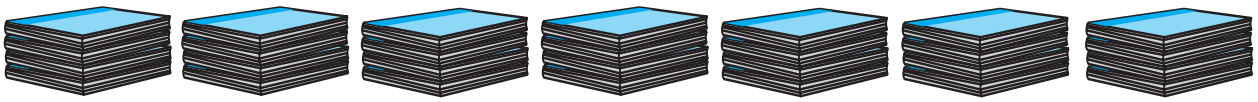
6 घातांक

आओ, थोड़ा याद करें

प्रत्येक लड़के को 4 इस प्रकार 7 लड़कों को 4-4 कॉपियों का वितरण किया गया।

कुल कॉपियाँ = 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 28 कॉपियाँ



यहाँ जोड़ने की संक्रिया कई बार की गई है।

एक ही संख्या को कई बार जोड़ने की संक्रिया को गुणा की संक्रिया के रूप में भी दिखा सकते हैं।

कुल कॉपियाँ = 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 4 × 7 = 28

आओ, समझें

आधार और घातांक (Base and Index)

अब 2 इस संख्या को कई बार लेकर गुणा करने की संक्रिया को छोटे में किस प्रकार दिखा सकते हैं यह देखेंगे।

$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$ यहाँ 2 को 8 बार लेकर गुणा किया गया है।

इस जानकारी को 2^8 इस रूप में लिखते हैं। यहाँ 2^8 यह गुणा की संक्रिया का संक्षिप्त रूप है। इसमें को **आधार** 2 तथा **घातांक** 8 है।

2^{8} ← 8 घातांक, 2 आधार

उदा. $5 \times 5 \times 5 \times 5 = 5^4$ यहाँ 5^4 यह घातांकित संख्या है।

5^4 इस घातांकित संख्या में 5 यह संख्या 'आधार' और 4 यह संख्या 'घातांक' है।

इनका वाचन '5 का घातांक 4' या '5 का चौथा घात' इस प्रकार करते हैं।

सामान्यतः a एक संख्या हो तो $a \times a \times a \times \ldots\ldots\ldots$ (m बार) $= a^m$

a^m का वाचन 'a का घातांक m' या 'a का m वा घात' इस प्रकार करते हैं।

यहाँ m एक प्राकृत संख्या है।

$\therefore$ $5^4 = 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 625$ अर्थात 5^4 इस घातांकित संख्या का मान 625 है।

उसी प्रकार $\left[\frac{-2}{3}\right]^3 = \frac{-2}{3} \times \frac{-2}{3} \times \frac{-2}{3} = \frac{-8}{27}$ अर्थात $\left[\frac{-2}{3}\right]^3$ का मान $\frac{-8}{27}$ है।

$7^1 = 7$, $10^1 = 10$ इस पर ध्यान दें। **किसी भी संख्या का एक घात वही संख्या होती है।** किसी संख्या का घातांक 1 हो तो उसे 1 घात को न लिखने का प्रचलन (संकेत) है। जैसे $5^1 = 5$, $a^1 = a$

प्रश्नसंग्रह 26

1. नीचे दी गई तालिका पूर्ण करो।

अ. क्र.	घातांकित संख्या	आधार	घातांक	गुणन रूप	मान
(i)	3^4	3	4	$3 \times 3 \times 3 \times 3$	81
(ii)	16^3	–	–	–	–
(iii)	–	(-8)	2	–	–
(iv)	–	–	–	$\frac{3}{7} \times \frac{3}{7} \times \frac{3}{7} \times \frac{3}{7}$	$\frac{81}{2401}$
(v)	$(-13)^4$	–	–	–	–

2. मान ज्ञात करो।

(i) 2^{10} (ii) 5^3 (iii) $(-7)^4$ (iv) $(-6)^3$ (v) 9^3

(vi) 8^1 (vii) $\left(\frac{4}{5}\right)^3$ (viii) $\left(-\frac{1}{2}\right)^4$

वर्ग और घन (Square and cube)

$3^2 = 3 \times 3$

3^2 का वाचन 3 का दूसरा घात

या 3 का वर्ग इस प्रकार करते हैं।

$5^3 = 5 \times 5 \times 5$

5^3 का वाचन 5 का तीसरा घात

या 5 का घन इस प्रकार करते हैं।

ध्यान में रखो

- **किसी संख्या का दूसरा घात अर्थात उसी संख्या का वर्ग होता है।**
- **किसी संख्या का तीसरा घात अर्थात उस संख्या का घन होता है।**

आओ, समझें

समान आधार वाली घातांकित संख्यांओं का गुणा

उदा. $2^4 \times 2^3$

$= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$

$= 2^7$

इसके आधार पर $2^4 \times 2^3 = 2^{4+3} = 2^7$

उदा. $(-3)^2 \times (-3)^3$

$= (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3)$

$= (-3)^5$

इसके आधार पर $(-3)^2 \times (-3)^3 = (-3)^{2+3} = (-3)^5$

उदा. $\left(\frac{-2}{5}\right)^2 \times \left(\frac{-2}{5}\right)^3 = \left(\frac{-2}{5}\right) \times \left(\frac{-2}{5}\right) \times \left(\frac{-2}{5}\right) \times \left(\frac{-2}{5}\right) \times \left(\frac{-2}{5}\right) = \left(\frac{-2}{5}\right)^5$

इस आधार पर $\left(\frac{-2}{5}\right)^2 \times \left(\frac{-2}{5}\right)^3 = \left(\frac{-2}{5}\right)^{2+3} = \left(\frac{-2}{5}\right)^5$

यह मैंने समझा

- यदि a कोई परिमेय संख्या हो और m तथा n हे धन पूर्णांक हो तो $a^m \times a^n = a^{m+n}$

प्रश्नसंग्रह 27

(1) सरल रूप दो।

(i) $7^4 \times 7^2$ (ii) $(-11)^5 \times (-11)^2$ (iii) $\left(\frac{6}{7}\right)^3 \times \left(\frac{6}{7}\right)^5$

(iv) $\left(-\frac{3}{2}\right)^5 \times \left(-\frac{3}{2}\right)^3$ (v) $a^{16} \times a^7$ (vi) $\left(\frac{P}{5}\right)^3 \times \left(\frac{P}{5}\right)^7$

आओ, समझें

समान आधार वाली घातांकित संख्याओं का भागाकार

उदा. $6^4 \div 6^2 = ?$

$$\frac{6^4}{6^2} = \frac{6\times6\times6\times6}{6\times6}$$

$$= 6 \times 6$$

$$= 6^2$$

$$6^4 \div 6^2 = 6^{4-2} = 6^2$$

उदा. $(-2)^5 \div (-2)^3 = ?$

$$\frac{(-2)^5}{(-2)^3} = \frac{(-2)\times(-2)\times(-2)\times(-2)\times(-2)}{(-2)\times(-2)\times(-2)}$$

$$= (-2)^2$$

$$(-2)^5 \div (-2)^3 = (-2)^2$$

यह मैंने समझा

- यदि a कोई शून्येतर परिमेय संख्या हो, m तथा n ऐसे धनात्मक पूर्णांक हो कि $m > n$ तो $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

a^0 का अर्थ

$a \neq 0$ हो तो

$\frac{a^m}{a^m} = 1$ उसी प्रकार

$\frac{a^m}{a^m} = a^{m-m} = a^0$

$\therefore$ $\boxed{a^0 = 1}$

a^{-m} का अर्थ

$a^{-m} = a^{-m} \times 1$

$= a^{-m} \times \frac{a^m}{a^m}$

$= \frac{a^{-m+m}}{a^m}$

$= \frac{a^0}{a^m} = \frac{1}{a^m}$

$\boxed{a^{-m} = \frac{1}{a^m}}$

$a^{-m} = \frac{1}{a^m}$ $\therefore$ $a^{-1} = \frac{1}{a}$

उसी प्रकार $a \times \frac{1}{a} = 1$ अर्थात $a \times a^{-1} = 1$

$\therefore$ a^{-1} यह a का गुणात्मक प्रतिलोम हैं।

इसी तरह $\frac{5}{3}$ का गुणात्मक प्रतिलोम $\frac{3}{5}$ हैं।

$\therefore$ $\boxed{\left(\frac{5}{3}\right)^{-1} = \frac{3}{5}}$

उदा. $\left(\frac{4}{7}\right)^{-3}$ इस घातांकित संख्या को देखो।

$$\left(\frac{4}{7}\right)^{-3} = \frac{1}{\frac{4}{7}\times\frac{4}{7}\times\frac{4}{7}} = \frac{1}{\frac{64}{343}} = \frac{343}{64} = \left(\frac{7}{4}\right)^{3}$$

यह मैंने समझा

- इस आधार पर यदि, $a \neq 0$, $b \neq 0$ और m यह धन पूर्णांक संख्या हो तो $\left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\frac{b}{a}\right)^{m}$ ।

नीचे दिए गए उदाहरणों का निरीक्षण कर देखो कि कौन-सा नियम मिलता हैं।

उदा. $(3)^4 \div (3)^6$

$$= \frac{3^4}{3^6}$$

$$= \frac{3\times3\times3\times3}{3\times3\times3\times3\times3\times3} = \frac{1}{3^2}$$

$$3^4 \div 3^6 = 3^{4-6} = 3^{-2}$$

उदा. $\left(\frac{3}{5}\right)^2 \div \left(\frac{3}{5}\right)^5$

$$= \frac{\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}}{\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}} = \frac{1}{\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}} = \frac{1}{\left(\frac{3}{5}\right)^3}$$

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2 \div \left(\frac{3}{5}\right)^5 = \left(\frac{3}{5}\right)^{2-5} = \left(\frac{3}{5}\right)^{-3}$$

यह मैंने समझा

- यदि a कोई परिमेय संख्या हो $a \neq 0$ और m तथा n पूर्णांक संख्या हो तो $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

आओ, समझें

देखते हैं कि आधार (-1) हो और घातांक पूर्ण संख्या हो तो क्या होता है ।

$(-1)^6 = \underline{(-1)\times(-1)} \times \underline{(-1)\times(-1)} \times \underline{(-1)\times(-1)} = 1\times1\times1 = 1$

$(-1)^5 = \underline{(-1)\times(-1)} \times \underline{(-1)\times(-1)} \times (-1) = 1\times1\times(-1) = -1$

यहाँ m सम संख्या हो तो $(-1)^m = 1$ और m यह विषम संख्या हो तो $(-1)^m = -1$

प्रश्नसंग्रह 28

1. सरल रूप दो।

(i) $a^6 \div a^4$ (ii) $m^5 \div m^8$ (iii) $p^3 \div p^{13}$ (iv) $x^{10} \div x^{10}$

2. मान ज्ञात करो।

(i) $(-7)^{12} \div (-7)^{12}$ (ii) $7^5 \div 7^3$ (iii) $\left(\frac{4}{5}\right)^3 \div \left(\frac{4}{5}\right)^2$ (iv) $4^7 \div 4^5$

आओ, समझें

दो संख्याओं के गुणनफल तथा भागफल का घात

देखते हैं कि नीचे दिए गए उदाहरणों का निरीक्षण करने पर कौन-सा नियम मिलता है।

उदा. $(2 \times 3)^4$

$= (2 \times 3) \times (2 \times 3) \times (2 \times 3) \times (2 \times 3)$

$= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 2^4 \times 3^4$

उदा. $\left(\frac{4}{5}\right)^3$

$= \frac{4}{5} \times \frac{4}{5} \times \frac{4}{5}$

$= \frac{4\times4\times4}{5\times5\times5} = \frac{4^3}{5^3}$

यह मैंने समझा

यदि a तथा b कोई शून्येतर परिमेय संख्या और m पूर्णांक संख्या हो तो

(1) $(a \times b)^m = a^m \times b^m$ (2) $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$

$\left(a^m\right)^n$ अर्थात घातांकित संख्या का घात

$a^{-m} = \frac{1}{a^m}$

उदा. $\left(5^2\right)^3$

$= 5^2 \times 5^2 \times 5^2$

$= 5^{2+2+2}$

$= 5^{2\times3}$

$= 5^6$

उदा. $\left(7^{-2}\right)^{-5} = \frac{1}{\left(7^{-2}\right)^5}$

$= \frac{1}{7^{-2}\times7^{-2}\times7^{-2}\times7^{-2}\times7^{-2}}$

$= \frac{1}{7^{(-2)\times5}}$

$= \frac{1}{7^{-10}} = 7^{10}$

उदा. $\left[\left(\frac{2}{5}\right)^{-2}\right]^3$

$= \left(\frac{2}{5}\right)^{-2} \times \left(\frac{2}{5}\right)^{-2} \times \left(\frac{2}{5}\right)^{-2} = \left(\frac{2}{5}\right)^{(-2)+(-2)+(-2)} = \left(\frac{2}{5}\right)^{-6}$

$\left(a^m\right)^n = a^m \times a^m \times a^m \times \ldots\ldots n$ बार $= a^{m+m+m\ldots\ldots n\text{ बार}} = a^{m\times n}$

उपर्युक्त उदाहरणों से यह नियम मिलता है।

यह मैंने समझा

- यदि a कोई शून्येतर परिमेय संख्या हैं और m तथा n पूर्णांक संख्या हो तो $\left(a^m\right)^n = a^{m\times n} = a^{mn}$

ध्यान में रखो :

यदि a और b शून्येतर परिमेय संख्या और m तथा n पूर्णांक संख्या हो तो

- $a^m \times a^n = a^{m+n}$
- $a^m \div a^n = a^{m-n}$
- $a^1 = a$
- $a^0 = 1$
- $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$
- $(ab)^m = a^m \times b^m$
- $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$
- $(a^m)^n = a^{mn}$
- $\left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\frac{b}{a}\right)^m$

प्रश्नसंग्रह 29

1. सरल रूप दो।

(i) $\left[\left(\frac{15}{12}\right)^3\right]^4$ (ii) $\left(3^4\right)^{-2}$ (iii) $\left[\left(\frac{1}{7}\right)^{-3}\right]^4$ (iv) $\left[\left(\frac{2}{5}\right)^{-2}\right]^{-3}$ (v) $\left(6^5\right)^4$

(vi) $\left[\left(\frac{6}{7}\right)^5\right]^2$ (vii) $\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{-4}\right]^5$ (viii) $\left[\left(\frac{5}{8}\right)^3\right]^{-2}$ (ix) $\left[\left(\frac{3}{4}\right)^6\right]^1$ (x) $\left[\left(\frac{2}{5}\right)^{-3}\right]^2$

2. नीचे दी गई संख्याओं को धन घातांक का उपयोग कर लिखो।

(i) $\left(\frac{2}{7}\right)^{-2}$ (ii) $\left(\frac{11}{3}\right)^{-5}$ (iii) $\left(\frac{1}{6}\right)^{-3}$ (iv) y^{-4}

गणित मेरा मित्र : विज्ञान, खगोल शास्त्र में

(1) दशमलव पद्धति में संख्या लिखते समय 10 की घात का विशेष उपयोग करते हैं।
पृथ्वी तथा चंद्रमा के बीच की दूरी 38,40,00,000 मी है।
यह दूरी 10 के घातांक रूप में निम्नलिखित विधि से लिखते हैं।

$384\ 000\ 000 = 384 \times 10^6$

$38\ 4000000 = 38.4 \times 10^7$

$3\ 84000000 = 3.84 \times 10^8$ (प्रमाणित रूप)

(2) ऑक्सीजन के परमाणु का व्यास मिमी में दिया गया है।

$0.0000000000000356 = 3.56 \times 10^{-14}$

(3) नीचे दी गई संख्याओं को प्रमाणित रूप में लिखने का प्रयत्न करो।
सूर्य का व्यास 1400000000 मी हैं।
प्रकाश का वेग = 300000000 मीटर/सेकंड हैं।

(4) संलग्न आकृति में Googol यह संख्या दर्शाई गई है।
उसे 10 के घातांक के रूप में लिखने का प्रयत्न करो।

कोई बड़ी-से-बड़ी संख्या या अत्यधिक छोटी संख्या लिखते समय एक अंकी पूर्णांक वाली दशमलव भिन्न संख्या और 10 का उचित घात इनके गुणन के रूप में लिखते हैं। उसे इस संख्या का प्रमाणित रूप (Standard form) कहते हैं।

Googol

10000000000000000000000000
00000000000000000000000000
00000000000000000000000000
00000000000000000000000000

आओ, थोड़ा याद करें

पूर्ण वर्ग संख्या का वर्गमूल ज्ञात करना

- दी गई संख्या में उसी संख्या से गुणा करने पर प्राप्त होने वाला गुणनफल उस संख्या का वर्ग होता है।

उदा. $6 \times 6 = 6^2 = 36$

$6^2 = 36$ इसका वाचन 6 का वर्ग 36 इस प्रकार करते हैं।

उदा. $(-5) \times (-5) = (-5)^2 = 25$

$(-5)^2 = 25$ का वाचन (-5) का वर्ग 25 हैं इस प्रकार करते हैं।

आओ, समझें

✸ **दी गई संख्या का वर्गमूल ज्ञात करना।**

उदा. $3 \times 3 = 3^2 = 9$ यहाँ 3 का वर्ग 9 है।

इसी जानकारी को 9 का वर्गमूल 3 हैं, इस रूप में भी लिख सकते हैं।

वर्गमूल के लिए $\sqrt{}$ इस चिह्न का उपयोग करते हैं। $\sqrt{9}$ का अर्थ हैं 9 का वर्गमूल $\therefore \sqrt{9} = 3$

उदा. $7 \times 7 = 7^2 = 49$ $\therefore \sqrt{49} = 7$

उदा. $8 \times 8 = 8^2 = 64$ इस प्रकार $\sqrt{64} = 8$

$(-8) \times (-8) = (-8)^2 = 64$ के आधार पर 64 का वर्गमूल -8 भी मिलता हैं।

x यह धन संख्या हो तो उसके दो वर्गमूल होते हैं।

इसमें से ऋण वर्गमूल $-\sqrt{x}$ तथा धन वर्गमूल $\sqrt{x}$ चिह्नों द्वारा दर्शाया जाता हैं।

उदा. 81 का वर्गमूल ज्ञात करो।

$81 = 9 \times 9 = -9 \times -9$ $\therefore \sqrt{81} = 9$ तथा $\sqrt{81} = -9$

हम अधिकांशतः धन वर्गमूल पर विचार करेंगे।

✸ **दी गई संख्या का गुणनखंड पद्धति से वर्गमूल ज्ञात करना।**

उदा. 144 का वर्गमूल ज्ञात करो।

दी गई संख्या के अभाज्य गुणनखंडो में से समान गुणनखंडों की जोड़ियाँ बनाओ।

$144 = 2 \times 72$

$= 2 \times 2 \times 36$

$= 2 \times 2 \times 2 \times 18$

$= \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times \underline{3 \times 3}$

प्राप्त गुणनखंडों में से समान गुणनखंड (संख्याओं) की जोड़ियाँ बनाओ।

प्रत्येक जोड़ी में से एक संख्या लेकर गुणनफल ज्ञात करो।

$\sqrt{144} = 2 \times 2 \times 3 = 12$ $\therefore \sqrt{144} = 12$

2	144
2	72
2	36
2	18
3	9
3	3
	1

उदा. 324 का वर्गमूल ज्ञात करो।

दी गई संख्या के अभाज्य गुणनखंड ज्ञात कर समान संख्याओं की जोड़ियाँ बनाओ।

$324 = 2 \times 162$
$= 2 \times 2 \times 81$
$= 2 \times 2 \times 3 \times 27$
$= 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 9$
$= \underline{2 \times 2} \times \underline{3 \times 3} \times \underline{3 \times 3}$

2	324
2	162
3	81
3	27
3	9
3	3
	1

वर्गमूल के लिए प्रत्येक जोड़ी से एक संख्या लो तथा गुणनफल ज्ञात करो।

$\sqrt{324} = 2 \times 3 \times 3 = 18$

$\therefore \sqrt{324} = 18$

प्रश्नसंग्रह 30

⊙ वर्गमूल ज्ञात करो।

(i) 625 (ii) 1225 (iii) 289 (iv) 4096 (v) 1089

✸ अधिक जानकारी हेतु (भाग विधि से वर्गमूल)

(1) 9801 का वर्गमूल ज्ञात करो। (2) 19321 का वर्गमूल ज्ञात करो। (3) 141.61 का वर्गमूल ज्ञात करो।

	99
9	$\overline{98}\,\overline{01}$
+ 9	− 81
189	1701
+ 9	− 1701
198	0000

$\sqrt{9801} = 99$

	139
1	$\overline{1}\,\overline{93}\,\overline{21}$
+ 1	− 1
23	093
+ 3	− 69
269	2421
+ 9	− 2421
278	0000

	11.9
1	$\overline{1}\,\overline{41}.\overline{61}$
+ 1	− 1
21	041
+ 1	− 21
229	2061
+ 9	− 2061
238	0000

जिन संख्याओं के अभाज्य गुणनखंड अधिक हो एवं अभाज्य गुणनखंड ज्ञात करना कठिन हो, उनका वर्गमूल ज्ञात करने के लिए यह विधि उपयोगी है।

एक अन्य उदाहरण देखने हेतु $\sqrt{137}$ का मान ज्ञात करो।

	11.7
1	$\overline{1}\,\overline{37}.\overline{00}$
+ 1	− 1
21	037
+ 1	− 21
227	1600
+ 7	− 1589
234	11

$\sqrt{137} > 11.7$

किंतु $(11.8)^2 = 139.24$

$\therefore 11.7 < \sqrt{137} < 11.8$

इस तरह $\sqrt{137}$ के निकट की संख्या ज्ञात कर सकते हैं।

जिस संख्या का वर्गमूल पूर्ण संख्या न हो उसके वर्गमूल के निकट का दशमलव, भिन्न इस विधि से ज्ञात कर सकते हैं।

❑❑❑