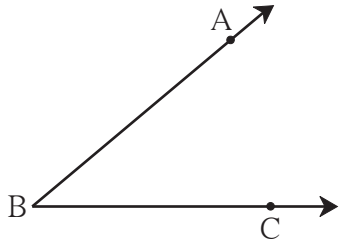
4 कोन व कोनांच्या जोड्या

जरा आठवूया.

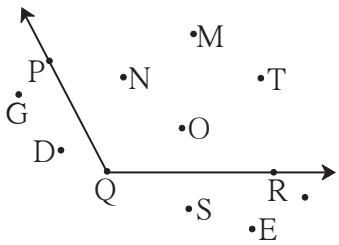


- शेजारील कोनाचे नाव लिहा. .....
- कोनाच्या शिरोबिंदूचे नाव लिहा. .....
- कोनाच्या भुजांची नावे लिहा. .....
- भुजांवर दाखवलेल्या बिंदूंची नावे लिहा. .....

जाणून घेऊया.

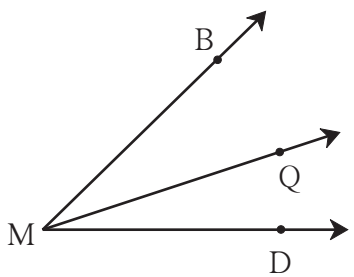
कोनाचा अंतर्भाग व बाह्यभाग

शेजारील आकृतीमध्ये प्रतलातील कोनाच्या भुजांवरील बिंदूंव्यतिरिक्त असलेले बिंदू N, बिंदू M, बिंदू T यांसारख्या बिंदूंचा समूह म्हणजे ∠PQR चा **अंतर्भाग** होय. (Interior of an angle)



प्रतलातील जे बिंदू कोनाच्या भुजांवर नाहीत व कोनाच्या अंतर्भागात नाहीत अशा बिंदू G, बिंदू D, बिंदू E यांसारख्या बिंदूंचा समूह म्हणजे ∠PQR चा **बाह्यभाग** होय. (Exterior of an angle)

संलग्न कोन (लगतचे कोन) (Adjacent angles)



शेजारच्या आकृतीतील कोन पाहा. ∠BMQ व ∠QMD या कोनांची किरण MQ ही एक भुजा सामाईक आहे आणि M हा शिरोबिंदू सामाईक आहे. या कोनांच्या अंतर्भागात एकही बिंदू सामाईक नाही. ते एकमेकांचे शेजारी आहेत. अशा कोनांना संलग्न कोन म्हणतात.

संलग्न कोनांची एक भुजा सामाईक असून उरलेल्या दोन भुजा सामाईक भुजेच्या विरुद्ध बाजूंना असतात आणि त्यांचा शिरोबिंदू सामाईक असतो. संलग्न कोनांचे अंतर्भाग विभिन्न असतात.

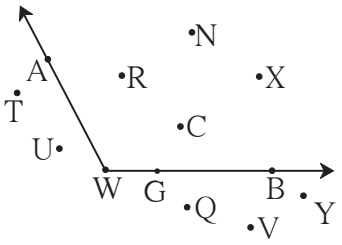
वरील आकृतीत ∠BMD व ∠BMQ या कोनांचीही MB ही भुजा सामाईक आहे. पण ते संलग्न कोन नाहीत, कारण त्यांचे अंतर्भाग विभिन्न नाहीत.

हे मला समजले.

- ज्या दोन कोनांचा शिरोबिंदू सामाईक असतो, एक भुजा सामाईक असते व त्यांचे अंतर्भाग विभिन्न असतात, त्या कोनांना संलग्न कोन म्हणतात.

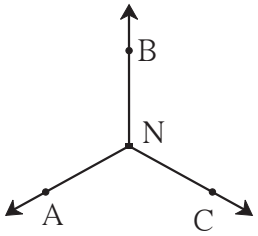
सरावसंच 15

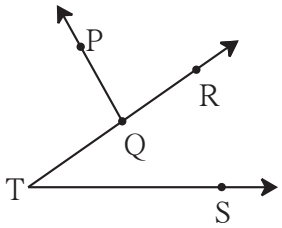
1. आकृतीचे निरीक्षण करा व ∠AWB साठी पुढील सारणी पूर्ण करा.



अंतर्भागातील बिंदूंची नावे	
बाह्यभागातील बिंदूंची नावे	
कोनाच्या भुजांवरील बिंदूंची नावे	

2. खालील आकृत्यांमधील संलग्न कोनांच्या जोड्या लिहा.

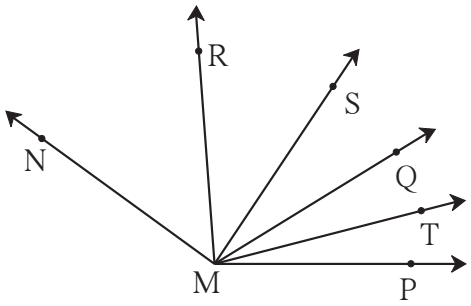




3. कोनांच्या खालील जोड्या संलग्न आहेत का ? संलग्न नसल्यास कारण लिहा.

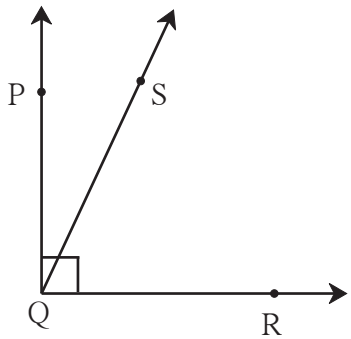
(i) ∠PMQ व ∠RMQ (ii) ∠RMQ व ∠SMR

(iii) ∠RMS व ∠RMT (iv) ∠SMT व ∠RMS



जाणून घेऊया.

कोटिकोन (Complementary angles)

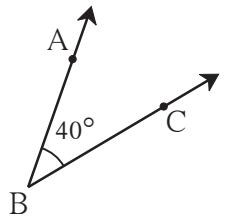


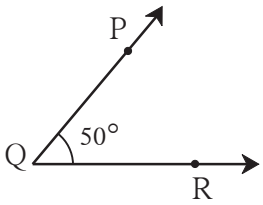
- ∠PQR हा एक काटकोन काढा.
- त्याच्या अंतर्भागात S हा कोणताही बिंदू घ्या.
- किरण QS काढा.
- ∠PQS व ∠SQR यांच्या मापांची बेरीज करा.
- बेरीज किती येईल ?

ज्या दोन कोनांच्या मापांची बेरीज 90° असते ते कोन परस्परांचे कोटिकोन आहेत, असे म्हणतात.

येथे ∠PQS व ∠SQR हे परस्परांचे कोटिकोन आहेत.

उदा. आकृतीतील कोनांचे निरीक्षण करा व चौकटींत योग्य ती संख्या लिहा.





$m\angle ABC = \square\ ^\circ$

$m\angle PQR = \square\ ^\circ$

$m\angle ABC + m\angle PQR = \square\ ^\circ$

$\angle ABC$ व $\angle PQR$ यांच्या मापांची बेरीज 90° म्हणून ते परस्परांचे कोटिकोन आहेत.

उदा. 70° मापाच्या कोनाच्या कोटिकोनाचे माप किती ?

उकल : दिलेल्या कोनाच्या कोटिकोनाचे माप x मानू.

$70 + x = 90$

$\therefore 70 + x - 70 = 90 - 70$

$x = 20^\circ$

70° मापाच्या कोटिकोनाचे माप 20° आहे.

उदा. $(a + 15)^\circ$ व $(2a)^\circ$ हे एकमेकांचे कोटिकोन आहेत, तर प्रत्येक कोनाचे माप किती ?

उकल : $a + 15 + 2a = 90$

$3a + 15 = 90$

$3a = 75$

$a = 25$

$\therefore a + 15 = 25 + 15 = 40^\circ$

आणि $2a = 2 \times 25 = 50^\circ$

सरावसंच 16

1. खाली काही कोनांची मापे दिली आहेत. त्यांच्या कोटिकोनांची मापे लिहा.
   (i) 40° (ii) 63° (iii) 45° (iv) 55° (v) 20° (vi) 90° (vii) x°
2. $(y - 20)^\circ$ आणि $(y + 30)^\circ$ हे एकमेकांचे कोटिकोन आहेत, तर प्रत्येक कोनाचे माप काढा.

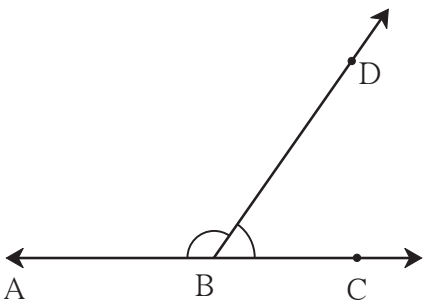
जरा आठवूया.

रेषा AB वर T हा एक बिंदू आहे.

- $\angle ATB$ या कोनाचा प्रकार कोणता ?
- त्याचे माप किती ?

जाणून घेऊया.

पूरक कोन (Supplementary angles)

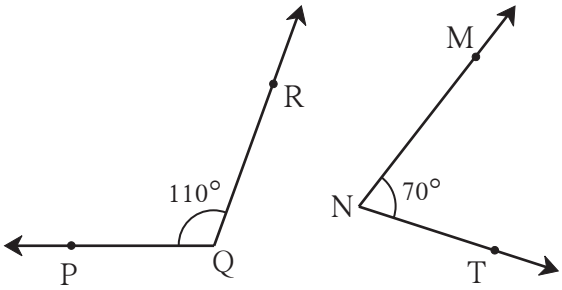


- शेजारील आकृतीत AC ही एक रेषा दिली आहे. रेषेवरील B बिंदूपासून BD हा किरण काढला आहे. येथे किती कोन आहेत ?
- $m\angle ABD = \square\ ^\circ$, $m\angle DBC = \square\ ^\circ$
- $m\angle ABD + m\angle DBC = \square\ ^\circ$

ज्या दोन कोनांच्या मापांची बेरीज 180° असते, त्या दोन कोनांना परस्परांचे पूरक कोन असे म्हणतात.

येथे $\angle ABD$ व $\angle DBC$ हे परस्परांचे पूरक कोन आहेत.

उदा. खालील आकृतीतील कोनांचे निरीक्षण करा व चौकटींत योग्य ती संख्या लिहा.



- $m\angle PQR$ = ☐ ° $m\angle MNT$ = ☐ °
- $m\angle PQR + m\angle MNT$ = ☐ °

$\angle PQR$ व $\angle MNT$ हे परस्परांचे पूरक कोन आहेत.

उदा. 135° मापाच्या पूरक कोनाचे माप काढा.

उकल : पूरक कोनाचे माप p° मानू.

पूरक कोनांच्या मापांची बेरीज 180° असते.

$135 + p = 180$

$\therefore 135 + p - 135 = 180 - 135$

$\therefore p = 45$

$\therefore$ 135° मापाच्या पूरक कोनाचे माप 45° आहे.

उदा. $(a + 30)°$ व $(2a)°$ हे एकमेकांचे पूरक कोन आहेत तर प्रत्येक कोनाचे माप किती ?

उकल : $a + 30 + 2a = 180$

$\therefore 3a = 180 - 30$

$\therefore 3a = 150$

$\therefore a = 50$

$\therefore a + 30 = 50 + 30 = 80°$

$\therefore 2a = 2 \times 50 = 100°$

$\therefore$ त्या कोनाची मापे 80° व 100° आहेत.

सरावसंच 17

1. खाली दिलेल्या कोनांच्या पूरक कोनांची मापे लिहा.
   (i) 15° (ii) 85° (iii) 120° (iv) 37° (v) 108° (vi) 0° (vii) $a°$
2. खाली काही कोनांची मापे दिली आहेत. त्यांतून जोड्या जुळवून पूरक कोनांच्या आणि कोटिकोनांच्या जोड्या तयार करा.
   $m\angle B = 60°$ $m\angle N = 30°$ $m\angle Y = 90°$ $m\angle J = 150°$
   $m\angle D = 75°$ $m\angle E = 0°$ $m\angle F = 15°$ $m\angle G = 120°$
3. ΔXYZ मध्ये $m\angle Y = 90°$, $\angle X$ व $\angle Z$ या कोनांमधील परस्पर संबंध लिहा.
4. कोटिकोनांच्या जोडीतील कोनांच्या मापांतील फरक 40° असेल तर त्या कोनांची मापे काढा.
5. ☐PTNM हा आयत आहे. या आकृतीतील पूरक कोनांच्या जोड्या लिहा.

6*. जर $m\angle A = 70°$ तर $\angle A$ च्या कोटिकोनाच्या पूरक कोनाचे माप किती ?

7. $\angle A$ व $\angle B$ परस्परांचे पूरक कोन आहेत आणि $m\angle B = (x + 20)°$, तर $m\angle A$ किती ?

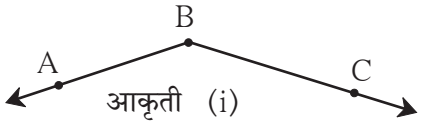
चला, चर्चा करूया.

खालील विधानांची चर्चा करा. विधान बरोबर असल्यास त्याचे उदाहरण द्या. विधान चूक असल्यास कारण सांगा.

- दोन लघुकोन परस्परांचे कोटिकोन असू शकतात.
- दोन काटकोन परस्परांचे कोटिकोन असू शकतात.
- एक लघुकोन व एक विशालकोन हे परस्परांचे कोटिकोन असू शकतात.
- दोन लघुकोन परस्परांचे पूरक कोन असू शकतात.
- दोन काटकोन परस्परांचे पूरक कोन असतात.
- एक लघुकोन व एक विशालकोन परस्परांचे पूरक कोन असू शकतात.

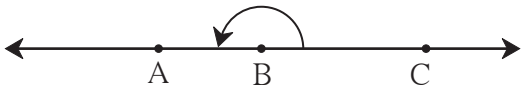
जाणून घेऊया.

विरुद्ध किरण (Opposite rays)



आकृती (i)

शेजारील आकृतीतील किरणांची नावे सांगा.
किरणांच्या आरंभबिंदूचे नाव सांगा.
आकृती (i) मधील कोनाचे नाव लिहा.



आकृती (ii)

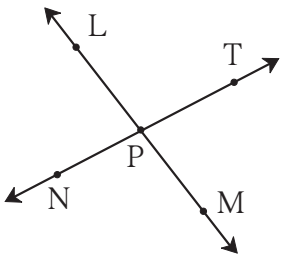
शेजारील आकृती (ii) मधील कोनाचे नाव लिहा.
आकृतीतील B हा आरंभबिंदू असलेल्या किरणांची नावे लिहा.

आकृती (i) मध्ये किरण BC व किरण BA मिळून एक विशालकोन होतो तर आकृती (ii) मध्ये किरण BC व किरण BA मिळून सरळकोन होतो व एक सरळ रेषा मिळते. येथे किरण BC व किरण BA हे एकमेकांचे विरुद्ध किरण आहेत.

हे मला समजले.

- ज्या दोन किरणांचा आरंभबिंदू सामाईक असतो व त्या किरणांनी एक रेषा तयार होते, त्या किरणांना परस्परांचे विरुद्ध किरण म्हणतात.

सरावसंच 18

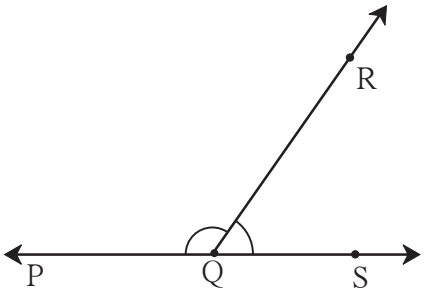


1. शेजारील आकृतीतील विरुद्ध किरणांची नावे लिहा.

2. किरण PM व किरण PT हे विरुद्ध किरण आहेत का ? सकारण लिहा.

जाणून घेऊया.

रेषीय जोडीतील कोन (Angles in linear pair)



- शेजारील आकृतीतील कोनांची नावे लिहा.
- कोनांची जोडी कोणत्या प्रकारची आहे ?
- कोनांच्या असामाईक भुजा कोणत्या आहेत ?
- m∠PQR = ☐°
- m∠RQS = ☐°
- m∠PQR + m∠RQS = 180°

आकृतीतील ∠PQR व ∠RQS हे संलग्न कोन आहेत तसेच ते पूरक कोन आहेत. त्यांच्या असामाईक भुजा हे परस्परांचे विरुद्ध किरण आहेत, म्हणजेच त्या भुजांनी एक रेषा तयार होते. हे दोन कोन रेषीय जोडीत आहेत असे म्हणतात. **रेषीय जोडीतील कोनांच्या मापांची बेरीज 180° असते.**

हे मला समजले.

- ज्या दोन कोनांची एक भुजा सामाईक असते व असामाईक भुजांनी सरळ रेषा तयार होते, त्यांना रेषीय जोडीतील कोन म्हणतात. रेषीय जोडीतील कोन परस्परांचे पूरक कोन असतात.

उपक्रम : स्ट्रॉ किंवा सरळ काड्या घेऊन अभ्यासलेल्या कोनांच्या जोड्या तयार करा.

सरावसंच 19

खाली दिलेल्या वर्णनाप्रमाणे कोनांच्या जोड्या काढा. काढता येत नसल्यास कारण लिहा.

(i) संलग्न नसलेले कोटिकोन

(ii) पूरक नसलेले रेषीय जोडीतील कोन

(iii) रेषीय जोडीत नसलेले पूरक कोन

(iv) रेषीय जोडीत नसलेले संलग्न कोन

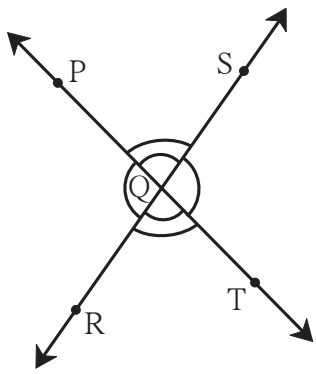
(v) जे कोटिकोनही नाहीत व संलग्न कोनही नाहीत

(vi) कोटिकोन असलेले रेषीय जोडीतील कोन

जाणून घेऊया.

विरुद्ध कोन (Vertically opposite angles)

शेजारील आकृतीत रेषा PT व रेषा RS या परस्परांना Q बिंदूत छेदतात. चार कोन तयार झाले आहेत. ∠PQR हा किरण QP व किरण QR यांनी तयार झाला आहे. QP व QR या किरणांचे विरुद्ध किरण अनुक्रमे QT व QS आहेत. त्या विरुद्ध किरणांनी तयार झालेला कोन ∠SQT आहे म्हणून ∠SQT हा ∠PQR चा विरुद्ध कोन आहे असे म्हणतात.



हे मला समजले.

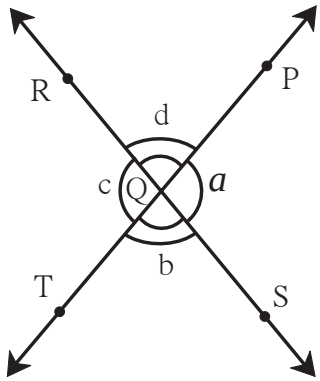
- ज्या दोन किरणांनी कोन तयार झाला, त्याच्या विरुद्ध किरणांनी तयार झालेला कोन पहिल्या कोनाचा विरुद्ध कोन असतो.

जाणून घेऊया.

विरुद्ध कोनांचा गुणधर्म

- दिलेल्या आकृतीतील $\angle PQS$ चा विरुद्ध कोन कोणता ?

आकृतीत दाखवल्याप्रमाणे $m\angle PQS = a$, $m\angle SQT = b$, $m\angle TQR = c$, $m\angle PQR = d$ असे मानू.



$\angle PQS$ व $\angle SQT$ हे रेषीय जोडीतील कोन आहेत.

$\therefore\ a + b = 180^\circ$

तसेच $m\angle SQT$ व $m\angle TQR$ हे रेषीय जोडीतील कोन आहेत.

$\therefore\ b + c = 180^\circ$

$\therefore\ a + b = b + c$

$\therefore\ a = c$ . . . . . (दोन्ही बाजूंमधून b वजा करून)

$\therefore$ $\angle PQS$ व $\angle TQR$ यांची मापे समान आहेत म्हणजेच ते कोन एकरूप आहेत.

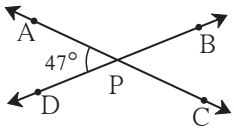
त्याचप्रमाणे $m\angle PQR = m\angle SQT$ म्हणजेच $\angle PQR$ व $\angle SQT$ एकरूप आहेत.

हे मला समजले.

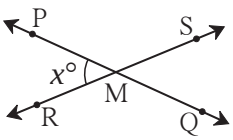
- दोन रेषांनी एकमेकींना छेदले असता होणाऱ्या परस्पर विरुद्ध कोनांची मापे समान असतात.

सरावसंच 20

1. रेषा AC व रेषा BD परस्परांना P या बिंदूत छेदतात. $m\angle APD = 47^\circ$ $\angle APB$, $\angle BPC$, $\angle CPD$ यांची मापे लिहा.

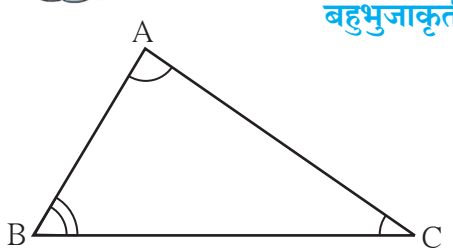


2. रेषा PQ व रेषा RS परस्परांना M बिंदूत छेदतात. $m\angle PMR = x^\circ$ $\angle PMS$, $\angle SMQ$ व $\angle QMR$ यांची मापे लिहा.



जाणून घेऊया.

बहुभुजाकृतीचे आंतरकोन (Interior angles of a polygon)

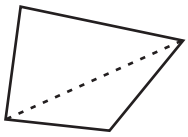
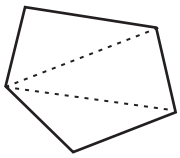
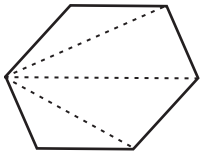
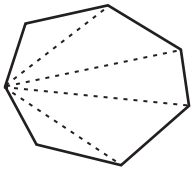


त्रिकोणाचे आंतरकोन

ΔABC चे $\angle A$, $\angle B$ व $\angle C$ हे आंतरकोन आहेत.

- $m\angle ABC + m\angle BAC + m\angle ACB = \boxed{}^\circ$

खालील सारणीचे निरीक्षण करा व निष्कर्ष काढा.

बाजूंची संख्या	बहुभुजाकृतीचे नाव	बहुभुजाकृती	त्रिकोणांची संख्या	आंतरकोनांची बेरीज
3	त्रिकोण		1	$180^\circ \times 1 = \square$
4	चौकोन		2	$180^\circ \times 2 = \square$
5	पंचकोन		3	$180^\circ \times 3 = \square$
6	षट्कोन		4	$180^\circ \times \square = \square$
7	सप्तकोन		5	
8	अष्टकोन		6	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
n	n बाजू असलेली आकृती		(n - 2)	$180^\circ \times (n - 2)$

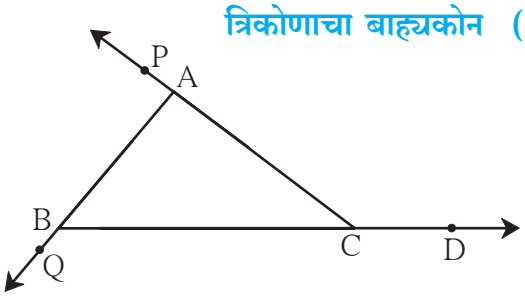
लक्षात घ्या की, बहुभुजाकृतीत वरीलप्रमाणे तयार झालेल्या त्रिकोणांची संख्या ही त्या बहुभुजाकृतीच्या बाजूंच्या संख्येपेक्षा दोनने कमी असते.

हे मला समजले.

- n बाजू असलेल्या बहुभुजाकृतीच्या आंतरकोनांच्या मापांची बेरीज = $180^\circ \times (n - 2)$

जाणून घेऊया.

त्रिकोणाचा बाह्यकोन (Exterior angle of a triangle)



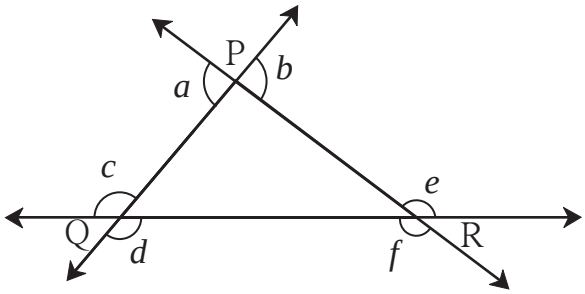
ΔABC ची बाजू BC आकृतीत दाखवल्याप्रमाणे वाढवली, तर $\angle ACD$ हा नवा कोन त्रिकोणाबाहेर तयार होतो.

$\angle ACD$ हा ΔABC चा बाह्यकोन आहे. $\angle ACD$ व $\angle ACB$ ही रेषीय जोडीतील कोनांची जोडी आहे. $\angle PAB$ व $\angle QBC$ हेही ΔABC चे बाह्यकोन आहेत.

हे मला समजले.

- त्रिकोणाची एक बाजू वाढवल्यावर जो कोन त्रिकोणाच्या लगतच्या आंतरकोनाशी रेषीय जोडी करतो, त्या कोनाला त्रिकोणाचा बाह्यकोन म्हणतात.

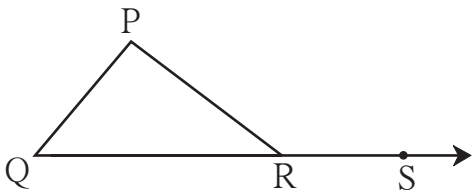
उदा. शेजारील आकृतीमध्ये त्रिकोणाचे बाह्यकोन दाखवले आहेत. a, b, c, d, e, f हे ΔPQR चे बाह्यकोन आहेत. प्रत्येक त्रिकोणाला याप्रमाणे सहा बाह्यकोन असतात.



जाणून घेऊया.

बाह्यकोनाचा गुणधर्म

शेजारील आकृतीत $\angle PRS$ हा ΔPQR चा एक बाह्यकोन आहे. $\angle PRQ$ हा त्याचा लगतचा आंतरकोन आहे. इतर दोन आंतरकोन म्हणजे $\angle P$ व $\angle Q$ हे $\angle PRS$ पासून लांब म्हणजेच दूर आहेत. $\angle P$ व $\angle Q$ यांना $\angle PRS$ चे दूरस्थ आंतरकोन म्हणतात.



$m\angle P + m\angle Q + m\angle PRQ = \square^\circ$ .....(त्रिकोणाच्या तिन्ही कोनांची बेरीज)

$m\angle PRS + m\angle PRQ = \square^\circ$ .....(रेषीय जोडीतील कोन)

$\therefore\ m\angle P + m\angle Q + m\angle PRQ = m\angle PRS + m\angle PRQ$

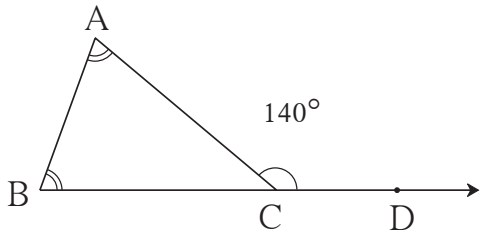
$\therefore\ m\angle P + m\angle Q = m\angle PRS$ ($m\angle PRQ$ दोन्ही बाजूंतून वजा करून)

हे मला समजले.

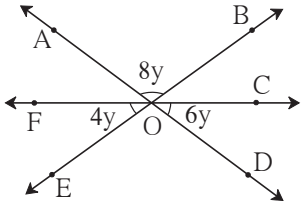
- त्रिकोणाच्या बाह्यकोनाचे माप हे त्या कोनाच्या दूरस्थ आंतरकोनांच्या मापांच्या बेरजेएवढे असते.

सरावसंच 21

1. $\angle ACD$ हा ΔABC चा बाह्यकोन आहे. $\angle A$ व $\angle B$ यांची मापे समान आहेत. जर $m\angle ACD = 140^\circ$ तर $\angle A$ व $\angle B$ यांची मापे काढा.



2. शेजारील आकृतीतील कोनांची मापे पाहून त्यावरून उरलेल्या तीनही कोनांची मापे लिहा.



3*. ΔABC या समद्विभुज त्रिकोणात $\angle A$ व $\angle B$ यांची मापे समान आहेत. $\angle ACD$ हा ΔABC चा बाह्यकोन आहे. $\angle ACB$ व $\angle ACD$ ची मापे अनुक्रमे $(3x - 17)^\circ$ व $(8x + 10)^\circ$ आहेत, तर $\angle ACB$ व $\angle ACD$ यांची मापे काढा. तसेच $\angle A$ व $\angle B$ यांचीही मापे काढा.

ICT Tools or Links

- Geogebra च्या साहाय्याने एकच आरंभबिंदू असणारे दोन किरण काढा. Move Option चा उपयोग करून किरणाचे भ्रमण करा. एका विशिष्ट स्थितीत ते विरुद्ध किरण तयार होतात याचा पडताळा घ्या.
- रेषीय जोडीचे कोन तयार करा. सामाईक भुजा move करून वेगवेगळ्या रेषीय जोडीतील कोनांच्या जोड्या अनुभवा.
- Geogebra मधील Polygon Tools चा उपयोग करून विविध बहुभुजाकृती काढा व त्यांच्या आंतरकोनांच्या मापांच्या गुणधर्माचा पडताळा घ्या.