



जरा आठवूया.



चित्रात किती बदके, किती मुले आणि किती फुले आहेत हे मोजा. किती वस्तू आहेत याचे उत्तर काढण्यासाठी वस्तू मोजाव्या लागतात. निसर्गातील वस्तू मोजण्याच्या गरजेतून संख्या निर्माण झाल्या. वस्तूंची मोजणी आपण संख्येच्या रूपात लिहितो.



चला, चर्चा करूया.

दादा : आतापर्यंत आपण मोजण्यासाठी वापरलेल्या 1, 2, 3, 4,... या संख्यांना **मोजसंख्या** म्हणतात. मोजसंख्यांना **नैसर्गिक संख्या** असेही म्हणतात, पण आकाशातील चांदण्या, समुद्रकिनार्यावरील वाळूचे कण आपल्याला मोजता येतील का ? ते असंख्य असतात त्याप्रमाणे नैसर्गिक संख्याही असंख्य आहेत. त्यांची यादी पाहा.

नैसर्गिक संख्या : 1, 2, 3, 4, ..., 321, 322, ..., 28573,....

समीर : आपण पूर्वीच या नैसर्गिक संख्यांच्या बेरजा, वजाबाक्या देखील शिकलो आहोत. पण 5 मधून 5 वजा केले तर बाकी काहीच उरत नाही. त्यासाठी आपण शून्य लिहितो ते इथे दिसत नाही.

दादा : ते तर हवेच. शून्य आणि सर्व नैसर्गिक संख्या मिळून तयार झालेला संख्यासमूह म्हणजे पूर्ण संख्या समूह.

पूर्ण संख्या : 0, 1, 2, 3, 4,, 367, 368,, 237105,...

दादा : या पूर्ण संख्यासमूहात नसलेल्या काही संख्यासुद्धा आपल्याला व्यवहारात वापराव्या लागतात.

सलमा : त्या कोणत्या ?

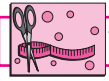
दादा : उदाहरणच पाहू. महाराष्ट्रात हिवाळ्यात तापमान 10°C (दहा अंश सेल्सिअस) किंवा 8°C इतके खाली जाते, पण ते कधी 0°C पर्यंत खाली जात नाही. काश्मीरमध्ये मात्र ते कधी कधी 0°C पेक्षाही खाली जाते. ते दाखवण्यासाठी 0 पेक्षा लहान संख्यांची जरूरी भासते.

- समीर** : जानेवारीत वर्तमानपत्रात आले होते, की काश्मीरमध्ये बर्फ पडला तेव्हा श्रीनगरचे तापमान -8°C झाले, ते कसे वाचतात ?
- दादा** : ते ऋण आठ अंश सेल्सिअस असे वाचतात. नेहमीच्या संख्येमागे $(-)$ हे चिन्ह दिले, की ती संख्या 0 पेक्षा लहान होते. तिला **ऋण संख्या** म्हणतात. तापमापीवर 0 पेक्षा वरच्या 1, 2, 3,... अशा वाढत जाणाऱ्या संख्या असतात. त्यांना **धन संख्या** म्हणतात. 0 च्या खालच्या संख्या क्रमाने $-1, -2, -3, \dots$ अशा असतात.
- समीर** : संख्यारेषेवर ऋण संख्या दाखवता येतात का ?
- दादा** : हो, तर ! शून्याच्या उजवीकडे 1, 2, 3,... एकक अंतरावर 1, 2, 3,... या संख्या असतात. शून्याच्या डावीकडे 1, 2, 3, ... एकक अंतरावर $-1, -2, -3, \dots$ या संख्या असतात त्यांना **ऋण संख्या** म्हणतात. संख्यारेषेवर उजवीकडील 1, 2, 3... या संख्यांना **धन संख्या** म्हणतात. त्या 1, 2, 3,... प्रमाणेच $+1, +2, +3, \dots$ अशा देखील लिहिता येतात.
- सलमा** : तापमापीवर धन संख्या शून्याच्या वर, तर ऋण संख्या शून्याच्या खाली तसेच संख्यारेषेवर धन संख्या शून्याच्या उजवीकडे, तर ऋण संख्या शून्याच्या डावीकडे असतात, म्हणजे धन व ऋण संख्या शून्याच्या विरुद्ध दिशांना असतात का ?
- दादा** : अगदी बरोबर !
- समीर** : मग समुद्रसपाटीपासूनची डोंगराची उंची धन संख्येने, तर समुद्रतळाची खोली ऋण संख्येने दाखवायची हे बरोबर आहे का ?
- दादा** : तुझंही बरोबर ! शाब्बास !



सांभाळा बरे !

व्यवहारात धन संख्येच्या आधी $+$ हे चिन्ह देत नाहीत, पण ऋण संख्येचे $-$ हे चिन्ह मात्र लिहावेच लागते तसेच शून्याला कोणतेही चिन्ह देत नाहीत.



हे करून पाहा.

एका भांड्यात गरम पाणी, दुसऱ्या भांड्यात बर्फाचा चुरा आणि तिसऱ्या भांड्यात बर्फाचा चुरा व मीठ यांचे मिश्रण घ्या. एक तापमापी घेऊन शिक्षकांच्या मदतीने तिन्ही भांड्यांतील पदार्थांचे तापमान मोजा आणि त्यांची नोंद करा.



गरम पाणी



बर्फाचा चुरा



बर्फाचा चुरा व मीठ



जाणून घेऊया.

पूर्णांक संख्या (Integers)

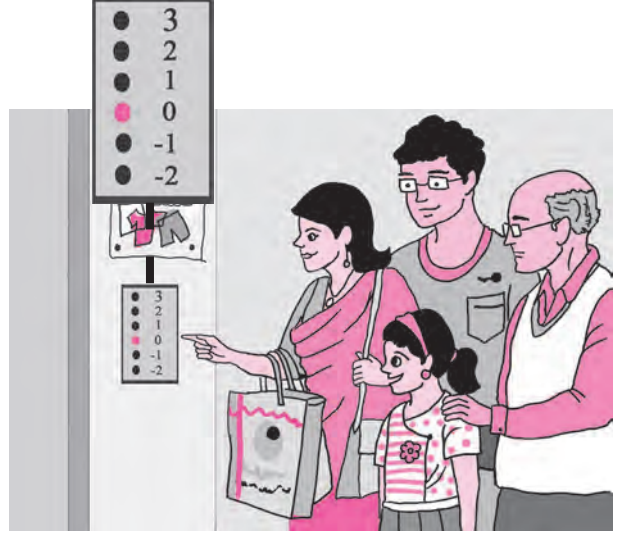
धन संख्या, शून्य व ऋण संख्या मिळून संख्यांचा जो समूह तयार होतो, त्याला पूर्णांक संख्यासमूह म्हणतात.



गणित माझा सोबती : जत्रेमध्ये, लिफ्टमध्ये.



वरील कुल्फीवाल्याचे चित्र पाहा.
कुल्फीवाला बर्फ व मिठाच्या मिश्रणात
कुल्फीचे साचे का ठेवत असेल ?



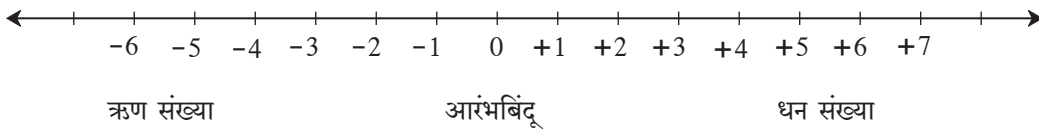
लिफ्टमधील बटणांना तळमजल्यासाठी 0 (शून्य), तर तळमजल्याच्या खालील मजल्यांना -1 व -2 असे क्रमांक दिलेले असतात.



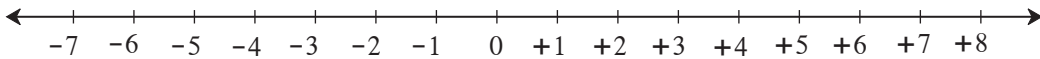
जाणून घेऊया.

संख्यारेषेवर पूर्णांक संख्या दाखवणे

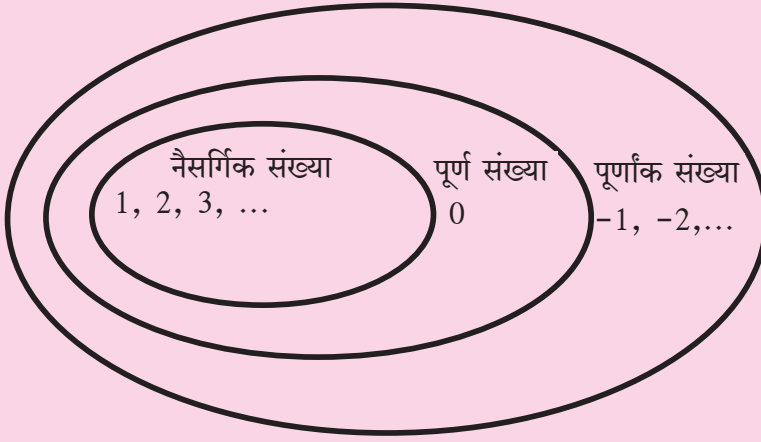
संख्यारेषेवर ज्या बिंदूशी 0 ही संख्या दाखवली जाते, त्या बिंदूला आरंभबिंदू म्हणतात. 0 च्या उजवीकडे व डावीकडे समान अंतरांवर बिंदू दर्शवतात. उजवीकडील बिंदूनी दाखवलेल्या संख्या धन व डावीकडील संख्या ऋण मानतात.



उदा. संख्यारेषेवर -7 व +8 या संख्या दाखवा.



सांगा पाहू !



माझा सहावीचा वर्ग माझ्या शाळेचा भाग आहे. माझी शाळा आमच्या गावात आहे. माझे गाव तालुक्याचा एक भाग आहे. तसेच तालुका जिल्ह्याचा, जिल्हा महाराष्ट्र राज्याचा एक भाग आहे.

याप्रमाणे संख्यासमूहांच्या बाबतीत काय सांगता येईल ?

सरावसंच 4

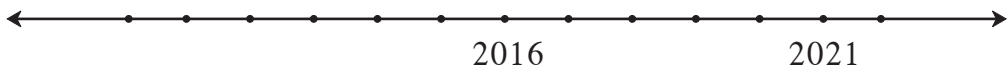
- खालील संख्यांचे ऋण संख्या व धन संख्या असे वर्गीकरण करा.
-5, +4, -2, 7, +26, -49, -37, 19, -25, +8, 5, -4, -12, 27
- खाली काही शहरांचे तापमान दिले आहे. चिन्हांचा वापर करून त्यांचे लेखन करा.

स्थान	सिमला	लेह	दिल्ली	नागपूर
तापमान	0° च्या खाली 7 °C	0° च्या खाली 12 °C	0° च्या वर 22 °C	0° च्या वर 31 °C

- खालील उदाहरणातील संख्या, चिन्हांचा उपयोग करून लिहा.
 - एक पाणबुडी समुद्रसपाटीपासून 512 मीटर अंतर खोलीवर आहे.
 - हिमालयातील सर्वात उंच शिखर माउंट एव्हरेस्टची उंची समुद्रसपाटीपासून 8848 मीटर आहे.
 - जमिनीपासून 120 मीटर अंतरावर उडणारा पतंग.
 - भुयार जमिनीखाली 2 मीटर खोल आहे.



गणित माझा सोबती : मैदानावर.



- मैदानावर इसवी सन 2000 ते 2024 ही वर्षे दर्शवणारी कालरेखा तयार करावी. एका विद्यार्थ्यास चालू सालावर उभे करून खालील प्रश्न विचारावेत.
 - खेळताना त्याचे वय काय आहे ? (2) 5 वर्षांपूर्वी साल कोणते होते व त्याचे वय किती होते ?
 - विद्यार्थी दहावीत कोणत्या साली जाईल व तेव्हा त्याचे वय किती असेल ?

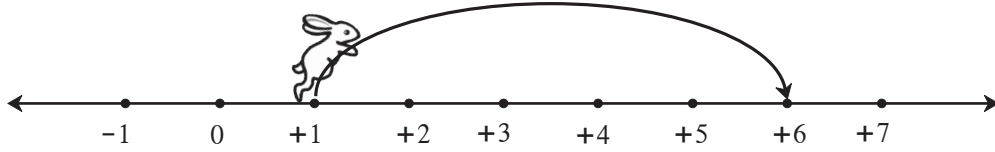
विद्यार्थ्यांनी कालरेषेवर योग्य दिशेने व योग्य एकक चालावे व अशा प्रश्नांची उत्तरे शोधावीत.

- मैदानावर कालरेषा तयार करताना प्रत्येक एकक हा 100 वर्षांचा घ्यावा. मग त्यावर 0 सालापासून इसवी सन 2100 पर्यंत कालमापन करता येईल. इतिहासातील महत्त्वाच्या घटना त्या त्या शतकामध्ये दाखवाव्यात.

पूर्णांक संख्यांची बेरीज (Addition of Integers)

संख्यारेषेवर सशाने उजव्या बाजूला मारलेल्या उड्या धन संख्यांनी, तर डाव्या बाजूला मारलेल्या उड्या ऋण संख्यांनी दाखवू.

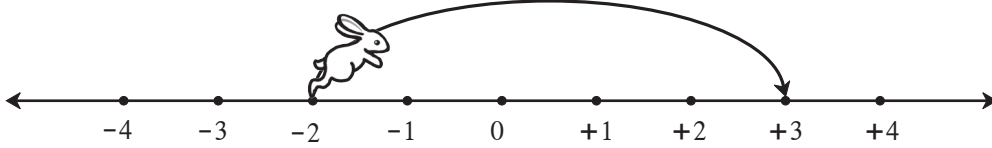
कृती :



- सुरुवातीला ससा या संख्येवर होता. • त्याने एककाची उडी उजवीकडे मारली.
- आता तो संख्येवर पोहोचला.

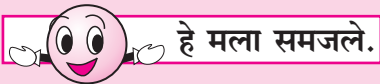
$$1 + 5 = (+1) + (+5) = +6$$

कृती :



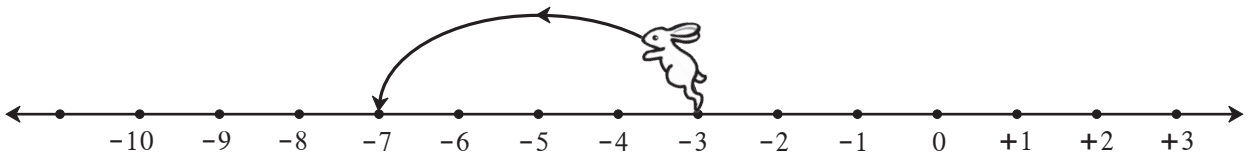
- सुरुवातीला ससा या संख्येवर होता. • त्याने एककाची उडी उजवीकडे मारली.
- आता तो या संख्येवर पोहोचला.

$$(-2) + (+5) = +3$$



कोणत्याही संख्येत एखादी धन संख्या मिळवणे म्हणजे संख्यारेषेवर त्या संख्येपासून उजवीकडे तेवढे एकक पुढे जाणे.

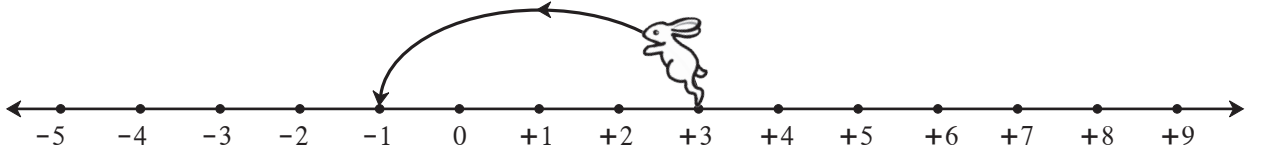
कृती :



- ससा सुरुवातीला या संख्येवर आहे. • त्याने एककाची उडी डावीकडे मारली.
- आता तो संख्येवर पोहोचला.

$$(-3) + (-4) = -7$$

कृती :



- ससा सुरुवातीला या संख्येवर होता.
- त्याने एककाची उडी डावीकडे मारली.
- आता तो संख्येवर पोहोचला.

$$(+3) + (-4) = -1$$



हे मला समजले.

कोणत्याही संख्येत ऋण संख्या मिळवणे म्हणजे संख्यारेषेवर त्या संख्येपासून तेवढे एकक डावीकडे जाणे किंवा तेवढे एकक मागे जाणे म्हणजेच वजा करणे.



चला, चर्चा करूया.

पूर्णांक संख्यांची बेरीज व वजाबाकी ही आपण मिळवलेली रक्कम व खर्च केलेली रक्कम यांच्या साहाय्याने समजावून घेऊ.

दादा : आपल्याजवळ असलेली रक्कम किंवा आपण मिळवलेली रक्कम धन संख्येने दाखवू व कर्जाऊ घेतलेली किंवा खर्च केलेली रक्कम ऋण संख्येने दाखवू.

अनिल : माझ्याजवळ 5 रुपये आहेत, म्हणजे +5 ही संख्या आहे. मला आईने 3 रुपये बक्षीस दिले. ती संख्या +3 आहे. आता माझ्याजवळ एकूण 8 रुपये झाले.

$$5 + 3 = (+5) + (+3) = +8$$

दादा : धन संख्यांची बेरीज तुम्हांला माहीत आहे. आता आपण ऋण संख्यांचाही विचार करू. सुनिता तुला मी पेन घेण्यासाठी 5 रुपये उसने दिले, तर तू ते कसे दाखवशील ?

सुनिता : माझ्याजवळची रक्कम मी ऋण पाच म्हणजे - 5 असे लिहून दाखवेन.

दादा : मी तुला अजून 3 रुपये उसने दिले, तर तुझ्यावर एकूण किती कर्ज (ऋण) होईल ?

सुनिता : $(-5) + (-3) = -8$ म्हणजे एकूण आठ रुपये कर्ज (ऋण) झाले.

दादा : तुझ्यावर 8 रुपयांचे कर्ज आहे. तुला आईने 2 रुपये खाऊसाठी दिले, म्हणजे तुझ्याजवळ + 2 रुपये आले. आता तू पूर्वी उसने घेतले होते त्यांपैकी 2 रुपयांचे कर्ज फेडलेस, तर तुझ्यावर किती रुपयांचे कर्ज राहील ?

सुनिता : $(-8) + (+2) = -6$ म्हणजे मला अजून 6 रुपये कर्ज फेडायचे आहे.

दादा : अनिल, तुझ्याजवळ 8 रुपये आहेत म्हणजे +8 रुपये आहेत. त्यांपैकी 3 रुपये तू पेन्सिल घेण्यास खर्च केलेस, तर तुझ्याजवळ किती रुपये राहतील ?

अनिल : $(+8) + (-3) = +5$.

दादा : मिळवणे आणि खर्च करणे या बाबींचा विचार करून पूर्णांक संख्यांची बेरीज कशी करायची हे आपण पाहिले.

जसे, $(+5) + (+3) = +8$ आणि $(-5) + (-3) = -8$
 $(-8) + (+2) = -6$ आणि $(+8) + (-3) = +5$

 हे मला समजले.

- समान चिन्ह असलेल्या पूर्णांक संख्यांची बेरीज करताना चिन्हाचा विचार न करता संख्यांची बेरीज करावी व येणाऱ्या बेरजेला समान असलेले चिन्ह द्यावे.
- भिन्न चिन्ह असलेल्या पूर्णांक संख्यांची बेरीज करताना चिन्हाचा विचार न करता मोठ्या संख्येतून लहान संख्या वजा करावी व येणाऱ्या वजाबाकीला मोठ्या संख्येचे चिन्ह द्यावे.

सरावसंच 5

1. बेरीज करा.

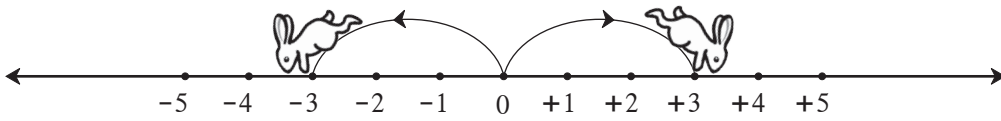
- (1) $8 + 6$
- (2) $9 + (-3)$
- (3) $5 + (-6)$
- (4) $-7 + 2$
- (5) $-8 + 0$
- (6) $-5 + (-2)$

2. खालील सारणी पूर्ण करा.

+	8	4	-3	-5
-2	$-2 + 8 = +6$			
6				
0				
-4				

 जाणून घेऊया.

विरुद्ध संख्या (Opposite Numbers)



ससा जेव्हा 0 पासून उजवीकडे 3 एककांची उडी मारतो तेव्हा तो +3 या संख्येवर जातो आणि जेव्हा तो 0 पासून डावीकडे 3 एककांची उडी मारतो तेव्हा तो -3 या संख्येवर जातो.

0 पासून दोन्ही अंतरे समान आहेत. फक्त उड्या मारलेल्या दिशा एकमेकींच्या विरुद्ध आहेत, म्हणजेच +3 आणि -3 या परस्परांच्या विरुद्ध संख्या आहेत.

विरुद्ध संख्या शून्यापासून सारख्याच अंतरावर आणि विरुद्ध दिशांना असतात.

चित्रात जर सशाने 0 पासून डावीकडे 5 एककाची उडी मारली, तर तो कोठे पोहोचेल ?

आता सशाने -5 पासून 5 एककाची उडी उजवीकडे मारली, तर तो कोठे पोहोचेल ?

$(-5) + (+5) = 0$ आता $(+5) + (-5) = ?$

दोन विरुद्ध संख्यांची बेरीज शून्य असते.

सरावसंच 6

1. खालील संख्यांच्या विरुद्ध संख्या लिहा.

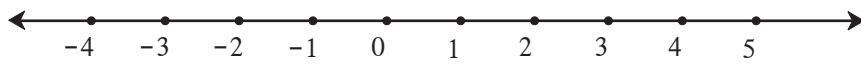
संख्या	47	+52	-33	-84	-21	+16	-26	80
विरुद्ध संख्या								



जाणून घेऊया.

पूर्णांक संख्यांचा लहान-मोठेपणा (Order Relation in Integers)

संख्यारेषेवर कोणत्याही संख्येत 1 मिळवला, की लगतची उजव्या बाजूची संख्या मिळते याचा अनुभव आपण आधी घेतला आहे. ऋण संख्यांच्या बाबतीतही हे अनुभवा. जसे, $-4 + 1 = -3$



$$-4 < -3 < -2 < -1 < 0 < 1 < 2 < 3 < 4 < 5.$$

आता आपण धनसंख्या, शून्य व ऋण संख्या विचारात घेऊन त्यांच्यामधील लहान-मोठेपणा ठरवू शकतो.

जसे, $4 > -3$ $4 > 3$ $0 > -1$ $-2 > -3$ $-12 < 7$



हे मला समजले.

संख्यारेषेवरील उजवीकडील प्रत्येक संख्या ही तिच्या लगतच्या डावीकडील संख्येपेक्षा 1 ने मोठी असते.

सरावसंच 7

1. खालील चौकटीत $>$, $<$, $=$ यांपैकी योग्य चिन्ह लिहा.

(1) $-4 \square 5$	(2) $8 \square -10$	(3) $+9 \square +9$	(4) $-6 \square 0$
(5) $7 \square 4$	(6) $3 \square 0$	(7) $-7 \square 7$	(8) $-12 \square 5$
(9) $-2 \square -8$	(10) $-1 \square -2$	(11) $6 \square -3$	(12) $-14 \square -14$



जाणून घेऊया.

पूर्णांक संख्यांची वजाबाकी (Subtraction of Integers)

ताई : अनिल, समजा तुझ्यावर 8 रुपयांचे कर्ज आहे. तू 5 रुपये मिळवलेस म्हणजे कमावलेस तर तू प्रथम कर्ज कमी करतोस, म्हणजे तुला जेवढे पैसे मिळाले तेवढे कर्ज कमी झाले. मिळवलेले 5 रुपये म्हणजे 5 रुपयांचे कर्ज कमी झाले किंवा वजा झाले.

हे गणिती भाषेत आपण असे लिहितो. $-(-5) = (+5)$

आता तुझे 5 रुपयांचे ऋण (कर्ज) कमी होऊन फक्त 3 रुपये ऋण (कर्ज) राहिले.

$$(-8) - (-5) = (-8) + 5 = -3$$

$8 + (-5) = 8 - 5 = 3$ हे आपल्याला माहीत आहेच.



पूर्णांक संख्यांची वजाबाकी खालील उदाहरणांवरून समजून घ्या.

$(-9) - (-4)$	$(-4) - (-9)$	$(+9) - (+4)$	$(+9) - (-4)$
$= (-9) + 4$	$= (-4) + 9$	$= (+9) + (-4)$	$= (+9) + 4$
$= -9 + 4$	$= -4 + 9$	$= +9 - 4$	$= +9 + 4$
$= -5$	$= +5$	$= +5$	$= +13$



हे मला समजले.

एखाद्या संख्येतून दुसरी संख्या वजा करणे म्हणजे दुसऱ्या संख्येची विरुद्ध संख्या पहिल्या संख्येत मिळवणे. जसे : $8 - (-6) = 8 + (+6)$

सरावसंच 8

1. उभ्या स्तंभातील संख्यांतून आडव्या स्तंभातील संख्या वजा करा. रिकाम्या चौकटीत योग्य संख्या लिहा.

-	6	9	-4	-5	0	+7	-8	-3
3	$3 - 6 = -3$							
8				$8 - (-5) = 13$				
-3								
-2								



पूर्णांकाचा खेळ

आपापल्या सोंगट्या 'सुरुवात' या चौकटीवर ठेवा. फासा टाका. फाशावर आलेले दान पाहा. फाशावर आलेले दान ही धन संख्या असते. त्या दानाएवढी घरे मोजून सोंगटी पुढे सरकवा. त्या चौकटीत जर उदाहरण दिले असेल तर ते सोडवा. आलेले उत्तर धन संख्येत असेल तर सोंगटी तेवढी घरे पुढे न्या. आलेले उत्तर ऋण संख्येत असेल तर तेवढी घरे सोंगटी मागे न्या.

समजा, आपण 18 व्या घरात आलो तर त्यातील उदाहरणाचे $(-4 + 2 = -2)$ हे उत्तर येईल. आता सोंगटी दोन घरे मागे म्हणजे 16 वर सरकवा. जो खेळाडू सर्वात आधी 100 वर पोहोचेल तो जिंकला.

या खेळासाठी आखलेली चौकट मलपृष्ठावर दिली आहे.

ॐॐॐ