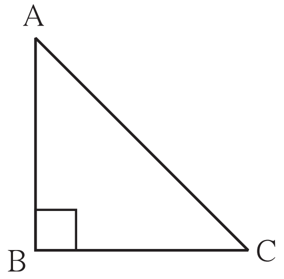
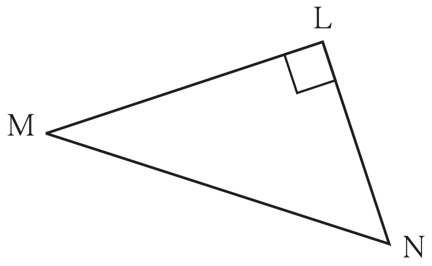
آیئے ذرا یاد کریں :

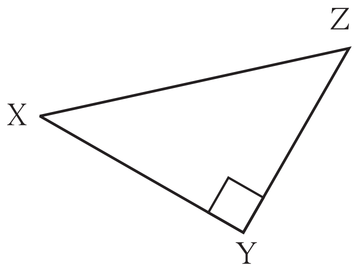
قائمۃ الزاویہ مثلث (Right angled triangle)

یہ بات ہم جانتے ہیں کہ جس مثلث کا ایک زاویہ، قائمہ زاویہ ہوتا ہے اُسے قائمۃ الزاویہ مثلث کہتے ہیں اور قائمہ زاویہ کے مقابل کے ضلع کو وتر کہتے ہیں۔

- درج ذیل قائمۃ الزاویہ کے وتروں کے نام لکھیے۔







△ABC کا وتر ☐   △LMN کا وتر ☐   △XYZ کا وتر ☐

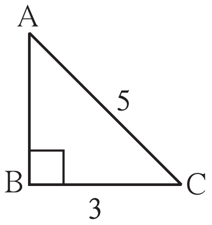
فیثاغورث کا مسئلہ (The Theorem of Pythagoras)

چھٹی صدی قبل مسیح میں ایک عظیم یونانی ریاضی داں فیثاغورث ہوگذرے ہیں۔ ریاضی مضمون کے لیے انھوں نے بڑی خدمات انجام دی ہیں۔ ریاضی کے علوم سکھانے میں وہ بہت مشہور تھے۔ ان کے کئی شاگرد بھی تھے۔

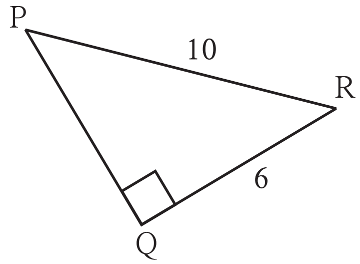
قائمۃ الزاویہ مثلث کے تعلق سے ایک مسئلہ بہت پہلے سے کئی ممالک کے لوگ جانتے تھے۔ بھارت کی قدیم کتاب ''شُلوسُتر'' میں بھی اس بات کا ذکر ملتا ہے۔ لیکن اس مسئلہ کا ثبوت فیثاغورث نے سب سے پہلے دیا اس لیے ان کا نام اس مسئلہ کو دیا گیا۔ ''قائمۃ الزاویہ مثلث میں وتر کی لمبائی کا مربع، باقی ماندہ دو اضلاع کی لمبائیوں کے مربعوں کے مجموعے کے برابر ہوتا ہے۔'' یہی فیثاغورث کا مسئلہ کہلاتا ہے۔

عملی کام وتر اور زاویہ قائمہ بنانے والا ایک ضلع دیا ہو تو ذیل میں دیے ہوئے خاکے کے مطابق قائمۃ الزاویہ مثلث بنائیے۔ تیسرے ضلع کی لمبائی ناپیے۔

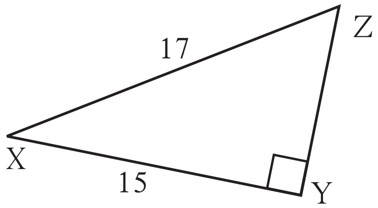
(i)



(ii)



(iii)



آیئے سمجھ لیں :

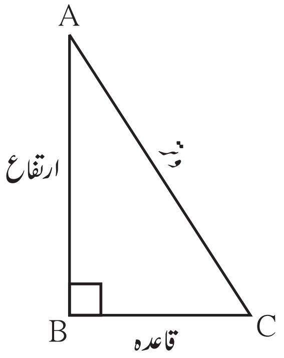
مقابل کی شکل میں، فیثا غورث کا مسئلہ ذیل کے مطابق لکھتے ہیں۔

$\triangle ABC$ میں $\angle B$ قائمہ زاویہ ہوتو

$$[l(AC)]^2 = [l(AB)]^2 + [l(BC)]^2$$

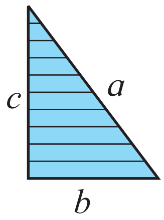
عام طور پر قائمۃ الزاویہ مثلث میں قائمہ زاویہ بنانے والے اضلاع میں سے ایک ضلع قاعدہ اور دوسرا ضلع ارتفاع کے طور پر سمجھا جاتا ہے۔اس مسئلہ کو ذیل کے مطابق لکھتے ہیں۔

$\rightarrow$ (وتر)^2 = (قاعدہ)^2 + (ارتفاع)^2



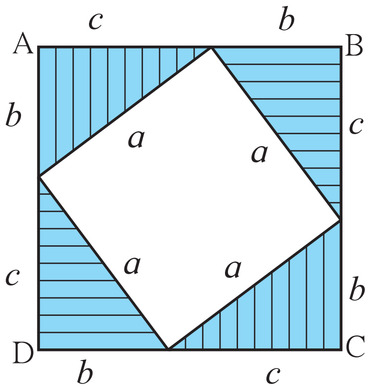
فیثا غورث کے مسئلہ کی تصدیق کے لیے درج ذیل عمل کیجیے۔

عملی کام

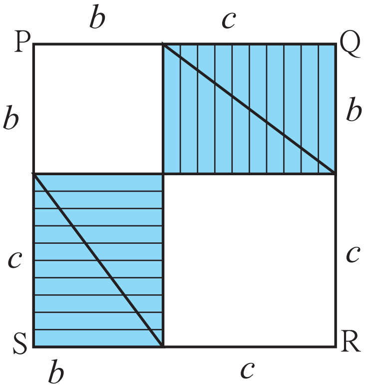


ایک کارڈ شیٹ کے مساوی ناپ کے 8 قائمۃ الزاویہ مثلث (کاٹ کر) لیجیے۔اس کے اضلاع کسی بھی لمبائی کے ہوسکتے ہیں۔فرض کیجیے اس مثلث کا وتر 'a' اکائی، قائمہ زاویہ بنانے والے اضلاع 'b' اکائی اور 'c' اکائی ہیں۔اس بات کو دھیان میں رکھیں کہ اس مثلث کا رقبہ $\frac{bc}{2}$ ہے۔

اب دوسرے کارڈ شیٹ پر $(b + c)$ اکائی ضلع کے دو مربع پینسل سے بنائیے۔شکل میں دکھائے ہوئے طریقے کے مطابق کاٹے ہوئے 8 مثلثوں میں سے 4 مثلث، مربع ABCD میں رکھ دیجیے۔اور بقیہ 4 مثلث شکل کے مطابق مربع PQRS میں رکھ دیجیے۔مثلثوں سے ڈھکے ہوئے حصے کو خط کشیدہ کیجیے۔



شکل (i)



شکل (ii)

شکلوں کا معائنہ کیجیے۔شکل (i) میں خالی جگہ میں 'a' ضلع والا مربع بنا ہے۔شکل (ii) میں خالی جگہ میں 'b' اور 'c' ضلع کے دو مربع بنے ہوئے ہیں۔

دونوں مربعوں میں خط کشیدہ کیے ہوئے حصے مساوی یعنی چار قائمۃ الزاویہ مثلث کے رقبہ کے مساوی ہیں۔

شکل (i) میں

مربع ABCD کا رقبہ $= a^2 + 4 \times$ قائمۃ الزاویہ مثلث کا رقبہ

$$= a^2 + 4 \times \frac{1}{2} \times bc$$

$$= a^2 + 2bc$$

شکل (ii) میں

$\therefore$ مربع PQRS کا رقبہ $= b^2 + c^2 + 4 \times$ قائمۃ الزاویہ مثلث کا رقبہ

$$= b^2 + c^2 + 4 \times \frac{1}{2} \times bc$$

$$= b^2 + c^2 + 2bc$$

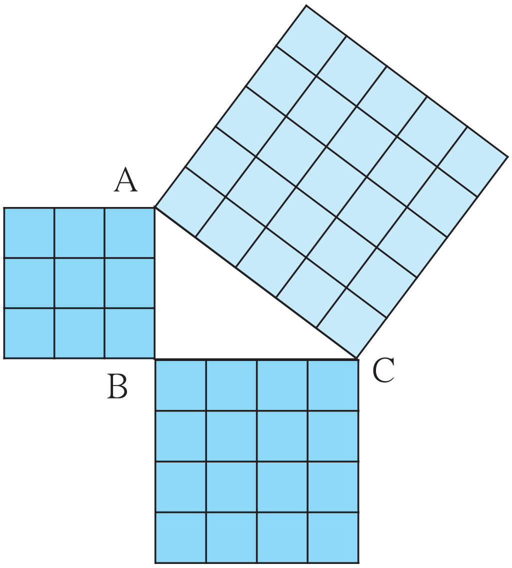
$\therefore$ مربع ABCD کا رقبہ = مربع PQRS کا رقبہ

$$\therefore \quad a^2 + 2bc = b^2 + c^2 + 2bc$$

$$\therefore \quad a^2 = b^2 + c^2$$

آیئے بحث کریں

- شکل (i) میں خالی ذواربعۃ الاضلاع کا ہر زاویہ قائمہ ہے۔ چاندہ کا استعمال کیے بغیر اس کی تصدیق کیجیے۔



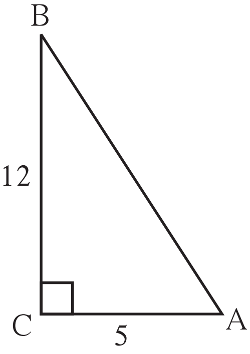
عملی کام ایک کارڈ شیٹ پر 3 سم، 4 سم اور 5 سم لمبائی کا ایک قائمۃ الزاویہ مثلث بنائیے۔ ہر ضلع پر ایک مربع بنائیے۔ ہر مربع کا رقبہ معلوم کیجیے اور فیثاغورث کے مسئلہ کی تصدیق کیجیے۔

نوٹ : فیثاغورث کے مسئلہ کا استعمال کرکے قائمۃ الزاویہ مثلث کے دو ضلعے دیے ہوں تو تیسرا ضلع معلوم کرسکتے ہیں۔

مثال : $\triangle ABC$ میں $\angle C = 90°$، $l(AC) = 5$ سم اور $l(BC) = 12$ سم ہو تو کتنے $l(AB) = ?$

حل : قائمۃ الزاویہ $\triangle ABC$ میں $\angle C = 90°$، اس لیے ضلع AB وتر ہوگا۔

فیثاغورث کے مسئلہ کی رُو سے



$$\therefore \quad l(AB)^2 = l(AC)^2 + l(BC)^2$$

$$= 5^2 + 12^2$$

$$= 25 + 144$$

$$\therefore \quad l(AB)^2 = 169$$

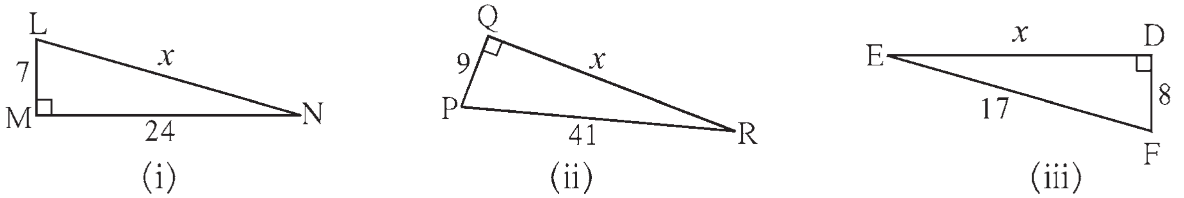
$$\therefore \quad l(AB)^2 = (13)^2$$

$$\therefore \quad l(AB) = 13$$

$\therefore$ قطعۂ خط AB کی لمبائی = 13 سم

مشقی سوالات 48

.1 ذیل کی شکلوں کو دیکھ کر 'x' کی قیمت معلوم کیجیے۔



.2 قائمۃ الزاویہ $\triangle PQR$ میں $\angle P = 90°$، اگر سم $l(PQ) = 24$ اور سم $l(PR) = 10$ ہو تو قطعہ خط QR کی لمبائی معلوم کیجیے۔

.3 قائمۃ الزاویہ $\triangle LMN$ میں $\angle M = 90°$، اگر سم $l(LM) = 12$ اور سم $l(LN) = 20$ ہو تو قطعہ خط MN کی لمبائی معلوم کیجیے۔

.4 15 میٹر لمبائی کی ایک سیڑھی زمین سے 9 میٹر اونچائی پر کھڑکی تک پہنچتی ہے۔ تو دیوار کا قاعدہ اور سیڑھی کے نچلے سرے کے درمیان کا فاصلہ معلوم کیجیے۔

آیئے سمجھ لیں :

طبعی اعداد کے ثلاثی ارکان میں اگر بڑے عدد کا مربع دیگر دو اعداد کے مربعوں کے مجموعے کے برابر ہو تو اُسے فیثا غورث کے ثلاثی اعداد کہتے ہیں۔

جس مثلث کے ضلعوں کی لمبائی اس طرح ثلاثی اعداد کی صورت میں دکھائی جاتی ہے اس مثلث کو قائمۃ الزاویہ مثلث کہتے ہیں۔

مثال : کیا (7, 24, 25) یہ اعداد فیثا غورث کے ثلاثی اعداد ہیں؟

حل : 25، 24، 7 میں سے ہر عدد کا مربع معلوم کریں گے۔

$$\therefore \quad (7)^2 = 49, (24)^2 = 576, (25)^2 = 625$$

$$\therefore \quad 49 + 576 = 625$$

$$\therefore \quad (7)^2 + (24)^2 = (25)^2$$

اس لیے 7، 24 اور 25 فیثا غورث کے ثلاثی اعداد ہیں۔

سرگرمی : 1 سے 50 تک اعداد میں سے ایسے تین اعداد کے گروہ تلاش کیجیے جو فیثا غورث کے ثلاثی اعداد کہلاتے ہیں۔

مشقی سوالات 49

.1 ذیل میں کچھ ثلاثی اعداد دیے ہیں، ان میں سے فیثا غورث کے ثلاثی اعداد دریافت کیجیے۔

(i) 3 , 4 , 5 (ii) 2 , 4 , 5 (iii) 4 , 5 , 6

(iv) 2 , 6 , 7 (v) 9 , 40 , 41 (vi) 4 , 7.5 , 8.5

.2 ذیل میں کچھ مثلثوں کے تینوں اضلاع دیے ہوئے ہیں ہیں۔ ان میں سے کون سا مثلث قائمۃ الزاویہ مثلث ہے بتائیے۔

(i) 8, 15, 17 (ii) 11, 12, 15 (iii) 11, 60, 61

(iv) 1.5, 1.6, 1.7 (v) 40, 20, 30