13 पायथागोरसचा सिद्धान्त

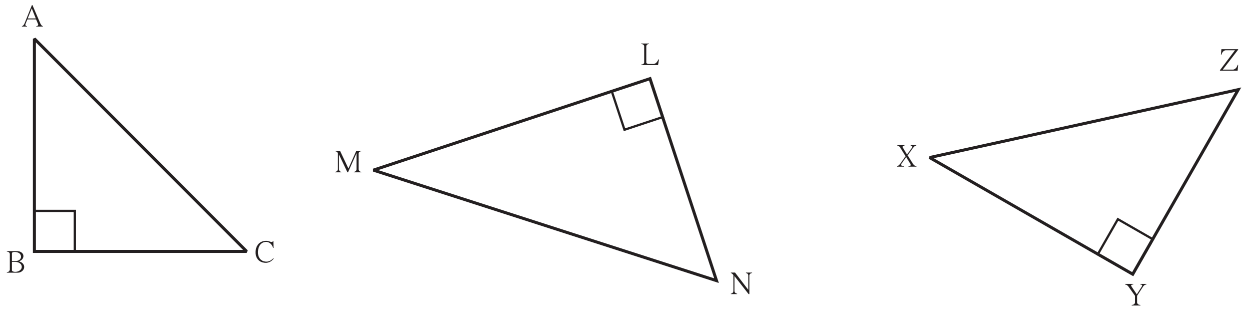
3P3DYN

जरा आठवूया.

काटकोन त्रिकोण (Right angled triangle)

ज्या त्रिकोणाचा एक कोन काटकोन असतो, त्या त्रिकोणास काटकोन त्रिकोण म्हणतात आणि त्या काटकोनासमोरील बाजूला कर्ण म्हणतात, हे आपणांस माहीत आहे.

- खालील काटकोन त्रिकोणातील कर्णांची नावे लिहा.



ΔABC चा कर्ण ☐ ΔLMN चा कर्ण ☐ ΔXYZ चा कर्ण ☐

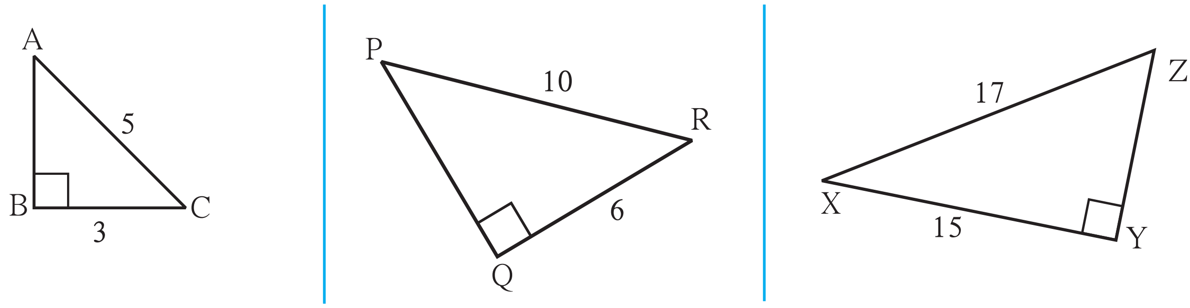
पायथागोरसचा सिद्धान्त (Theorem of Pythagoras)

पायथागोरस हा थोर ग्रीक गणिती ख्रिस्तपूर्व सहाव्या शतकात होऊन गेला. गणित विषयातील त्याचे योगदान खूप मोठे आहे. गणित शिकवण्याची त्याची हातोटी विलक्षण लोकप्रिय होती. त्याने अनेक शिष्य तयार केले.

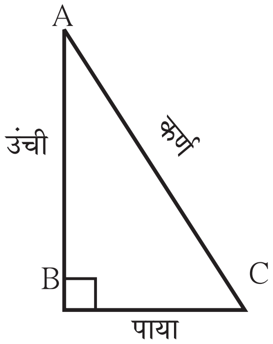
काटकोन त्रिकोणासंबंधीचा एक सिद्धान्त फार पूर्वीपासून अनेक देशांतील लोकांना माहीत होता. भारतातील शुल्वसूत्र या ग्रंथातही तो आहे. त्या सिद्धान्ताची सिद्धता पायथागोरसने प्रथम दिली म्हणून त्याचे नाव त्या सिद्धान्ताला दिले गेले. **काटकोन त्रिकोणात कर्णाचा वर्ग हा इतर दोन बाजूंच्या वर्गांच्या बेरजेइतका असतो.** हा तो पायथागोरसचा सिद्धान्त आहे.

कृती कर्ण आणि काटकोन करणारी एक भुजा दिली असता खालील कच्च्या आकृतीतील मापांप्रमाणे काटकोन त्रिकोण काढा. तिसऱ्या भुजेची लांबी मोजा. पायथागोरसच्या सिद्धान्ताचा पडताळा घ्या.

(i) (ii) (iii)



जाणून घेऊया.



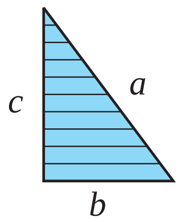
सोबतच्या आकृतीवरून, पायथागोरसचा सिद्धान्त खालीलप्रमाणे लिहितात. ΔABC मध्ये $\angle$B काटकोन असेल तर,

$[l(AC)]^2 = [l(AB)]^2 + [l(BC)]^2$

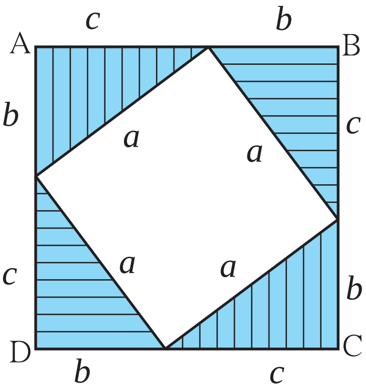
साधारणपणे काटकोन त्रिकोणात काटकोन करणाऱ्या बाजूंपैकी एक बाजू पाया म्हणून घेतात व दुसरी बाजू उंची म्हणून घेतात. मग हा सिद्धान्त **(कर्ण)**^{2} = **(पाया)**^{2} + **(उंची)**^{2}. असा लिहितात.

पायथागोरसच्या **सिद्धान्ताचा पडताळा** घेण्यासाठी खालील कृती करा.

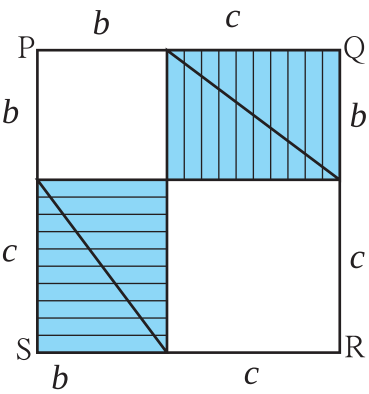
कृती एका कार्डशीटचे समान मापाचे 8 काटकोन त्रिकोण कापा. त्याच्या भुजा कोणत्याही लांबीच्या असू शकतात. त्या त्रिकोणाचा कर्ण 'a' एकक, काटकोन करणाऱ्या बाजू 'b' एकक व 'c' एकक आहेत, असे मानू. त्या त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ $\frac{bc}{2}$ आहे, हे लक्षात घ्या.



आता वेगळ्या कार्डशीटवर (b + c) एकक बाजू असणारे दोन चौरस पेन्सिलने काढा. आकृतीत दाखवल्याप्रमाणे आधी कापलेल्या 8 त्रिकोणांपैकी 4 त्रिकोण चौरस ABCD मध्ये ठेवा आणि राहिलेले 4 त्रिकोण आकृतीमध्ये दाखवल्याप्रमाणे चौरस PQRS मध्ये ठेवा. त्रिकोणांनी झाकलेले भाग रेखांकित करा.



आकृती (i)



आकृती (ii)

आकृत्यांचे निरीक्षण करा. आकृती (i) मध्ये रिकाम्या जागेत ज्याची बाजू 'a' आहे असा चौरस तयार झाला आहे. आकृती (ii) मध्ये रिकाम्या जागेत 'b' व 'c' बाजू असलेले दोन चौरस तयार झाले आहेत. दोन्ही चौरसांमध्ये रेखांकित केलेला भाग समान म्हणजे चार काटकोन त्रिकोणांच्या क्षेत्रफळाइतका आहे.

आकृती (i) मध्ये चौरस ABCD चे क्षेत्रफळ = a^2 + 4 $\times$ काटकोन त्रिकोणांचे क्षेत्रफळ

$$= a^2 + 4 \times \frac{1}{2} bc$$

$$= a^2 + 2bc$$

आकृती (ii) मध्ये चौरस PQRS चे क्षेत्रफळ $= b^2 + c^2 + 4 \times$ काटकोन त्रिकोणांचे क्षेत्रफळ

$$= b^2 + c^2 + 4 \times \frac{1}{2}\ bc$$

$$= b^2 + c^2 + 2bc$$

चौरस ABCD चे क्षेत्रफळ = चौरस PQRS चे क्षेत्रफळ

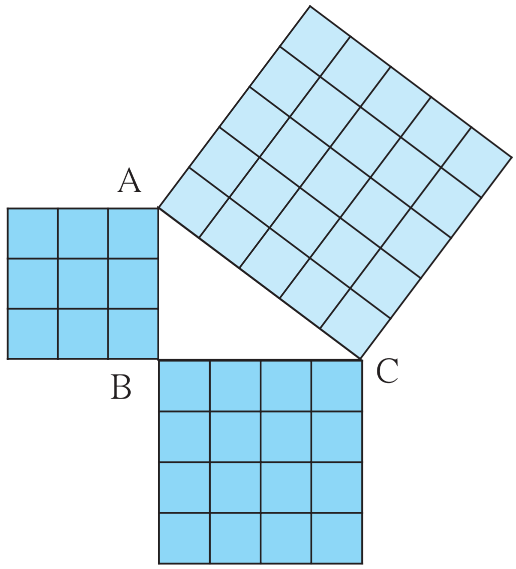
$$\therefore \quad a^2 + 2bc = b^2 + c^2 + 2bc$$

$$\therefore a^2 = b^2 + c^2$$

चला, चर्चा करूया.

- आकृती (i) मध्ये रिकाम्या चौकोनाचा प्रत्येक कोन काटकोन आहे, हे कोनमापकाशिवाय पडताळून पाहता येईल का ?

कृती एका कार्डशीटवर 3 सेमी, 4 सेमी व 5 सेमीच्या मापाचा एक काटकोन त्रिकोण काढा. प्रत्येक बाजूवर चौरसाची रचना करा. प्रत्येक चौरसाचे क्षेत्रफळ काढून पायथागोरसच्या सिद्धान्ताचा पडताळा घ्या.



पायथागोरसचा सिद्धान्त वापरून काटकोन त्रिकोणाच्या दोन बाजू दिल्यास तिसरी बाजू काढता येते.

उदा. ΔABC मध्ये $\angle C = 90°$, $l(AC) = 5$ सेमी आणि $l(BC) = 12$ सेमी, तर $l(AB) =$ किती ?

उकल : काटकोन त्रिकोण ABC मध्ये $\angle C = 90°$ म्हणून बाजू AB हा कर्ण आहे. पायथागोरस सिद्धान्तानुसार,

$l(AB)^2 = l(AC)^2 + l(BC)^2$

$= 5^2 + 12^2$

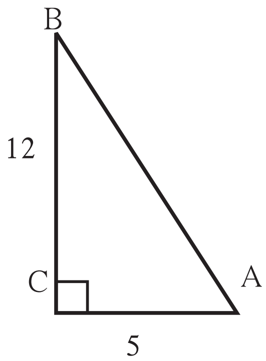
$= 25 + 144$

$\therefore l(AB)^2 = 169$

$\therefore l(AB)^2 = 13^2$

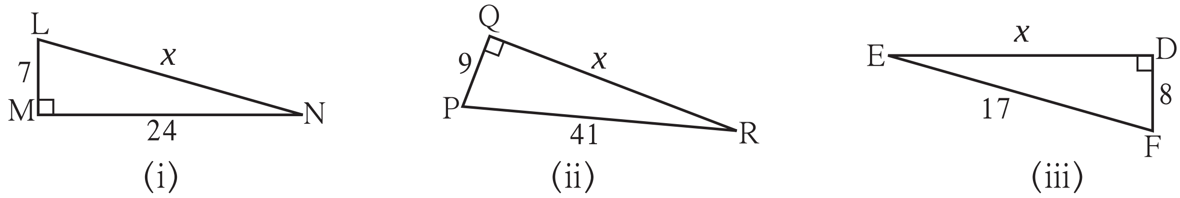
$\therefore l(AB) = 13$

$\therefore$ रेख AB ची लांबी = 13 सेमी



सरावसंच 48

1. खालील आकृत्या पाहा व 'x' ची किंमत काढा.



2. काटकोन ΔPQR मध्ये $\angle P = 90°$ जर $l(PQ) = 24$ सेमी आणि $l(PR) = 10$ सेमी, तर रेख QR ची लांबी काढा.
3. काटकोन ΔLMN मध्ये $\angle M = 90°$ जर $l(LM) = 12$ सेमी आणि $l(LN) = 20$ सेमी, तर रेख MN ची लांबी काढा.
4. 15 मी लांबीची एक शिडी जमिनीपासून 9 मीटर उंचीवरील एका खिडकीपाशी पोहचते, तर भिंतीचा पाया व शिडीचे खालचे टोक यांमधील अंतर काढा.

जाणून घेऊया.

नैसर्गिक संख्यांच्या त्रिकुटामध्ये जर मोठ्या संख्येचा वर्ग हा इतर दोन संख्यांच्या वर्गांच्या बेरजेइतका असेल तर त्याला **पायथागोरसचे त्रिकुट** म्हणतात. ज्या त्रिकोणाच्या भुजांची लांबी अशा त्रिकुटातील संख्यांनी दर्शवली जाते तो त्रिकोण काटकोन त्रिकोण असतो.

उदा. (7,24,25) हा संख्या समूह पायथागोरसचे त्रिकुट आहे का ?

7, 24, 25 यातील प्रत्येक संख्येचा वर्ग करू.

$7^2 = 49,\ 24^2 = 576,\ 25^2 = 625$

$\therefore 49 + 576 = 625$

$\therefore 7^2 + 24^2 = 25^2$

$\therefore$ 7, 24 व 25 हे पायथागोरसचे त्रिकुट आहे.

उपक्रम : 1 ते 50 या संख्यासमूहातील संख्या पाहा व त्यांमधील पायथागोरसची त्रिकुटे शोधा.

सरावसंच 49

1. पुढे काही त्रिकुटे दिली आहेत, त्यांतील पायथागोरसचे त्रिकुट ठरवा.

(i) 3, 4, 5 (ii) 2, 4, 5
(iii) 4, 5, 6 (iv) 2, 6, 7
(v) 9, 40, 41 (vi) 4, 7, 8

2. खाली काही त्रिकोणांच्या बाजू दिल्या आहेत, त्यावरून कोणते त्रिकोण काटकोन त्रिकोण आहेत, ते ओळखा.

(i) 8, 15, 17 (ii) 11, 12, 15 (iii) 11, 60, 61 (iv) 1.5, 1.6, 1.7
(v) 40, 20, 30