



8. विभाजक और विभाज्य

विभाग दूसरा

- दादा : मेरे पास 12 पेड़े हैं। कितने-कितने के समूह में पेड़े बाँटे जाएँ कि एक भी पेड़ा न बचे ?
- संजू : बाँटने का अर्थ है, भाग देना। एक भी पेड़ा शेष न रहे, अर्थात् शेषफल 0 रहे।
- अंजू : 2 के पहाड़े में 12 आता है अर्थात् दो-दो के समूह बनाए जा सकते हैं।
- मंजू : 3 के पहाड़े में 12 आता है अर्थात् तीन-तीन के समूह बनाए जा सकते हैं।
- सागर : चार-चार के भी समूह बनाए जा सकते हैं।
- अनिता : क्या पाँच-पाँच के समूह बनाए जा सकते हैं ?
- मंजू : नहीं, क्योंकि 5 के पहाड़े में 12 नहीं आता।
- अंजू : छह से बारह में भाग जाता है इसलिए छह-छह के भी समूह बनाए जा सकते हैं।
- मंजू : 7, 8, 9, 10 और 11 के समूह नहीं बनाए जा सकते, क्योंकि इन संख्याओं के पहाड़े में 12 नहीं आता।
- संजू : 12 का 1 समूह बनाकर भी किसी एक को दिया जा सकता है। एक-एक पेड़ा 12 लोगों को भी बाँटा जा सकता है।
- दादा : अच्छा सोचा तुमने ! 1, 2, 3, 4, 6, 12 इन सभी संख्याओं से 12 में निःशेष भाग जाता है अर्थात् शेषफल शून्य बचता है ; इसलिए इन सबको 12 के **विभाजक** अथवा **गुणनखंड** कहते हैं। इसी प्रकार संख्याएँ 1, 2, 4, 8, 16 संख्या 16 के विभाजक या गुणनखंड हैं।

प्रश्नसंग्रह 32

निम्नलिखित संख्याओं के सभी विभाजक लिखो।

- (1) 8 (2) 5 (3) 14 (4) 10 (5) 7 (6) 22 (7) 25 (8) 32 (9) 33

□ विभाज्य

- दादा : भाजक तथा भाज्य के अर्थ तुम जानते हो; परंतु विभाज्य का क्या अर्थ है, क्या यह जानते हो ?
- अंजू : विभाज्य का क्या अर्थ है, यह मैं नहीं जानती; परंतु मुझे ऐसा लगता है कि उसका संबंध भाज्य के साथ होना चाहिए।
- दादा : उदाहरण द्वारा मैं समझाता हूँ। $20 \div 5$ यह भाग तुम्हें आता है न ?
- अंजू : हाँ, यदि भाज्य 20 में भाजक 5 से भाग दें, तो भागफल 4 आता है और शेषफल शून्य बचता है।
- दादा : जब भाजक से भाज्य में भाग देने पर शेषफल शून्य बचता है, तब उस भाज्य को **विभाज्य** कहते हैं। इसका अर्थ है, यहाँ संख्या 20, संख्या 5 से विभाज्य है। अब $21 \div 5$ का भाग देखो। 21 में 5 से भाग देने पर शेषफल 1 बचता है, इसका अर्थ है संख्या 21, संख्या 5 से विभाज्य नहीं है। दूसरे शब्दों में, जब भाग की क्रिया में शेषफल शून्य बचता है, तब भाजक को विभाजक और भाज्य को विभाज्य कहते हैं।
- अब बताओ 84 खड़ियाँ हैं, क्या इनके छह-छह के समूह बनेंगे ?
- सूरज : मैं 6 से भाग देकर देखता हूँ। 84 में 6 से निःशेष भाग जाता है और भागफल 14 आता है, अर्थात् छह-छह के 14 समूह तैयार होंगे। यहाँ 84 विभाज्य और 6 विभाजक है।

दादा : यदि खड़ियों की संख्या 6, 12, 18, 36, 84 जैसी हो, तो 6-6 के समूह बनाने पर खड़ियाँ समाप्त हो जाएँगी; अर्थात् संख्याएँ 6, 12, 18, 36 और 84 संख्या 6 से विभाज्य हैं अथवा इन संख्याओं में 6 से निःशेष भाग जाता है। खड़ियों की संख्या 6 से विभाज्य है या नहीं, यह जानने के लिए खड़ियों की संख्या में 6 से भाग देकर देखना चाहिए। यदि शेषफल 0 हो, तो वह संख्या 6 से विभाज्य होती है। 3 के पहाड़े में आने वाली प्रत्येक संख्या में 3 से निःशेष भाग जाता है अथवा ये संख्याएँ 3 से विभाज्य होती हैं। इसी प्रकार 7 के पहाड़े में आने वाली सभी संख्याएँ 7 से विभाज्य होती हैं। 9 के पहाड़े में आने वाली सभी संख्याएँ 9 से विभाज्य होती हैं।

हम व्यवहार में भी विभाज्यता की संकल्पना का उपयोग करते हैं। मैं कुछ प्रश्न पूछता हूँ। उसके आधार पर यह बात तुम्हारे ध्यान में आएगी।

मेरे पास 200 मिलीलीटरवाला एक माप है। इसकी सहायता से क्या मैं 1 लीटर दूध नाप सकता हूँ?

सूरज : 1 लीटर का अर्थ है 1000 मिली। $1000 = 200 \times 5$, अर्थात् संख्या 1000 संख्या 200 से विभाज्य है, इसलिए 200 मिलीलीटर की धारितावाले माप से 1 लीटर दूध नापा जा सकता है। 200 मिली के 5 मापों का अर्थ है 1 लीटर।

दादा : 200 मिली की माप से क्या डेढ़ लीटर दूध नापा जा सकता है?

अंजू : डेढ़ लीटर का अर्थ है 1500 मिली। संख्या 1500 संख्या 200 का गुणज नहीं है, अर्थात् संख्या 1500 संख्या 200 से विभाज्य नहीं है; इसलिए 200 मिली की धारितावाले माप से डेढ़ लीटर दूध नहीं नापा जा सकता।

दादा : मेरे पास 400 ग्राम चने हैं। मुझे 60-60 ग्राम वजनवाली चने की पुड़ियाँ बनानी हैं, तो क्या यह किया जा सकता है?

अंजू : 400 के तुरंत बाद आने वाली और 60 से विभाज्य संख्या ज्ञात करनी होगी।

दादा : कम-से-कम और कितने ग्राम चने लाए जाएँ कि 60 ग्राम की पुड़ियाँ पूरी-पूरी संख्या में बनाई जा सकें।

अंजू : 400 के ठीक बाद में आने वाली और 60 से विभाज्य संख्या ज्ञात करनी पड़ेगी। $60 \times 6 = 360$, $60 \times 7 = 420$ इसलिए 20 ग्राम चना और लाना होगा।

□ विभाज्यता की कसौटियाँ

2 के पहाड़े का निरीक्षण करके यह देखो कि इकाई के स्थान पर कौन-कौन-से अंक आते हैं। इसी प्रकार वास्तविक भाग देकर यह देखो कि संख्याओं 52, 74, 80, 96, 98 में 2 से निःशेष भाग जाता है। इसके आधार पर यह निर्धारित करने के लिए कौन-सा नियम प्राप्त होता है कि कोई संख्या 2 से विभाज्य है अथवा नहीं।

अब 5 और 10 के पहाड़ों का निरीक्षण करो।

ज्ञात करो कि 5 और 10 की विभाज्यता का कौन-सा नियम दिखाई देता है।

2 से विभाज्यता की कसौटी : यदि किसी संख्या के इकाई स्थान पर अंकों 0, 2, 4, 6, 8 में से कोई भी एक अंक हो, तो वह संख्या 2 से विभाज्य होती है, अर्थात् उस संख्या में 2 से निःशेष भाग जाता है।

5 से विभाज्यता की कसौटी : यदि किसी संख्या के इकाई स्थान पर अंकों 0, 5 में से कोई भी एक अंक हो, तो वह संख्या 5 से विभाज्य होती है।

10 से विभाज्यता की कसौटी : यदि किसी संख्या के इकाई स्थान पर 0 हो, तो वह संख्या 10 से विभाज्य होती है।

- (1) 2 से विभाज्य तथा तीन अंकवाली पाँच संख्याएँ लिखो ।
(2) तीन अंकवाली ऐसी पाँच संख्याएँ लिखो, जो 5 से विभाज्य हों ।
(3) तीन अंकवाली ऐसी पाँच संख्याएँ लिखो, जो 10 से विभाज्य हों ।
- ऐसी पाँच संख्याएँ लिखो जो 2 और 3, दोनों संख्याओं से विभाज्य हों ।
- 3 मीटर लंबा एक फीता है । क्या उसके ऐसे टुकड़े किए जा सकते हैं कि प्रत्येक टुकड़े की लंबाई 50 सेमी हो, कारण लिखो ।
- 3 मीटर लंबा एक फीता है । इस फीते द्वारा 40 सेमी लंबे 8 टुकड़े बनाने हों, तो कितनी लंबाईवाला फीता कम पड़ेगा ?
- नीचे दी गई सारिणी में यदि दी गई संख्या में दिए गए भाजक से निःशेष भाग जाता हो, तो '✓' चिह्न और यदि भाग न जाता हो, तो '×' चिह्न लगाओ ।

भाजक संख्याएँ →	2	5	10
15	×	✓	×
30			
34			
46			

भाजक संख्याएँ	2	5	10
55			
63			
70			
84			

□ अभाज्य संख्याएँ और भाज्य संख्याएँ

नीचे की तालिका में कुछ संख्याएँ दी गई हैं । इन संख्याओं के सभी विभाजक लिखो ।

संख्याएँ	विभाजक
2	1, 2
3	1, 3
4	1, 2, 4
5	
6	

संख्याएँ	विभाजक
11	
12	
16	
19	
25	

दादा : तालिका से क्या निष्कर्ष निकलता है ?

अजय : 1 प्रत्येक संख्या का एक विभाजक होता ही है । कुछ संख्याओं के केवल दो विभाजक हैं, 1 और स्वयं वह संख्या । जिस प्रकार 3 के विभाजक 1 और 3 ही हैं, उसी प्रकार 2 के विभाजक 1 और 2 तथा 19 के विभाजक 1 और 19 ही हैं । कुछ संख्याओं के दो से अधिक विभाजक हैं ।

दादा : 2, 3, 19 जैसी केवल दो विभाजकोंवाली संख्याओं को अभाज्य संख्या कहते हैं ।

जिस संख्या के 1 और स्वयं वह संख्या, ये दो ही विभाजक होते हैं, उसे अभाज्य संख्या कहते हैं ।

अजय : 4, 6, 16 जैसी संख्याओं के दो से अधिक विभाजक होते हैं, तो इन संख्याओं को क्या कहेंगे ?

दादा : 4, 6, 16 जैसी संख्याओं को भाज्य संख्या कहते हैं ।

जिस संख्या के दो से अधिक विभाजक होते हैं, उसे भाज्य संख्या कहते हैं ।

दादा : संख्या 1, भाज्य संख्या है अथवा अभाज्य, इस पर विचार करो और बताओ ।

अजय : संख्या 1 का केवल एक विभाजक 1 है, इसलिए मुझे लगता है कि वैसा नहीं कह सकते ।

दादा : बिल्कुल ठीक । संख्या 1 को अभाज्य संख्या नहीं मानते और भाज्य संख्या भी नहीं मानते ।

संख्या 1 न तो भाज्य संख्या है और न अभाज्य ।

प्रश्नसंग्रह 34

- 1 से 20 तक की संख्याओं में से सभी अभाज्य संख्याएँ लिखो ।
- 21 से 50 तक की संख्याओं में से सभी भाज्य संख्याएँ लिखो ।
- निम्नलिखित संख्याओं में से अभाज्य संख्याओं के चारों ओर ○ का चिह्न बनाओ ।
22, 37, 43, 48, 53, 60, 91, 57, 59, 77, 79, 97, 100
- अभाज्य संख्याओं में सम संख्याएँ कौन-सी हैं ?

□ सहअभाज्य संख्याएँ

दादा : 12 तथा 18 के सभी विभाजक बताओ ।

अंजू : मैं 12 के विभाजक बताती हूँ : 1, 2, 3, 4, 6, 12

मंजू : मैं 18 के विभाजक बताती हूँ : 1, 2, 3, 6, 9, 18

दादा : अब 12 तथा 18 दोनों संख्याओं के सामान्य विभाजक ज्ञात करो ।

अंजू : सामान्य विभाजक किसे कहते हैं ?

दादा : 1, 2, 3, 6 ये सभी विभाजक दोनों समूहों में हैं अर्थात् 1, 2, 3, 6 ये चारों संख्याएँ, 12 तथा 18 के सामान्य विभाजक हैं । अब 10 और 21 के विभाजक बताओ ।

संजू : 10 के विभाजक : 1, 2, 5, 10

मंजू : 21 के विभाजक : 1, 3, 7, 21

दादा : विभाजकों के दोनों समूहों में कौन-से विभाजक सामान्य हैं ?

संजू : केवल एक ही विभाजक 1 सामान्य है ।

दादा : जिन दो संख्याओं का केवल एक सामान्य विभाजक '1' होता है, उन्हें सहअभाज्य संख्याएँ कहते हैं, इसलिए 10 तथा 21 सहअभाज्य संख्याएँ हैं । 12 तथा 18 के सामान्य विभाजक 1, 2, 3, 6 हैं अर्थात् एक से अधिक विभाजक हैं । इसलिए 12 तथा 18 सहअभाज्य संख्याएँ नहीं हैं ।

अब देखो, क्या 8 और 10 सहअभाज्य संख्याएँ हैं ?

मंजू : 8 के विभाजक 1, 2, 4, 8 और 10 के विभाजक 1, 2, 5, 10 हैं । इन दोनों संख्याओं के दो विभाजक 1 और 2 सामान्य हैं । इसलिए 8 और 10 सहअभाज्य संख्याएँ नहीं हैं ।

यह निर्धारित करो कि क्या नीचे दी गई जोड़ियों की संख्याएँ सहअभाज्य संख्याएँ हैं ।

- (1) 22, 24 (2) 14, 21 (3) 10, 33 (4) 11, 30
(5) 5, 7 (6) 15, 16 (7) 50, 52 (8) 17, 18

- उपक्रम 1 :**
- 1 से 60 तक की संख्याएँ लिखो ।
 - जो संख्याएँ 2 से विभाज्य हों, उन संख्याओं के चारों ओर नीले रंगवाले वृत्त बनाओ ।
 - जो संख्याएँ 4 से विभाज्य हों, उनके चारों ओर लाल रंगवाले वृत्त बनाओ ।
 - जिन संख्याओं के चारों ओर नीले रंगवाले वृत्त हैं, क्या उन सभी संख्याओं के चारों ओर लाल रंगवाले वृत्त भी हैं ?
 - जिन संख्याओं के चारों ओर लाल रंगवाले वृत्त हैं, क्या उन सभी संख्याओं के चारों ओर नीले रंगवाले वृत्त भी हैं ?
 - जो संख्याएँ 2 से विभाज्य हैं, क्या वे सभी संख्याएँ 4 से भी विभाज्य हैं ?
 - जो संख्याएँ 4 से विभाज्य हैं, क्या वे सभी संख्याएँ 2 से भी विभाज्य हैं ?

- उपक्रम 2 :**
- 1 से 60 तक की संख्याएँ लिखो ।
 - उनमें से 2 से विभाज्य संख्याओं के चारों ओर त्रिभुज बनाओ ।
 - अब 3 से विभाज्य संख्याओं के चारों ओर वृत्त बनाओ ।
 - अब 6 से विभाज्य संख्याएँ ज्ञात करो । निरीक्षण करो । बताओ, क्या इससे कोई गुणधर्म ध्यान में आता है ?

□ अभाज्य संख्याएँ ज्ञात करने की इराटोस्थेनिस की विधि

ईसवी सन के लगभग 250 वर्ष पूर्व ग्रीस (यूनान) में इराटोस्थेनिस नामक एक गणितज्ञ हुआ था । उसने अभाज्य संख्या ज्ञात करने की एक विधि की खोज की । इसे **इराटोस्थेनिस की चालनी विधि** कहते हैं । अब यह देखो कि इस विधि से 1 से 100 तक की अभाज्य संख्याएँ कैसे ज्ञात करते हैं ।

- 1 भाज्य संख्या नहीं है और अभाज्य संख्या भी नहीं है । इसके चारों ओर □ चिह्न बनाओ ।
- 2 अभाज्य संख्या है, इसलिए इसके चारों ओर वृत्त बनाओ ।

1	11	21	31	41	51	61	71	81	91
2	12	22	32	42	52	62	72	82	92
3	13	23	33	43	53	63	73	83	93
4	14	24	34	44	54	64	74	84	94
5	15	25	35	45	55	65	75	85	95
6	16	26	36	46	56	66	76	86	96
7	17	27	37	47	57	67	77	87	97
8	18	28	38	48	58	68	78	88	98
9	19	29	39	49	59	69	79	89	99
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

- इसके बाद 2 से विभाज्य सभी संख्याओं पर तिरछी पाई खींचकर उन्हें काट दो । इससे यह ध्यान में आता है कि लगभग आधी से अधिक संख्याएँ अभाज्य नहीं होती ।

- 2 के बाद आने वाली तथा न काटी गई पहली संख्या 3 है। यह अभाज्य संख्या है।
- 3 के चारों ओर वृत्त बनाओ। 3 से विभाज्य सभी संख्याएँ तिरछी पाई खींचकर काट दो।
- 3 के बाद की न कटी हुई पहली संख्या 5 है। यह अभाज्य संख्या है।
- 5 के चारों ओर वृत्त बनाओ। 5 से विभाज्य सभी संख्याएँ तिरछी पाई खींचकर काट दो।
- 5 के बाद न कटी हुई पहली संख्या 7 है। यह अभाज्य संख्या है।
- 7 के चारों ओर वृत्त बनाओ। 7 से विभाज्य सभी संख्याएँ तिरछी पाई खींचकर काट दो।

इसी प्रकार क्रमशः कृति करने पर अंत में पता चलेगा कि 1 से 100 में से 1 को छोड़कर प्रत्येक संख्या के चारों ओर या तो वृत्त होगा अथवा वह संख्या काटी हुई होगी। जिन संख्याओं के चारों ओर वृत्त खींचे गए हैं, वे सभी संख्याएँ अभाज्य संख्याएँ हैं। काटी हुई सभी संख्याएँ भाज्य संख्याएँ हैं।

□ अभाज्य संख्याएँ ज्ञात करने की एक और विधि

1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36
-	-	-	-	-	-
-	-	-	-	-	-

- संलग्न तालिका में ध्यान से देखो कि 1 से 36 तक की संख्याएँ छह स्तंभों में किस प्रकार लिखी गई हैं। इसी प्रकार 102 तक की संख्याएँ छह स्तंभों में लिखो।
- अब देखो, 2, 3, 4 तथा 6 के स्तंभों की 2 तथा 3 अभाज्य संख्याओं को छोड़कर अन्य सभी संख्याएँ भाज्य संख्याएँ हैं, इसलिए बची हुई सभी अभाज्य संख्याएँ 1 तथा 5 के स्तंभों में ही होंगी। अब उन्हें ज्ञात करना आसान हो गया न ? वे संख्याएँ ज्ञात करो।

अतिरिक्त जानकारी के लिए

- जिन अभाज्य संख्याओं में 2 का अंतर होता है, उन्हें युगल अभाज्य संख्याएँ कहते हैं। 3 तथा 5, 5 तथा 7, 29 तथा 31, 71 तथा 73 युगल अभाज्य संख्याओं की कुछ जोड़ियाँ हैं। इसी प्रकार 5347421 और 5347423 भी युगल अभाज्य संख्याओं की एक जोड़ी है।
- 1 से 100 तक की संख्याओं में युगल अभाज्य संख्याओं की ऐसी कुल आठ जोड़ियाँ हैं। यह जाँच करके देखो।
- ईसवी सन के लगभग 300 वर्ष पूर्व यूनान में युक्लिड नामक एक गणितज्ञ हुआ था। उसने सिद्ध किया कि अभाज्य संख्याएँ 2, 3, 5, 7,....., के क्रम में लिखते जाने पर उनकी सूची कभी भी समाप्त नहीं होगी, अर्थात् अभाज्य संख्याएँ असंख्य हैं।

