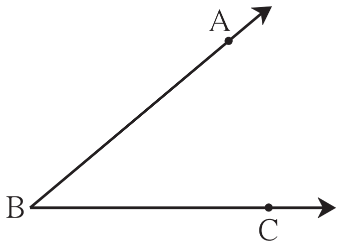
4 कोण तथा कोणों की जोड़ियाँ

C2EH9I

आओ, थोड़ा याद करें

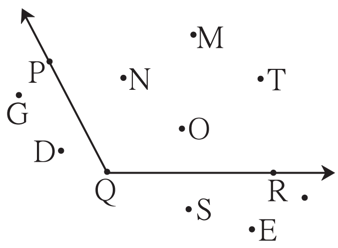


- संलग्न आकृति में बने कोण का नाम लिखो। ....
- कोण के शीर्षबिंदु का नाम लिखो। ....
- कोण की भुजाओं का नाम लिखो। ....
- भुजाओं पर दर्शाए गए बिंदुओं के नाम लिखो। ....

आओ, समझें

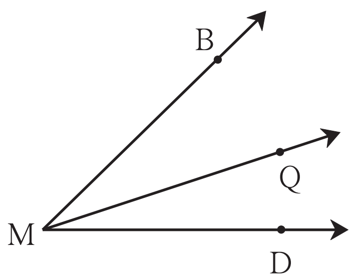
कोण का अंतःभाग और बाह्यभाग

संलग्न आकृति में प्रतल में बने कोण की भुजाओं के बिंदुओं के अतिरिक्त बिंदु N, बिंदु M, बिंदु T जैसे बिंदुओं का समूह ∠PQR का **अंतःभाग** है। (Interior of an angle)



प्रतल के जो बिंदु कोण की भुजाओं तथा कोण के अंतःभाग के बिंदु न हो ऐसे बिंदु G, बिंदु D, बिंदु E जैसे बिंदुओं का समूह ∠PQR का **बाह्यभाग** है। (Exterior of an angle)

संलग्न कोण (आसन्न कोण) (Adjacent angles)



संलग्न आकृति देखो। किरण MQ, यह ∠BMQ तथा ∠QMD की एक सामान्य भुजा है जिस का बिंदु M सामान्य शीर्षबिंदु है। इन कोणों के अंतःभाग में एक भी बिंदु सामान्य नहीं है। वे एक दूसरे के बगल में हैं। ऐसे कोणों को संलग्न कोण कहते हैं।

संलग्न कोणों की एक भुजा सामान्य होकर शेषभुजाएँ सामान्य भुजा की विपरीत दिशाओं में होती हैं। उनका शीर्षबिंदु सामान्य होता है। संलग्न कोणों के अंतःभाग अलग-अलग होते हैं।

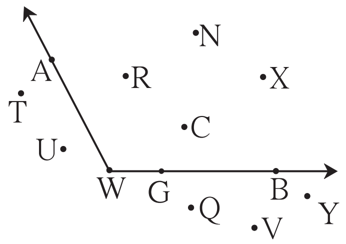
उपर्युक्त आकृति में किरण MB यह ∠BMD तथा ∠BMQ की सामान्य भुजा है परंतु वे संलग्न कोण नहीं हैं क्योंकि उनके अंतःभाग अलग-अलग नहीं हैं।

यह मैंने समझा

जिन दो कोणों का शीर्षबिंदु और एक भुजा सामान्य हो एवं उनके अंतःभाग भिन्न हो, ऐसे कोणों को संलग्न कोण कहते हैं।

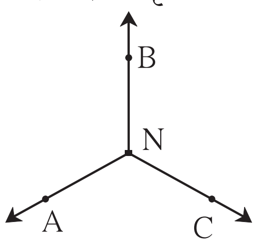
प्रश्नसंग्रह 15

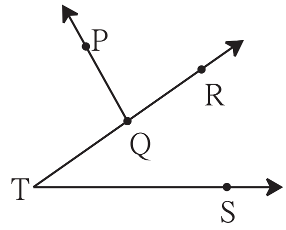
1. नीचे दी गई आकृति का निरीक्षण करो और दी गई ∠AWB के लिए तालिका पूर्ण करो।



अंतःभाग में स्थित बिंदुओं के नाम	
बाह्यभाग में स्थित बिंदुओं के नाम	
कोण की भुजाओं पर स्थित बिंदुओं के नाम	

2. नीचे दी गई आकृतियों में बनी संलग्न कोणों की जोड़ियाँ लिखो।

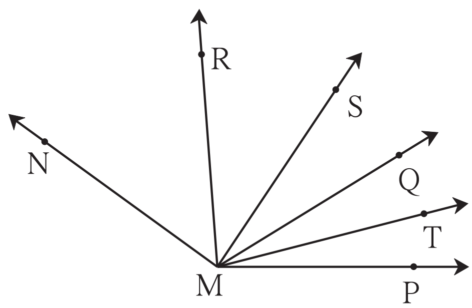




3. कोणों की निम्नलिखित जोड़ियाँ संलग्न हैं क्या ?
   यदि नहीं तो कारण लिखो।

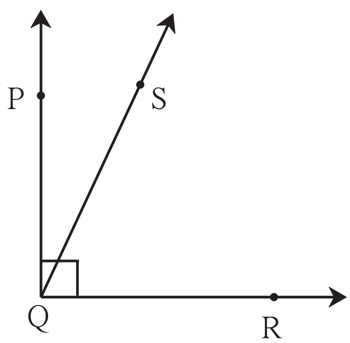
   (i) ∠PMQ तथा ∠RMQ (ii) ∠RMQ तथा ∠SMR

   (iii) ∠RMS तथा ∠RMT (iv) ∠SMT तथा ∠RMS



आओ, समझें

कोटिपूरक कोण (Complementary angles)

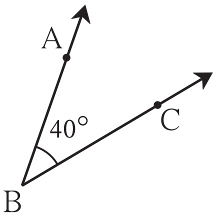


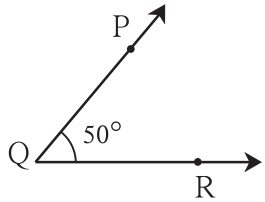
- समकोण ∠PQR बनाओ।
- उसके अंतःभाग में बिंदु S लो।
- किरण QS खींचो।
- ∠PQS तथा ∠SQR के मापों का योग ज्ञात करो।
- योगफल कितना मिलेगा ?

जिन दो कोणों के मापों का योगफल 90° हो उन कोणों को एक-दूसरे का कोटिपूरक कोण कहते हैं।

यहाँ ∠PQS तथा ∠SQR परस्पर कोटिपूरक कोण हैं।

उदा. आकृति में बने कोणों का निरीक्षण करो तथा चौखट में उचित संख्या लिखो।





$m\angle ABC$ = ☐ °

$m\angle PQR$ = ☐ °

$m\angle ABC + m\angle PQR$ = ☐ °

$\angle ABC$ तथा $\angle PQR$ के मापों का योग $90°$ है अतः वे परस्पर कोटिपूरक कोण हैं।

उदा. $70°$ मापवाले कोण के कोटिपूरक कोण का माप कितना होगा ?

हल : मानो, कि दिए गए कोण के कोटिपूरक कोण का माप x

$70 + x = 90$

$\therefore 70 + x - 70 = 90 - 70$

$x = 20°$

यहाँ $70°$ मापवाले कोण के कोटिपूरक कोण का माप $20°$ है।

उदा. $(a + 15)°$ एवं $(2a)°$ परस्पर कोटिपूरक कोणों के माप हैं तो प्रत्येक कोण का माप कितना होगा ?

हल : $a + 15 + 2a = 90$

$3a + 15 = 90$

$3a = 75$

$a = 25$

$\therefore a + 15 = 25 + 15 = 40°$

तथा $2a = 2 \times 25 = 50°$

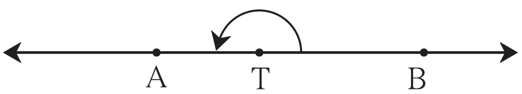
प्रश्नसंग्रह 16

1. नीचे दिए गए कोणों के कोटिपूरक कोणों के माप लिखो।

   (i) $40°$ (ii) $63°$ (iii) $45°$ (iv) $55°$ (v) $20°$ (vi) $90°$ (vii) $x°$

2. $(y - 20)°$ तथा $(y + 30)°$ ये परस्पर कोटिपूरक कोणों के माप हों तो प्रत्येक कोण का माप ज्ञात करो।

आओ, थोड़ा याद करें

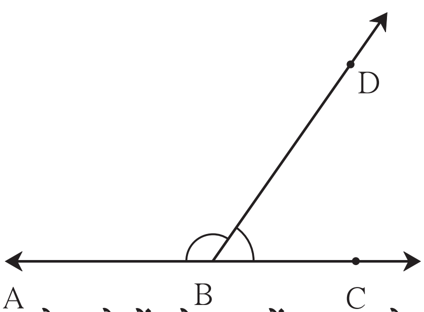


रेखा AB पर T एक बिंदु है।

- $\angle ATB$ किस प्रकार का कोण है ?
- उसका माप कितना है ?

आओ, समझें

संपूरक कोण (Supplementary angles)

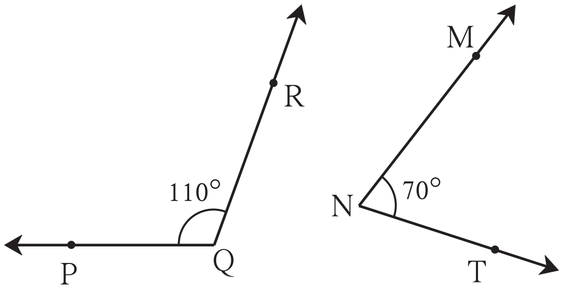


- संलग्न आकृति में रेखा AC दी गई है। रेखा पर स्थित बिंदु B से किरण BD खींची गई है। यहाँ कितने कोण हैं ? (निम्न कोणों को कोण मापक की सहायता से मापो।)
- $m\angle ABD$ = ☐ °, $m\angle DBC$ = ☐ °
- $m\angle ABD + m\angle DBC$ = ☐ °

जिन दो कोणों के मापों का योगफल $180°$ हो उन्हें एक-दूसरे का संपूरक कोण कहते हैं।

यहाँ $\angle ABD$ तथा $\angle DBC$ परस्पर संपूरक कोण हैं।

उदा. नीचे दी गई आकृतियों में कोणों का निरीक्षण करो तथा चौखट में उचित संख्या लिखो।



- $m\angle PQR = \square^\circ$ $m\angle MNT = \square^\circ$
- $m\angle PQR + m\angle MNT = \square^\circ$

$\angle PQR$ तथा $\angle MNT$ परस्पर संपूरक कोण हैं।

उदा. 135° माप वाले कोण के संपूरक कोण का माप ज्ञात करो।

हल : संपूरक कोण का माप p° मानो।

संपूरक कोणों के मापों का योग 180° होता है।

$135 + p = 180$

$\therefore 135 + p - 135 = 180 - 135$

$\therefore p = 45$

$\therefore$ 135° माप वाले कोण के संपूरक कोण का माप 45° है।

उदा. $(a + 30)^\circ$ तथा $(2a)^\circ$ परस्पर संपूरक कोणों के माप हों तो प्रत्येक कोण का माप कितना होगा ?

हल : $a + 30 + 2a = 180$

$\therefore 3a = 180 - 30$

$\therefore 3a = 150$

$\therefore a = 50$

$\therefore a + 30 = 50 + 30 = 80^\circ$

$\therefore 2a = 2 \times 50 = 100^\circ$

$\therefore$ उन कोणों का माप 80° तथा 100° हैं।

प्रश्नसंग्रह 17

1. नीचे दिए गए कोणों के संपूरक कोणों के माप लिखो।
   (i) 15° (ii) 85° (iii) 120° (iv) 37° (v) 108° (vi) 0° (vii) a°
2. नीचे कुछ कोणों के माप दिए गए हैं। उनमें से संपूरक कोण तथा कोटिपूरक कोण की जोड़ियाँ बनाओ।
   $m\angle B = 60^\circ$ $m\angle N = 30^\circ$ $m\angle Y = 90^\circ$ $m\angle J = 150^\circ$
   $m\angle D = 75^\circ$ $m\angle E = 0^\circ$ $m\angle F = 15^\circ$ $m\angle G = 120^\circ$
3. ΔXYZ में $m\angle Y = 90^\circ$ तो $\angle X$ तथा $\angle Z$ में किस प्रकार का संबंध होगा, बताओ ?
4. कोटिपूरक कोणों की जोड़ी के मापों में 40° का अंतर हो तो प्रत्येक कोण का माप ज्ञात करो।
5. □PTNM आयत है। इस आकृति में बने संपूरक कोणों की जोड़ियों के नाम लिखो।

6*. यदि $m\angle A = 70^\circ$ तो $\angle A$ के कोटिपूरक कोण के संपूरक कोण का माप कितना होगा ?

7. $\angle A$ तथा $\angle B$ परस्पर संपूरक कोण हैं और $m\angle B = (x + 20)^\circ$ तो $m\angle A$ = ?

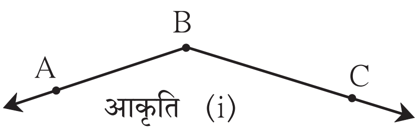
आओ, चर्चा करें

निम्नलिखित विधानों की चर्चा करो। विधान सही हो तो उदाहरण दो। विधान गलत होने पर कारण बताओ।

- दो न्यूनकोण परस्पर कोटिपूरक कोण हो सकते हैं।
- दो समकोण परस्पर कोटिपूरक कोण हो सकते हैं।
- एक न्यूनकोण तथा एक अधिककोण परस्पर कोटिपूरक कोण हो सकते हैं।
- दो न्यूनकोण परस्पर संपूरक कोण हो सकते हैं।
- दो समकोण परस्पर संपूरक कोण हो सकते हैं।
- एक न्यूनकोण तथा एक अधिककोण परस्पर संपूरक कोण हो सकते हैं।

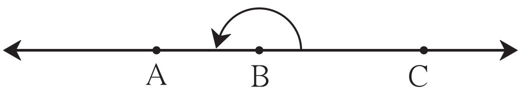
आओ, समझें

विपरीत किरण (Opposite rays)



आकृति (i)

संलग्न आकृति में किरणों के नाम बताओ।
किरणों के आरंभ बिंदु का नाम बताओ।
आकृति (i) में कोण का नाम लिखो।



आकृति (ii)

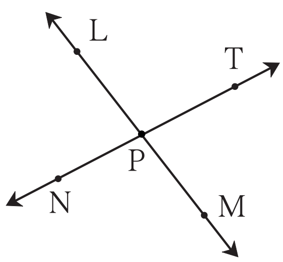
संलग्न आकृति (ii) में कोण का नाम लिखो।
आकृति में आरंभ बिंदु B वाली किरणों के नाम लिखो।

आकृति (i) में किरण BC तथा किरण BA से अधिककोण बनता है जबकि आकृति (ii) में किरण BC तथा किरण BA से सरलकोण बनता है और सरल रेखा मिलती है। यहाँ किरण BC तथा किरण BA परस्पर विपरीत किरणें हैं।

यह मैंने समझा

जिन दो किरणों का आरंभ बिंदु सामान्य हो और वे किरणें एकरेखीय हों तो उन किरणों को विपरीत किरणें कहते हैं।

प्रश्नसंग्रह 18

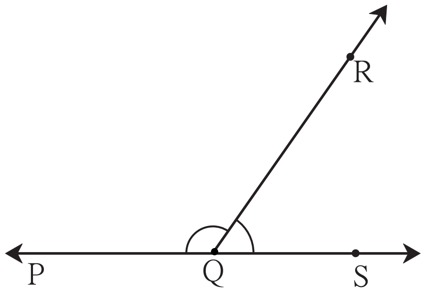


1. संलग्न आकृति में विपरीत किरणों के नाम लिखो।

2. क्या किरण PM और किरण PT विपरीत किरणें हैं ? सकारण लिखो।

आओ, समझें

रेखीय युगल कोण (Angles in linear pair)



- संलग्न आकृति में बने कोणों के नाम लिखो।
- कोणों की जोड़ियाँ किस प्रकार की हैं ?
- कोणों की कौन-सी भुजाएँ सामान्य भुजा नहीं हैं ? (कोण मापक की सहायता से मापो।)
- $m\angle PQR$ = ☐ °
- $m\angle RQS$ = ☐ °
- $m\angle PQR + m\angle RQS = 180^\circ$

आकृति में बने $\angle PQR$ तथा $\angle RQS$ संलग्न कोण हैं। वे संपूरक कोण भी हैं। उनकी जो भुजाएँ सामान्य भुजा नहीं हैं, विपरीत किरणें हैं। इसका अर्थ हैं कि उन भुजाओं से एक रेखा बनती है। इन दोनों को रेखीय युगल कोण कहते हैं। **रेखीय युगल कोणों के मापों का योगफल 180° होता है।**

यह मैंने समझा

> जिन दो कोणों की एक भुजा सामान्य हो तथा असामान्य भुजाएँ एक रेखीय हों ऐसे कोणों को रेखीय युगल कोण कहते हैं। रेखीय युगल कोण परस्पर संपूरक कोण होते हैं।

उपक्रम : स्ट्रॉ या सीधी काड़ियों (तिनकों) की सहायता से अध्ययन किए हुए कोणों की जोड़ियाँ बनाओ।

प्रश्नसंग्रह 19

नीचे दिए गए वर्णनानुसार कोणों की रचना करो। कोई रचना ना होने पर कारण लिखो।

(i) संलग्न न हों ऐसे कोटिपूरक कोण।

(ii) रेखीय युगल कोण जो संपूरक कोण न हों।

(iii) संपूरक कोण जो रेखीय युगलकोण न हो।

(iv) रेखीय युगल कोण जो संलग्न कोण न हों।

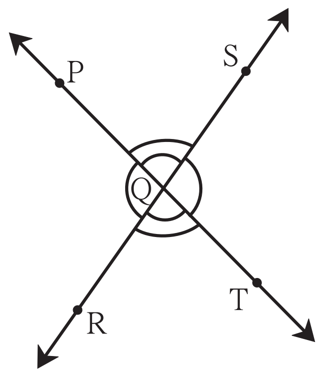
(v) जो कोटिपूरक कोण न हो साथ ही संलग्न कोण भी न हो ।

(vi) रेखीय युगल कोण जो कोटिपूरक कोण भी हों।

आओ, समझें

शीर्षाभिमुख कोण (Vertically opposite angles)

संलग्न आकृति में रेखा PT तथा रेखा RS परस्पर बिंदु Q पर प्रतिच्छेदित करती हैं। इस प्रकार चार कोण बनते हैं। $\angle PQR$ यह किरण QP तथा किरण QR से तैयार हुआ है। किरण QP तथा किरण QR की विपरीत किरणें क्रमशः किरण QT तथा किरण QS हैं। इन विपरीत किरणों से बना कोण $\angle SQT$ है। अतः $\angle SQT$ तथा $\angle PQR$ शीर्षाभिमुख कोण हैं।



यह मैंने समझा

- जिन दो किरणों से कोई कोण तैयार होता है, उसकी विपरीत किरणों से तैयार हुआ कोण पहले कोण का शीर्षाभिमुख कोण होता है।

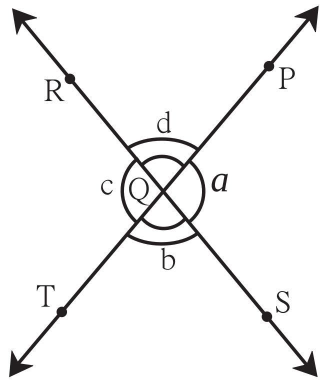
आओ, समझें

शीर्षाभिमुख कोणों के गुणधर्म

संलग्न आकृति में $\angle PQS$ का शीर्षाभिमुख कोण कौन-सा है ?

आकृति में दर्शाए गए अनुसार $m\angle PQS = a$, $m\angle SQT = b$, $m\angle TQR = c$, $m\angle PQR = d$

$\angle PQS$ तथा $\angle SQT$ रेखीय युगल कोण हैं।



$\therefore a + b = 180^\circ$

उसी प्रकार $m\angle SQT$ तथा $m\angle TQR$ भी रेखीय युगल कोण हैं।

$\therefore b + c = 180^\circ$

$\therefore a + b = b + c$

$\therefore a = c$ .... (दोनों पक्षों में से b घटाने पर)

$\therefore \angle PQS$ तथा $\angle TQR$ के माप समान हैं।

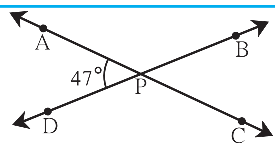
अर्थात सर्वांगसमकोण है।

उसी प्रकार $m\angle PQR = m\angle SQT$ अर्थात $\angle PQR$ तथा $\angle SQT$ सर्वांगसमकोण हैं।

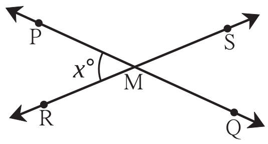
यह मैंने समझा

- दो रेखाओं के परस्पर प्रतिच्छेदन से बनने वाले शीर्षाभिमुख कोणों के माप समान होते हैं।

प्रश्नसंग्रह 20



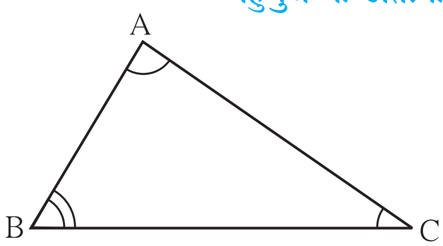
1. रेखा AC तथा रेखा BD परस्पर बिंदु P पर प्रतिच्छेदित करते हैं।
   $m\angle APD = 47^\circ$ तो $\angle APB$, $\angle BPC$ तथा $\angle CPD$ के माप लिखो।



2. रेखा PQ तथा रेखा RS परस्पर बिंदु M पर प्रतिच्छेदित करते हैं।
   $m\angle PMR = x^\circ$ तो $\angle PMS$, $\angle SMQ$ तथा $\angle QMR$ के माप लिखो।

आओ, समझें

बहुभुज के अंतःकोण (Interior angles of a polygon)

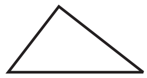
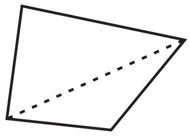
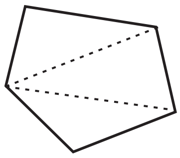
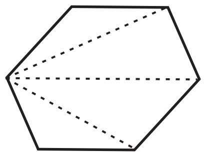
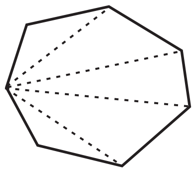


त्रिभुज के अंतःकोण

$\angle A$, $\angle B$ तथा $\angle C$ यह ΔABC के अंतःकोण हैं।

- $m\angle ABC + m\angle BAC + m\angle ACB = \square^\circ$

नीचे दी गई तालिका का निरीक्षण करो तथा निष्कर्ष निकालो।

भुजाओं की संख्या	बहुभुज आकृति का नाम	बहुभुज की आकृति	त्रिभुजों की संख्या	अंत:कोणों के मापों का योग
3	त्रिभुज		1	$180^\circ \times 1 =$ ☐
4	चतुर्भुज		2	$180^\circ \times 2 =$ ☐
5	पंचभुज		3	$180^\circ \times 3 =$ ☐
6	षट्भुज		4	$180^\circ \times$ ☐ $=$ ☐
7	सप्तभुज		5	
8	अष्टभुज		6	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
n	n भुजा वाला बहुभुज		$(n - 2)$	$180^\circ \times (n - 2)$

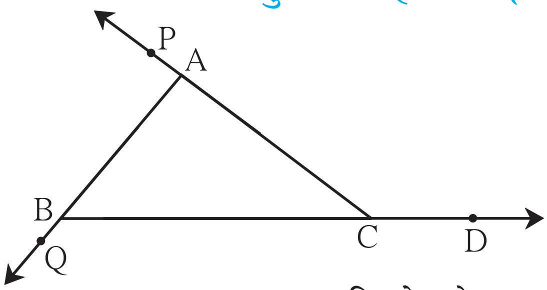
ध्यान दो कि बहुभुज में ऊपर दर्शाए अनुसार त्रिभुजों की संख्या उस बहुभुज की भुजाओं की संख्या से दो कम होती है।

यह मैंने समझा

n भुजाओं वाले बहुभुज के अंत:कोणों के मापों का योग $= 180^\circ \times (n - 2)$

आओ, समझें

त्रिभुज का बहिष्कोण (Exterior angle of a triangle)



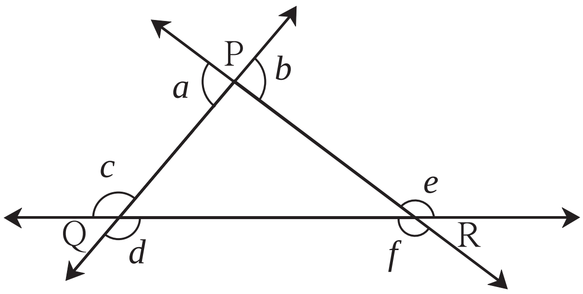
संलग्न आकृति में ΔABC की भुजा BC को बढ़ाने पर त्रिभुज के बाहर $\angle ACD$ बनता है।

$\angle ACD$ यह ΔABC का बहिष्कोण है। $\angle ACD$ तथा $\angle ACB$ रेखीय युगल कोण हैं।
$\angle PAB$ और $\angle QBC$ भी ΔABC के बहिष्कोण हैं।

यह मैंने समझा

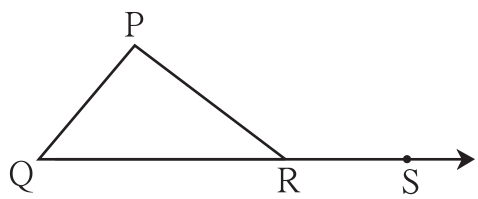
- त्रिभुज की किसी एक भुजा को बढ़ाने पर बनने वाला वह कोण जो त्रिभुज के अंतःकोण का संलग्न कोण हो तो उस कोण को त्रिभुज का बहिष्कोण कहते है।

उदा. संलग्न आकृति में a, b, c, d, e, f ये सभी ΔPQR के बहिष्कोण हैं। प्रत्येक त्रिभुज के इसी प्रकार छह बहिष्कोण होते हैं।



आओ, समझें

त्रिभुज के बहिष्कोण का गुणधर्म



संलग्न आकृति में $\angle PRS$,यह ΔPQR का बहिष्कोण है। $\angle PRQ$ उसका संलग्न अंतःकोण है। अन्य दो अंतःकोण $\angle P$ तथा $\angle Q$, $\angle PRS$ से दूरी पर हैं। $\angle P$ तथा $\angle Q$ को $\angle PRS$ के दूरस्थ अंतःकोण कहते हैं।

$m\angle P + m\angle Q + m\angle PRQ = \square ^\circ$ ....(त्रिभुज के तीनों कोणों का योग)

$m\angle PRS + m\angle PRQ = \square ^\circ$ ....(रेखीय युगल कोण)

$\therefore\ m\angle P + m\angle Q + m\angle PRQ = m\angle PRS + m\angle PRQ$

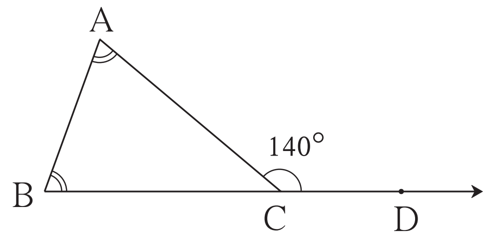
$\therefore\ m\angle P + m\angle Q = m\angle PRS$ .... (दोनों पक्षों से $m\angle PRQ$ घटाने पर)

यह मैंने समझा

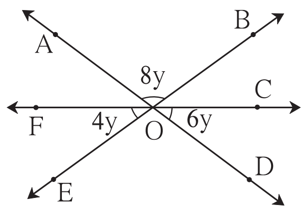
- त्रिभुज के बहिष्कोण का माप उसके संलग्न दूरस्थ अंतःकोणों के मापों के योगफल के बराबर होता है।

प्रश्नसंग्रह 21

1. संलग्न आकृति में $\angle ACD$ यह ΔABC का बहिष्कोण है। $\angle A$ तथा $\angle B$ के माप समान हैं। यदि $m\angle ACD = 140°$ हो तो $\angle A$ और $\angle B$ के माप ज्ञात करो।



2. संलग्न आकृति में दिए गए कोणों के मापों के आधार पर शेष कोणों के माप लिखो।



3*. समद्विबाहु ΔABC में $\angle A$ तथा $\angle B$ के माप समान हैं। $\angle ACD$ यह ΔABC का बहिष्कोण है। $\angle ACB$ तथा $\angle ACD$ के माप क्रमशः $(3x - 17)°$ तथा $(8x + 10)°$ हो तो $\angle ACB$ तथा $\angle ACD$ के माप ज्ञात करो। उसी प्रकार $\angle A$ तथा $\angle B$ के माप ज्ञात करो।

ICT Tools or Links

- Geogebra की सहायता से एक ही आरंभ बिंदुवाली दो किरणें खींचो। Move Option का उपयोग कर किरण को घुमाओ। एक विशिष्ट स्थिति में विपरीत किरणें बनती हैं। इस बात की जाँच करो।
- रेखीय युगल कोण बनाओ। सामान्य भुजा move कर विभिन्न रेखीय युगल कोणों की जोड़ियाँ बनाकर देखो।
- Geogebra के Polygon Tools का उपयोग कर विविध बहुभुज बनाओ। उनके अंतःकोणों के मापों के गुणधर्म की जाँच करो।

❑❑❑