9 समानुपात और विलोमानुपात

विभाग दूसरा

C3Q8HR

आओ, चर्चा करें

समानुपात (Direct proportion)

हमने पिछली कक्षा में देखा है कि दो संख्याओं की तुलना कर अनुपात के रूप में किस प्रकार लिखते है।

उदा. नीचे दिए चित्र देखो। खींचे गए व्यास द्वारा वृत्त के भागों को दिखाया गया है।

(A) (B) (C) (D)

यहाँ पर हमें व्यासों की संख्या तथा उनके कारण होने वाले वृत्त के भागों की संख्या में कौन-सा संबंध दिखाई देता है ?

- आकृति (A) में **एक** व्यास के कारण वृत्त के ☐ भाग हुए हैं।
- आकृति (B) में **दो** व्यासों के कारण वृत्त के ☐ भाग हुए हैं।
- आकृति (D) में **चार** व्यासों के कारण वृत्त के ☐ भाग हुए हैं।

$$\frac{\text{वृत्त के व्यासों की संख्या}}{\text{वृत्त के भागों की संख्या}} = \frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8}$$

यहाँ पर व्यासों की संख्या तथा उनके द्वारा बने भागों की संख्या का अनुपात स्थिर है ।

उदा. किसी नगरपालिका की पाठशाला के विद्यार्थियों को प्राप्त कॉपियों की संख्या नीचे तालिका में दिखाई गई है।

विद्यार्थी	15	12	10	5
कॉपियाँ	90	72	60	30

$$\frac{\text{विद्यार्थियों की संख्या}}{\text{कॉपियों की संख्या}} = \frac{15}{90} = \frac{12}{72} = \frac{10}{60} = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}$$

अर्थात यह अनुपात 1:6 यह स्थिर अथवा स्थायी (constant) है।

उपर्युक्त दोनों उदाहरणों में दिखाई देता है कि व्यासों की संख्या बढ़ने पर भागों की संख्या बढ़ती है । विद्यार्थियों की संख्या कम होने पर कॉपियों की संख्या भी कम होती है। व्यासों की संख्या तथा वृत्त के भागों की संख्या समान अनुपात में है। उसी प्रकार विद्यार्थियों की संख्या तथा कापियों की संख्या भी समान अनुपात में हैं।

उपक्रम :

- ✸ मोटर साइकिल में भरा पेट्रोल और उसके द्वारा तय की गई दूरी समानुपात में है क्या ? विचार करो।
- ✸ विज्ञान में और दैनंदिन व्यवहार के समान अनुपात में बदलने वाली संख्याओं के उदाहरण दे सकते हैं क्या ? उसकी चर्चा करो।

उदा. 10 पेन का मूल्य 60 रुपये हो तो ऐसी 13 पेन का मूल्य कितना होगा ?

हल : 13 पेन का मूल्य ज्ञात करना है। मानो कि 13 पेन का मूल्य x रुपये है ।

पेन की संख्या तथा उनका मूल्य समानुपात में है

अतः अनुपात रूप में दिखाकर समीकरण प्राप्त करेंगे।

$$\frac{10}{60} = \frac{13}{x}$$

$\therefore$ $10x = 780$ (दोनों पक्षों में $60x$ से गुणा करने पर)

$x = 78$

13 पेन का मूल्य 78 रुपये है।

प्रश्नसंग्रह 37

1. 7 किग्रा प्याज का मूल्य 140 रुपये हैं, तो 12 किग्रा प्याज का मूल्य कितना ?
2. 600 रुपयों में 15 घास की गठ्ठियाँ मिलती हैं, तो 1280 रुपयों में कितनी घास की गठ्ठियाँ मिलेंगी ?
3. प्रतिदिन 9 गायों को 13 कि 500 ग्राम पूरक आहार लगता है, उसी अनुपात में 12 गायों को कितना आहार लगेगा ?
4. 12 क्विंटल सोयाबीन का मूल्य 36,000 रुपये हैं तो 8 क्विंटल सोयाबीन का मूल्य कितना ?
5. दो मोबाइल का मूल्य 16,000 रुपये है। ऐसे 13 मोबाइल खरीदे गए तो उनका कुल मूल्य कितना होगा ?

आओ, समझें

विलोमानुपात (Inverse proportion)

वृक्षारोपण हेतु 90 गड्ढे खोदने हैं। इस कार्य के लिए कई स्वयंसेवक एकत्र हुए हैं। एक स्वयंसेवक प्रतिदिन 1 गड्ढा तैयार करता हैं।

15 स्वयंसेवकों को 90 गड्ढे खोदने में $\frac{90}{15} = 6$ दिन लगेंगे।

10 स्वयंसेवकों को 90 गड्ढे खोदने में $\frac{90}{10} = 9$ दिन लगेंगे।

स्वयंसेवकों की संख्या और गड्ढे खोदने में लगे दिनों की संख्या में समान अनुपात है क्या ?

स्वयंसेवकों की संख्या कम होने पर दिनों की संख्या **बढ़ती** है। इसके विपरीत स्वयंसेवकों की संख्या अधिक होने पर दिनों की संख्या कम होती है। स्वयंसेवक और दिन इनकी संख्याओं का गुणनफल स्थिर है। ये संख्याएँ विलोमानुपात (उत्क्रम) में हैं, ऐसा कहा जाता है।

उदा. समझो सुधा को किसी संग्रह के 48 उदाहरण हल करने हैं। प्रतिदिन 1 उदाहरण हल किया गया तो संग्रह पूरा करने में 48 दिन लगते हैं। प्रतिदिन 8 उदाहरण हल किए गए तो उसे संग्रह पूरा करने में $\frac{48}{8} = 6$ दिन लगते हैं। वह प्रतिदिन 12 उदाहरण हल करे तो उसे $\frac{48}{12} = 4$ दिन लगेंगे।

प्रतिदिन हल किए गए उदाहरण और लगने वाले दिन विलोमानुपात में हैं। उनका गुणनफल स्थिर है।

$8 \times 6 = 12 \times 4 = 48 \times 1$ इस पर ध्यान दो।

उदा. एक बड़ी दीवार बनाने में 15 मजदूरों को 8 घंटे लगते हैं, तो 12 मजदूर उसी काम को कितने घंटो में पूरा करेंगे ?

हल : मजदूरों की संख्या बढ़ने पर काम के घंटे कम होते हैं।

मजदूरों की संख्या तथा उनको लगने वाले समय का अनुपात विलोमानुपात है।

मजदूरों की संख्या और दीवार में लगने वाला समय, इनका गुणनफल स्थिर हैं।

अब x चरांक का उपयोग करते हुए हल करेंगे।

मानो 12 मजदूरों को x घंटे लगते हैं।

15 मजदूरों को 8 घंटे लगते हैं।

मानो 12 मजदूरों को x घंटे लगते हैं।

$12 \times x = 15 \times 8$

$\therefore \quad 12x = 120$

$\therefore \quad x = 10$

इस तरह 12 मजदूरों को दीवार बनाने में 10 घंटे लगेंगे।

उदा. किसी कक्षा में 40 पृष्ठों का हस्तलिखित अंक बनाना प्रारंभ किया। एक विद्यार्थी को यह अंक तैयार करने में 80 दिन लगते हैं तो 4 विद्यार्थियों को यही अंक तैयार करने में कितने दिन लगेंगे ?

हल : एक ही काम अधिक विद्यार्थियों के मिलकर करने पर दिन कम लगेंगे अर्थात विद्यार्थी संख्या तथा दिनों की संख्या में विलोमानुपात है। मानो कि 4 विद्यार्थियों को x दिन लगते हैं।

1 विद्यार्थियों को 80 दिन लगते हैं ।

विद्यार्थी	दिन
1	80
4	x

$4x = 80 \times 1$

$x = \frac{80}{4}$

$x = 20$ $\therefore$ 4 विद्यार्थियों को 20 दिन लगेंगे।

उदा. किसी विद्यालय के 7 वीं कक्षा के विद्यार्थी सैर के लिए बस से किसी खेत में गए । उस दौरान आए कुछ अनुभवों को देखेंगे। प्रत्येक अनुभव की संख्या समानुपात में हैं या विलोमानुपात में है, लिखो।

- सैर के लिए प्रत्येक विद्यार्थी से खर्च हेतु 60 रुपये लिए गए।

  कुल 45 विद्यार्थी थे इसलिए ☐ रुपये जमा हुए।

  यदि 50 विद्यार्थी होते तो ☐ रुपये जमा हुए।

  विद्यार्थियों की संख्या तथा जमा रकम (राशि) में .... अनुपात है।

- विद्यालय के पास के मिठाईवाले ने सैर के लिए 90 लड्डू दिए।

  45 विद्यार्थी सैर में आए तब प्रत्येक को ☐ लड्डू मिले।

  30 विद्यार्थी सैर में आए होते तो प्रत्येक को ☐ लड्डू मिलते।

  विद्यार्थियों की संख्या और प्रत्येक को मिलने वाले लड्डू में .... अनुपात है।

- सैर का स्थान विद्यालय से 120 किमी दूरी पर है।

  खेत में जाते समय बस की गति 40 किमी थी/ इसलिए ☐ घंटे लगे।

  वापस आते समय बस की गति 60 किमी थी इसलिए ☐ घंटे लगे।

  बस की गति और लगने वाले समय में .... अनुपात है।

- किसी किसान ने उसके बेर के वृक्षों से 180 बेर जमा किए।
  उसने 45 विद्यार्थियों को वितरित किए। प्रत्येक को ☐ बेर मिले।
  यदि 60 विद्यार्थी होते तो प्रत्येक को ☐ बेर मिलते।
  विद्यार्थियों की संख्या तथा प्रत्येक को मिलने वाले बेरों की संख्या में .... अनुपात है।

प्रश्नसंग्रह 38

1. किसी खेत की निराई करने में 5 मजदूरों को 12 दिन लगते हैं तो 6 मजदूरों को कितने दिन लगेंगे ? 15 मजदूरों को कितने दिन लगेंगे ?
2. मोहनराव प्रतिदिन एक पुस्तक के 40 पृष्ठ पढ़ते हैं। इस प्रकार वह पुस्तक 10 दिन में पूरी होती है। वही पुस्तक 8 दिन में पूरी करनी हो तो प्रतिदिन कितने पृष्ठ पढ़ने होंगे ?
3. मेरी की साइकिल चलाने की गति 6 किमी. प्रति घंटा है। उसे 12 किमी दूरी पर स्थित उसके मौसी के घर जाना है तो उसे कितना समय लगेगा ? यदि उसके साइकिल की गति 4 किमी / घंटा हो तो उसे कितना समय लगेगा ?
4. किसी शासकीय गोदाम के अनाज के संग्रह का अनाज 4000 लोग 30 दिन तक खाते हैं तो संग्रहित अनाज को 6000 लोग कितने दिन खाएँगे ?

आओ, समझें

भागीदारी (साझेदारी) (Partnership)

कोई व्यवसाय प्रारंभ करते समय जगह, कच्चा सामान आदि के लिए पैसे लगते हैं। इसी पैसों को पूँजी कहते है। कई बार दो या दो से अधिक व्यक्ति मिलकर पूँजी इकट्ठा करते हैं अर्थात वे व्यक्ति भागीदारी में निवेश कर व्यवसाय प्रारंभ करते हैं। भागीदारी के व्यवसाय में भागीदारों का बैंक में संयुक्त खाता होता है। उस व्यवसाय में पूँजी का जिस अनुपात में निवेश किया जाता है, उसी अनुपात में व्यवसाय में हुए लाभ या हानि को वितरित किया जाता है।

उदा. झेलम और अथर्व ने क्रमशः 2100 तथा 2800 रुपये की पूँजी लगाकर व्यवसाय प्रारंभ किया। उनको 3500 रु. लाभ हुआ। उसका वितरण कैसे करेंगे ?

हल : लगाई गई पूँजी का अनुपात 2100:2800 = $\frac{2100}{2800}$ = $\frac{3}{4}$ लगाई गई पूँजी का अनुपात 3:4

लाभ का वितरण लगाई गई पूँजी के अनुपात में करना होता है। मानो झेलम का लाभ $3x$ और अथर्व का लाभ $4x$।

$\therefore\ 3x + 4x = 3500$ कुल लाभ 3500 है

$\therefore\ 7x = 3500$ $\therefore\ x = 500$

झेलम को $3x = 3 \times 500 = 1500$ और अथर्व को $4x = 4 \times 500 = 2000$ रु लाभ मिलेगा।

उदा. किसी व्यवसाय में चिन्मय तथा सैम ने 130000 रुपये की पूँजी 3:2 के अनुपात में निवेश की तो प्रत्येक का निवेश कितना था ? यदि व्यवसाय में 36000 रुपये लाभ हुआ तो प्रत्येक को कितना लाभ मिलेगा ?

हल : चिन्मय तथा सैम के निवेश का अनुपात 3:2 है।

निवेश के **अनुपात** में लाभ का वितरण होता है अतः लाभ का अनुपात 3:2 होगा।

मानो कि चिन्मय का निवेश $3y$ तथा सैम का निवेश $2y$

$3y + 2y$ = कुल निवेश

$\therefore 5y = 130000$

$\frac{5y}{5} = \frac{130000}{5}$ ..... (5 से भाग देने पर)

$\therefore y = 26000$

$\therefore$ चिन्मय का निवेश $= 3y$

$= 3 \times 26000$

$= 78,000$ ₹

सैम का निवेश $= 2y$

$= 2 \times 26000$

$= 52000$ ₹

मानो कि चिन्मय का लाभ $3x$ और सैम का लाभ $2x$ माने $3x + 2x$ = कुल लाभ

$5x = 36000$

$\frac{5x}{5} = \frac{36000}{5}$ ..... (5 से भाग देने पर)

$\therefore x = 7200$

$\therefore$ चिन्मय का लाभ $= 3x$

$= 3 \times 7200$

$= 21600$ ₹

सैम का लाभ $= 2x$

$= 2 \times 7200$

$= 14400$ ₹

उदा. अब्दुल, सेजल और सोहम ने सायली को क्रमशः 30 रुपये, 70 रुपये तथा 50 रुपये दिए। सायली ने उसमें 150 रुपये मिलाकर कागज, रंग आदि वस्तुओं को खरीदा। उससे सभी ने ग्रिटिंग कार्ड बनाए और उन्हें बेचा। उन्हें कुल मिलाकर 420 रुपये लाभ हुआ तो प्रत्येक को मिला लाभ ज्ञात करो।

हल : चारों की कुल पूँजी 300 रुपये हैं। उसमें से 150 रुपये सायली के थे अर्थात आधी पूँजी उसकी थी। कुल लाभ 420 रुपये है। सायली का लाभ 420 रुपये का आधा अर्थात 210 रुपये हुआ। शेष 210 रुपये अब्दुल, सेजल और सोहम को बाँटना है।

अब्दुल, सेजल और सोहम की लगाई गई पूँजी क्रमशः 30 रुपये, 70 रुपये और 50 रुपये है। लगाई गई पूँजी का अनुपात 30:70:50 है। अर्थात 3:7:5 तीनों को हुआ है लाभ ₹ 210

मानो कि उनका लाभ क्रमशः $3k, 7k, 5k$ है।

$3k + 7k + 5k = 210$

$\therefore 15k = 210$

$\therefore k = 14$

अब्दुल का लाभ $= 3k = 3 \times 14 = 42$ रुपये

सेजल का लाभ $= 7k = 7 \times 14 = 98$ रुपये, सोहम का लाभ $= 5k = 5 \times 14 = 70$ रुपये

उदा. सरिताबेन, आयेशा और मीनाक्षी ने क्रमशः 2400 रुपये, 5200 रुपये और 3400 रुपये निवेश कर एक व्यवसाय प्रारंभ किया। उन्हें इस व्यवसाय में 50% लाभ हुआ तो वे इस लाभ का वितरण कैसे करेंगे ? लाभ न लेकर अगले वर्ष के व्यवसाय के लिए पूँजी मिलाई तो अगले वर्ष प्रत्येक की हिस्सेदारी कितनी होगी ?

हल : कुल पूँजी $= 2400 + 5200 + 3400 = 11000$ रुपये

कुल पूँजी पर 50% लाभ हुआ।

$\therefore$ कुल लाभ $= \frac{11000 \times 50}{100} = 5500$ रुपये

निवेश के अनुपात में लाभ का वितरण करना है।

हम दो संख्याओं का अनुपात दोनों संख्याओं के सामान्य गुणनखंड से भाग देकर आसानी से प्राप्त करते हैं। उसी प्रकार दो-से-अधिक संख्याओं का अनुपात भी आसानी से कर सकते हैं।

हिस्सेदारी का अनुपात = 2400 : 5200 : 3400

= 24 : 52 : 34 (100 से भाग देने पर)

= 12 : 26 : 17 (2 से भाग देने पर)

मानो सरिताबेन का लाभ = 12p, आयेशा का लाभ = 26p, मीनाक्षी का लाभ = 17p

$\therefore$ 12p + 26p + 17p = 55p = 5500 प्रत्येक के लाभ का योग = कुल लाभ $\therefore p = \frac{5500}{55} = 100$

$\therefore$ सरिताबेन का लाभ = 12 × 100 = 1200 रुपये, आयेशा का लाभ = 26 × 100 = 2600 रुपये

मीनाक्षी का लाभ = 17 × 100 = 1700 रुपये,

लाभ न लेने पर पूँजी में मिलाने पर प्रत्येक की नई पूँजी

अगले वर्ष के लिए सरिताबेन की पूँजी = 2400 + 1200 = 3600 रुपये

अगले वर्ष के लिए आयेशा की पूँजी = 5200 + 2600 = 7800 रुपये

अगले वर्ष के लिए मीनाक्षी की पूँजी = 3400 + 1700 = 5100 रुपये

आओ, चर्चा करें

- उपर्युक्त उदाहरण में सरिताबेन, मीनाक्षी और आयेशा में से प्रत्येक ने लाभ न लेते हुए अपने निवेश में मिलाया तो अगले वर्ष उनके निवेश का अनुपात ज्ञात करो।

प्रश्नसंग्रह 39

1. सुरेश और रमेश ने 144000 रुपये निवेश कर 4:5 के अनुपात में एक भूखंड खरीदा। कुछ वर्ष पश्चात उसे बेचकर उन्हें 20% लाभ हुआ तो प्रत्येक को कितना लाभ हुआ ?
2. विराट और सम्राट ने क्रमशः 50000 रुपये और 120000 रुपये निवेश कर एक व्यवसाय प्रारंभ किया। इस व्यवसाय में उन्हें 20% हानि हुई तो प्रत्येक को कितनी हानि हुई ?
3. श्वेता, पीयूष और नचिकेत इन तीनों ने मिलकर सोलापुर चादर और टॉवेल बेचने का व्यवसाय 80000 रुपये निवेश करके प्रारंभ किया। उसमें से श्वेता की पूँजी 30000 रुपये थी और पीयूष की पूँजी 12000 रुपये थी। वर्ष के अंत में उन्हें 24% लाभ हुआ तो नचिकेत की हिस्सेदारी कितनी थी ? नचिकेत को लाभ की रकम कितनी मिलेगी ?
4. अ और ब ने मिले लाभ 24500 रुपये को 3:7 के अनुपात में बाँट लिया। प्रत्येक ने मिले लाभ की रकम का 2% रकम सैनिक कल्याण निधि में दी तो प्रत्येक ने कल्याण निधि में कितनी रकम दी ?

5* जया, सीमा, निखिल और निलेश ने 3:4:7:6 के अनुपात में व्यवसाय के लिए 360000 रुपये पूँजी जमा की और हिस्सेदारी से व्यवसाय प्रारंभ किया। उस पूँजी में जया की कितनी रकम थी ? उन्हें इस व्यवहार में 12% लाभ हुआ तो निखिल के हिस्से में लाभ के कितने रुपये आएँगे ?