतील ?

9 मी 50 सेमी = (900 + 50) सेमी

5 सेमी लांबीचा एक याप्रमाणे 950 सेमी लांबीच्या तारेच्या तुकड्यांची संख्या काढण्यासाठी भागाकार करू.

```
      190
5 )  950
    - 5
    ----
      45
    - 45
    ----
      000
    -   0
    ----
        0
```

190 तुकडे तयार होतील.

उदा. (6) संध्याकाळी 6 वाजून 30 मिनिटांनी सुरू झालेले नाटक पावणेतीन तासांनी संपले, तर नाटक किती वाजता संपले ?

	ता.	मि.
	6	30
+	2	45
	8	75

75 मि. = 60 मि. + 15 मि.

= 1 ता. + 15 मि.

8 तास + 1 तास 15 मि. = 9 तास 15 मि.

नाटक रात्री 9 वाजून 15 मिनिटांनी संपले.

लक्षात घ्या : लांबी, वस्तुमान, धारकता यांच्या मापनाची एकके दशमान पद्धतीत लिहिली आहेत. त्यामुळे लांबी, वस्तुमान, धारकता या राशींमध्ये बेरीज, वजाबाकी या क्रिया करणे सोपे असते.
वेळेच्या मापनाची एकके दशमान पद्धतीत नाहीत. त्यामुळे वेळ या राशींमध्ये बेरीज, वजाबाकी या क्रिया करणे तेवढे सोपे नसते.

उदाहरणसंग्रह 47

1. वाढदिवसानिमित्त अजयने एका आश्रमशाळेतील मुलांना 20 लीटर 450 मिली आणि एका अनाथालयातील मुलांना 28 लीटर 800 मिली दूध वाटले, तर अजयने एकूण किती दूध वाटले ?
2. ग्रामस्वच्छता अभियानामध्ये महाविद्यालयीन विद्यार्थ्यांनी एका गावातील 2 किलोमीटर 575 मीटर लांबीच्या रस्त्यापैकी 1 किलोमीटर 750 मीटर लांबीच्या रस्त्याची स्वच्छता केली, तर किती लांबीच्या रस्त्याची स्वच्छता करायची राहिली ?
3. बाभूळगावाने प्रक्रिया केलेले 21,250 लीटर सांडपाणी शेतीसाठी वापरले. संवत्सर गावाने प्रक्रिया केलेले 31,350 लीटर सांडपाणी शेतीसाठी वापरले, तर एकूण किती लीटर सांडपाण्याचा वापर शेतीसाठी झाला ?
4. अर्धा लीटर दुधाला 22 रुपये लागतात, तर 7 लीटर दुधाला किती रक्कम लागेल ?
5. एका मोटरसायकलचा वेग ताशी 40 किलोमीटर आहे, तर ती सव्वा तासात किती अंतर जाईल ?
6. एका माणसाचा चालण्याचा वेग ताशी 4 किलोमीटर आहे, तर 3 किमी अंतर चालण्यास त्याला किती वेळ लागेल ?
7. एका रिक्षाचा वेग ताशी 30 किलोमीटर आहे, तर ती रिक्षा पाऊण तासात किती अंतर जाईल ?
8. स्वच्छता सप्ताहात मुलांनी आपल्या गावातील सार्वजनिक उद्यानाची सफाई केली. त्या सफाईत प्लॅस्टिकच्या पिशव्या पाऊण किलोग्रॅम व इतर कचरा साडेपाच किलोग्रॅम भरला, तर एकूण किती किलोग्रॅम कचरा जमा झाला ?
9. एका शर्टसाठी 2 मीटर 50 सेमी कापड लागते, तर 5 शर्टांसाठी किती मीटर कापड लागेल ?
10. एक गाडी ताशी 60 किलोमीटर अंतर पार करते, तर ती –
    (1) 2 तासांत किती अंतर जाईल ?
    (2) 15 मिनिटांत किती अंतर जाईल ?
    (3) अर्ध्या तासात किती अंतर जाईल ?
    (4) साडेतीन तासांत किती अंतर जाईल ?
11. सोन्याची एक बांगडी तयार करण्यासाठी 12 ग्रॅम 250 मिलिग्रॅम सोने लागते, तर अशा 8 बांगड्या तयार करण्यासाठी किती सोने लागेल ? (1000 मिलिग्रॅम = 1 ग्रॅम)
12. 20 ग्रॅम लवंगांची एक पिशवी याप्रमाणे 1 किग्रॅ 240 ग्रॅम वजनाच्या लवंगांच्या किती पिशव्या तयार होतील ?
13. सीमाच्या आईने 2 मीटर 70 सेमी कापड कुर्त्यासाठी व 2 मीटर 40 सेमी कापड शर्टसाठी आणले, तर तिने एकूण किती कापड खरेदी केले ?
14. एका पाण्याच्या पिंपात 125 लीटर पाणी मावते. त्यापैकी 97 लीटर 500 मिली पाणी वापरले, तर पिंपात किती पाणी उरले ?
15. हरमिंदरने 57 किग्रॅ 500 ग्रॅम गहू एका दुकानातून व 36 किग्रॅ 800 ग्रॅम गहू दुसऱ्या दुकानातून खरेदी केला, तर त्याने एकूण किती गहू खरेदी केला ?

16. रेणूने 100 मीटर धावण्याच्या शर्यतीत भाग घेतला. 80 मीटर 50 सेमी अंतर धावल्यावर ती अडखळून पडली, तर तिचे किती अंतर धावायचे राहिले ?

17. एका पोत्यात 40 किग्रॅ 300 ग्रॅम भाजी होती. त्यापैकी 17 किग्रॅ 700 ग्रॅम वजनाचे बटाटे, 13 किग्रॅ 400 ग्रॅम वजनाचा कोबी आणि उरलेले कांदे होते, तर कांद्यांचे वजन किती होते ?

18. एके दिवशी गुरमितसिंग 3 किमी 750 मीटर चालला व परमिंदरसिंग 2 किमी 825 मीटर चालला, तर कोण किती अंतर जास्त चालला ?

19. सुरेशने 3 किग्रॅ 250 ग्रॅम टोमॅटो, 2 किग्रॅ 500 ग्रॅम मटार व 1 किग्रॅ 750 ग्रॅम फ्लॉवर खरेदी केला, तर त्याने एकूण किती भाजी आणली ?

20. काही शहरांचे अकोल्यापासूनचे अंतर खाली दिले आहे. त्यावरून उदाहरणे तयार करा व सोडवा.

अमरावती – 95 किमी

भुसावळ – 154 किमी

नागपूर – 249 किमी

जळगाव – 181 किमी

21. पुढील तक्ता पूर्ण करून एकूण बिल तयार करा.

वस्तू	वजन (किग्रॅ)	दर (रुपये प्रतिकिग्रॅ)	किंमत
साखर	2·5	32	
तांदूळ	4·0	35	
हरभरा डाळ	1·5	60	
तूरडाळ	3·0	70	
गहू	7·0	21	
गोडेतेल	1·5	110	
		एकूण	

उपक्रम

- एक किलोग्रॅम बटाट्यांचे वडे तयार करण्यासाठी कोणकोणते साहित्य अंदाजे किती लागेल, ते आणण्यासाठी किती खर्च येईल आणि अंदाजे किती वडे तयार होतील, ही माहिती मिळवा.
- मोकळ्या मैदानात 1 मीटर लांबीची काठी रोवून ठेवा. सकाळी 9:00 वाजता, दुपारी 12 वाजता, दुपारी 3 वाजता आणि सायंकाळी 5 वाजता त्या काठीची सावली मोजा. किती वाजता सावलीची लांबी कमीत कमी होती आणि किती वाजता जास्तीत जास्त होती ते पाहा.
- पेनाच्या रीफिलची लांबी मोजा.

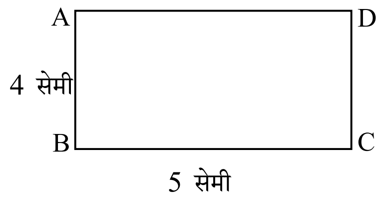
✦✦✦

12. परिमिती व क्षेत्रफळ

❒ परिमिती : उजळणी

बंदिस्त आकृतीला परिमिती असते. बंदिस्त आकृतीच्या सर्व बाजूंच्या लांबींची बेरीज म्हणजे त्या आकृतीची परिमिती, हे तुम्हांला माहीत आहे.

खालील उदाहरणांमधील रिकाम्या चौकटी भरा.

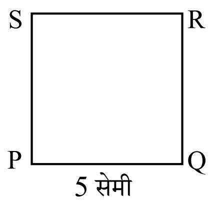
1. 

ABCD या आयताच्या लगतच्या बाजूंची लांबी दिली आहे.

आयत ABCD ची परिमिती ☐ सेमी आहे.

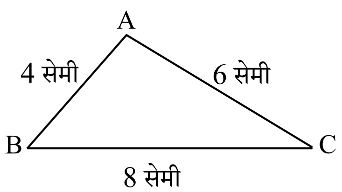
आयताच्या समोरासमोरील बाजूंची लांबी समान असते, हे लक्षात आहे ना ?

2. एका आयताच्या लगतच्या बाजूंच्या लांबी 10 सेमी आणि 7 सेमी आहेत, म्हणून त्या आयताची परिमिती ☐ सेमी आहे.

3. 

PQRS या चौरसाच्या बाजूची लांबी 5 सेमी आहे.

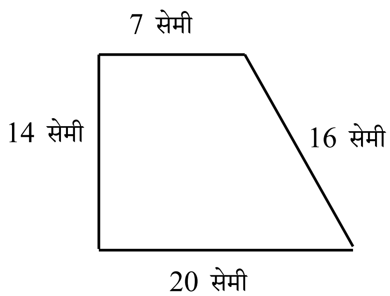
या PQRS चौरसाची परिमिती ☐ सेमी आहे.

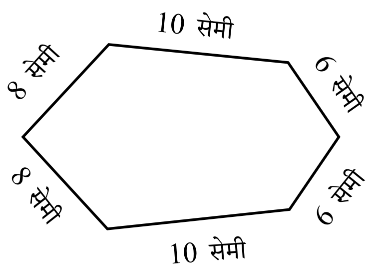
4. 

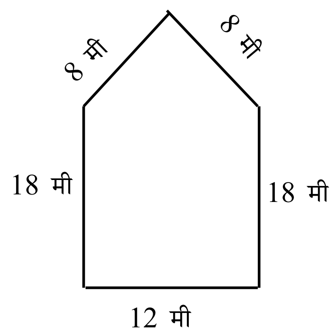
त्रिकोण ABC च्या बाजू AB ची लांबी 4 सेमी, बाजू BC ची लांबी 8 सेमी, बाजू CA ची लांबी 6 सेमी आहे, म्हणून त्रिकोण ABC ची परिमिती ☐ सेमी आहे.

उदाहरणसंग्रह 48

1. खालील प्रत्येक आकृतीची परिमिती आकृतीखालील चौकटींत लिहा.

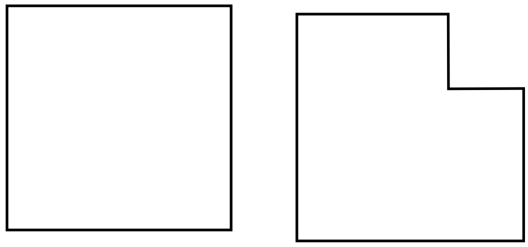




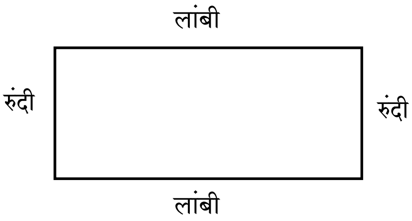


☐ ☐ ☐

2. बाजूची लांबी 3 सेमी असलेल्या चौरसाच्या एका कोपऱ्यातील 1 सेमी बाजू असलेला चौरस कापून घेतला (आकृती पाहा), तर राहिलेल्या आकृतीची परिमिती किती होईल?



❒ आयताच्या परिमितीचे सूत्र



आयताची परिमिती = लांबी + रुंदी + लांबी + रुंदी

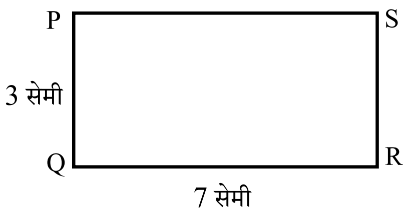
आयताच्या समोरासमोरील बाजू समान लांबीच्या असतात,

म्हणून आयताची परिमिती = दुप्पट लांबी + दुप्पट रुंदी

$= 2 \times$ लांबी $+ 2 \times$ रुंदी

आयताची परिमिती $= 2 \times$ लांबी $+ 2 \times$ रुंदी

उदा. (1) खालील आयताची लांबी 7 सेमी आणि रुंदी 3 सेमी आहे. या आयताची परिमिती शोधू.



आयत PQRS ची परिमिती $= 2 \times$ लांबी $+ 2 \times$ रुंदी

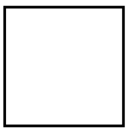
$= 2 \times 7 + 2 \times 3$

$= 14 + 6$

$= 20$

म्हणून आयताची परिमिती 20 सेमी आहे.

❒ चौरसाच्या परिमितीचे सूत्र

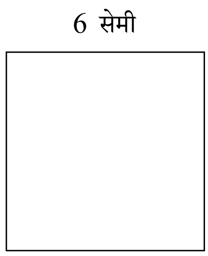


चौरसाच्या सर्व बाजूंची लांबी सारखी असते.

म्हणून चौरसाची परिमिती = एका बाजूच्या लांबीची चौपट

चौरसाची परिमिती $= 4 \times$ एका बाजूची लांबी

उदा. (1) एका चौरसाची बाजू 6 सेमी आहे. त्या चौरसाची परिमिती काढा.



चौरसाची परिमिती त्याच्या बाजूच्या लांबीची चारपट असते.

चौरसाची परिमिती $= 4 \times$ एका बाजूची लांबी

$= 4 \times 6$

$= 24$

म्हणून चौरसाची परिमिती 24 सेमी आहे.

❑ शाब्दिक उदाहरणे

उदा. (1) आयताकार बागेची लांबी 100 मी व रुंदी 80 मी आहे, तर त्या बागेची परिमिती किती होईल ?

आयताची परिमिती $= 2 \times$ लांबी $+ 2 \times$ रुंदी

$= 2 \times 100 + 2 \times 80$

$= 200 + 160$

$= 360$

म्हणून आयताकार बागेची परिमिती 360 मीटर आहे.

उदा. (2) बाजूची लांबी 30 मीटर असलेल्या चौरसाकार जागेच्या कडेने तीनपदरी कुंपण घालण्यासाठी किती मीटर तार लागेल ? ₹ 70 प्रतिमीटरप्रमाणे तारेचा खर्च किती येईल ?

एकपदरी कुंपण घालण्यासाठी चौरसाकार जागेची परिमिती काढावी लागेल.

चौरसाकार जागेची परिमिती $= 4 \times$ एका बाजूची लांबी $= 4 \times 30 = 120$

चौरसाकार जागेची परिमिती 120 मीटर होईल. कुंपण तीनपदरी आहे, म्हणून त्याच्या तीनपट करू.

$120 \times 3 = 360$ मीटर तार लागेल.

आता या तारेला खर्च किती येईल ते काढू.

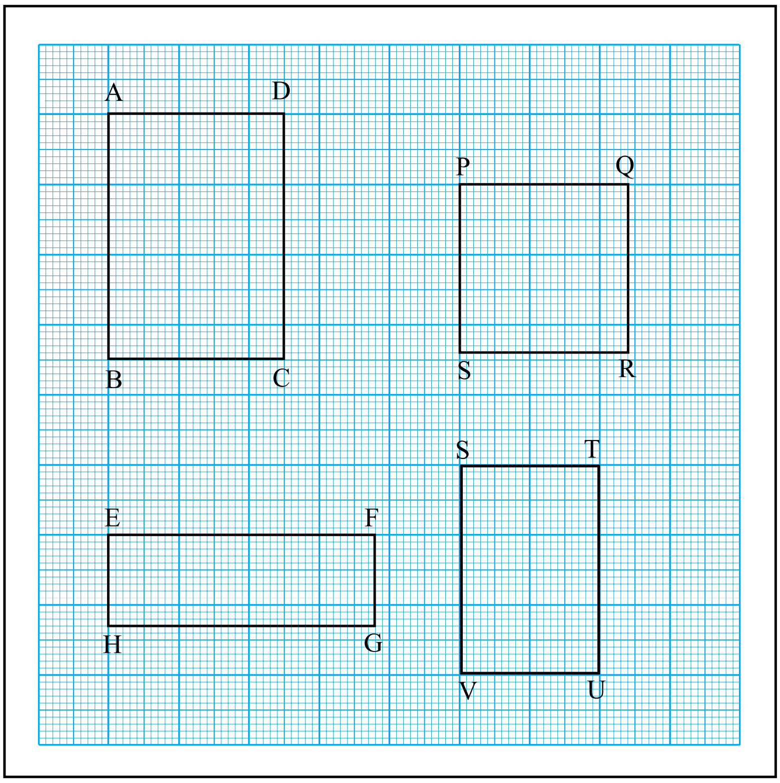
एक मीटर तारेची किंमत ₹ 70 म्हणून 360 मीटर लांब तारेची किंमत $360 \times 70 = 25{,}200$

चौरसाकार जागेला तीनपदरी कुंपण घालण्यास तारेचा एकूण खर्च ₹ 25,200 येईल.

उदाहरणसंग्रह 49

1. लांबी 7 सेमी आणि रुंदी 4 सेमी असलेला आयत तयार करण्यासाठी किती लांबीची तार लागेल ?
2. एका आयताची लांबी 20 मी व रुंदी 12 मी आहे, तर त्या आयताची परिमिती किती ?
3. एका चौरसाची प्रत्येक बाजू 9 मी आहे, तर त्या चौरसाची परिमिती काढा.
4. 160 मीटर लांब व 90 मीटर रुंद असलेल्या मैदानाभोवती 4 फेऱ्या घातल्यास किती किलोमीटर अंतर चालून होईल ?
5. संजू दररोज एका चौरसाकृती बागेभोवती 12 फेऱ्या पूर्ण करतो. बागेच्या प्रत्येक बाजूची लांबी 120 मीटर आहे, तर संजू दररोज किती अंतर चालतो ते किलोमीटर-मीटरमध्ये लिहा.
6. एका आयताकृती भूखंडाची लांबी 50 मीटर व रुंदी 30 मीटर आहे. त्याच्या कडेने तारेचे तीनपदरी कुंपण घालायचे आहे. तारेचा दर 60 रुपये प्रतिमीटर असल्यास, कुंपणासाठी लागणाऱ्या तारेचा खर्च किती येईल ?
7. एका खेळात चौरसाकार क्रीडांगणाभोवती धावावे लागते. क्रीडांगणाच्या प्रत्येक बाजूची लांबी 20 मीटर आहे. एका खेळाडूने त्या क्रीडांगणाभोवती 5 फेऱ्या घातल्या, तर तो किती मीटर अंतर धावला ?
8. 60 मीटर लांब व 40 मीटर रुंद असणाऱ्या शेताला चारपदरी कुंपणतार लावायची आहे, तर त्यासाठी किती तार लागेल ?
9. एका त्रिकोणाच्या बाजूंची लांबी अनुक्रमे 24.7 सेमी, 20.4 सेमी व 10.5 सेमी आहे, तर त्या त्रिकोणाची परिमिती किती ?

10. आलेखकागदावरील आकृत्या पाहा. त्यांच्या बाजू आलेखावरील रेघांच्या साहाय्याने मोजा. प्रत्येक आकृतीची परिमिती योग्य चौकटीत लिहा.



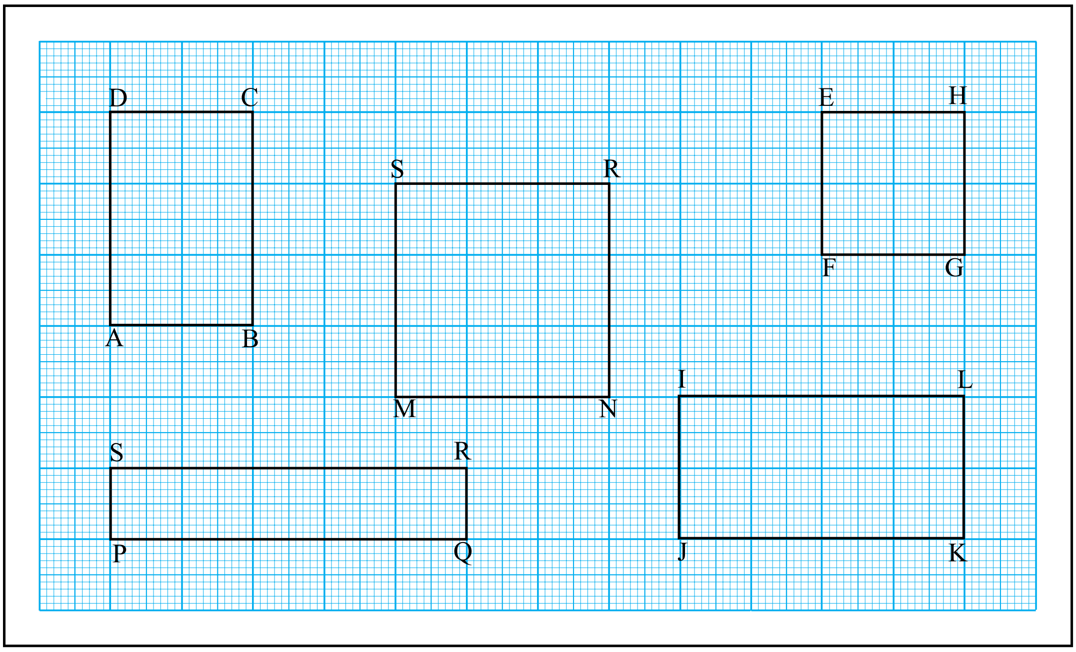
(1) आयत ABCD ची परिमिती = ☐ सेमी

(2) आयत EFGH ची परिमिती = ☐ सेमी

(3) चौरस PQRS ची परिमिती = ☐ सेमी

(4) आयत STUV ची परिमिती = ☐ सेमी

❐ क्षेत्रफळ : उजळणी



वरील आकृत्यांपैकी ABCD या आयतामध्ये 1 सेमी बाजू असलेले 6 चौरस आहेत, म्हणून ABCD या आयताचे क्षेत्रफळ 6 चौसेमी आहे.

याप्रमाणे इतर आकृत्यांतील चौरसांची संख्या मोजा आणि प्रत्येक आकृतीचे क्षेत्रफळ लिहा.

(1) चौरस MNRS चे क्षेत्रफळ = ____ चौसेमी **(2)** चौरस EFGH चे क्षेत्रफळ = ____ चौसेमी

(3) आयत PQRS चे क्षेत्रफळ = ____ चौसेमी **(4)** आयत IJKL चे क्षेत्रफळ = ____ चौसेमी

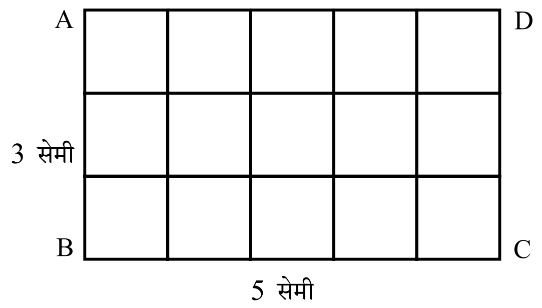
अतुल : सर, क्षेत्रफळाचे एकक चौसेमी असं का लिहिलं जातं ? आपण बाजू तर सेंटिमीटरमधे मोजतो.

शिक्षक : सेंटिमीटर हे लांबीचं प्रमाणित एकक आहे. क्षेत्रफळ मोजायला क्षेत्रफळाचंच प्रमाणित एकक हवं. त्यासाठी 1 सेमी बाजू असलेला चौरस हे प्रमाणित एकक म्हणून घेतात. हे थोडक्यात 1 चौसेमी असं लिहितात.

शेतं, बागा, खेळाची मैदानं इत्यादी मोठी क्षेत्रफळं मोजण्यासाठी 1 मीटर बाजू असलेला चौरस, म्हणजे 1 चौमी हे प्रमाणित एकक वापरतात.

तालुका, जिल्हा इत्यादींची क्षेत्रफळे मोजण्यासाठी 1 किलोमीटर बाजू असलेला चौरस, म्हणजे 1 चौकिमी हे प्रमाणित एकक वापरतात.

❒ आयताच्या क्षेत्रफळाचे सूत्र



(1) शेजारील आकृतीत ABCD आयताच्या प्रत्येक बाजूवर 1 सेमी अंतरावर खुणा केल्या. समोरासमोरील बाजूंवरील खुणा आकृतीत दाखवल्याप्रमाणे जोडल्या. तयार झालेल्या प्रत्येक चौरसाच्या बाजूंची लांबी 1 सेमी आहे, म्हणून तयार झालेल्या प्रत्येक चौरसाचे क्षेत्रफळ 1 चौसेमी आहे.

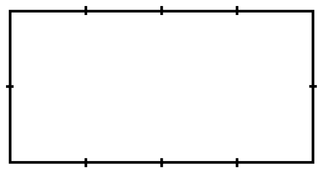
ABCD आयतात, प्रत्येक ओळीत 5 चौरस अशा 3 ओळी तयार झाल्या आहेत.

यावरून ABCD आयतात तयार झालेल्या चौरसांची संख्या $3 \times 5 = 15$, म्हणून ABCD आयताचे क्षेत्रफळ 15 चौसेमी होईल.

येथे आयताची लांबी 5 सेमी व रुंदी 3 सेमी आहे. 5 आणि 3 चा गुणाकार 15 आहे हे लक्षात घ्या.

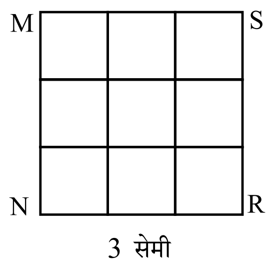
(2) बाजूंची लांबी 4 सेमी आणि 2 सेमी असलेल्या शेजारील आयतामध्ये वरीलप्रमाणेच 1 चौसेमी क्षेत्रफळ असणारे चौरस काढा. चौरसांची संख्या मोजा.

येथेही आयताच्या लांबी व रुंदी यांच्या गुणाकाराएवढे चौरस तयार होतात, हे लक्षात घ्या.



यावरून **आयताचे क्षेत्रफळ = लांबी × रुंदी**

❒ चौरसाच्या क्षेत्रफळाचे सूत्र



(1) शेजारची चौरसाची आकृती पाहा. चौरसाची बाजू 3 सेमी आहे. या चौरसामध्ये 1 चौसेमी क्षेत्रफळ असणारे 9 चौरस तयार झाले आहेत, म्हणजे या चौरसाचे क्षेत्रफळ 9 चौसेमी आहे.

येथे प्रत्येक ओळीत 3 याप्रमाणे 3 ओळींत $3 \times 3 = 9$ चौरस आहेत.

चौरसाच्या प्रत्येक बाजूची लांबी 3 सेमी आहे.

दोन बाजूंच्या लांबींचा गुणाकार $3 \times 3 = 9$ येतो.

(2) 5 सेमी बाजू असलेल्या चौरसाचे क्षेत्रफळ या पद्धतीने मोजून पाहा. ते 25 चौसेमी येईल.

5 × 5 = 25 हे लक्षात घ्या.

यावरून **चौरसाचे क्षेत्रफळ = बाजूची लांबी × बाजूची लांबी**

दिलेल्या आयताचे किंवा चौरसाचे क्षेत्रफळ काढण्यासाठी प्रत्येक वेळी त्यांचे वरीलप्रमाणे लहान चौरसांत विभाजन करण्याची गरज नसते. सूत्रात किमती भरून क्षेत्रफळ काढता येते, हा सूत्राचा फायदा आहे.

❐ शाब्दिक उदाहरणे

उदा. (1) एका आयताची लांबी 20 सेमी व रुंदी 15 सेमी आहे, तर त्या आयताचे क्षेत्रफळ किती ?

आयताचे क्षेत्रफळ = लांबी × रुंदी

= 20 × 15 = 300.

म्हणून आयताचे क्षेत्रफळ 300 चौसेमी.

उदा. (2) लांबी 4 मीटर व रुंदी 3 मीटर असलेल्या एका भिंतीला रंग द्यायचा आहे. एका चौरस मीटरला 25 रुपये मजुरी असल्यास रंग देण्यासाठी किती मजुरी द्यावी लागेल ?

प्रथम रंग देण्याच्या भिंतीचे क्षेत्रफळ काढावे लागेल.

भिंतीचे क्षेत्रफळ = भिंतीची लांबी × भिंतीची रुंदी

= 4 × 3 = 12

म्हणजे भिंतीचे क्षेत्रफळ 12 चौमी आहे.

एका चौरस मीटरला 25 रुपये मजुरी आहे,

म्हणून 12 चौमी भिंतीला रंग देण्यास लागणारी मजुरी

= 12 × 25

= 300

म्हणून भिंतीला रंग देण्यासाठी 300 रुपये मजुरी द्यावी लागेल.

उदा. (3) 15 सेमी बाजू असलेल्या चौरसाचे क्षेत्रफळ किती होईल ?

चौरसाचे क्षेत्रफळ = बाजूची लांबी × बाजूची लांबी

= 15 × 15

= 225

म्हणून या चौरसाचे क्षेत्रफळ 225 चौसेमी आहे.

उदा. (4) एका चौरसाकार खोलीची बाजू 4 मीटर आहे. त्या खोलीला फरशी बसवण्यासाठी एका चौरस मीटरला 35 रुपये याप्रमाणे किती मजुरी द्यावी लागेल ?

प्रथम चौरसाकार खोलीचे क्षेत्रफळ काढावे लागेल.

चौरसाकार खोलीचे क्षेत्रफळ = बाजूची लांबी × बाजूची लांबी = 4 × 4 = 16.

म्हणून चौरसाकार खोलीचे क्षेत्रफळ 16 चौमी आहे.

एक चौरस मीटर फरशी बसवण्यासाठी 35 रुपये मजुरी आहे.

म्हणून 16 चौमी जागेवर फरशी बसवण्यासाठी 16 × 35 = 560 रुपये मजुरी द्यावी लागेल.

उदाहरणसंग्रह 50

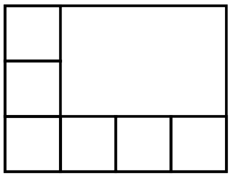
1. प्रत्येक चौरसाच्या बाजूची लांबी दिली आहे. त्यावरून त्याचे क्षेत्रफळ काढा.

(1) 12 मीटर (2) 6 सेमी (3) 25 मीटर (4) 18 सेमी

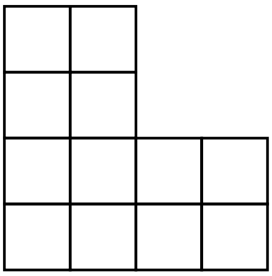
2. 1 चौरस मीटर भूखंडाची किंमत 900 रुपये असल्यास 25 मीटर लांब व 20 मीटर रुंद अशा आयताकार भूखंडाची किंमत ठरवा.

3. एका चौरसाची बाजू 4 सेमी आहे. एका आयताची लांबी 8 सेमी व रुंदी 2 सेमी आहे. या दोन्ही आकृत्यांचे क्षेत्रफळ आणि परिमिती काढा.

4. दर चौरस मीटरला 80 रुपये प्रमाणे 16 मीटर लांब व 12 मीटर रुंद अशा सभागृहाला फरशी बसवण्याची मजुरी किती ?

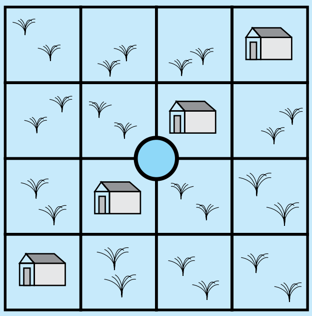
5. 

शेजारील आकृतीत काही चौरस दाखवले आहेत. त्या आकृतीच्या मोकळ्या भागात त्याच मापाचे आणखी किती चौरस बसतील ते सांगा.

6. 

शेजारील आकृतीतील चौरसांची 4 भागांत अशी विभागणी करा, की प्रत्येक भागाचे क्षेत्रफळ आणि आकारही सारखा असेल. हे भाग वेगवेगळ्या रंगांनी रंगवा.

शोधा म्हणजे सापडेल.



शेजारील आकृतीत दाखवल्याप्रमाणे शासनाच्या मालकीच्या एका चौरसाकार जागेवर चार घरे असून जागेच्या मधोमध एक विहीर आहे. शासनाला ती घरे व जमीन चार गरीब व्यक्तींना खालील अटींनुसार समान वाटून द्यायची आहे.

(1) प्रत्येकाला एकच घर मिळाले पाहिजे.

(2) जमिनीचे क्षेत्रफळ व आकार सारखेच असले पाहिजेत.

(3) प्रत्येक व्यक्तीला दुसऱ्याच्या जागेत न जाता विहिरीचा वापर करता आला पाहिजे.

हे वाटप कसे करता येईल, ते चार वेगवेगळ्या रंगांनी रंगवून दाखवा.

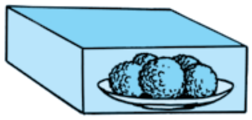
उपक्रम

आलेखकागदाचा उपयोग करून वेगवेगळ्या आयत व चौरसांचे क्षेत्रफळ काढा.

✦✦✦

13. त्रिमितीय वस्तू व घडणी

त्रिमितीय वस्तूंचे द्‌विमितीय रेखाटन



ताईंनी जरा उंच टेबलावरच्या एका वस्तूकडे बोट दाखवून विचारले.

ताई : ते काय आहे ?

शरद : लाडवांचे छानसे चित्र आहे त्या कार्डावर.

ताई : समोरून पाहताय म्हणून चित्राचं कार्ड किंवा कागद दिसतोय फक्त. ते मी जरा वळवून जमिनीवर ठेवते.

शीला : मला वाटलं लाडवांचं छान चित्र आहे, पण ते खोक्यावर चिकटवलं आहे.

ताई : आधी फक्त समोरचा पृष्ठभाग दिसला. आता वरून व वेगळ्या बाजूनं पाहताना तीन पृष्ठभाग दिसले व ते त्रिमितीय खोकं आहे, असं दिसतंय.

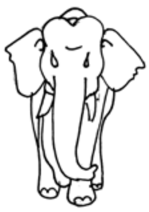
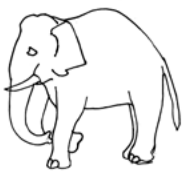
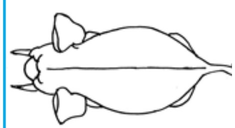
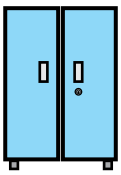
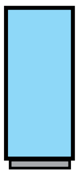
शरद : त्रिमिती म्हणजे काय ?

ताई : ज्या वस्तूंची लांबी, रुंदी व उंची ही तीनही मापे मोजता येतात किंवा जाणवतात, त्यांना त्रिमितीय वस्तू म्हणतात. पुस्तक, ग्लास, टेबल या काही त्रिमितीय वस्तू आहेत. फक्त लांबी व रुंदी असणाऱ्या, जाडी नसलेल्या किंवा नगण्य जाडीच्या वस्तूंना द्‌विमितीय म्हणता येईल. कागद, कागदावरील चित्र, जमिनीवर पडलेली सावली ही द्‌विमितीय आकृतींची उदाहरणं आहेत.

शीला : व्यवहारात सगळ्या वस्तू त्रिमितीय असतात. त्यांची कागदावरील चित्रं द्‌विमितीय असतात.

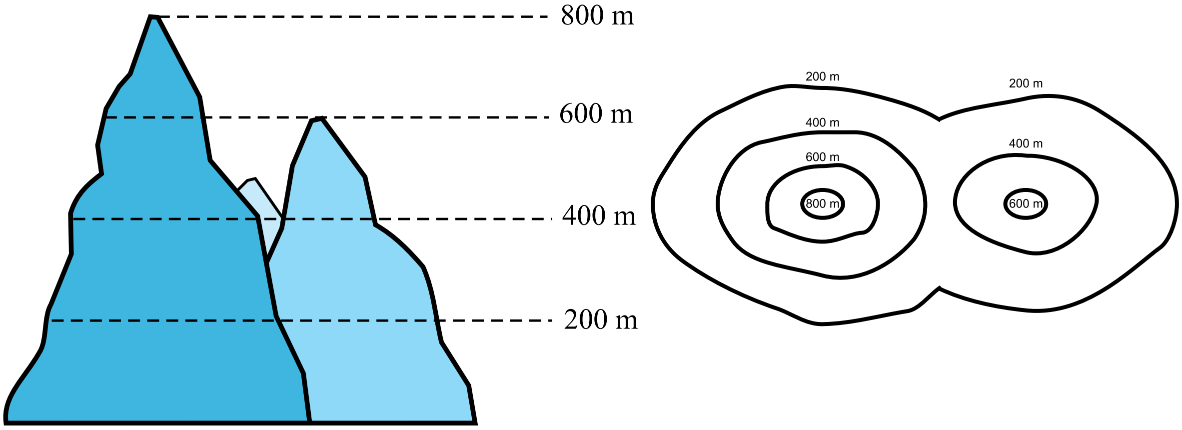
शरद : म्हणून काही चित्रं सपाट वाटतात, तर काही वस्तूंची चित्रं विशिष्ट कोनातून पाहून काढलेली असतात. अशा वस्तूंची जाडी चित्रात जाणवते.

ताई : मी तुम्हांला एक सारणी दाखवते. त्यांत त्रिमितीय वस्तू त्यांच्याकडे समोरून, बाजूनं व वरून पाहिल्यावर कशा दिसतात हे दाखवलं आहे. त्यांचं निरीक्षण करा.

वस्तू	वस्तूचे चित्र		
	समोरून दिसणारे	बाजूने दिसणारे	वरून दिसणारे
हत्ती			
कपाट			

लांबचे डोंगर पाहताना त्यांची उंची व साधारण रुंदी आपल्याला कळते; पण त्यांनी जमिनीचा केवढा भाग व्यापला आहे हे कळत नाही. त्यासाठी हेलिकॉप्टरमधून, त्यांच्या वर जाऊन पाहिले, तर जमिनीच्या किती भागावर डोंगर पसरला आहे हे समजते; पण त्याची उंची समजत नाही, म्हणून डोंगराची व्याप्ती व तो कोणत्या भागात किती उंच आहे हे समजण्यासाठी खालीलप्रमाणे दोन आकृत्या काढतात.

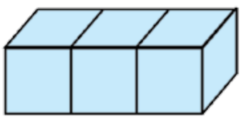
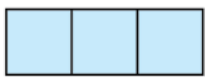
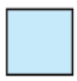
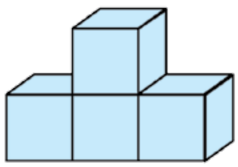
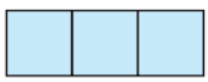
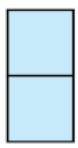
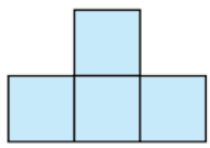
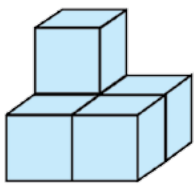
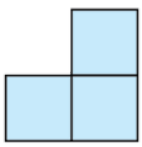
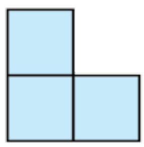
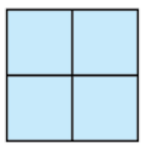
आकृती क्र. 1 मध्ये लांबून दिसणारे डोंगर व त्यांच्या साधारण उंचीच्या रेषा दाखवल्या आहेत. आकृती क्र. 2 मध्ये वरून दिसणारी डोंगराची व्याप्ती आहे व विविध उंचीचे भाग विविध वक्ररेषांनी दाखवले आहेत. जसे, 800 मी दर्शवणारी रेषा साधारणत: 800 मीटर उंची दर्शवते.



भूगोलामध्ये नकाशात डोंगर दाखवताना अशा प्रकारच्या आकृत्या वापरतात.

उदाहरणसंग्रह 51

1. सुरुवातीला ठोकळ्यांच्या रचना दिल्या आहेत. त्यापुढे त्यांची द्विमितीय दृश्ये दिली आहेत. प्रत्येक दृश्य समोरून, बाजूने किंवा वरून दिसणारे असे कोणत्या प्रकारचे आहे, ते ओळखा.

	ठोकळ्यांची रचना	दिसणारी दृश्ये		
(1)				
(2)				
(3)				

2. टेबल, खुर्ची व पाण्याची बाटली या त्रिमितीय वस्तूंची समोरून दिसणारी, वरून दिसणारी आणि बाजूने दिसणारी अशी प्रत्येकी तीन चित्रे कागदावर काढा.

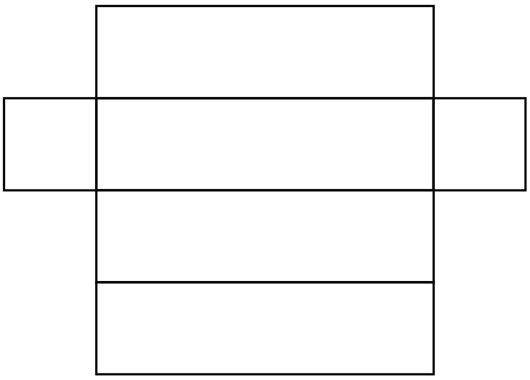
❒ घडणी (Nets)

पुठ्ठ्याच्या एका खोक्याच्या काही कडा कापून ते सपाट करून ठेवल्यास खोक्याची घडण मिळते, हे आपण मागील इयत्तेत पाहिले आहे.

त्रिमितीय आकाराच्या वस्तूचा द्विमितीय आराखडा म्हणजे त्या वस्तूची घडण होय.

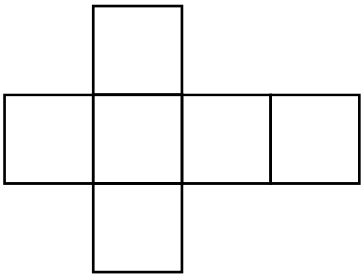
(1) खाली दिलेल्या पुठ्ठ्याच्या आराखड्यातील रेषांवर घड्या घालून आपल्याला त्रिमितीय आकाराची वस्तू (खोके) मिळते. या आकारात सर्व पृष्ठे आयताकार असतात.

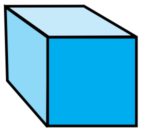
अशा आकाराच्या वस्तूला इष्टिकाचिती म्हणतात. (इष्टिका म्हणजे वीट.)



(2) कागदी पुठ्ठ्याची एक वेगळी घडण खालील आकृतीत दाखवली आहे. या घडणीमधील रेघांवर घड्या घालून कडा एकमेकांना जुळवल्यास आपणांस त्रिमिती आकाराचे खोके तयार झालेले दिसून येईल. या आकारातील सर्व पृष्ठे चौरसाकार आहेत.

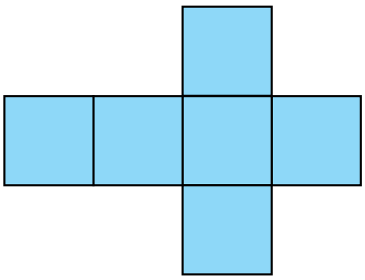
वस्तूच्या अशा आकाराला 'घन' म्हणतात.





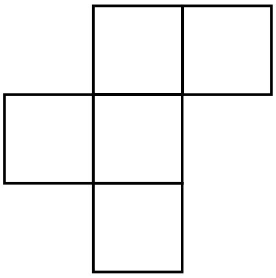
उपक्रम : पोस्टकार्डसारखा जाड कागद घेऊन खाली दिल्याप्रमाणे घडणी कागदावर काढून घ्या. ते आकार कापून घ्या व त्यावरून कोणत्या आकाराची खोकी तयार होतात, ते पाहा.

(1)



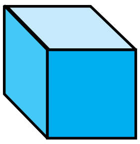
(2)

❑ पाच चौरसांची घडण (पेंटोमिनो)



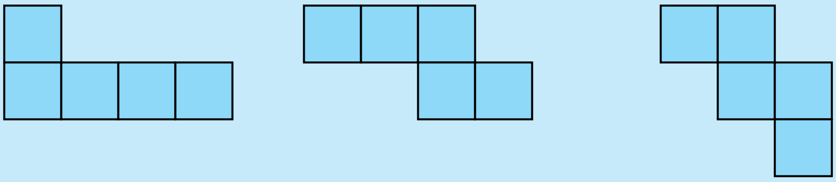
शेजारील आकृतीत सारख्या आकाराचे पाच चौरस, त्यांच्या कडा एकमेकांना जोडून ठेवले आहेत.

पाच चौरसांच्या अशा जोडणीला 'पाच चौरसांची घडण' किंवा 'पेंटोमिनो' म्हणतात.



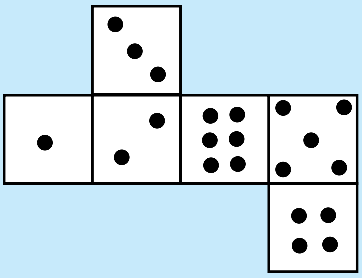
पाच चौरसांची अशी घडण कडांवर दुमडून उघडा डबा तयार करता येतो.

उपक्रम : खाली पाच चौरसांच्या काही घडणी दिल्या आहेत. तशा घडणी जाड कागदावर काढून घ्या. त्यांच्यापासून उघडे डबे तयार करा.

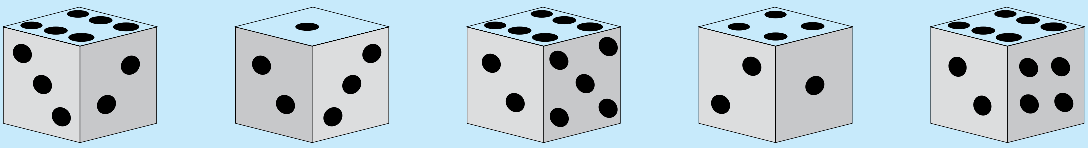


याचसारखे उघडे डबे तयार करण्यासाठी आणखी किती प्रकारांनी पाच चौरसांची घडण तयार करता येईल ते प्रत्यक्ष करून पाहा.

कोडे



एका घन आकाराच्या फाशाची घडण शेजारी दाखवली आहे. या घडणीवरून फासा तयार केला, तर निश्चितपणे तो खालीलपैकी कोणता नसेल ?



(1) (2) (3) (4) (5)

✦✦✦

14. चित्रालेख

क्रिकेटच्या एका सामन्यात तीन गोलंदाजांनी केलेल्या गोलंदाजीची, त्यांना मिळालेल्या बळींची व त्यांनी दिलेल्या धावांची माहिती खालील तक्त्यात दिली आहे.

गोलंदाज	षटके	दिलेल्या धावा	घेतलेले बळी
चंद्रकांत		18	4
रमाकांत		20	–
अहमद		12	2

प्रमाण : 1 चित्र = 1 षटक (6 चेंडू)

वरील तक्त्यावरून खालील प्रश्नांची उत्तरे द्या.

(1) एकूण किती गोलंदाजांची माहिती दिलेली आहे ? (2) सर्वांत जास्त धावा कोणी दिल्या ?

(3) चंद्रकांतने किती षटके टाकली ? (4) रमाकांतने किती बळी घेतले ?

(5) अहमदने एकूण किती चेंडू टाकले ? (6) चंद्रकांतने एकूण किती धावा दिल्या ?

(7) एकूण किती षटके टाकली गेली ? (8) प्रतिषटक कमीत कमी धावा कोणी दिल्या ?

या प्रश्नांच्या उत्तरांवरून लक्षात येते, की या तक्त्यावरून आपणांस चित्रांद्वारे बरीच माहिती मिळते. अशा प्रकारच्या तक्त्यांना माहितीचा चित्रालेख किंवा माहितीचे चित्ररूप असे म्हणतात.

❒ सांख्यिकी माहितीचे चित्ररूप

उदा. (1) एका पाहणीत वेगवेगळ्या प्रकारच्या घरांत राहणाऱ्या विद्यार्थ्यांची संख्या खालीलप्रमाणे नोंदवली.

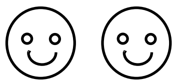
घराचा प्रकार	विद्यार्थी संख्या
बंगला	4
सदनिका	20
साधे घर	8

आपण त्याचा चित्रालेख तयार करू. क्रिकेटमधील षटकांसाठी चेंडूचे चित्र वापरले.

मुलांसाठी कोणते चित्र वापरावे ? अर्थातच असा एखादा चेहरा हे चित्र योग्य ठरेल.

20 मुलांसाठी 20 चेहरे काढायचे का ?

तशी आवश्यकता नसते. माहितीतील संख्यांचे निरीक्षण करून योग्य ते प्रमाण ठरवणे सोईचे असते. जसे, दिलेल्या माहितीतील तीनही संख्यांना 4 ने भाग जातो, म्हणून 4 विद्यार्थ्यांसाठी एक चित्र दाखवले, तर बंगल्यात राहणाऱ्या विद्यार्थ्यांसाठी 1 चित्र, सदनिकांत राहणाऱ्या विद्यार्थ्यांसाठी 5 चित्रे आणि साध्या घरांत राहणाऱ्या विद्यार्थ्यांसाठी 2 चित्रे दाखवावी लागतील. चित्रे काढल्यावर आपला चित्रालेख खालीलप्रमाणे दिसेल.

घराचा प्रकार	विद्यार्थ्यांची संख्या
बंगला	
सदनिका	
साधे घर	

प्रमाण : 1 चित्र = 4 विद्यार्थी

सांख्यिकी माहिती चटकन समजावी, हा चित्रालेखाचा हेतू असतो. लक्षात घ्या, की येथील सांख्यिकी माहितीतील सर्व संख्यांना 2 ने सुद्‌धा भाग जातो, म्हणून 2 विद्यार्थ्यांसाठी एक चित्र असेही प्रमाण घेता येईल. तसे प्रमाण घेतले, तर चित्रांची संख्या वाढेल. त्यामुळे चित्रालेखावरून माहिती चटकन समजणे सुकर होणार नाही.

चित्रालेख काढण्यासाठी आपल्याला –

- सांख्यिकी माहितीतील संख्यांचे निरीक्षण करावे लागेल.
- त्या संख्या कोणकोणत्या संख्यांच्या पाढ्यांत आहेत, हे पाहावे लागेल.
- योग्य प्रमाण निश्चित करावे लागेल.
- योग्य चित्र, चिन्ह म्हणून निवडावे लागेल.
- योग्य ते रकाने करून चित्रालेख काढावा लागेल.
- चित्रालेखाच्या खाली प्रमाण लिहावे लागेल.

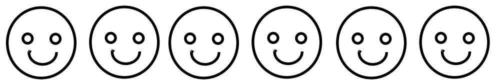
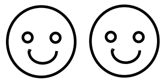
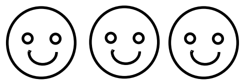
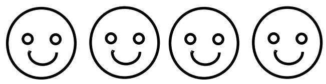
उदा. (2) शाळेतील 150 विद्यार्थ्यांचे पालक कोणता मुख्य व्यवसाय करतात याची विद्यार्थ्यांकडून संकलित केलेली माहिती दिली आहे. त्या आधारे या माहितीचा चित्रालेख तयार करा.

विद्यार्थ्यांच्या पालकांचा व्यवसाय	विद्यार्थी संख्या
शेती	60
खासगी नोकरी	20
सरकारी नोकरी	30
इतर व्यवसाय	40

दिलेल्या सर्व संख्यांना 2, 5 व 10 या संख्यांनी भाग जातो. '10 विद्यार्थ्यांसाठी 1 चित्र' हे प्रमाण सोईचे होईल, म्हणून 60 विद्यार्थ्यांसाठी 6 चित्रे, 20 विद्यार्थ्यांसाठी 2 चित्रे, 30 विद्यार्थ्यांसाठी 3 चित्रे आणि 40 विद्यार्थ्यांसाठी 4 चित्रे काढावी लागतील.

माहितीचे स्वरूप लक्षात घेऊन 10 विद्यार्थ्यांसाठी ' ' हे चित्र वापरू.

आपला चित्रालेख खालीलप्रमाणे दिसेल.

विद्यार्थ्यांच्या पालकांचा व्यवसाय	**विद्यार्थी संख्या**
शेती	
खासगी नोकरी	
सरकारी नोकरी	
इतर व्यवसाय	

प्रमाण : 1 चित्र = 10 विद्यार्थी

उदाहरणसंग्रह 52

1. एका गोदामात विविध प्रकारच्या धान्यांचा साठा खालीलप्रमाणे आहे. दिलेल्या सांख्यिकी माहितीवरून चित्रालेख तयार करा.

धान्य	**पोती**
तांदूळ	40
गहू	56
बाजरी	8
ज्वारी	32

2. वडगावमध्ये असणाऱ्या विविध वाहनांची माहिती दिली आहे. दिलेल्या माहितीवरून चित्रालेख काढा.

वाहनाचा प्रकार	**संख्या**
सायकल	84
स्वयंचलित दुचाकी	60
चारचाकी (कार/जीप)	24
मोठी वाहने (ट्रक, बस इ.)	12
ट्रॅक्टर	24

3. शाळेच्या ग्रंथालयातील एका कपाटात असणाऱ्या विविध पुस्तकांची संख्या दिली आहे. दिलेल्या सांख्यिकी माहितीवरून चित्रालेख तयार करा.

विषय	**पुस्तके**
विज्ञान	28
क्रीडा	14
कविता	21
कथा	35
इतिहास	7

उपक्रम

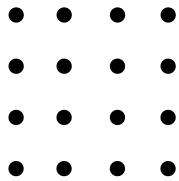
खालील मुद्द्यांच्या आधारे माहिती संकलित करा व त्या माहितीचा चित्रालेख तयार करा.

(1) वर्गातील विद्यार्थ्यांच्या शेतात कोणत्या प्रकारचे पीक घेतले जाते ? (भाजीपाला, धान्य, डाळी, फळे इत्यादी.)

(2) वर्गातील विद्यार्थ्यांना कोणत्या प्रकारच्या गोष्टींची पुस्तके आवडतात ? (परीकथा, राजा-राणी यांच्या कथा, ऐतिहासिक कथा, संतांच्या गोष्टी, चित्रकथा इत्यादी.)

(3) वर्गातील विद्यार्थ्यांना मोठेपणी कोण व्हावे असे वाटते ? (डॉक्टर, शिक्षक, शेतकरी, इंजिनिअर, अधिकारी इत्यादी.)

15. आकृतिबंध



ताई : अरे वा ! किती छान. रांगोळीसाठी एकसारख्या अंतरावर किती छान ठिपके काढले आहेस तू. या ठिपक्यांत दडलेलं गणित तुला दिसलं का ?

सुरेखा : ठिपक्यांत गणित ? माझ्या नाही लक्षात येत.

शबनम : माझ्या लक्षात आलंय ताई. ठिपक्यांची मांडणी **चौरसाकार** झाली आहे.

ताई : अगदी बरोबर सांगितलंस ! आता सांगा, एकूण किती ठिपके काढले आहेत ?

सुरेखा : एका ओळीत 4 ठिपके, अशा 4 ओळी. म्हणजे एकूण $4 \times 4 = 16$ ठिपके.

ताई : छान ! म्हणजे आपल्याला 16 ठिपक्यांची चौरसाकार मांडणी करता येते. आणखी किती ठिपक्यांची चौरसाकार मांडणी करता येईल ?

शबनम : मांडणी चौरसाकार होण्यासाठी प्रत्येक उभ्या आणि आडव्या ओळीत तेवढेच ठिपके असायला हवेत.

सुरेखा : म्हणजे $2 \times 2 = 4$; $3 \times 3 = 9$ असं एका संख्येला त्याच संख्येनं गुणून येणाऱ्या संख्येएवढे ठिपके घेतले, तर त्यांची चौरसाकार मांडणी करता येईल.

ताई : अगदी नेमकी उत्तरं दिलीत तुम्ही. 4, 9, 16, 25, 36 या संख्या ठिपक्यांनी चौरसाकार मांडणीत दाखवता येतात. अशा संख्यांना **चौरस संख्या** म्हणतात.
मग 100 ही चौरस संख्या आहे का ?

सुरेखा : दहा दाहे शंभर, म्हणून 100 ही चौरस संख्या आहे.

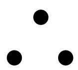
ताई : बरोबर ! आणि 40 ही ?

शबनम : विचार करून सांगते. $6 \times 6 = 36$; $7 \times 7 = 49$ आणि 40 ही संख्या 36 व 49 च्या मधे आहे. म्हणजे एका संख्येला त्याच संख्येनं गुणून गुणाकार 40 येईल, अशी कोणतीही संख्या नाही, म्हणून 40 ही चौरस संख्या नाही.

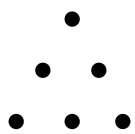
ताई : आता संख्यांची आणखी एक गंमत तुम्हांला सांगते. त्यासाठी $1 + 2$; $1 + 2 + 3$, अशा 1 ते 6 पर्यंतच्या बेरजा करा.

सुरेखा : $1 + 2 = 3$, $1 + 2 + 3 = 6$, $1 + 2 + 3 + 4 = 10$, $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$, $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$.

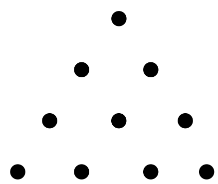
ताई : 3, 6, 10, 15, 21 या संख्यांएवढे ठिपके मी तुम्हांला काढून दाखवते. त्यावरून काही गंमत लक्षात येते का पाहा.



(1+2)



(1+2 + 3)



(1+2 + 3+4)

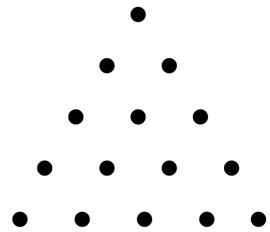
शबनम : आलं लक्षात ताई ! या ठिपक्यांच्या मांडणीनं त्रिकोण तयार झालेत.

ताई : बरोबर. पण त्या त्रिकोणांमधेही विशेष असं काही लक्षात येतंय का ?

सुरेखा : प्रत्येक त्रिकोणाच्या तिन्ही बाजू सारख्या आहेत.

ताई : तुम्ही दोघींनी मिळून नेमकं उत्तर दिलंत ! आता सांगा, 15 ठिपके अशा मांडणीत काढता येतील का ?

शबनम : हो ताई. आता मी तुम्हांला 15 ठिपक्यांची रांगोळी, तिन्ही बाजू सारख्या असलेल्या त्रिकोणी मांडणीत काढून दाखवते.



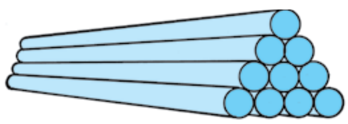
ताई : आता तुम्ही 21 ठिपक्यांची रांगोळी त्रिकोणी मांडणीत काढा.

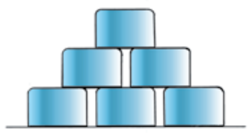
सुरेखा : त्यापुढे असेच आणखी 6 ठिपके वाढवायचे !

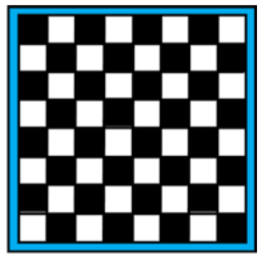
ताई : 3, 6, 10, 15, 21 या संख्यांमधली गंमत लक्षात आली का ? अशा संख्यांना तुम्ही काय नाव द्याल ?

शबनम : त्रिकोणी संख्या !

ताई : बरोबर. या संख्यांना **त्रिकोणी संख्या** असंच म्हणतात. त्रिकोणी आणि चौरस संख्या व्यवहारातही आपल्या अनुभवाला येतात. जसं, घरातील वाट्यांची मांडणी, रस्त्याच्या कडेला एकावर एक ठेवलेल्या नळांची मांडणी, बुद्धिबळाचा पट इत्यादी.







उदाहरणसंग्रह 53

1. पुढील संख्यांमधून चौरस संख्या वेगळ्या करा.
   5, 9, 12, 16, 50, 60, 64, 72, 80, 81
2. पुढीलपैकी त्रिकोणी संख्या कोणत्या ?
   3, 6, 8, 9, 12, 15, 16, 20, 21, 42
3. अशी एक संख्या सांगा, की जी त्रिकोणी आहे आणि चौरस संख्याही आहे.
4. पहिली चौरस संख्या 4 मानली, तर क्रमाने येणारी दहावी चौरस संख्या कोणती ?
5. पहिली त्रिकोणी संख्या 3 मानली, तर क्रमाने येणारी दहावी त्रिकोणी संख्या कोणती ?

विचार करा.

(1) दिलेली संख्या चौरस संख्या आहे का हे कसे ठरवाल ?

(2) दिलेली संख्या त्रिकोणी संख्या आहे का हे कसे ठरवाल ?

(3) चौरस संख्यांची संख्या किती असेल ?

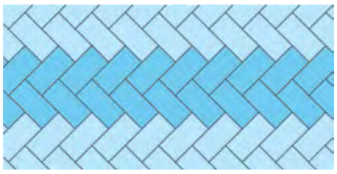
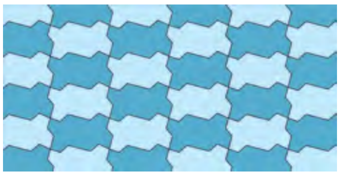
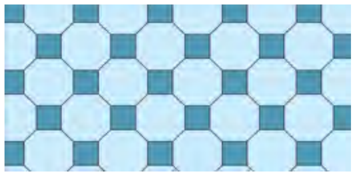
(4) त्रिकोणी संख्यांची संख्या किती असेल ?

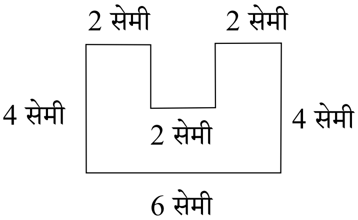
उपक्रम

ज्या चित्रांत त्रिकोणी किंवा चौरस संख्या दिसतात, अशा चित्रांचा संग्रह करा.

❐ फरश्यांच्या जुळणीतील आकृतिबंध

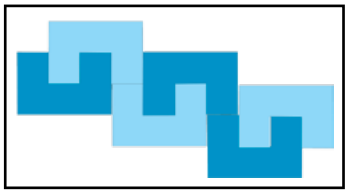
खाली फरश्यांची जुळणी विशिष्ट प्रकारे केली आहे. दोन फरश्यांमध्ये मोकळी जागा राहिलेली नाही किंवा जमिनीचा उघडा भाग राहिलेला नाही, हे लक्षात घ्या. फरश्यांच्या प्रत्येक जुळणीत एक आकृतिबंध दिसतो.

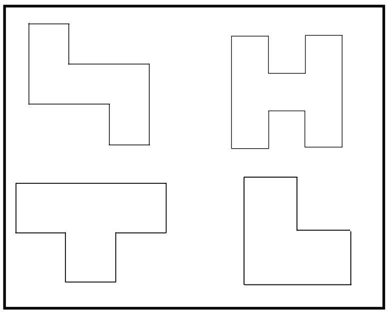






✤ एक मोठे कार्डशीट घ्या. त्यावर शेजारी दाखवल्याप्रमाणे अनेक आकृत्या काढा. त्या कापून वेगळ्या करा. त्यातील निम्मे तुकडे कार्डशीटच्या रंगापेक्षा वेगळ्या रंगाने रंगवा.

या तुकड्यांपासून तयार केलेला एक आकृतिबंध शेजारी दाखवला आहे. असे आणखी आकृतिबंध तुम्ही तयार करा.





✤ शेजारी दाखवल्याप्रमाणे कार्डशीटचे वेगवेगळ्या मापाचे आकार कापून त्यांची फरश्यांप्रमाणे जुळणी करून आकृतिबंध तयार करा.

✤ खाली दिलेल्या प्रत्येक नक्षीतील आकृतिबंध शोधा. त्या आकृतिबंधाचा वापर करून चौकट पूर्ण करा.

✤ तुमच्या मनाने काही आकार तयार करा आणि त्यांच्या आधारे साडी, शाल इत्यादींच्या किनारीसाठी आकृतिबंध तयार करा.

✦✦✦

16. बीजगणिताची पूर्वतयारी

विदुला : सर, दादा म्हणत होता, की तो बीजगणिताचा अभ्यास करतोय. बीजगणित म्हणजे काय हो ?

सर : तुमच्यापुरतं सांगायचं झालं, तर बीजगणित म्हणजे संख्या आणि अक्षरं यांचा वापर करून मांडलेलं गणित.

रवी : म्हणजे अक्षरांमधे बेरीज-वजाबाकी अशा क्रिया करायच्या ? त्या कशा करायच्या ?

सर : ते शिकण्यासाठी पूर्वतयारी म्हणून संख्यांच्या मदतीनं काही गोष्टी शिकूया.

❒ समानता

दोन संख्यांवर बेरीज, वजाबाकी, गुणाकार, भागाकार यांपैकी कोणतीही क्रिया केली, की आलेलं उत्तर म्हणजे एक संख्याच असते. जसं, 5 आणि 3 यांची बेरीज केली, की 8 ही संख्या मिळते. हेच आपण थोडक्यात '$5 + 3 = 8$' असं लिहितो. तसंच $13 - 6 = 7$, $12 \div 4 = 3$, $9 \times 1 = 9$.

आता आपण उलट विचार करू.

दोन संख्यांत क्रिया करून 12 ही संख्या मिळेल. अशा संख्यांच्या जोड्या मिळवू. जसं, $(6 + 6)$, $(15 - 3)$, (6×2), $(24 \div 2)$ इत्यादी.

जेव्हा आपल्याला 'सहा आणि सहा यांची बेरीज करून येणारी संख्या' असं म्हणायचे असतं, तेव्हा ते $(6 + 6)$ असे कंस वापरून दाखवणे सोईचं होतं.

जसे, $(15 - 3)$ म्हणजे 'पंधरातून तीन वजा करून येणारी संख्या'.

(6×2) म्हणजे 'सहाला दोननं गुणून येणारी संख्या'.

$(24 \div 2)$ म्हणजे 'चोवीसला दोननं भागून येणारी संख्या'.

$(6 + 6)$, $(15 - 3)$, (6×2), $(24 \div 2)$ अशा प्रत्येक मांडणीला पदावली असं म्हणतात. या प्रत्येक पदावलीची किंमत 12, म्हणजे समान आहे. या सर्व पदावली एकमेकींशी समान आहेत.

हेच आपण $(6 + 6) = (15 - 3)$, $(6 + 6) = (24 \div 2)$, $(6 \times 2) = (15 - 3)$ असं लिहू शकतो.

$(6 + 6) = (15 - 3)$, $(6 + 6) = (24 \div 2)$ अशा स्वरूपाच्या मांडण्यांना **समानता** म्हणतात.

$5 + 3 = 8$, $9 \times 1 = 9$ याही समानता आहेत.

उदाहरणसंग्रह 54

1. बेरीज 13 येईल अशा संख्यांच्या तीन जोड्या, कंसांचा उपयोग करून लिहा. त्यावरून तीन वेगवेगळ्या समानता लिहा.
2. बेरीज, वजाबाकी, गुणाकार, भागाकार यांपैकी प्रत्येक क्रिया करून 18 ही संख्या मिळेल, अशा संख्यांच्या चार जोड्या लिहा. त्यांवरून चार वेगवेगळ्या समानता लिहा.

❒ असमानता

$7 + 5$ आणि 7×5 या पदावलींच्या किमती अनुक्रमे 12 आणि 35 आहेत, म्हणजे त्या समान नाहीत. 'समान नाहीत' हे सांगण्यासाठी '$\neq$' हे चिन्ह वापरतात.

$(7 + 5)$ आणि (7×5) या पदावली समान नाहीत, हे थोडक्यात $(7 + 5) \neq (7 \times 5)$ असे लिहितात. अशा मांडणीला **असमानता** म्हणतात.

$(9-5) \neq (15 \div 3)$ याचा अर्थ $(9-5)$ आणि $(15 \div 3)$ या पदावलींच्या किमती समान नाहीत.

दोन पदावलींच्या किमती समान नाहीत, म्हणजेच दोन पदावलींच्या किमती लहान-मोठ्या आहेत. लहान-मोठेपणा सांगण्यासाठी आपण '$<$' आणि '$>$' ही चिन्हे वापरतो, म्हणून ही चिन्हे वापरूनही असमानता लिहिता येते.

$(9-5)$ ची किंमत 4 आणि $(15 \div 3)$ ची किंमत 5 आहे. $4 < 5$ म्हणून $(9-5)$ आणि $(15 \div 3)$ या पदावलींतील संबंध $(9-5) < (15 \div 3)$ असा किंवा $(15 \div 3) > (9-5)$ असा लिहिता येतो.

✦ पदावलींच्या जोड्यांमधील चौकटींत $<$, $=$, $>$ यांपैकी योग्य चिन्ह लिहा.

(1) $(9+8)$ ☐ $(30 \div 2)$

$9+8=17,\quad 30 \div 2 = 15$

$17 > 15$

म्हणून $(9+8)$ $\boxed{>}$ $(30 \div 2)$

(2) (16×3) ☐ (4×12)

$16 \times 3 = 48,\quad 4 \times 12 = 48,\quad 48 = 48$

म्हणून (16×3) $\boxed{=}$ (4×12)

(3) $(16-5)$ ☐ (2×7)

$16-5=11,\quad 2 \times 7 = 14,$

$11 < 14$

म्हणून $(16-5)$ $\boxed{<}$ (2×7)

✦ पदावलींच्या जोड्यांमधील चौकटींत अशी संख्या लिहा, की त्यामुळे होणारे विधान बरोबर असेल.

(1) $(7 \times 2) = (\ \square - 6)$

7×2 या पदावलीची किंमत 14 आहे, म्हणून चौकटीत अशी संख्या हवी, की ज्या संख्येतून 6 वजा केल्यावर वजाबाकी 14 येईल. 20 मधून 6 वजा केल्यावर वजाबाकी 14 येते.

म्हणून $(7 \times 2) = (\boxed{20} - 6)$

(2) $(24 \div 3) < (5 + \square)$

$24 \div 3$ या पदावलीची किंमत 8 आहे, म्हणजे चौकटीत अशी संख्या हवी, की ती 5 मध्ये मिळवल्यावर बेरीज 8 पेक्षा जास्त असेल.

आता $5+1=6,\quad 5+2=7,\quad 5+3=8$, म्हणून चौकटीतील संख्या 3 पेक्षा मोठी हवी, म्हणजे चौकटीत 4, 5, 6, ..., अशी कोणतीही संख्या लिहिली तरी चालेल. याचा अर्थ या प्रश्नाची उत्तरे अनेक आहेत. $(24 \div 3) < (5 + \boxed{4})$ हे अनेक उत्तरांपैकी एक आहे. असे असले तरी अशा प्रश्नाचे एकच उत्तर लिहिणे पुरेसे असते.

उदाहरणसंग्रह 55

1. चूक की बरोबर हे सांगा.

(1) $(23+4) = (4+23)$ (2) $(9+4) > 12$ (3) $(9+4) < 12$ (4) $138 > 138$

(5) $138 < 138$ (6) $138 = 138$ (7) $(4 \times 7) = 30 - 2$ (8) $\frac{25}{5} > 5$

(9) $(5 \times 8) = (8 \times 5)$ (10) $(16 + 0) = 0$ (11) $(16 + 0) = 16$ (12) $(9 + 4) = 12$

2. पदावलींच्या जोड्यांतील चौकटींत = , < , > यांपैकी योग्य चिन्ह लिहा.

(1) $(45 \div 9)$ ☐ $(9 - 4)$ (2) $(6 + 1)$ ☐ (3×2) (3) (12×2) ☐ $(25 + 10)$

3. दिलेली विधाने बरोबर होण्यासाठी पदावल्यांमधील चौकटींत योग्य संख्या लिहा.

(1) $(1 \times 7) = (\square \times 1)$ (2) $(5 \times 4) > (7 \times \square)$ (3) $(48 \div 3) < (\square \times 5)$

(4) $(0 + 1) > (5 \times \square)$ (5) $(35 \div 7) = (\square + \square)$ (6) $(6 - \square) < (2 + 3)$

❒ अक्षरांचा उपयोग

गणित विषयाच्या लेखनात चिन्हांचा वापर खूपच केला जातो. चिन्हांचा वापर केल्यामुळे लेखन अतिशय थोडक्यात करता येते. जसे, ‘पंचाहत्तर या संख्येला पंधरा या संख्येने भागल्यावर भागाकार पाच येतो.’ हेच वाक्य, चिन्हे वापरून, ‘$75 \div 15 = 5$’ असे थोडक्यात करता येते. ते समजण्यासही सोपे आहे.

चिन्हांप्रमाणेच अक्षरांचा वापर करूनही लेखन सोपे, सुटसुटीत करता येते.

संख्यांवर बेरीज, वजाबाकी वगैरे क्रिया करताना, क्रियांचे अनेक गुणधर्म तुमच्या लक्षात आले असतील. जसे, $(4 + 9)$, $(9 + 4)$ अशा बेरजांमधून कोणता गुणधर्म लक्षात आला ?

कोणत्याही दोन संख्यांची बेरीज आणि त्याच दोन संख्यांचा क्रम बदलून येणारी बेरीज समानच असते.

आता हा गुणधर्म अक्षरांचा उपयोग करून लिहिला, तर कसा सोपा, आटोपशीर होतो पाहा.

- कोणत्याही दोन संख्यांसाठी आपण a आणि b ही अक्षरे वापरू. त्यांची बेरीज ‘$a + b$’ अशी येईल. त्याच संख्यांचा क्रम बदलून बेरीज ‘$b + a$’ ही येईल. म्हणजे नियम असा होईल –

  a आणि b या कोणत्याही दोन संख्या असतील, तर $(a + b) = (b + a)$.

  आणखी दोन उदाहरणे पाहा.
- कोणत्याही संख्येला 1 या संख्येने गुणले असता गुणाकार त्या संख्येएवढाच येतो. थोडक्यात, $a \times 1 = a$.
- दोन वेगवेगळ्या संख्यांचा भागाकार आणि त्या संख्यांचा क्रम बदलून केलेला भागाकार हे समान नसतात. थोडक्यात, a आणि b या वेगवेगळ्या संख्या असतील, तर $(a \div b) \neq (b \div a)$.

  a ची किंमत 8 आणि b ची किंमत 4 घेऊन हा गुणधर्म तुम्ही पडताळून पाहा.

उदाहरणसंग्रह 56

1. ‘कोणतीही संख्या’ यासाठी अक्षर वापरून पुढील गुणधर्म थोडक्यात लिहा.

(1) कोणत्याही संख्येत शून्य ही संख्या मिळवून येणारी बेरीज त्या संख्येएवढीच असते.

(2) कोणत्याही दोन संख्यांचा गुणाकार आणि त्या संख्यांचा क्रम बदलून केलेला गुणाकार हे समान असतात.

(3) कोणतीही संख्या आणि शून्य यांचा गुणाकार शून्य असतो.

2. अक्षर वापरून लिहिलेले गुणधर्म शब्दांत लिहा.

(1) $m - 0 = m$ (2) $n \div 1 = n$

✦✦✦

महाराष्ट्र राज्य पाठ्यपुस्तक निर्मिती व अभ्यासक्रम संशोधन मंडळ, पुणे-४११००४.

₹३६.००