# 1 ज्यामितीय रचना

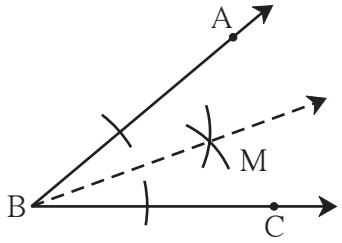
विभाग पहला

BSWDC3

## आओ, थोड़ा याद करें

- हमने पिछली कक्षाओं में रेखा, रेखाखंड, कोण, कोण समद्विभाजक आदि का अध्ययन किया है। हम 'कोण' का माप अंश में मापते हैं। ∠ABC का माप 40° हो तो यह जानकारी हम $m\angle ABC = 40°$ इस प्रकार लिखते हैं।

### कोणसमद्विभाजक (Angle bisector)




संलग्न आकृति में ∠ABC की आकृति दी गई है। कोणसमद्विभाजक यह कोण को दो समान भागों में विभाजित करता है। किरण BM यह ∠ABC की समद्विभाजक है क्या ?

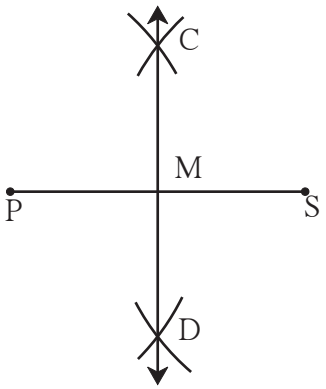
### रेखाखंड का लंबसमद्विभाजक (Perpendicular bisector of a line segment)

4 सेमी लंबाई का रेखाखंड PS खींचो और उसका लंब समद्विभाजक बनाओ। उसे रेखा CD नाम दो।

- रेखा CD लंबसमद्विभाजक है, यह जाँचने के लिए क्या करोगे ?

  $m\angle CMS =$ ☐ °

- $l(PM) = l(SM)$ है क्या ?

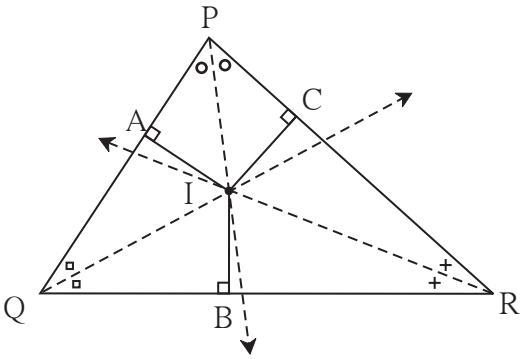



## आओ, समझें

### त्रिभुज के कोणों के समद्विभाजकों का गुणधर्म

**कृति**

1. किसी भी प्रकार का एक त्रिभुज ΔPQR बनाओ।
2. कंपास की सहायता से त्रिभुज के तीनों कोणों को समद्विभाजित करो। (समद्विभाजक बड़े न हों तो उन्हें बढ़ाकर एक-दूसरे को प्रतिच्छेदित करें, ऐसी रचना करो।)
3. ध्यान दो कि तीनों कोणों के समद्विभाजक एक ही बिंदु से होकर जाते हैं अर्थात ये **संगामी** हैं। उस संगमन बिंदु को I नाम दो।

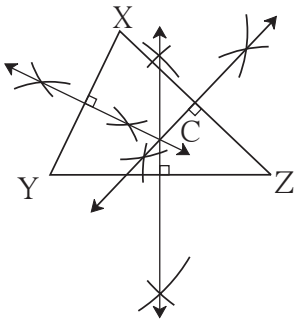


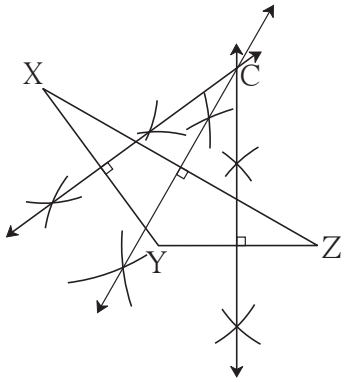

4. त्रिभुज में बिंदु I से त्रिभुज की भुजाएँ PQ, QR तथा PR पर क्रमशः IA, IB तथा IC लंब खींचो। तीनों लंबों की लंबाई नापो। क्या दिखता है ? IA = IB= IC का अनुभव करो।

## त्रिभुज की भुजाओं के लंबसमद्विभाजक का गुणधर्म

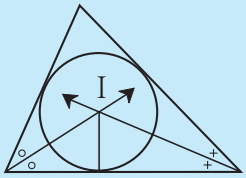
**कृति**

1. मापनपट्टी की सहायता से एक न्यूनकोण त्रिभुज तथा एक अधिककोण त्रिभुज की रचना करो। प्रत्येक त्रिभुज की भुजाओं के लंबसमद्विभाजक खींचो।
2. प्रत्येक त्रिभुज की भुजाओं के लंबसमद्विभाजक संगामी हैं ? इसका अनुभव करो।
3. त्रिभुज की तीनों भुजाओं के लंबसमद्विभाजक जिस बिंदु पर मिलते हैं, उस बिंदु को C नाम दो। C बिंदु से त्रिभुज के शीर्ष बिंदुओं की दूरी नापो। क्या दिखाई देता है ?
   CX = CY = CZ का अनुभव करो।
4. लंबसमद्विभाजकों का संगमन बिंदु कहाँ है, इसका निरीक्षण करो।

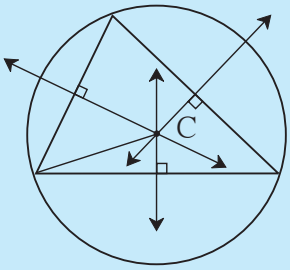



### ✸ अधिक जानकारी हेतु




(1) त्रिभुज के तीनों कोणों के समद्विभाजक **संगामी** (concurrent) होते हैं। उनके संगमन बिंदु को **अंतःकेंद्र** (incentre) कहते हैं। उसे I अक्षर से दर्शाया जाता है।




(2) त्रिभुज की तीनों भुजाओं के लंबसमद्विभाजक **संगामी** होते हैं। उनके संगमन बिंदु को **परिकेंद्र** (circumcentre) कहते हैं। उसे C अक्षर से दर्शाया जाता है।

### प्रश्नसंग्रह 1

1. नीचे दी गई लंबाई के रेखाखंड बनाकर उनके लंबसमद्विभाजक खींचो।
   (i) 5.3 सेमी (ii) 6.7 सेमी (iii) 3.8 सेमी
2. नीचे दिए गए माप के कोण बनाओ तथा उनके समद्विभाजक खींचो।
   (i) 105° (ii) 55° (iii) 90°
3. एक अधिककोण त्रिभुज तथा एक समकोण त्रिभुज बनाओ। प्रत्येक त्रिभुज के कोणों के समद्विभाजकों का संगमन बिंदु बनाओ। प्रत्येक त्रिभुज का संगमन बिंदु कहाँ है ?
4. एक समकोण त्रिभुज बनाओ। उसकी भुजाओं के लंबसमद्विभाजक खींचो। उनका संगमन बिंदु कहाँ है ?

5*. मैथिली, शैला तथा अजय तीनों एक ही शहर के अलग-अलग स्थानों पर रहते हैं। उनके घरों से समान दूरी पर खिलौनों की एक दुकान है। इसे आकृति की सहायता से दर्शाने के लिए कौन-सी भूमितीय रचना का उपयोग करोगे ? तत्संबंधी स्पष्टीकरण दो।

आओ, समझें

## त्रिभुजों की रचना

**कृति**

कुछ कोणों तथा भुजाओं के माप दिए गए हों तो त्रिभुज की रचना कर पाना संभव हैं क्या, इसे देखते हैं।

$\Delta ABC$ की रचना इस प्रकार करो जिसमें $l(AB) = 4$ सेमी, $l(BC) = 3$ सेमी हो।

- क्या ऐसे त्रिभुज की रचना हो सकती है ?
- तुम पाओगे कि उपर्युक्त शर्त का पालन करते हुए ऐसे अनेक त्रिभुजों की रचना की जा सकती है।
- इस जानकारी के आधार पर यदि केवल एक ही त्रिभुज बने ऐसी अपेक्षा हो तो और कौन-सी शर्तें जोड़नी होंगी ?

प्रत्यक्ष निर्माण से पूर्व हर इमारत की रचना सर्वप्रथम कागज पर बनाते हैं। उस इमारत की छोटी-सी प्रतिकृति भी तुमने देखी होगी। इस रेखांकन के आधार पर इमारत का निर्माण आसान होता है। इसी प्रकार किसी भी भूमितीय रचना से पहले उसकी कच्ची आकृति बना लेने से रचना करने में सहायता मिलती है और रचना की क्रियाओं का क्रम निश्चित कर सकते हैं।

**(I) त्रिभुज की तीनों भुजाओं की लंबाई दी गई हो तो त्रिभुज की रचना करना।**

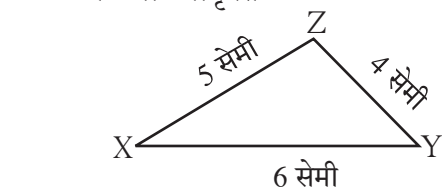
**उदा.** $\Delta XYZ$ की रचना करो जिसमें $l(XY) = 6$ सेमी, $l(YZ) = 4$ सेमी तथा $l(XZ) = 5$ सेमी हों।

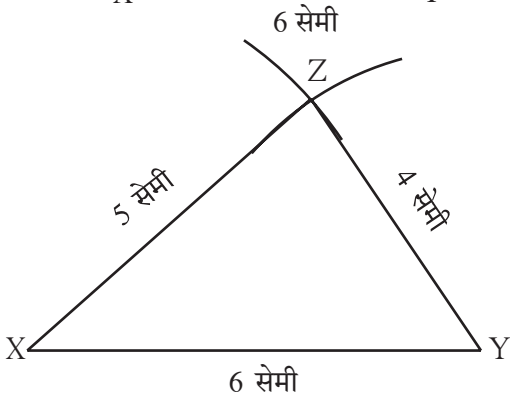
कच्ची आकृति बनाते समय दी गई जानकारी शीघ्रातिशीघ्र और यथासंभव योग्य अनुपात में दिखाएँगे। उदाहरणार्थ भुजा XY सबसे बड़ी भुजा है अतः कच्ची आकृति में भी उसी प्रकार होनी चाहिए।

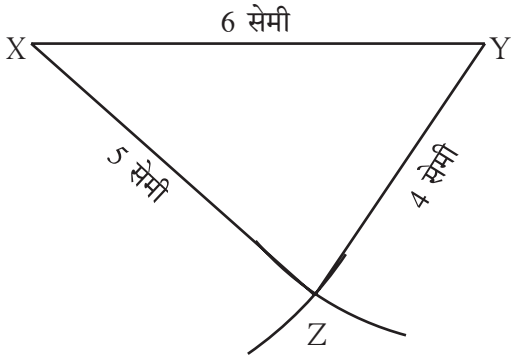
**आकृति बनाने की क्रमिक विधि :**

1. कच्ची आकृति की तरह ही रेख XY यह 6 सेमी लंबाई का आधार लिया गया है।
2. रेख XZ की लंबाई 5 सेमी है अतः कंपास में 5 सेमी का अंतर लेकर कंपास की नोक बिंदु X पर रखकर रेख XY की एक ओर एक चाप खींचो।
3. कंपास में 4 सेमी का अंतर लेकर कंपास की नोक बिंदु Y पर रखकर पहले खींचे गए चाप की दिशा में उस चाप को प्रतिच्छेदित करनेवाला दूसरा चाप खींचा। प्रतिच्छेदन बिंदु को Z नाम दो।
   रेख XZ तथा रेख YZ खींचो।

कच्ची आकृति

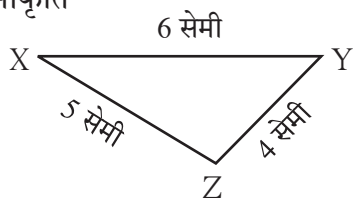



इसी प्रकार आधार के दूसरी ओर चाप खींचकर भी त्रिभुज की रचना दिखाई गई है।

कच्ची आकृति



## प्रश्नसंग्रह 2

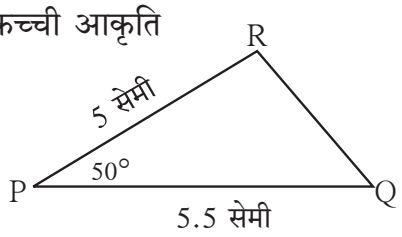
1. नीचे दिए गए मापों के आधार पर त्रिभुज की रचना करो।
   (a) $\Delta ABC$ में $l(AB) = 5.5$ सेमी, $l(BC) = 4.2$ सेमी, $l(AC) = 3.5$ सेमी।
   (b) $\Delta STU$ में $l(ST) = 7$ सेमी, $l(TU) = 4$ सेमी, $l(SU) = 5$ सेमी।
   (c) $\Delta PQR$ में $l(PQ) = 6$ सेमी, $l(QR) = 3.8$ सेमी, $l(PR) = 4.5$ सेमी।
2. आधार 5 सेमी तथा शेष प्रत्येक 3.5 सेमी लंबी भुजावाले समद्विबाहु त्रिभुज की रचना करो।
3. 6.5 सेमी लंबी भुजावाले समबाहु त्रिभुज की रचना करो।
4. अपनी इच्छा से भुजाओं की लंबाई लेकर एक समबाहु त्रिभुज, एक समद्विबाहु त्रिभुज तथा एक विषमबाहु त्रिभुज की रचना करो।

**(II) त्रिभुज की दो भुजाएँ तथा उनमें समाविष्ट कोण दिया गया हो तो त्रिभुज की रचना करना।**

**उदा.** $\Delta PQR$ की रचना करो जिसमें $l(PQ) = 5.5$ सेमी, $m\angle P = 50°$, तथा $l(PR) = 5$ सेमी हो।

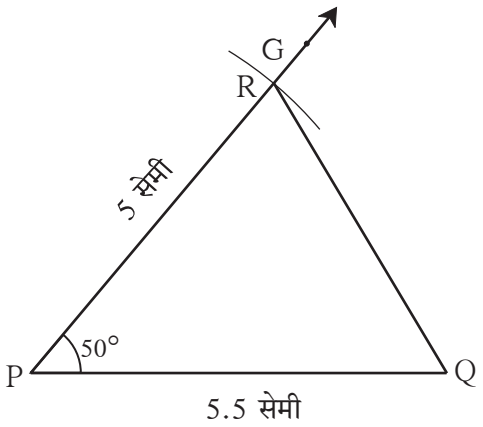
(कच्ची आकृति बनाकर उसमें दी गई जानकारी दर्शाई गई है। $\angle P$ न्यूनकोण है। इसे कच्ची आकृति में भी दिखाया गया है।)

कच्ची आकृति

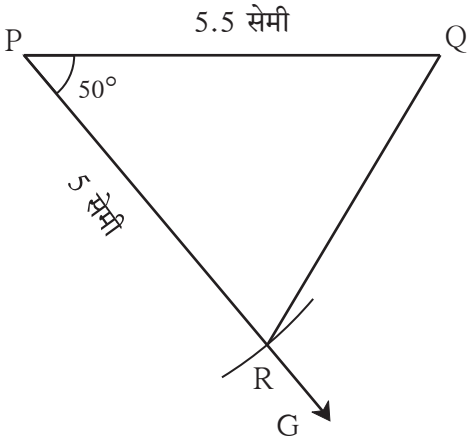



**आकृति बनाने की क्रमिक विधि**

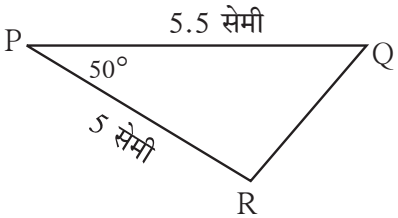
1. कच्ची आकृति के अनुसार आधार PQ यह 5.5 सेमी लंबाई वाला लो।
2. किरण PG इस प्रकार खींचो की $m\angle GPQ = 50°$ हो।
3. कंपास में 5 सेमी अंतर लो। कंपास की नोक बिंदु P पर रखकर किरण PG पर चाप खींचो। उस प्रतिच्छेदन बिंदु को R नाम दो। बिंदु Q तथा बिंदु R जोड़ो। अपेक्षित $\Delta PQR$ तैयार है।




किरण PG यह रेख PQ के दूसरी ओर भी बना सकते हैं। नीचे दिए गए ढंग से कच्ची आकृति $\Delta PQR$ बनाओ।




कच्ची आकृति



## प्रश्नसंग्रह 3

⊙ नीचे दिए गए मापों के आधार पर त्रिभुज की रचना करो।

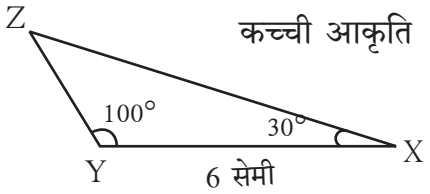
1. ΔMAT में $l(MA) = 5.2$ सेमी, $m\angle A = 80°$, $l(AT) = 6$ सेमी
2. ΔNTS में $m\angle T = 40°$, $l(NT) = l(TS) = 5$ सेमी
3. ΔFUN में $l(FU) = 5$ सेमी, $l(UN) = 4.6$ सेमी, $m\angle U = 110°$
4. ΔPRS में $l(RS) = 5.5$ सेमी, $l(RP) = 4.2$ सेमी, $m\angle R = 90°$

**(III) दो कोण तथा उनमें समाविष्ट भुजाओं की लंबाई देने पर त्रिभुज की रचना करना।**

**उदा.** ΔXYZ की रचना करो जिसमें $l(YX) = 6$ सेमी, $m\angle ZXY = 30°$ तथा $m\angle XYZ = 100°$ हो।

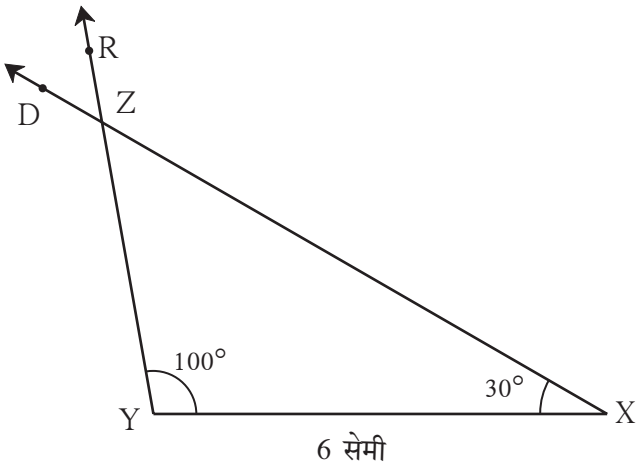
$\angle XYZ$ यह अधिककोण है।

इसे कच्ची आकृति में भी दिखाया गया है।




**आकृति बनाने की क्रमिक विधि**

1. कच्ची आकृति के अनुसार आधार रेख YX यह 6 सेमी लो।
2. किरण YR इस प्रकार खींचो कि $m\angle XYR = 100°$ हो।
3. रेख XY की जिस दिशा में बिंदु R है, उसी दिशा में किरण XD इस प्रकार खींचो कि $m\angle YXD = 30°$ हो। किरण YR तथा किरण XD के प्रतिच्छेदन बिंदु को Z नाम दो। अपेक्षित त्रिभुज ΔXYZ तैयार है।
4. आधार के दूसरी ओर भी इसी प्रकार त्रिभुज की रचना कर सकते हैं।



**जरा सोचो**

**उदा.** ΔABC में $m\angle A = 60°$, $m\angle B = 40°$ तथा $l(AC) = 6$ सेमी है तो क्या तुम ΔABC की रचना कर सकते हो ? यदि नहीं तो त्रिभुज की रचना के लिए और कौन-सी जानकारी होनी चाहिए ? उस जानकारी को प्राप्त करने के लिए किस गुणधर्म का उपयोग करेंगे ? कच्ची आकृति बनाकर निश्चित करो।

त्रिभुज के तीनों कोणों के मापों के योगफल का गुणधर्म याद करो। AC को समाविष्ट करने वाले $\angle A$ तथा $\angle C$ के माप ज्ञात किए जा सकते हैं क्या ?

## प्रश्नसंग्रह 4

⊙ नीचे दिए गए मापों के आधार पर त्रिभुज की रचना करो।

1. ΔSAT, में $l(AT) = 6.4$ सेमी, $m\angle A = 45°$, $m\angle T = 105°$।
2. ΔMNP, में $l(NP) = 5.2$ सेमी, $m\angle N = 70°$, $m\angle P = 40°$।
3. ΔEFG, में $l(FG) = 6$ सेमी, $m\angle F = 65°$, $m\angle G = 45°$।
4. ΔXYZ, में $l(XY) = 7.3$ सेमी, $m\angle X = 34°$, $m\angle Y = 95°$।

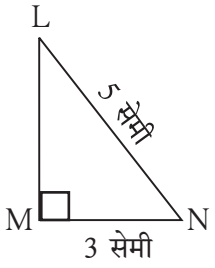
**(IV) कर्ण तथा एक भुजा की लंबाई देने पर समकोण त्रिभुज की रचना करना।**

हमें पता हैं त्रिभुज का एक कोण समकोण हो तो वह त्रिभुज समकोण त्रिभुज होता है। इस प्रकार के त्रिभुज में समकोण के **सामनेवाली भुजा कर्ण** होती है।

**उदा.** ΔLMN की रचना करो जिसमें कि $m\angle LMN = 90°$, कर्ण = 5 सेमी तथा $l(MN) = 3$ सेमी हो।

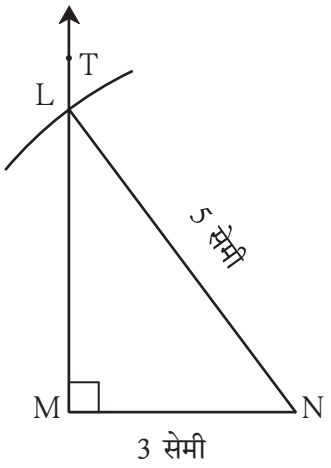
दी गई जानकारी के अनुसार कच्ची आकृति खींचो। $m\angle LMN = 90°$ अतः अंदाज लेकर समकोण त्रिभुज की रचना की गई तथा उसे समकोण चिह्न से दिखाया गया है अर्थात दी गई जानकारी को कच्ची आकृति में दिखाया गया।

कच्ची आकृति




**आकृति बनाने की क्रमिक विधि**

1. कच्ची आकृति में दर्शाए अनुसार 3 सेमी लंबाईवाली आधार रेख MN खींचो।
2. रेख MN के बिंदु M से 90° माप का कोण बनाने वाला किरण MT खींचो।
3. कंपास में 5 सेमी अंतर लेकर तथा कंपास की नोक बिंदु N पर रखकर किरण MT को प्रतिच्छेदित करने वाला एक चाप खींचो। प्रतिच्छेदन बिंदु को L नाम दो। ΔLMN तैयार है।
4. ध्यान में रखो कि आधार की दूसरी ओर भी इसी प्रकार की आकृति की रचना कर सकते हैं।




## प्रश्नसंग्रह 5

नीचे दिए गए मापों के आधार पर त्रिभुज की रचना करो।

1. ΔMAN में $m\angle MAN = 90°$, $l(AN) = 8$ सेमी तथा $l(MN) = 10$ सेमी।
2. समकोण त्रिभुज STU की रचना करो जिसमें कर्ण SU = 5 सेमी तथा $l(ST) = 4$ सेमी।
3. ΔABC में $l(AC) = 7.5$ सेमी, $m\angle ABC = 90°$, $l(BC) = 5.5$ सेमी।
4. ΔPQR में $l(PQ) = 4.5$ सेमी, $l(PR) = 11.7$ सेमी तथा $m\angle PQR = 90°$
5. त्रिभुजों की रचना करने के लिए विद्यार्थी भिन्न-भिन्न मान लेकर अनेक उदाहरण तैयार कर अभ्यास करें।

**कृति**

नीचे दी गई जानकारी के आधार पर त्रिभुज बनाने का प्रयत्न करो।

1. $\Delta ABC$ में $m\angle A = 85°$, $m\angle B = 115°$ तथा $l(AB) = 5$ सेमी
2. $\Delta PQR$ में $l(QR) = 2$ सेमी, $l(PQ) = 4$ सेमी, तथा $l(PR) = 2$ सेमी

तुम उपर्युक्त दोनों त्रिभुजों की रचना कर सकते हो क्या ? यदि नहीं तो उसका कारण पता लगाओ।

**✸ अधिक जानकारी हेतु कृति**

**उदा.** $\Delta ABC$ इस प्रकार बनाओ कि $l(BC) = 8$ सेमी, $l(CA) = 6$ सेमी, तथा $m\angle ABC = 40°$। 8 सेमी लंबाई वाले आधार BC पर $40°$ का कोण बनाने वाला किरण खींचो उसपर $l(AC) = 6$ सेमी लेने पर A के लिए दो बिंदु मिलेंगे। इसे कंपास की सहायता से समझो। इसका अर्थ है कि दिए गए माप के अनुसार विभिन्न आकार के दो त्रिभुज मिलते हैं। त्रिभुज के तीनों कोण दिए गए हों किंतु एक भी भुजा न दी गई हो तो क्या त्रिभुज की रचना कर सकते हो ? यदि हाँ तो ऐसे कितने त्रिभुज बना सकते हैं ?

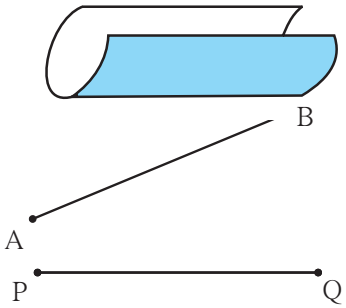
## आओ, समझें

### रेखाखंडों की सर्वांगसमता (Congruence of segments)

**कृति I** एक आयताकार कागज लो। इस कागज की सम्मुख भुजाएँ मिलाओ। वे हूबहू मिलती हैं, इस बात का अनुभव करो।

**कृति II** मापनपट्टी की सहायता से रेख AB की लंबाई और रेख PQ की लंबाई मापो और लिखो।

$l(AB)$ = ..... $l(PQ)$ = .....




क्या रेख AB तथा रेख PQ इन दोनों रेखाखंडों की लंबाई समान है ? उन रेखाओं को उठाकर एक-दूसरे पर नहीं रख सकते। एक पारदर्शक कागज AB पर रखकर उस कागज पर रेख AB बिंदु के नाम सहित बना लो। पारदर्शक कागज पर मिला नया रेखाखंड, रेखाखंड PQ पर रखो और जाँचो। बिंदु A, बिंदु P पर और बिंदु B, बिंदु Q पर आ सकता है, इसे देखो। इसके आधार पर रेख AB यह रेख PQ के **सर्वांगसम** है, यह समझ सकते हैं।

इससे यह निष्कर्ष प्राप्त होता है कि यदि दो रेखाखंडों की लंबाई समान हो तो वे परस्पर हूबहू मिलते हैं अर्थात वे **सर्वांगसम** हैं; ऐसा कह सकते हैं। यदि रेखाखंड AB रेखाखंड PQ के सर्वांगसम हो तो इसे रेख AB $\cong$ रेख PQ इस प्रकार लिखते हैं।

## यह मैंने समझा

- यदि दिए गए रेखाखंडों की लंबाई समान हो तो वे रेखाखंड सर्वांगसम होते हैं।

- यदि रेख AB $\cong$ रेख PQ तो रेख PQ $\cong$ रेख AB
- यदि रेख AB $\cong$ रेख PQ, रेख PQ $\cong$ रेख MN तो ध्यान रखो कि रेख AB $\cong$ रेख MN

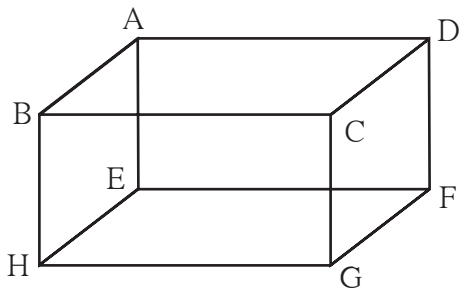
इसका अर्थ हैं कि एक रेखाखंड दूसरे के और दूसरा रेखाखंड तीसरे के सर्वांगसम हो तो पहला रेखाखंड तीसरे रेखाखंड के सर्वांगसम होता है।

**कृति I**

कोई एक आयताकार खोखा लो। उसके प्रत्येक कोर (किनार) की लंबाई नापो। कौन-सी कोरें सर्वांगसम हैं, इसका निरीक्षण करो।

**कृति II**

नीचे दी गई आकृति के आधार पर रेखाखंडों की सर्वांगसम जोड़ियाँ लिखो।




(1) रेख AB ≅ रेख DC

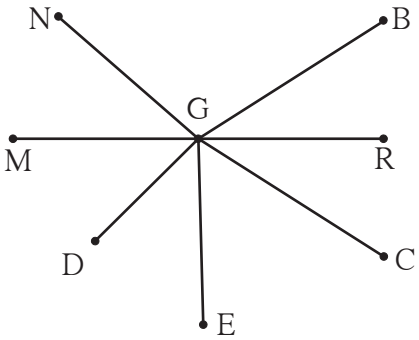
(2) रेख AE ≅ रेख BH

(3) रेख EF ≅ रेख .....

(4) रेख DF ≅ रेख .....

## प्रश्नसंग्रह 6

1. नीचे दी गई आकृति में सर्वांगसम रेखाखंडों की जोड़ियाँ लिखो। (विभाजक का उपयोग कर पता लगाओ।)



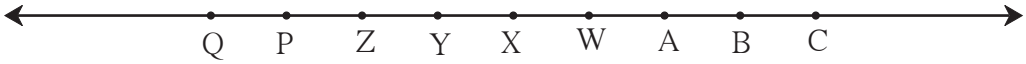

(i) .....

(ii) .....

(iii) .....

(iv) .....

2. नीचे दी गई रेखा पर संलग्न बिंदुओं के बीच का अंतर समान है। इस आधार पर रिक्त स्थानों की पूर्ति करो।



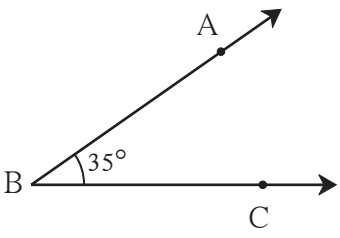

(i) रेख AB ≅ रेख .....  (ii) रेख AP ≅ रेख .....  (iii) रेख AC ≅ रेख .....

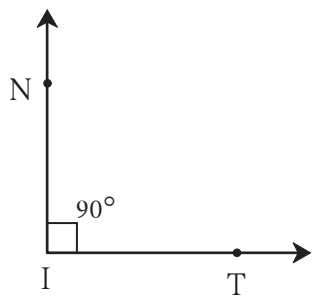
(iv) रेख ..... ≅ रेख BY  (v) रेख ..... ≅ रेख YQ  (vi) रेख BW ≅ रेख .....

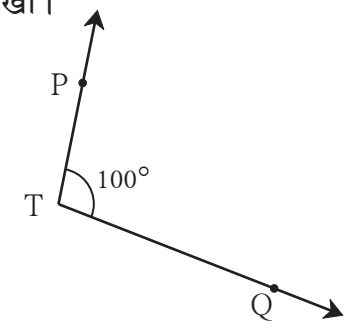
## आओ, समझें

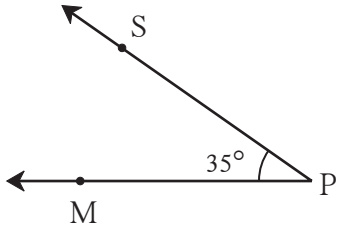
### कोणों की सर्वांगसमता (Congruence of angles)

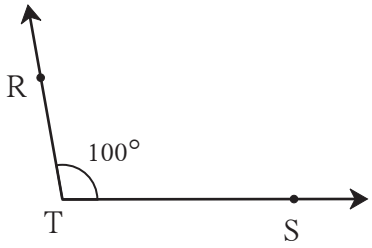
नीचे दिए गए कोणों का निरीक्षण कर समान मापवाले कोणों की जोड़ियाँ लिखो।

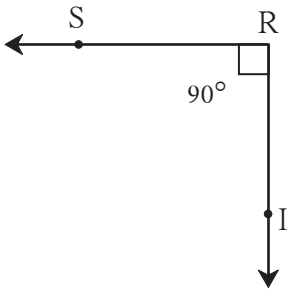


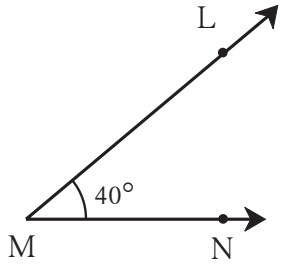



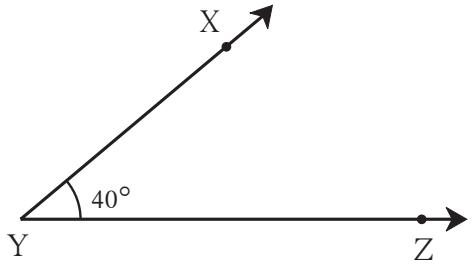



**कृति**



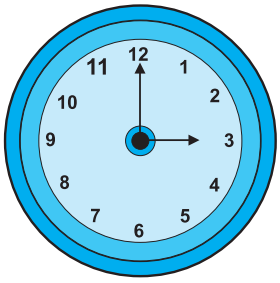

उपर्युक्त आकृति में दर्शाए अनुसार ∠LMN तथा ∠XYZ ये दो कोण 40° के बनाओ। ∠LMN पर एक पारदर्शक कागज रखकर बिंदु के नामसहित कोणों की भुजाएँ खींच लो। पारदर्शक कागज उठाकर प्राप्त कोण ∠XYZ पर रखो। बिंदु M बिंदु Y पर, किरण MN किरण YZ पर रखकर किरण ML किरण YX पर आता है, इसे अनुभव करो। इसके आधार पर पता चलता है कि समान मापवाले कोण सर्वांगसम होते हैं। कोणों की सर्वांगसमता कोणों के माप पर निर्भर होती है। ∠LMN तथा ∠XYZ सर्वांगसम हैं। इसे ∠LMN ≅ ∠XYZ इस प्रकार लिखते हैं।

## यह मैंने समझा

- जिन कोणों के माप समान होते हैं, वे कोण सर्वांगसम होते हैं।

- यदि ∠LMN ≅ ∠XYZ तो ∠XYZ ≅ ∠LMN
- यदि ∠LMN ≅ ∠ABC, और ∠ABC ≅ ∠XYZ हो तो ∠LMN ≅ ∠XYZ

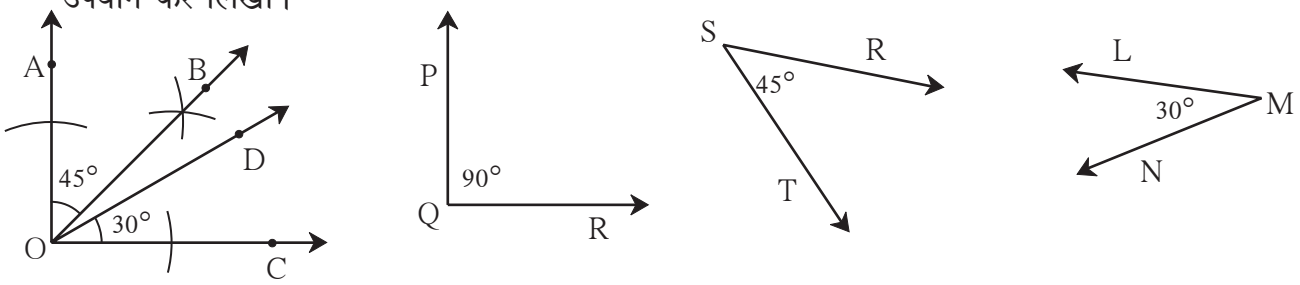
## आओ, चर्चा करें




- घड़ी में कितने बजे हैं ?
- दो सुइयों में कितने अंश माप का कोण बना है ?
- इस कोण का सर्वांगसम कोण घड़ी की सुइयों के बीच और कितने बजे बनता है ?

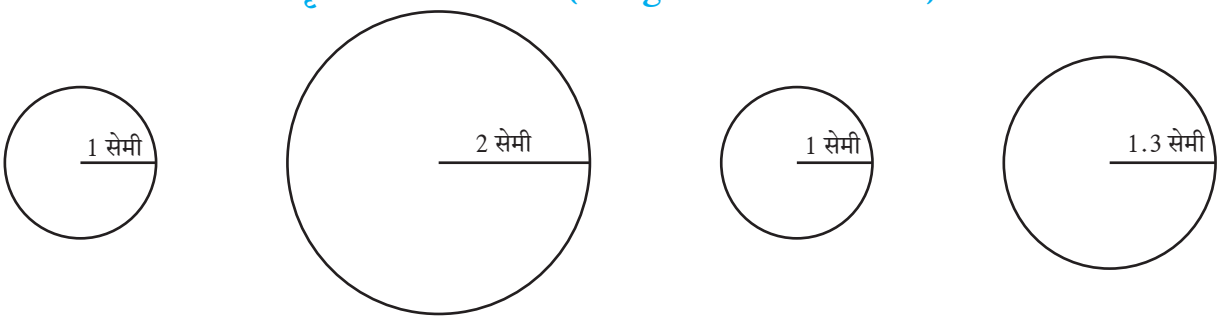
## प्रश्नसंग्रह 7

⊙ नीचे कुछ कोणों की आकृतियाँ दी गई हैं। इनमें से सर्वांगसम कोणों की जोड़ियों को सर्वांगसमता चिह्न का उपयोग कर लिखो।




### आओ, समझें

### वृत्तों की सर्वांगसमता (Congruence of circles)




(a) (b) (c) (d)

**कृति I** उपर्युक्त आकृतियों में दर्शाए गए वृत्तों का निरीक्षण करो।
ऊपर की तरह 1 सेमी, 2 सेमी, 1 सेमी, 1.3 सेमी त्रिज्यावाले वृत्त एक कागज पर बना लो और प्रत्येक की वृत्ताकर आकृति काट लो। इन आकृतियों को एक दूसरे पर रखकर जाँचो कि कौन-सी आकृतियाँ हूबहू जुड़ती हैं ?

**निरीक्षण :** 1. आकृति (a) और आकृति (c) के वृत्त एक जैसे हैं।
2. आकृति (b) और आकृति (c) के वृत्त एक जैसे नहीं हैं। आकृति (a) और आकृति (d) के वृत्त एक जैसे नहीं हैं।
जो वृत्त एक दूसरे से हूबहू जुड़ते हैं, वे **सर्वांगसम वृत्त** कहलाते हैं।

**कृति II** भिन्न-भिन्न आकार की किंतु समान मोटाई की चूड़ियाँ लेकर पता लगाओ कि कौन-सी चूड़ियाँ सर्वांगसम हैं।

**कृति III** दैनिक व्यवहार में तुम्हें सर्वांगसम वृत्त कहाँ दिखाई देते हैं, पता करो।

**कृति IV** अपने घर की वृत्ताकार थालियाँ या कटोरियाँ लो। उनके किनारे एक साथ जोड़कर देखो कि कौन-से किनारे परस्पर सर्वांगसम हैं।

### यह मैंने समझा

- जिन वृत्तों की त्रिज्याएँ समान होती हैं, वे वृत्त सर्वांगसम होते हैं।

### ICT Tools or Links

Geogebra Software के Construction tools का उपयोग कर त्रिभुज और वृत्त बनाओ।

❑❑❑