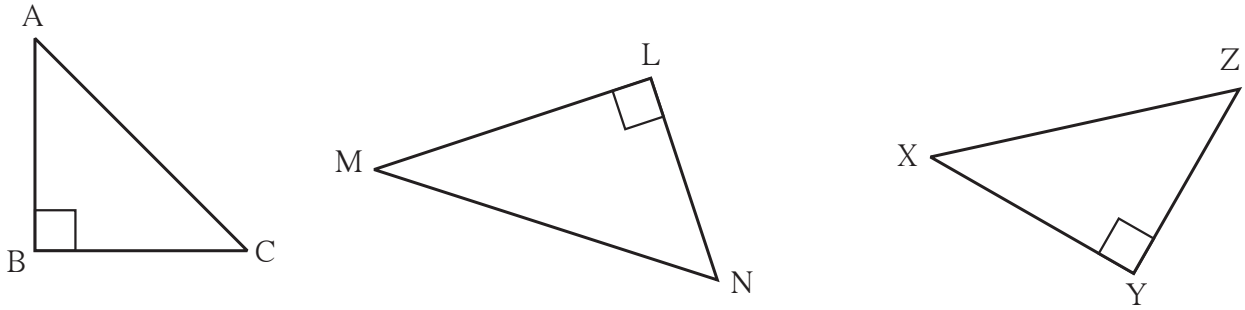
13 पायथागोरस का सिद्धांत (प्रमेय)

आओ, थोड़ा याद करें

समकोण त्रिभुज (Right angled triangle)

हमे ज्ञात हैं कि, जिस त्रिभुज का एक कोण समकोण हो, उस त्रिभुज को समकोण त्रिभुज कहते हैं और समकोण के सामने की भुजा (सम्मुख) को कर्ण कहते हैं।

- नीचे दिए गए त्रिभुजों के कर्णों के नाम लिखो।



ΔABC का कर्ण ☐ ΔLMN का कर्ण ☐ ΔXYZ का कर्ण ☐

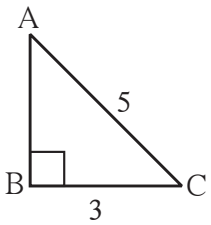
पायथागोरस का सिद्धांत (प्रमेय) (Theorem of Pythagoras)

एक महान यूनानी गणितज्ञ पायथागोरस ईसा पूर्व छठी शताब्दी में हुए थे। गणित विषय में उनका योगदान बहुत बड़ा हैं। गणित सिखाने की उनकी पद्धत लोकप्रिय थी। जिससे उनके कई शिष्य बने।

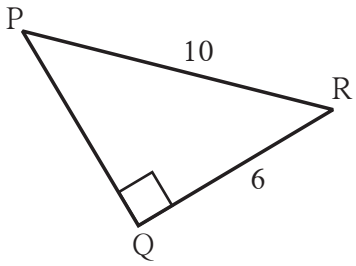
समकोण त्रिभुज संबंधी एक सिद्धांत बहुत पहले से कई देशों के लोगों को ज्ञात था। भारत के 'शुल्वसूत्र' इस ग्रंथ में भी दिया गया हैं। उस सिद्धांत का नियमानुसार विन्यास करके उसकी तार्किक उत्पत्ति पायथागोरस ने सबसे पहले की इसीलिए इस सिद्धांत (प्रमेय) को उनका नाम दिया गया। **समकोण त्रिभुज में कर्ण का वर्ग अन्य दो भुजाओं के वर्गों के योगफल के बराबर होता है।** यही पायथागोरस का सिद्धांत हैं।

कृति नीचे कर्ण तथा समकोण बनानेवाली एक भुजा देने पर समकोण त्रिभुज की रचना करके तीसरी भुजा नापकर लिखो। पायथागोरस के नियम की जाँच करो।

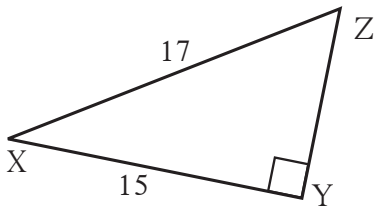
(i)



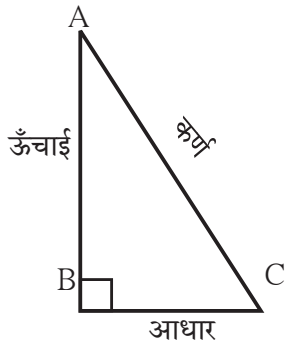
(ii)



(iii)



आओ, समझें

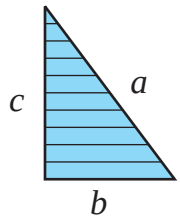


संलग्न आकृति के आधार पर पायथागोरस का नियम निम्नलिखित प्रकार से लिखा जाता है। ΔABC में $\angle B$ समकोण है।

$[l(AC)]^2 = [l(BC)]^2 + [l(AB)]^2$

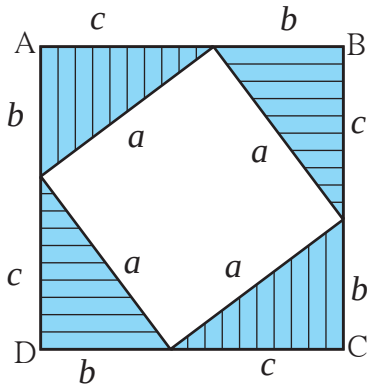
सामान्यतः किसी समकोण त्रिभुज में समकोण बनाने वाली भुजाओं में से एक भुजा आधार तथा दूसरी भुजा ऊँचाई लेते हैं। तब इस नियम को **(कर्ण)^2 = (आधार)^2 + (ऊँचाई)^2** इस प्रकार लिखते हैं।

पायथागोरस के **नियम की जाँच करने हेतु** निम्नलिखित कृति करो।

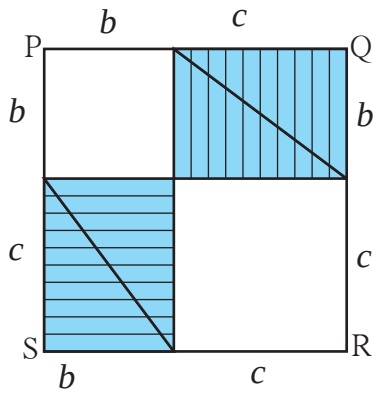


कृति एक कार्ड पेपर से समान मापवाले 8 समकोण त्रिभुज काटो। उनकी भुजा की लंबाई कोई भी हो सकती है। मानो उस त्रिभुज का कर्ण 'a' इकाई, समकोण बनाने वाली भुजाएँ 'b' इकाई तथा 'c' इकाई हैं। यह ध्यान रखे की उस त्रिभुज का क्षेत्रफल $\left(\frac{bc}{2}\right)$ हो।

अब दूसरे कार्ड पेपर पर (b + c) इकाई भुजावाले दो वर्ग पेंसिल से बनाओ। आकृति में दर्शाए अनुसार काटे गए 8 त्रिभुजों में से 4 त्रिभुज को वर्ग ABCD में रखो। तथा शेष 4 त्रिभुज आकृति में दर्शाए अनुसार वर्ग PQRS में रखो। त्रिभुजों से ढँका हुआ भाग रेखांकित करो।



आकृति (i)



आकृति (ii)

आकृतियों का निरीक्षण करो। आकृति (i) में रिक्त स्थान की भुजा 'a' है, ऐसे वर्ग की रचना करो। आकृति (ii) में रिक्त स्थान 'b' तथा 'c' भुजा वाले वर्गों की रचना करो। दोनों वर्गों में रेखांकित किया गया भाग समान अर्थात चार समकोण त्रिभुजों के क्षेत्रफल के बराबर होता है।

आकृति (i) में वर्ग A B C D का क्षेत्रफल = a^2 + 4 × समकोण त्रिभुजों का क्षेत्रफल

$$= a^2 + 4 \times \frac{1}{2}\ bc$$

$$= a^2 + 2bc$$

आकृति (ii) में वर्ग PQRS का क्षेत्रफल $= b^2 + c^2 + 4 \times$ समकोण त्रिभुज का क्षेत्रफल

$= b^2 + c^2 + 4 \times \frac{1}{2} bc$

$= b^2 + c^2 + 2bc$

वर्ग ABCD का क्षेत्रफल = वर्ग PQRS का क्षेत्रफल

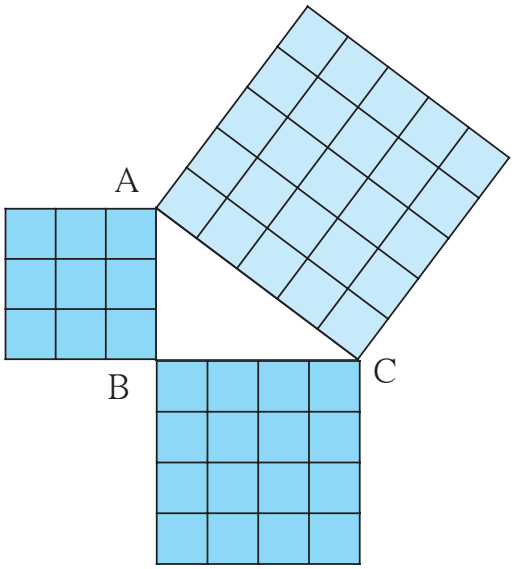
$\therefore \quad a^2 + 2bc = b^2 + c^2 + 2bc$

$\therefore a^2 = b^2 + c^2$

आओ, चर्चा करें

- बिना कोणमापक (चाँदे) की सहायता से देखो कि आकृति (i) में रिक्त वर्ग का प्रत्येक कोण समकोण है।

कृति एक कार्ड पेपर पर 3 सेमी, 4 सेमी तथा 5 सेमी माप के समकोण त्रिभुज की रचना करो। प्रत्येक भुजा पर वर्ग की रचना करो। प्रत्येक वर्ग का क्षेत्रफल ज्ञात करके, पायथागोरस के नियम को जाँचो।



पायथागोरस के नियमानुसार समकोण त्रिभुज की दो भुजाए ज्ञात होने पर तीसरी भुजा ज्ञात कर सकते हैं।

उदा. ΔABC में $\angle C = 90°$, $l(AC) = 5$ सेमी तथा $l(BC) = 12$ सेमी, तो $l(AB) = ?$

हल : समकोण त्रिभुज ABC में $\angle C = 90°$ $\therefore$ भुजा AB कर्ण है। पायथागोरस के नियमानुसार,

$l(AB)^2 = l(AC)^2 + l(BC)^2$

$= 5^2 + 12^2$

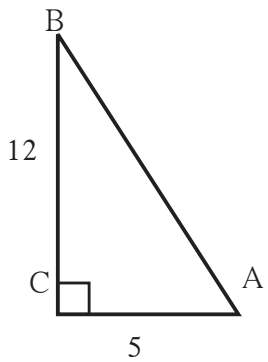
$= 25 + 144$

$\therefore l(AB)^2 = 169$

$\therefore l(AB)^2 = 13^2$

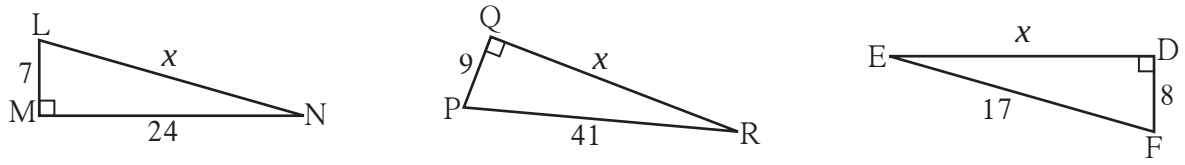
$\therefore l(AB) = 13$

$\therefore$ रेख AB की लंबाई = 13 सेमी



प्रश्नसंग्रह 48

1. नीचे दी गई आकृतियों में 'x' का मान ज्ञात करो।



(i) (ii) (iii)

2. समकोण त्रिभुज ΔPQR में $\angle P = 90°$ यदि $l(PQ) = 24$ सेमी तथा $l(PR) = 10$ सेमी है, तो रेखाखंड QR की लंबाई ज्ञात करो।
3. समकोण ΔLMN में $\angle M = 90°$ यदि $l(LM) = 12$ सेमी और $l(LN) = 20$ सेमी है, तो रेख MN की लंबाई ज्ञात करो।
4. 15 मी लंबी सीढ़ी जमीन से 9 मीटर ऊँचाई पर स्थित किसी दीवार की खिड़की तक पहुँचती है, तो दीवार तथा सीढ़ी के निचले सिरे के बीच की दूरी ज्ञात करो।

आओ, समझें

प्राकृत संख्याओं के त्रिक में से बड़ी संख्या का वर्ग अन्य दो संख्याओं के वर्गों के योगफल के बराबर होता है। इसे **पायथागोरस का त्रिक** कहते हैं। जिस त्रिभुज के भुजाओं की लंबाई त्रिक की संख्याओं को दर्शाती है तो वह त्रिभुज समकोण त्रिभुज होता है।

नीचे दी गई तीनों संख्याएँ क्या पायथागोरस के त्रिक हैं ?

उदा. 7, 24, 25 प्रत्येक संख्या का वर्ग करेंगे।

$7^2 = 49,\ 24^2 = 576,\ 25^2 = 625$

$\therefore\ 49 + 576 = 625$

$\therefore\ 7^2 + 24^2 = 25^2$

$\therefore$ 7, 24 तथा 25 यह पायथागोरस का त्रिक है।

उपक्रम : संख्या तथा समूह 1 से 50 में से पायथागोरस के त्रिक खोजो।

प्रश्नसंग्रह 49

1. नीचे कुछ त्रिक दिए गए हैं। उनमें से पायथागोरस के त्रिक पहचानो।
   (i) 3 सेमी, 4 सेमी, 5 सेमी (ii) 2 सेमी, 4 सेमी, 5 सेमी
   (iii) 4 सेमी, 5 सेमी, 6 सेमी (iv) 2 सेमी, 6 सेमी, 7 सेमी
   (v) 9 सेमी, 40 सेमी, 41 सेमी (vi) 4 सेमी, 7 सेमी, 8 सेमी
2. नीचे कुछ त्रिभुजों की भुजाओं की लंबाई दी गई है। इस जानकारी के आधार पर बताओ कि कौन-से त्रिभुज समकोण त्रिभुज हैं ?
   (i) 8, 15, 17 (ii) 11, 12, 15 (iii) 11, 60, 61 (iv) 1.5, 1.6, 1.7
   (v) 40, 20, 30