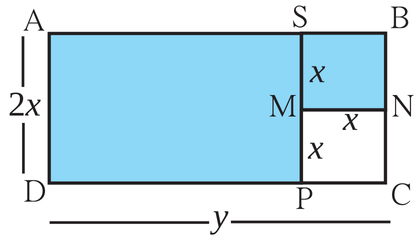
14 बैजिक सूत्र – वर्ग विस्तार

आओ, थोड़ा याद करें



संलग्न आकृति में आयत ABCD दर्शाया गया है। इस आयत की लंबाई Y इकाई तथा चौड़ाई $(2x)$इकाई हैं। इस आयताकृति भाग से x इकाई भुजावाला वर्ग काटकर अलग किया गया हैं। छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए बैजिक व्यंजकों पर संक्रियाएँ करनी होगी।

आयत ABCD के क्षेत्रफल को A(□ABCD) इस प्रकार लिखो।

रंगीन भाग का क्षेत्रफल = A(□ABCD) – A(□MNCP) = $2xy - x^2$

रंगीन भाग का क्षेत्रफल = A(□ASPD) + A(□SBNM) = $(y - x) \times 2xy + x^2$

$= 2xy - 2x^2 + x^2$

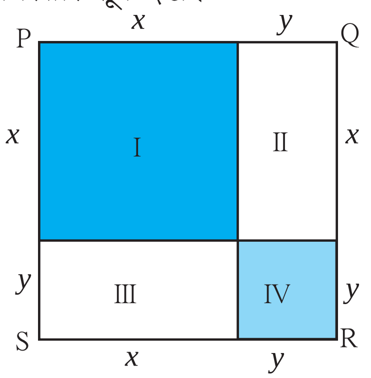
$= 2xy - x^2$

आओ, समझें

वर्गविस्तार

बैजिक व्यंजकों के गुणनफल का गुणा करने पर प्राप्त व्यंजक ही गुणाकार का विस्तार है। विशिष्ट स्वरूप वाले कुछ बैजिक व्यंजकों को एक साथ लिख पाने की सुविधा के लिए सूत्र तैयार किए जाते हैं। आओ, हम ऐसे कुछ विस्तार सूत्र देखें।

कृति I



- संलग्न आकृति में बना चतुर्भुज □PQRS एक वर्ग है। उसकी भुजाओं की लंबाई $(x + y)$ है।

  ∴ A (□PQRS) = $(x + y)^2$

वर्ग PQRS को I, II, III, IV इन आयतों में विभाजित किया गया है।

वर्ग PQRS का क्षेत्रफल I, II, III, IV के क्षेत्रफलों के योगफल के बराबर है।

∴ A (□PQRS) = A (आयत I) + A (आयत II) + A (आयत III) + A (आयत IV)

$(x + y)^2 = x^2 + xy + xy + y^2 = x^2 + 2xy + y^2$

∴ $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

अब $(x + y)^2$ इस बैजिक व्यंजक का गुणनफल ज्ञात करते हैं।

$(x + y)(x + y) = x(x + y) + y(x + y)$

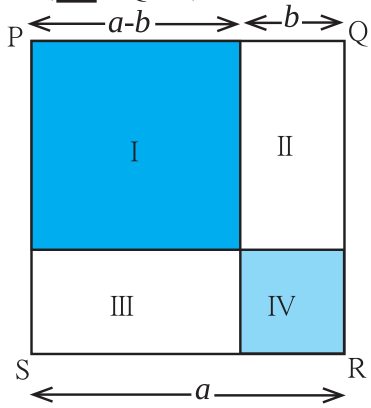
$= x^2 + xy + yx + y^2$ ∴ $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

$(x + y)$ इस द्विपद का वर्ग करने पर मिलने वाला बैजिक व्यंजक, क्षेत्रफल मापन से मिलने वाले बैजिक व्यंजक के समान है। ∴ $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ यह द्विपद के वर्ग विस्तार का सूत्र हैं।

कृति II संलग्न आकृति में चतुर्भुज PQRS एक वर्ग है। उसकी भुजा की लंबाई a है। वर्ग को 4 आयतों में विभाजित किया गया है।

जैसे $(a - b)$ भुजा वाला वर्ग, b भुजा वाला वर्ग तथा $(a - b)$ और b भुजा वाले 2 आयत।

A (वर्ग I) + A (आयत II) + A (आयत III) + A (वर्ग IV) = A (□PQRS)



$(a - b)^2 + (a - b)\,b + (a - b)\,b + b^2 = a^2$

$(a - b)^2 + 2ab - 2b^2 + b^2 = a^2$

$(a - b)^2 + 2ab - b^2 = a^2$

$\therefore\ (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

बैजिक व्यंजकों का गुणनफल ज्ञात कर सूत्र तैयार करेंगे।

$(a - b)^2 = (a - b) \times (a - b)$

$= a\,(a - b) - b\,(a - b)$

$= a^2 - ab - ab + b^2$

$= a^2 - 2ab + b^2$

मैंने यह समझा

- $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

वर्गविस्तार सूत्रों में a तथा b के स्थान पर कोई भी संख्या लेकर उसकी जाँच कर सकते हैं।

यदि $a = 5, b = 3$

$(a + b)^2 = (5 + 3)^2 = 8^2 = 64$

$a^2 + 2ab + b^2 = 5^2 + 2 \times 5 \times 3 + 3^2$

$= 25 + 30 + 9 = 64$

$(a - b)^2 = (5 - 3)^2 = 2^2 = 4$

$a^2 - 2ab + b^2 = 5^2 - 2 \times 5 \times 3 + 3^2$

$= 25 - 30 + 9 = 4$

निम्नलिखित मान रखकर वर्गविस्तार सूत्र की जाँच करो।

(i) $a = -7\ ,\ b = 8$ (ii) $a = 11\ ,\ b = 3$ (iii) $a = 2.5\ ,\ b = 1.2$

विस्तार करो।

उदा. $(2x + 3y)^2$

$= (2x)^2 + 2(2x) \times (3y) + (3y)^2$

$= 4x^2 + 12xy + 9y^2$

उदा. $(5x - 4)^2$

$= (5x)^2 - 2(5x) \times (4) + 4^2$

$= 25x^2 - 40x + 16$

उदा. $(51)^2$

$= (50 + 1)^2$

$= 50^2 + 2 \times 50 \times 1 + 1 \times 1$

$= 2500 + 100 + 1$

$= 2601$

उदा. $(98)^2$

$= (100 - 2)^2$

$= 100^2 - 2 \times 100 \times 2 + 2^2$

$= 10000 - 400 + 4$

$= 9604$

प्रश्नसंग्रह 50

1. विस्तार करो।

   (i) $(5a + 6b)^2$ (ii) $\left(\frac{a}{2}+\frac{b}{3}\right)^2$ (iii) $(2p - 3q)^2$ (iv) $\left(x-\frac{2}{x}\right)^2$

   (v) $(ax + by)^2$ (vi) $(7m - 4)^2$ (vii) $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2$ (viii) $\left(a-\frac{1}{a}\right)^2$

2. $(8 - \frac{1}{x})$ इस द्विपद का वर्ग निम्नलिखित में से कौन-सा हैं ? योग्य पर्याय चुनो।

   (i) $64 - \frac{1}{x^2}$ (ii) $64 + \frac{1}{x^2}$ (iii) $64 - \frac{16}{x} + \frac{1}{x^2}$ (iv) $64 + \frac{16}{x} + \frac{1}{x^2}$

3. किस द्विपद व्यंजक का विस्तार करने पर व्यंजक $m^2n^2 + 14mnpq + 49p^2q^2$ मिलेगा ?

   (i) $(m + n)(p + q)$ (ii) $(mn - pq)$ (iii) $(7mn + pq)$ (iv) $(mn + 7pq)$

4. विस्तार सूत्र की सहायता से मान ज्ञात करो।

   (i) $(997)^2$ (ii) $(102)^2$ (iii) $(97)^2$ (iv) $(1005)^2$

आओ, समझें

✻ $(a + b)(a - b)$ का विस्तार

$$
\begin{aligned}
(a + b)(a - b) &= (a + b) \times (a - b) \\
&= a(a - b) + b(a - b) \\
&= a^2 - ab + ba - b^2 \\
&= a^2 - b^2 \\
(a + b)(a - b) &= a^2 - b^2
\end{aligned}
$$

मैंने यह समझा

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

उदा. $(3x + 4y)(3x - 4y) = (3x)^2 - (4y)^2 = 9x^2 - 16y^2$

उदा. $102 \times 98 = (100 + 2)(100 - 2) = (100)^2 - (2)^2 = 10000 - 4 = 9996$

प्रश्नसंग्रह 51

1. विस्तार सूत्र की सहायता से गुणनफल ज्ञात करो।

   (i) $(x + y)(x - y)$ (ii) $(3x - 5)(3x + 5)$

   (iii) $(a + 6)(a - 6)$ (iv) $\left(\frac{x}{5}+6\right)\left(\frac{x}{5}-6\right)$

2. विस्तार सूत्र की सहायता से मान ज्ञात करो।

   (i) 502×498 (ii) 97×103 (iii) 54×46 (iv) 98×102

आओ, समझें

बैजिक व्यंजकों के गुणनखंड

हमने पूर्ण संख्याओं के गुणनखंड ज्ञात करने का अभ्यास किया है। अब बैजिक व्यंजकों के गुणनखंड ज्ञात करने की विधि देखेंगे।

प्रथम एकपदी के गुणनखंड ज्ञात करेंगे।

$15 = 3 \times 5$ अर्थात 3 तथा 5 यह 15 के गुणनखंड हैं।

उसी प्रकार $3x = 3 \times x$ अर्थात $3x$ के गुणनखंड 3 तथा x हैं।

व्यंजक $5t^2$ को देखो। $5t^2 = 5 \times t^2 = 5 \times t \times t$

$1, 5, t, t^2, 5t, 5t^2$ बैजिक व्यंजक $5t^2$ के गुणनखंड हैं।

$6\,ab^2 = 2 \times 3 \times a \times b \times b$

एकपदी के गुणनखंड ज्ञात करते समय हो सके तो पहले गुणांक के गुणनखंड ज्ञात करें। उसके बाद चरांक के गुणनखंड ज्ञात कर सकते हैं।

प्रश्नसंग्रह 52

⊙ नीचे दिए गए व्यंजकों के अभाज्य गुणनखंड ज्ञात कर गुणनफल के रूप में लिखो।

(i) $201\ a^3 b^2$, (ii) $91\ xyt^2$, (iii) $24\ a^2 b^2$, (iv) tr^2s^3

आओ, समझें

द्विपद के गुणनखंड ज्ञात करना।

$4xy + 8xy^2$ इस द्विपद के प्रत्येक पद का सामान्य गुणनखंड $4\ x$ तथा y है।

$\therefore\ 4xy + 8xy^2 = 4(xy + 2xy^2) = 4x\ (y + 2xy) = 4xy\ (1 + 2y)$

द्विपद के गुणनखंड ज्ञात करने के लिए दोनों पदों के सामान्य घटक को कोष्ठक के बाहर गुणनफल के रूप में लिखो।

$9a^2bc + 12abc^2 = 3(3a^2bc + 4abc^2) = 3abc\ (3a + 4c)$ इस प्रकार गुणनखंड ज्ञात कर सकते हो।

$(a + b)\ (a - b) = a^2 - b^2$ यह सूत्र हमें पता हैं

इस आधार पर, $a^2 - b^2$ के गुणनखंड $(a + b)\ (a - b)$ ज्ञात कर सकते हैं।

गुणनखंड ज्ञात करो।

उदा. $a^2 - 4b^2 = a^2 - (2b)^2$

$= (a + 2b)\ (a - 2b)$

उदा. $3a^2 - 27b^2 = 3(a^2 - 9b^2)$

$= 3(a + 3b)\ (a - 3b)$

प्रश्नसंग्रह 53

⊙ नीचे दिए गए व्यंजकों के गुणनखंड ज्ञात करो।

(i) $p^2 - q^2$ (ii) $4x^2 - 25y^2$ (iii) $y^2 - 4$ (iv) $p^2 - \frac{1}{25}$

(v) $9x^2 - \frac{1}{16}y^2$ (vi) $x^2 - \frac{1}{x^2}$ (vii) $a^2b - ab$ (viii) $4x^2y - 6x^2$

(ix) $\frac{1}{2}y^2 - 8z^2$ (x) $2x^2 - 8y^2$

❑❑❑