

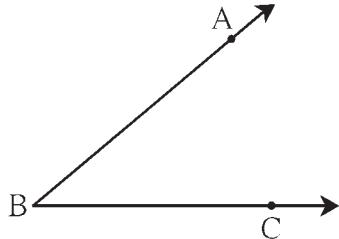


زاویہ اور زاویوں کی جوڑیاں

4

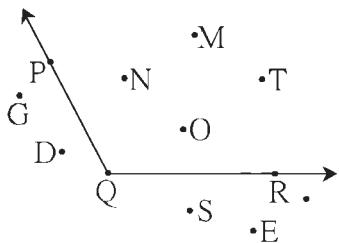
آئیے ذریاد کریں :

- بازو میں دیے ہوئے زاویے کا نام لکھیے۔
- زاویے کے راس کا نام لکھیے۔
- زاویے کی ساقین کے نام لکھیے۔
- ساقین پر دکھائے ہوئے نقاط کے نام لکھیے۔



درستہ آئیے سمجھ لیں :

زاویے کا اندر وہی حصہ اور بیرونی حصہ



- بازو کی شکل میں مستوی میں زاویے کے اضلاع پر کے نقاط کے علاوہ واقع نقطہ N، نقطہ M، نقطہ T جیسے نقاط کے گروہ $\angle PQR$ کے اندر وہی حصہ (Interior of an angle) میں واقع ہیں۔
- مستوی میں جو نقاط زاویے کے ساقین پر نہیں ہیں اور وہ زاویے کے اندر وہی حصہ میں بھی نہیں ہیں۔ نقطہ G، نقطہ D، نقطہ E، نقطہ S جیسے نقاط کا گروہ $\angle PQR$ کے بیرونی حصہ میں واقع ہیں۔ (Exterior of an angle)

متصلہ زاویے (Adjacent angles)

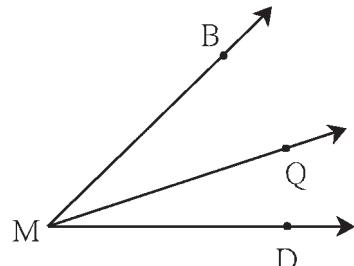
بازو کی شکل میں زاویہ دیکھیے۔

شعاع MQ یا ایک ساق مشترک ہے اور M راسی نقطہ مشترک ہے۔ ان زاویوں کے اندر وہی حصے میں ایک بھی نقطہ مشترک نہیں ہے۔ یہ زاویے ایک دوسرے کے بازو میں ہیں۔ ایسے زاویوں کو متصلہ زاویے کہتے ہیں۔

متصلہ زاویوں کی ایک ساق مشترک ہوتی ہے اور باقی دو ساق مشترک ساق کے مقابل

جانب ہوتی ہیں اور ان کا راس مشترک ہوتا ہے۔ متصلہ زاویوں کے اندر وہی حصے مختلف ہوتے ہیں۔

مذکورہ بالا میں $\angle BMD$ اور $\angle BMQ$ ان زاویوں کی ساق مشترک ہے۔ لیکن یہ متصلہ زاویے نہیں ہیں۔ کیوں کہ ان کا اندر وہی حصہ بالکل مختلف نہیں ہے۔

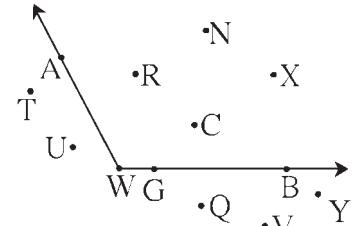


جن دو زاویوں کا راس مشترک ہوتا ہے، ایک ساق مشترک ہوتی ہے اور ان کے اندر ورنی حصے مختلف ہوتے ہیں، ان زاویوں کو متصلہ زاویے کہتے ہیں۔

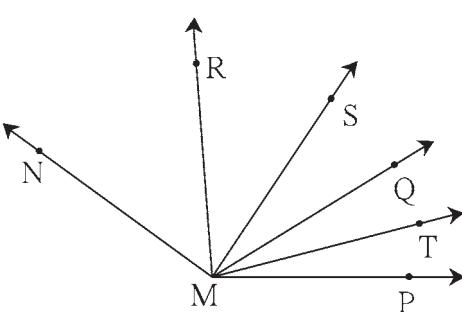
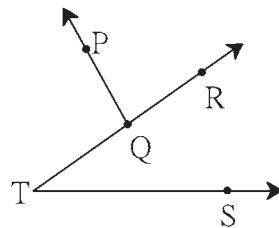
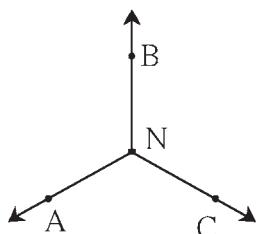
مشقی سوالات 15

1. شکل کا مشاہدہ کیجیے اور $\angle AWB$ کے لیے ذیل کی جدول مکمل کیجیے۔

	زاویہ کے اندر ورنی حصے میں واقع نقاط کے نام لکھیے۔
	زاویہ کے بیرونی حصے میں واقع نقاط کے نام لکھیے۔
	زاویہ کے ساقین پر واقع نقاط کے نام لکھیے۔



2. ذیل کی اشکال میں متصلہ زاویوں کی جوڑیاں لکھیے۔



3. کیا زاویوں کی درج ذیل جوڑیاں متصلہ ہیں؟ متصلہ ہوں تو وجہ لکھیے۔

(i) $\angle SMR$ اور $\angle RMQ$ (ii) $\angle RMQ$ اور $\angle PMQ$

(iv) $\angle RMS$ اور $\angle SMT$ (iii) $\angle RMT$ اور $\angle RMS$


 آئیے سمجھ لیں :

مکملہ زاویے (Complementary angles)

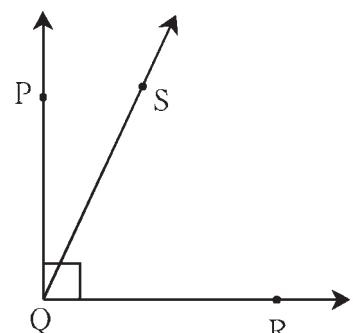
• ایک قائمہ زاویہ کیجیے۔

• اس کے اندر ورنی حصے میں 'S' کوئی بھی ایک نقطہ کیجیے۔

• شعاع QS کیجیے۔

• $\angle PQR$ اور $\angle SQR$ کی پیمائشوں کی جمع کیجیے۔

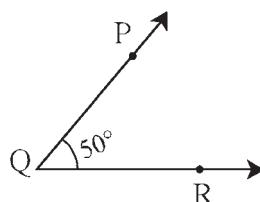
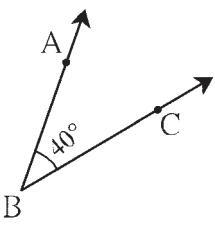
• مجموعہ کتنا ہوگا؟



جن دو زاویوں کی پیمائشوں کا مجموعہ 90° ہوتا ہے وہ زاویے ایک دوسرے کے مکملہ زاویے کہلاتے ہیں۔

یہاں $\angle SQR$ اور $\angle PQS$ ایک دوسرے کے مکملہ زاویے ہیں۔

مثال : شکل میں زاویوں کا مشاہدہ کیجیے اور چوکون میں مناسب عدد لکھیے۔



$$m\angle ABC = \boxed{\quad}^\circ$$

$$m\angle PQR = \boxed{\quad}^\circ$$

$$m\angle ABC + m\angle PQR = \boxed{\quad}^\circ$$

$\angle ABC$ اور $\angle PQR$ کی پیمائشوں کا مجموعہ 90° ہے وہ اس لیے وہ ایک دوسرے کے مکملہ زاویے ہیں۔

مثال : 70° پیمائش کے زاویے کے مکملہ زاویے کی پیمائش کتنی ہے؟
یہ دونوں ایک دوسرے کے مکملہ زاویے ہیں، تو ہر زاویے کی پیمائش کتنی ہے؟

$$a + 15 + 2a = 90$$

حل :

$$\therefore 3a + 15 = 90$$

$$\therefore 3a = 75$$

$$\therefore a = 25$$

$$\therefore a + 15 = 25 + 15 = 40^\circ$$

$$\therefore 2a = 25 \times 15 = 50^\circ$$

مثال : فرض کیجیے ہوئے زاویے کے مکملہ زاویے کی پیمائش x° ہے۔

$$70 + x = 90$$

$$\therefore 70 + x - 70 = 90 - 70$$

$$\therefore x = 20^\circ$$

70° پیمائش کے مکملہ زاویے کی پیمائش 20° ہے۔

∴

مشقی سوالات 16

ذیل میں کچھ زاویوں کی پیمائشیں دی ہوئی ہیں۔ ان کے مکملہ زاویوں کی پیمائشیں لکھیے۔

- (i) 40° (ii) 63° (iii) 45° (iv) 55° (v) 20° (vi) 90° (vii) x°

2. (y - 20) اور $(y + 30)^\circ$ ایک دوسرے کے مکملہ زاویے ہیں، تو ہر زاویے کی پیمائش معلوم کیجیے۔

آئیے ذرا یاد کریں :

خط AB پر T ایک نقطہ ہے۔

$\angle ATB$ اس زاویے کی قسم کون ہے؟

اس کی پیمائش کتنی ہے؟



آئیے سمجھ لیں :

متمم زاویے (Supplementary angles)

بازو کی شکل میں ایک خط AC دیا ہوا ہے۔ خط پر نقطہ B سے ایک شعاع BD کھینچی گئی ہے۔ یہاں کتنے زاویے ہیں؟

$$m\angle ABD = \boxed{\quad}^\circ, m\angle DBC = \boxed{\quad}^\circ$$

$$m\angle ABD + m\angle DBC = \boxed{\quad}^\circ$$

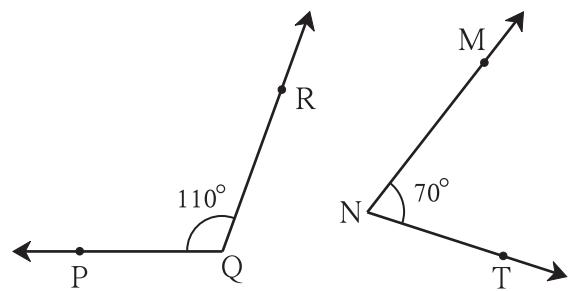


جن دو زاویوں کی پیمائشوں کا مجموعہ 180° ہوتا ہے، وہ ایک دوسرے کے متمم زاویے کہلاتے ہیں۔ یہاں $\angle ABD$ اور $\angle DBC$ ایک دوسرے کے متمم زاویے ہیں۔

مثال : ذیل کی شکل میں زاویوں کا مشاہدہ کیجیے اور چوکونوں میں مناسب عدد لکھیے۔

$$m\angle PQR = \boxed{\quad}^\circ, m\angle MNT = \boxed{\quad}^\circ$$

$$m\angle PQR + \angle MNT = \boxed{\quad}^\circ$$



اور $\angle MNT$ ایک دوسرے کے متمم زاویے ہیں۔

مثال : $(a+30)^\circ$ اور $(2a)^\circ$ والے زاویے ایک دوسرے کے متمم زاویے ہیں تو ہر ایک زاویے کی پیمائش کتنی ہے؟

$$a + 30 + 2a = 180$$

حل :

$$\therefore 3a = 180 - 30$$

$$\therefore 3a = 150$$

$$\therefore a = 50$$

$$\therefore a + 30 = 50 + 30 = 80^\circ$$

$$\therefore 2a = 2 \times 50 = 100^\circ$$

ان زاویوں کی پیمائش 80° اور 100° ہیں۔

مثال : 135° پیمائش کے متمم زاویے کی پیمائش معلوم کیجیے۔

حل : فرض کیجیے 135° پیمائش کے متمم زاویے کی پیمائش p° ہے۔

متمم زاویوں کی پیمائشوں کا مجموعہ 180° ہوتا ہے۔

$$135 + p = 180$$

$$\therefore 135 + p - 135 = 180 - 135$$

$$\therefore p = 45^\circ$$

135° پیمائش کے متمم زاویے کی پیمائش 45° ہے۔

∴

مشقی سوالات 17

1. ذیل میں دیے ہوئے زاویوں کے متمم زاویوں کی پیمائش لکھیے۔

- (i) 15° (ii) 85° (iii) 120° (iv) 37° (v) 108° (vi) 0° (vii) a°

2. ذیل میں کچھ زاویوں کی پیمائشیں دی ہوئی ہیں، ان میں سے متمم زاویوں اور مکملہ زاویوں کی جوڑیاں بنائیے۔

$$m\angle B = 60^\circ, \quad m\angle N = 30^\circ, \quad m\angle Y = 90^\circ, \quad m\angle J = 150^\circ$$

$$m\angle D = 75^\circ, \quad m\angle E = 0^\circ, \quad m\angle F = 15^\circ, \quad m\angle G = 120^\circ$$

3. $\triangle XYZ$ میں $m\angle X = 90^\circ, m\angle Y = 90^\circ$ اور $\angle Z$ زاویوں کا ایک دوسرے سے تعلق لکھیے۔

4. مکملہ زاویوں کی جوڑیوں میں زاویوں کی پیمائشوں میں فرق 40° ہو تو ان زاویوں کی پیمائش معلوم کیجیے۔

5. $\square PTNM$ ایک مستطیل ہے۔ اس شکل میں متمم زاویوں کی جوڑیاں لکھیے۔

6*. اگر $m\angle A = 70^\circ$ ہو تو $\angle A$ کے مکملہ زاویے کے متمم زاویے کی پیمائش کتنی ہے؟

7. اور $\angle B$ ایک دوسرے کے مکملہ زاویے ہیں اور $m\angle B = (x + 20)^\circ$ ہو تو $m\angle A$ کتنا ہے؟

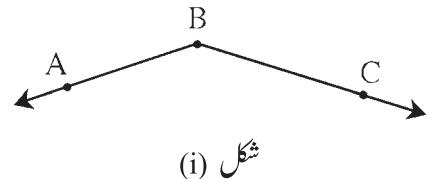
ذیل کے بیانات پر بحث کریں۔ بیان صحیح ہو تو اس کی مثالیں دیجیے۔ بیان غلط ہو تو وجہ بتائیے۔

- دو حادہ زاویے ایک دوسرے کے متم زاویے ہو سکتے ہیں۔
- دو قائم زاویے ایک دوسرے کے متم زاویے ہوتے ہیں۔
- ایک حادہ زاویہ اور ایک منفرجه زاویہ ایک دوسرے کے متم زاویے ہو سکتے ہیں۔
- دو حادہ زاویے ایک دوسرے کے مکملہ زاویے ہو سکتے ہیں۔
- دو قائم زاویے ایک دوسرے کے مکملہ زاویے ہو سکتے ہیں۔
- ایک حادہ زاویہ اور ایک منفرجه زاویہ ایک دوسرے کے مکملہ زاویے ہو سکتے ہیں۔

درست آئیے سمجھ لیں :

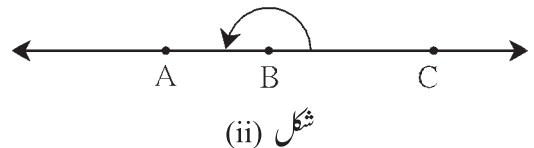
مخالف شعاعیں (Opposite Rays)

- بازو میں دی ہوئی شکل میں شعاعوں کے نام بتائیے۔
- شعاعوں کے ابتدائی نقطہ کے نام بتائیے۔
- شکل (i) میں زاویہ کا نام لکھیے۔



شکل (i)

- بازو کی شکل (ii) میں زاویہ کا نام لکھیے۔
- شکل میں B ابتدائی نقطہ ہو تو شعاعوں کے نام لکھیے۔



شکل (ii)

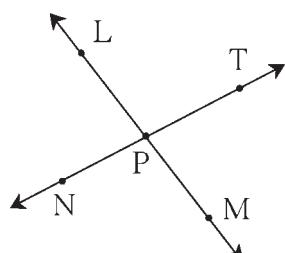
شکل (i) میں شعاع BC اور شعاع BA مل کر ایک منفرجه زاویہ بنتا ہے تو شکل (ii) میں شعاع BC اور شعاع BA مل کر مستقیم زاویہ بنتا ہے اور ایک مستقیم خط ملتا ہے۔ یہاں شعاع BC اور شعاع BA، ایک دوسرے کی مخالف شعاعیں ہیں۔

درست یہیری سمجھ میں آگیا

جن دو شعاعوں کا ابتدائی نقطہ مشترک ہوتا ہے اور ان شعاعوں سے ایک خط بنتا ہے، تب وہ شعاعیں ایک دوسرے کی مخالف شعاعیں کہلاتی ہیں۔

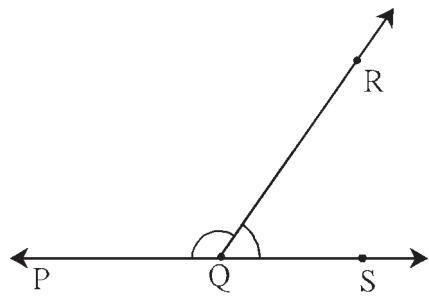
مشقی سوالات 18

1. بازو میں دی ہوئی شکل کی مخالف شعاعوں کے نام لکھیے۔
2. کیا شعاع PM اور شعاع PT مخالف شعاعیں ہیں؟ وجہ لکھیے۔



خطی جوڑی کے زاویے (Angles in Linear Pair)

- بازوکی شکل میں زاویوں کے نام لکھیے۔
- زاویوں کی جوڑی کس قسم کی ہے؟
- زاویوں کی غیر مشترک ساقین کون سی ہیں؟
- $m\angle PQR = \boxed{\quad}$ °
- $m\angle RQS = \boxed{\quad}$ °
- $m\angle PQR + \angle RQS = 180^\circ$



شکل میں $\angle PQR$ اور $\angle RQS$ متصل زاویے ہیں۔ اسی طرح وہ متمم زاویے بھی ہیں۔

ان کی غیر مشترک ساقین ایک دوسرے کے متقابل شعاعیں ہیں، اس لیے ان ساقین سے ایک خط بناتا ہے۔ یہ دو زاویے خطی جوڑی کے زاویے کہلاتے ہیں۔ **خطی جوڑی کے زاویوں کی پیمائشوں کا مجموعہ 180° ہوتا ہے۔**

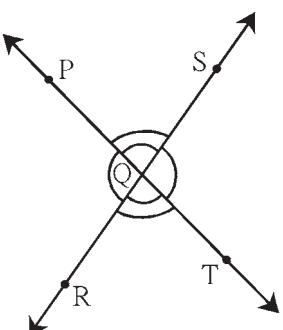
جن دو زاویوں کی ایک ساق مشترک ہوتی ہے اور غیر مشترک ساقین مستقیم خط بناتی ہیں۔ انھیں خطی جوڑی کے زاویے کہتے ہیں۔ خطی جوڑی کے زاویے ایک دوسرے کے متمم زاویے ہوتے ہیں۔

سرگرمی : اسٹریا یا سیدھی نسلکیاں لے کر زیر مطابعہ زاویوں کی جوڑیاں بنائیے۔

مشقی سوالات 19

- ذیل میں دیے ہوئے بیان کے مطابق زاویوں کی جوڑیاں بنائیے۔ اگر نہیں بناسکتے تو جواب لکھیے۔
- | | |
|--|-----------------------------------|
| (i) غیر متمم خطی جوڑی کے زاویے | (ii) غیر متمم مکملہ زاویے |
| (iii) غیر خطی جوڑی والے متمم زاویے | (iv) غیر خطی جوڑی والے متصل زاویے |
| (v) جو مکملہ زاویے نہیں ہیں اور متصل زاویے بھی نہیں ہیں۔ | |
| (vi) مکملہ زاویے والی خطی جوڑی کے زاویے | |

متقابلہ زاویے (Vertically Opposite Angles)

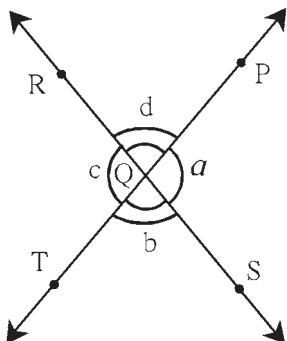


بازوکی شکل میں خط PT اور خط RS یا ایک دوسرے کو نقطہ Q پر قطع کرتے ہیں۔ چار زاویے بن گئے ہیں۔ $\angle PQR$ اور شعاع QP اور شعاع QR سے بنتا ہے۔ $\angle SQT$ اور $\angle QSP$ اور شعاع QS اور QT سے بنتا ہے۔ ان مختلف شعاعوں سے زاویوں کی خلاف شعاعیں بالترتیب $\angle SQT$ اور $\angle PQR$ ہیں۔ اس لیے $\angle SQT$ کو $\angle PQR$ کا متقابلہ زاویہ کہتے ہیں۔

جن دو شعاعوں سے زاویہ بنتا ہے، ان کی مخالف شعاعوں سے بننے والا زاویہ پہلے زاویے کا مقابلہ زاویہ ہوتا ہے۔

آئیے سمجھ لیں :

مقابلہ زاویوں کی خصوصیت



$$\therefore a + b = 180^\circ$$

دی ہوئی شکل میں $\angle PQS$ کا مقابلہ زاویہ کون سا ہے؟

شکل میں دکھائے ہوئے کہ مطابق فرض کیجیے کہ

$$m\angle PQR = d, m\angle TQR = c$$

$\angle SQT$ اور $\angle PQS$ خطی جوڑی کے زاویے ہیں۔

اسی طرح $m\angle TQR$ اور $m\angle SQT$ خطی جوڑی کے زاویے ہیں۔

$$\therefore b + c = 180^\circ$$

$$\therefore a + b = b + c$$

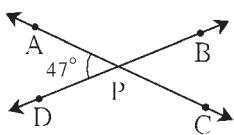
(طرفین سے b تفریق کرنے پر) ...

$\therefore a = c$ $\angle TQR$ اور $\angle PQS$ دونوں زاویوں کی پیمائش مساوی ہیں اس لیے یہ زاویے متماثل ہیں۔

اسی طرح $m\angle PQR = m\angle SQT$ یعنی $\angle PQR = \angle SQT$ اور $m\angle PQR = m\angle SQT$ متماثل ہیں۔

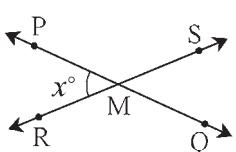
دو خطوط ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں تو بننے والے مقابلہ زاویوں کی پیمائش مساوی ہوتی ہیں۔

مشقی سوالات 20



خط AC اور خط BD ایک دوسرے کو نقطہ P پر قطع کرتے ہیں۔ $m\angle APD = 47^\circ$ ہوتا ہے۔

$\angle CPD$ کی پیمائش لکھیے۔



خط PQ اور خط RS ایک دوسرے کو نقطہ M پر قطع کرتے ہیں۔ $m\angle PMR = x^\circ$ ہوتا ہے۔

$\angle QMR$ اور $\angle SMQ$ کی پیمائش لکھیے۔

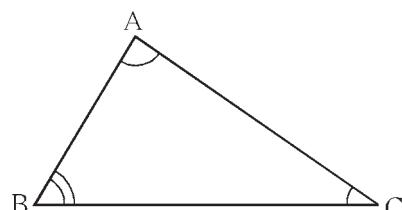
آئیے سمجھ لیں :

کثیرالاضلاع کے داخلہ زاویے (Interior Angles of any Polygon)

مثلث کے داخلہ زاویے

$\angle A$ ، $\angle B$ اور $\angle C$ کے $\triangle ABC$ داخلم زاویے ہیں۔

$$m\angle ABC + m\angle BAC + m\angle ACB = \boxed{\quad}^\circ$$



ذیل میں دی ہوئی جدول کا مشاہدہ کیجیے اور نتیجہ انہد کیجیے۔

اضلاع کی تعداد	کثیرالاضلاع کے نام	کثیرالاضلاع	مثلثوں کی تعداد	داخلہ زاویوں کی پیمائشوں کا مجموعہ
3	مثلث		1	$180^\circ \times 1 = \boxed{\quad}$
4	ذواربعة الاضلاع		2	$180^\circ \times 2 = \boxed{\quad}$
5	خمس		3	$180^\circ \times 3 = \boxed{\quad}$
6	سدس		4	$180^\circ \times \boxed{\quad} = \boxed{\quad}$
7	سبعين		5	
8	ثمان		6	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
n	n ضلع والا کثیرالاضلاع		(n-2)	$180^\circ \times (n-2)$

غور کیجیے کہ، کثیرالاضلاع میں مذکورہ بالا طریقے سے بننے والے مثلثوں کی تعداد، اُس کثیرالاضلاع کے ضلعوں کی تعداد سے 2 کم ہوتی ہے۔

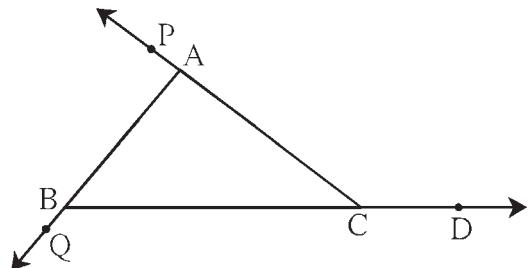


$$n \text{ ضلعوں والے کثیرالاضلاع کے داخلہ زاویوں کی پیمائشوں کا مجموعہ} = 180^\circ \times (n-2)$$

مثلث کے خارجہ زاویے (Exterior angle of Triangle)

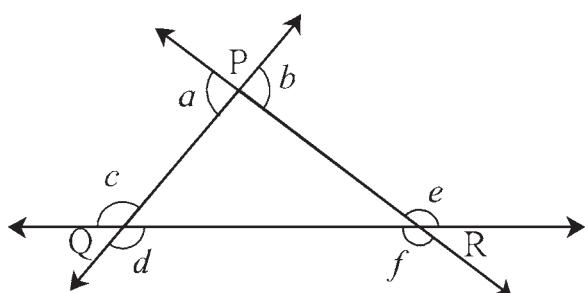
کو شکل میں دکھائے ہوئے کی طرح بڑھایا، تو

ایک نیا زاویہ مثلث کے باہر بناتے۔



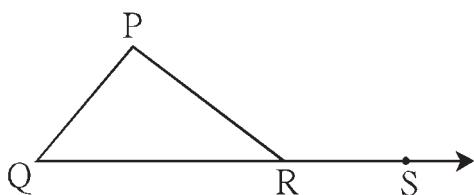
خطی زاویوں کی جوڑی کے زاویے ہے۔ $\angle ACB$ اور $\angle ACD$ $\triangle ABC$ کے خارجہ زاویے ہیں۔ $\angle QBC$ اور $\angle PAB$ بھی $\triangle ABC$ خارجہ زاویے ہیں۔

مثلث کا ایک ضلع بڑھانے پر جو زاویہ مثلث کے متصلہ داخلہ زاویے سے خطی جوڑی بناتا ہے، اس زاویے کو مثلث کا خارجہ زاویہ کہتے ہیں۔



مثال : بازو کی شکل میں مثلث کے تمام خارجہ زاویے دکھائے گئے ہیں۔ a ، b ، c ، d ، e ، f یہ سب $\triangle PQR$ کے خارجہ زاویے ہیں۔ ہر مثلث کے اس طرح چھے خارجہ زاویے ہوتے ہیں۔

مثلث کے خارجہ زاویہ کی خصوصیت



بازو کی شکل میں $\angle PRS$ یہ $\angle PRQ$ کا ایک خارجہ زاویہ ہے۔ اس کا متصلہ داخلہ زاویہ ہے۔ دوسرے دو داخلہ زاویے یعنی $\angle P$ اور $\angle Q$ یہ $\angle PRS$ سے دور ہیں یا زیادہ فاصلے پر ہیں۔ $\angle P$ اور $\angle Q$ کو $\angle PRS$ کے بعد داخلہ زاویے کہتے ہیں۔

$$m\angle P + m\angle Q + m\angle PRQ = \boxed{\quad}^{\circ}$$

(مثلث کے تینوں زاویوں کی پیمائشوں کا مجموعہ) ...

$$m\angle PRS + m\angle PRQ = \boxed{\quad}^{\circ}$$

(خطی جوڑی کے زاویے) ...

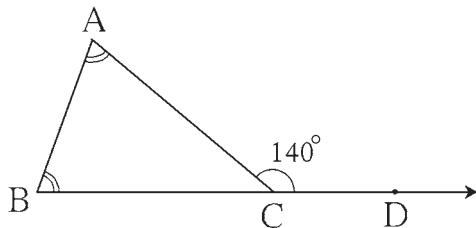
$$\therefore m\angle P + m\angle Q + m\angle PRQ = m\angle PRS + m\angle PRQ$$

(طرفین سے $m\angle PRQ$ تفریق کرنے پر) ...

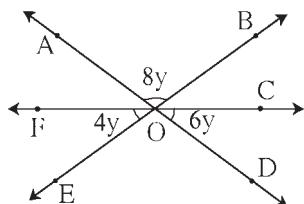
$$\therefore m\angle P + m\angle Q = m\angle PRS$$

مثلث کے خارجہ زاویے کی پیمائش، اس زاویے کے بعد داغہ زاویوں کی پیمائشوں کے مجموع کے برابر ہوتی ہے۔

مشقی سوالات 21



1. $\triangle ABC$ کا $\angle ACD$ خارجہ زاویہ ہے۔ $\angle A$ اور $\angle B$ کی پیمائش مساوی ہیں۔ اگر $m\angle ACD = 140^\circ$ ہو تو $\angle A$ اور $\angle B$ کی پیمائش معلوم کیجیے۔



2. بازو کی شکل میں زاویوں کی پیمائش دیکھ کر اس کی مدد سے بقیہ تینوں زاویوں کی پیمائش لکھیے۔

3*. $\triangle ABC$ متساوی الساقین مثلث میں $\angle A$ اور $\angle B$ کی پیمائش مساوی ہیں۔ $\angle ACD$ یہ $\triangle ABC$ کا خارجہ زاویہ ہے۔ اور $\angle ACD$ کی پیمائش بالترتیب $(3x - 17)^\circ$ اور $(8x + 10)^\circ$ ہیں۔ تو $\angle ACB$ اور $\angle ACD$ کی پیمائش معلوم کیجیے۔ اسی طرح $\angle A$ اور $\angle B$ کی بھی پیمائش معلوم کیجیے۔

ICT Tools or Links



- Geogebra کی مدد سے ایک ہی ابتدائی نقطہ والی دو شعاعیں کھینچیں۔
- Move Option کا استعمال کر کے شعاعوں کو گھمائیے۔ ایک خاص حالت میں وہ مختلف شعاعیں بنتی ہیں۔ تصدیق کیجیے۔
- خطی جوڑی کے زاویے بنائیں۔ مشترک ساق 'move' کر کے مختلف خطی جوڑی کے زاویوں کی جوڑیوں کا تجربہ کیجیے۔
- Polygon Tools میں Geogebra کا استعمال کر کے مختلف کثیرالاضلاع کھینچیں اور ان کے داخلہ زاویوں کی پیمائشوں کی خصوصیت کی تصدیق کیجیے۔

