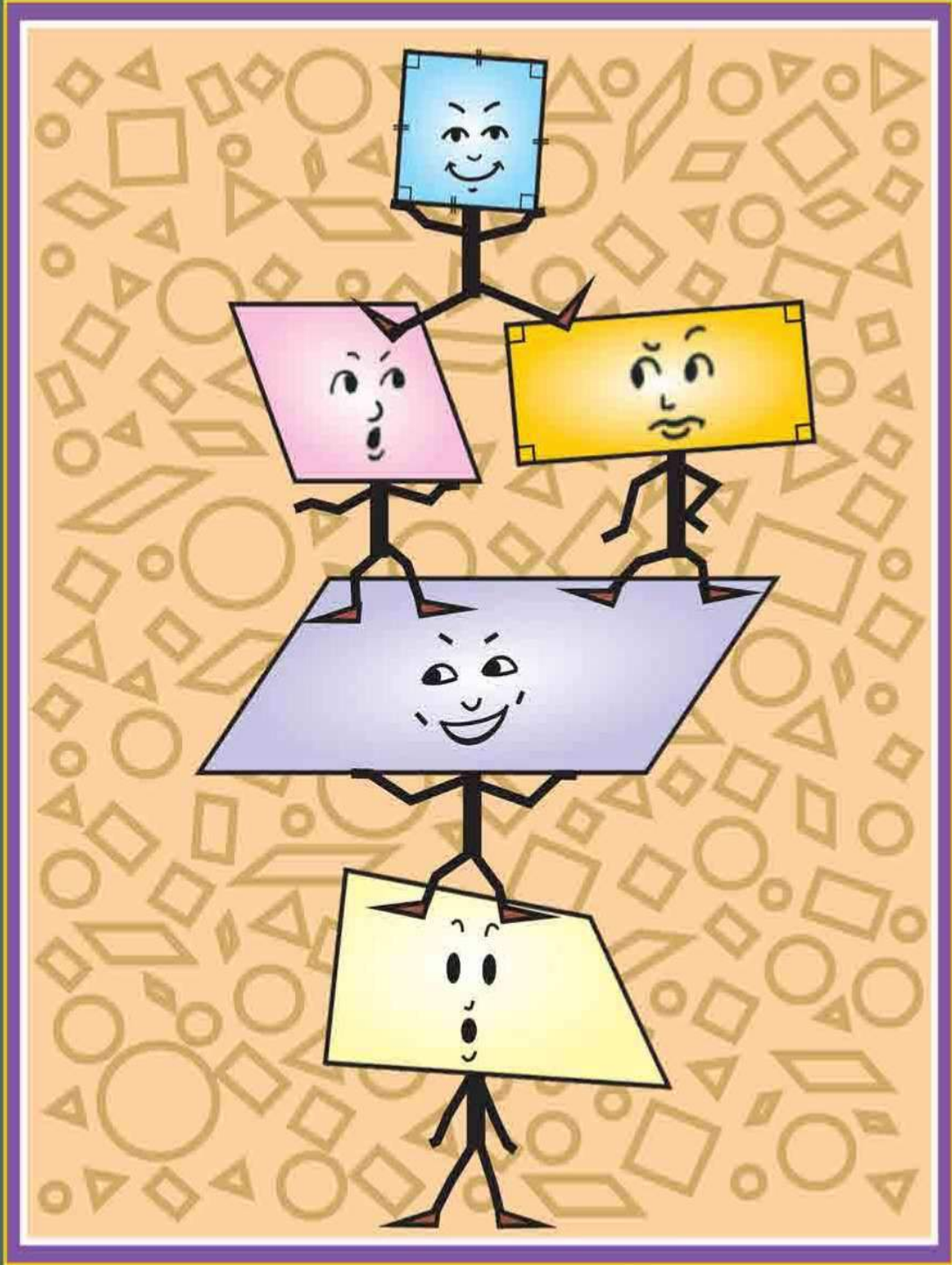


ریاضی

آٹھویں جماعت



سرکاری فیصلہ نمبر: ابھیاس - ۲۱۱۶ (پر.نمبر ۱۶/۴۳) ایس ڈی-۴ مورخہ ۲۵ اپریل ۲۰۱۶ء کے مطابق قائم کی گئی
رابطہ کار کمیٹی کی مورخہ ۲۹ دسمبر ۲۰۱۷ء کے منعقدہ نشست میں اس کتاب کو تعلیمی سال ۱۹-۲۰۱۸ سے درسی کتاب کے طور پر منظوری دی گئی۔

ریاضی

آٹھویں جماعت



مہاراشٹر راجیہ پاٹھیہ پستک نرمی و ابھیاس کرم سنشودھن منڈل، پونہ - ۴۱۱۰۰۴



اپنے اسمارٹ فون میں انسٹال کردہ Diksha App کے ذریعے درسی کتاب
کے پہلے صفحے پر درج Q.R. code اسکیمن کرنے سے ڈیجیٹل درسی کتاب اور
ہر سبق میں درج Q.R. code کے ذریعے متعلقہ سبق کی درس و تدریس کے
لیے مفید سمعی و بصری ذرائع دستیاب ہوں گے۔

طبع اول : ۲۰۱۸ء

(2018)

© مہاراشٹر راجیہ پاٹھیہ پیتک نرمتی وابھیاس کرم سنشودھن منڈل، پونہ - ۴۱۱۰۰۴

اس کتاب کے جملہ حقوق مہاراشٹر راجیہ پاٹھیہ پیتک نرمتی وابھیاس کرم سنشودھن منڈل، پونہ کے حق میں محفوظ ہیں۔ اس کتاب کا کوئی بھی حصہ ڈائریکٹر، مہاراشٹر راجیہ پاٹھیہ پیتک نرمتی وابھیاس کرم سنشودھن منڈل کی تحریری اجازت کے بغیر شائع نہیں کیا جاسکتا۔

Urdu Translators

Mr. Ansari Abdul Hamced Abdul Majceed
Mr. Ansari Badrudduja Shamsuddoha
Mr. Momin Al-Nasir Abdus Samad

Co-ordinator (Urdu)

Khan Navedul Haque Inamul Haque
Special Officer for Urdu,
M.S. Bureau of Textbooks, Balbharati - Pune

Co-ordinator (Marathi)

Smt. Ujwala S. Godbole
I/O. Special Officer for Mathematics
M.S. Bureau of Textbooks, Balbharati - Pune

Urdu D.T.P. & Layout

Altaf Amcen (Sadan Graphics)
Malegaon-423203

Cover, Art work & Computer Designing

Shri. Sandeep Koli, Artist, Mumbai

Production

Shri Sachchitanand Aphale (C.P.O)
Shri Sanjay Kamble (Production Officer)
Shri Prashant Harne (Asst. Production Officer)

Paper

70, GSM Creamvowc

Print Order

N/PB/2018-19/20,000

Printer

SOHAIL ENTERPRISES, THANE

Publisher

Shri Vivek Uttam Gosavi (Controller)
M.S. Bureau of Textbook Production,
Prabhacvi, Mumbai - 25

ریاضی مضمون کی کمیٹی

- ❖ ڈاکٹر منگلا نارائیکر (صدر)
- ❖ ڈاکٹر شریتمتی جے شری اترے (رکن)
- ❖ ڈاکٹر ونایک گوڈبولے (رکن)
- ❖ شریتمتی پراجکتی گوکھلے (رکن)
- ❖ شری رما کانت سرودے (رکن)
- ❖ شری سندھپ پنچ بھائی (رکن)
- ❖ شریتمتی پوجا جادھو (رکن)
- ❖ شریتمتی اجولا گوڈبولے (رکن سکریٹری)

ریاضی مضمون کی مجلس عاملہ

- شریتمتی جے شری پورندری
- شری راجندر چودھری
- شری سندیش سوناوے
- شری گیانی شورشور ماشا لکر
- شریتمتی سورنادیش پانڈے
- شری شریپاد دیشپانڈے
- شری سریش داتے
- شری امیش ریلے
- شری ہنسی ہوالے
- شری روہنی شرکے
- شری پرکاش جھینڈے
- شری لکشمی داوون کر
- شری شری کانت رتن پارکھی
- شری سنیل شری واستو
- جناب انصاری عبدالحمید عبدالحجید
- جناب انصاری شیخ
- شریتمتی تروین پوپٹ
- شری پرمودھونیرے
- ڈاکٹر بھارتی سہستری
- شریتمتی سواتی دھرمادھیکاری
- شری پرتاپ کاشد
- شری ملند بھاکرے
- شری اننا پاپریٹ
- شری گنیش کولتے
- شری راما ونبیا لکر
- شری سدھیر پائل
- شری پرکاش کاپے
- شری روبندر کھنڈاری
- شری وسنت شیوالے
- شری اروند کمار تیواری
- شری ملے شام پتھی
- شریتمتی آریا بھڑے

بھارت کا آئین

تمہید

ہم بھارت کے عوام متانت و سنجیدگی سے عزم کرتے ہیں کہ بھارت کو
ایک مقتدر سماج وادی غیر مذہبی عوامی جمہوریہ بنائیں
اور اس کے تمام شہریوں کے لیے حاصل کریں:
انصاف، سماجی، معاشی اور سیاسی؛
آزادی خیال، اظہار، عقیدہ، دین اور عبادت؛
مساوات بہ اعتبار حیثیت اور موقع،
اور ان سب میں
اُخوت کو ترقی دیں جس سے فرد کی عظمت اور قوم کے اتحاد اور
سالمیت کا تعلق ہو؛
اپنی آئین ساز اسمبلی میں آج چھبیس نومبر ۱۹۴۹ء کو یہ آئین
ذریعہ ہذا اختیار کرتے ہیں،
وضع کرتے ہیں اور اپنے آپ پر نافذ کرتے ہیں۔

راشٹر گیت

جَن گَن مَن - اَدھ نایک جیہ ہے
بھارت - بھاگیہ ودھاتا۔

پنجاب، سندھ، گجرات، مراٹھا
دراوڑ، اُتکل، بنگ،

وندھیہ، ہماچل، یمنا، گنگا،
اُچھل جَل دھ ترنگ،

تو شہ نامے جاگے، تو شہ آ شس ماگے،
گا ہے تو جیہ گاتھا،

جَن گَن منگل دایک جیہ ہے،
بھارت - بھاگیہ ودھاتا۔

جیہ ہے، جیہ ہے، جیہ ہے،
جیہ جیہ جیہ، جیہ ہے۔

عہد

بھارت میرا ملک ہے۔ سب بھارتی میرے بھائی اور بہنیں ہیں۔

مجھے اپنے وطن سے پیار ہے اور میں اس کے عظیم و گونا گوں ورثے پر
فخر محسوس کرتا ہوں۔ میں ہمیشہ اس ورثے کے قابل بننے کی کوشش کروں گا۔

میں اپنے والدین، استادوں اور بزرگوں کی عزت کروں گا اور ہر ایک
سے خوش اخلاقی کا برتاؤ کروں گا۔

میں اپنے ملک اور اپنے لوگوں کے لیے خود کو وقف کرنے کی قسم کھاتا
ہوں۔ اُن کی بہتری اور خوش حالی ہی میں میری خوشی ہے۔

پیش لفظ

عزیز طلبہ!

آٹھویں جماعت میں آپ سب کا استقبال ہے۔

پہلی جماعت سے ساتویں جماعت تک کی درسی کتابوں کا آپ مطالعہ کر چکے ہیں۔ آٹھویں جماعت کی درسی کتاب آپ کو پیش کرتے ہوئے ہمیں بہت مسرت ہو رہی ہے۔

ہمیں توقع ہے کہ آپ مضمون ریاضی کو صحیح طور پر سمجھیں گے، دلچسپی سے لطف اٹھائیں گے، اس مقصد کے تحت اس درسی کتاب میں کچھ عملی سرگرمیاں اور ہندی عمل دیے ہوئے ہیں، انھیں ضرور بہ ضرور انجام دیں۔ اس سے متعلق ایک دوسرے سے تبادلہ خیال کریں۔ جس کی مدد سے آپ ریاضی کی کچھ نئی خصوصیات سے روشناس ہوں گے۔

ہمیں امید ہے کہ آپ درسی کتاب کے ہر باب کو توجہ و انہماک سے پڑھیں گے۔ کوئی اکائی، ذیلی اکائی آپ کو ٹھیک طور پر نہیں سمجھ میں آئے تو اساتذہ، سرپرست یا دیگر طلبہ کی مدد لیں۔ اس کے لیے اطلاعی مواد لاتی ٹیکنالوجی کی مدد بھی حاصل کریں۔ ہر باب کے آخر میں Q.R. Code دیا ہوا ہے۔ اس کا بھی استعمال کریں۔

باب میں اکائیوں کی وضاحت و تشریح سمجھ میں آجائے تو مشقی سیٹ کی مثالیں حل کریں۔ مشق سے اکائیوں کے اہم نکات زیادہ بہتر طور پر سمجھ میں آجائیں گے اور ذہن نشین ہو جائیں گے۔ مشقی سیٹ میں دی ہوئی مثالوں کی طرح کئی مثالیں آپ خود تیار کر سکیں گے۔ مشقی سیٹ میں تارے کی علامت والی مثالیں ذرا فکر انگیز اور چنوتی دینے والی ہیں، اسے ضرور حل کریں۔

ریاضی کے مطالعہ میں دی ہوئی معلومات کم دکھائی دے تب ذرا منطقی غور و فکر سے مزید نتیجہ اخذ کیے جاسکتے ہیں۔ مثلاً مثلثوں کی مماثلت کی آزمائشیں۔ آئندہ مطالعے میں ان آزمائشوں کا استعمال بڑے پیمانے پر ہونے والا ہے۔ اس کا مطالعہ باریک بینی سے کریں۔ روزمرہ زندگی میں مالی لین دین میں استعمال ہونے والے مرکب سود، رعایت، کمیشن، کرنسی، منتظم و غیر منتظم مختلف اشکال کے رقبے، بعض سہ ابعادی اجسام کے حجم وغیرہ کو اس کتاب میں سمجھایا گیا ہے۔

ریاضی کا مطالعہ کرنے کے دوران گذشتہ جماعتوں میں سیکھے ہوئے علم کا استعمال کیا جاتا ہے۔ لہذا مختلف اکائیوں میں اہم ضابطے، خصوصیت وغیرہ 'یہ میری سمجھ میں آگیا' عنوان کے تحت چوکون میں دیے ہوئے ہیں۔ اسے ذہن نشین کر لیں۔

آٹھویں جماعت کا سال، ابتدائی تعلیم کا آخری سال ہے۔ اس سال میں اچھا مطالعہ کر کے ثانوی تعلیم کے لیے نویں جماعت میں خود اعتمادی کے ساتھ داخلہ لیں۔ اس کے لیے آپ کو خلوص دل سے نیک تمنائیں۔



(ڈاکٹر سنیل کمر)

ڈائریکٹر

مہاراشٹر راجیہ پاٹھیہ پبلیک زمرتی

واہیاس کرم سنشودھن منڈل، پونہ

پونہ :

مورخہ : ۱۸/اپریل ۲۰۱۸ء اکشیہ ترتیہ

بھارتیہ شمسی تاریخ : ۲۸/چیتھر ۱۹۴۰

آٹھویں جماعت - ریاضی کے درسی ماحصل

درس میں تجویز کردہ تعلیمی عمل	درسی ماحصل
تمام طلبہ کو (مختلف ضرورتوں کے حامل بچوں کے ساتھ) انفرادی/جوڑی میں/اجتماعی طور پر عمل کرنے کی ترغیب دی جائے۔ - طاق اعداد کی تمام بنیادی اعمال کے ساتھ مثالیں معلوم کرنا اور ان اعمال میں توازن تلاش کرنا۔ - مربع اعداد، جذر المربع، مکعب اعداد، جذر المکعب کے توازن معلوم کر کے صحیح اعداد کے قوت نما کے لیے اصول معلوم کرنا۔ - ایسے مواقع پیدا کرنا کہ آسان مساواتیں بنا سکیں اور آسان طریقے کا استعمال کر کے اسے حل کر سکیں، اس کے لیے ترغیب دینا۔ - اعداد کی توسیع خصوصیت پر مبنی، دو الجبرائی ارکان یا کثیر رکنیوں کو ضرب کا تجربہ دینا اور مختلف الجبرائی متماثلہ (داعی) مساواتوں کو مثالوں سے تعیم کرنا۔ - دو اعداد کے اجزائے ضربی سابقہ علم کے ذریعے کرنا۔ مناسب عمل کی مدد سے الجبرائی کثیر رکنیوں کے اجزائے ضربی کی پہچان کرنا۔ - فی صدی کا استعمال ذیل کے سب امور میں ہوتا ہے، چھوٹ (رعایت)، نفع - نقصان، GST کا تعارف، مفرد سود، مرکب سود وغیرہ کے لیے واقعات مہیا کرنا۔ - مفرد سود بار بار معلوم کر کے مرکب سود کا ضابطہ معلوم کرنا۔ اس کے لیے مختلف مثالیں بنا کر دینا۔ - ایک رکن کا دوسرے رکن پر انحصار ہوتا ہے، ایسے واقعات اور مثالیں مہیا کرنا۔ دونوں ارکان میں ایک کے اضافے سے دوسرے میں اضافہ ہوتا ہے یا ایک رکن کے اضافے سے دوسرے رکن میں کمی واقع ہوتی ہے۔ ایسے واقعات پہچاننے کے لیے ان کو ترغیب دینا۔ مثال کے طور پر سواریوں کی رفتار میں اضافے سے ان کے فاصلہ طے کرنے کے لیے درکار وقت میں کمی واقع ہوتی ہے۔ - مختلف ذواربعۃ الاضلاع کے زاویے اور ضلعوں کی پیمائش کرنا اور ان کے درمیان تعلق کا توازن معلوم کرنا۔ ان کی تعیم کر کے اصول و ضابطہ معلوم کرنا اور مثالوں کے ذریعے ان کی تصدیق کرنا۔ - متوازی الاضلاع کی خصوصیت، ذواربعۃ الاضلاع کی تشکیل کر کے، ان کے وتر بنا کر، ضلع اور زاویہ کی پیمائش کر کے تصدیق و جانچ دیکھنے کے لیے کہنا اور وجہ بتانا۔	طالب علم - - توازن کے ذریعے ناطق اعداد کی جمع، تفریق، ضرب اور تقسیم کی خصوصیات کی تعیم کرتا ہے۔ - دیے ہوئے دو ناطق اعداد کے درمیان زیادہ سے زیادہ ناطق اعداد معلوم کرتا ہے۔ - مختلف طریقوں سے اعداد کے مربع، مکعب، جذر المربع اور جذر المکعب معلوم کرتا ہے۔ - صحیح اعداد کی قوت نما والی مثالوں کو حل کرتا ہے۔ - متغیر کا استعمال کر کے معیے اور روزمرہ زندگی سے متعلق مثالیں حل کرتا ہے۔ - الجبرائی عبارتوں کی ضرب کرتا ہے۔ $(3x^2 + 7)(2x + 5)$ کی توسیع کرتا ہے۔ - روزمرہ زندگی کی عبارتی مثالوں کو حل کرنے کے لیے الجبرائی متماثلہ مساواتوں کا استعمال کرتا ہے۔ - رعایت اور مرکب سود کی مثالوں میں GST، اسی طرح نفع اور نقصان معلوم کرنے کے لیے فی صدی کے تصورات کا استعمال کرتا ہے۔ - چھپی ہوئی قیمت اور رعایت دی ہوئی ہو تو فی صدی رعایت معلوم کرتا ہے یا فروخت قیمت اور نفع دیا ہوا ہو تو فی صدی نفع معلوم کرتا ہے۔ - مستقیم تغیر اور معکوس تغیر پر مبنی مثالیں حل کرتا ہے۔ - ذواربعۃ الاضلاع کے زاویوں کی خصوصیت کا استعمال کر کے ذواربعۃ الاضلاع کے زاویوں کی پیمائشوں کی جمع پر مبنی مثالیں حل کرتا ہے۔ - متوازی الاضلاع کی خصوصیات کی تصدیق کرتا ہے اور ان کے تعلق کو وجوہات دے کر واضح کرتا ہے۔ - توازن کے ذریعے آئیلر (Euler's) کے ضابطے کی تصدیق کرتا ہے۔ - کمپاس (گنیوں) اور اسکیل پٹی کی مدد سے مختلف ذواربعۃ الاضلاع بناتا ہے۔

درس میں تجویز کردہ تعلیمی عمل

درسی ماحصل

- تریسی کاغذ/مربعی جالی کا استعمال کر کے ذوزنقہ اور دیگر کثیر الاضلاع کے رقبے کا اندازہ لگاتا ہے اور ضابطے کا استعمال کر کے اس کی تصدیق کرتا ہے۔
- کثیر الاضلاع کا رقبہ معلوم کرتا ہے۔
- مکعب نما (مستطیلی منشور) اور استوانہ اشکال والی چیزوں کی سطحوں کا رقبہ اور حجم معلوم کرتا ہے۔
- ستونی ترسیم پڑھتا ہے اور اس کی تشریح کرتا ہے۔
- دو متوازی خطوط اور ان کے تقاطع سے بننے والے زاویوں کی جوڑیوں کی خصوصیات کی تصدیق کرتا ہے۔
- ضل ضل ضل، ضل زاضل، زاضل زا، وتر۔ ضلع؛ ان آزمائشوں کا استعمال کر کے مثلثوں کی مماثلت کی وضاحت کرتا ہے۔
- تریسی کاغذ یا مربعی چوکون والے چوکڑی کاغذ کا استعمال کر کے بند شکل کا اندازہ رقبہ معلوم کرتا ہے۔
- روزمرہ کاروبار میں حاصل شدہ تجربات سے جمع کردہ معطیات کا میانہ معلوم کرتا ہے۔
- فی صدی اور بھی ستونی ترسیم بناتا ہے۔
- دیے ہوئے خط کے متوازی خط کھینچتا ہے۔

- ہندی وسائل کی مدد سے مختلف ذواربہ الاضلاع کی تشکیل کے عملی کام اور تجربات دینا۔
- تریسی کاغذ پر ذوزنقہ اور دیگر کثیر الاضلاع بنانا اور طلبہ کا مربع اکائیوں کو شمار کر کے ان کا رقبہ طے کرنا۔
- مثلث اور مستطیل (مربع) کے رقبوں کا استعمال کر کے ذوزنقہ کا رقبہ معلوم کرنا۔
- مکعب، مکعب نما / مستطیلی منشور اور دائروی استوانہ جیسی سہ ابعادی اشکال کی سطحوں کو پہچاننا۔
- مکعب اور مکعب نما / مستطیلی منشور، دائروی استوانہ کے سطحوں کے رقبے کا ضابطہ، مستطیل، مربع اور دائرہ کے رقبوں کے ضابطوں کا استعمال کر کے معلوم کرنا۔
- مکعب اور مکعب نما / مستطیلی منشور کے حجم، اکائی مکعب کا استعمال کر کے معلوم کرنا۔
- معطیات / شمارے جمع کرنا، اس کی جماعت بندی کرنا اور ستونی ترسیم بنانا۔
- دیے ہوئے معطیات کا میانہ معلوم کرنا۔
- مماثلت کا نتیجہ پیشگی طے کر کے اور اشکال ایک دوسرے پر رکھ کر مماثلت کی خصوصیت کی تصدیق کرنا۔

اساتذہ کے لیے ہدایت

آٹھویں جماعت کی درسی کتاب کا استعمال جماعت میں سوال و جواب، سرگرمی، بحث اور طلبہ سے مکالمہ، وغیرہ مختلف ذرائع سے کیا جانا ضروری ہے۔ اس لیے درسی کتاب کا تفصیلی مطالعہ کیجیے۔ مطالعہ کرنے کے دوران تدریس کے نکتہ نظر سے اہم جملوں کو خط کشیدہ کیجیے۔ ان کے حوالہ جات سمجھنے کے لیے گذشتہ اور آئندہ جماعتوں کی درسی کتابوں اور دیگر وسائل کا مطالعہ کیجیے۔ اس کے لیے Q.R.Code پر دی ہوئی معلومات کا استعمال کیجیے۔

کتاب میں ہمارا ماحول، جغرافیہ، سائنس، معاشیات، ان تمام مضامین کا ریاضی سے ربط قائم کیا گیا ہے۔ ایسے کئی مضامین میں ریاضی کے تصورات کا استعمال ہوتا ہے۔ اساتذہ طلبہ کو بتائیں۔ اساتذہ طلبہ سے سرگرمی، پروجیکٹ اور تجربات کروائیں۔ اس طرح ریاضی کے لین دین میں استعمال کی وضاحت ہوگی اور اس کے سیکھنے کی اہمیت کا طلبہ کو احساس ہوگا۔ ریاضی کی کتاب میں تصورات کی وضاحت آسان زبان میں دی گئی ہے۔ مشقی سیٹ میں دی ہوئی مثالوں پر منحصر کئی مثالیں اساتذہ خود تیار کر کے طلبہ کو حل کرنے کے لیے اور انھیں بھی نئی مثالیں بنانے کی ترغیب دیں۔

طلبہ کے لیے بعض فکر انگیز اور چنوتی والے سوال تارے سے نشان زد کیے ہوئے ہیں۔ 'مزید معلومات کے لیے' عنوان کے تحت تھوڑی زیادہ معلومات دی ہوئی ہے۔ یہ معلومات ریاضی کے آئندہ مطالعہ کے دوران طلبہ کے لیے یقیناً فائدہ مند ثابت ہوں گی۔ ہمیں امید ہے کہ آٹھویں جماعت کی ریاضی کی درسی کتاب آپ کو یقیناً پسند آئے گی۔

فہرست

حصہ 1

1. ناطق اور غیر ناطق اعداد 01 سے 06
2. متوازی خطوط اور تقاطع 07 سے 13
3. قوت نما اور جذر المکعب 14 سے 18
4. مثلث کا ارتفاع اور وسطانیہ 19 سے 22
5. توسیعی ضابطے 23 سے 28
6. الجبری عبارتوں کے اجزائے ضربی 29 سے 34
7. تغیر 35 سے 40
8. ذواربعتہ الاضلاع بنانا اور ذواربعتہ الاضلاع کی قسمیں 41 سے 50
9. چھوٹ اور کمیشن 51 سے 58
- متفرق مجموعہ سوالات - 1 59 سے 60

حصہ 2

10. کثیر رکنیوں کی تقسیم 61 سے 66
11. شماریات 67 سے 74
12. یک متغیری مساواتیں 75 سے 80
13. مثلثوں کی متماثلت 81 سے 87
14. مرکب سود 88 سے 93
15. رقبہ 94 سے 105
16. سطح کا رقبہ اور حجم 106 سے 113
17. دائرہ - وتر اور قوس 114 سے 118
- متفرق مجموعہ سوالات - 2 119 سے 120

ناطق اور غیر ناطق اعداد

آئیے ذرا یاد کریں



ہم طبعی اعداد کے گروہ، مکمل اعداد کے گروہ اور صحیح اعداد کے گروہ اور ناطق اعداد کے گروہ کی شناخت کر چکے ہیں۔

صحیح اعداد کا گروہ

مکمل اعداد کا گروہ

طبعی اعداد کا گروہ

..., -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...

0, 1, 2, 3, 4, ...

1, 2, 3, 4, ...

ناطق اعداد کا گروہ

وغیرہ، $\frac{67}{5}$ ، $\frac{32}{3}$ ، 8، 3، 0، -4، $\frac{10}{-7}$ ، $\frac{-25}{3}$

ناطق اعداد کا گروہ

”“ کی صورت والے اعداد کو ناطق اعداد کہتے ہیں۔ یہاں m اور n صحیح اعداد ہوتے ہیں لیکن n غیر صفر صحیح عدد ہے۔

ہم جانتے ہیں کہ دو ناطق اعداد کے درمیان بے شمار ناطق اعداد ہوتے ہیں۔

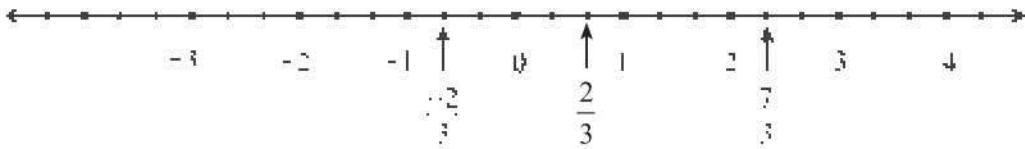
آئیے سمجھ لیں



(To show rational numbers on a number line)

اعداد $\frac{2}{3}$ ، $\frac{1}{3}$ ، $\frac{7}{3}$ کو عددی خط پر دکھائیں گے۔

پہلے ایک عددی خط کھینچیں گے۔



• 2 ناطق عدد ہے اور صحیح عدد بھی ہے۔ اسے عددی خط پر دکھائیں گے۔

• $\frac{7}{3} = 2 + \frac{1}{3}$ یعنی صفر کے دائیں طرف ہر اکائی کے تین مساوی حصے کریں گے۔ صفر سے ساتواں نقطہ $\frac{7}{3}$ عدد کو ظاہر کرتا ہے۔ یا

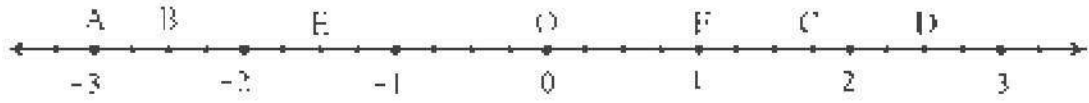
$\frac{7}{3} = 2 + \frac{1}{3}$ یعنی 2 عدد کے بعد $\frac{1}{3}$ اکائی فاصلے پر واقع نقطہ $\frac{7}{3}$ عدد کو ظاہر کرتا ہے۔

- عددی خط پر $\frac{2}{3}$ دکھانے سے قبل $\frac{1}{3}$ عدد ظاہر کر کے 0 کے بائیں جانب اتنے ہی فاصلے پر عدد $\frac{2}{3}$ ظاہر کیا جائے گا۔

مشقی سیٹ 1.1

1. عددی خط پر درج ذیل ناطق اعداد دکھائیے۔ ہر مثال کے لیے علیحدہ عددی خط تہیجیے۔
- (1) $\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, -\frac{3}{2}$ (2) $\frac{7}{5}, \frac{2}{5}, \frac{4}{5}$ (3) $\frac{5}{8}, \frac{11}{8}$ (4) $\frac{13}{10}, \frac{17}{10}$

2. دیے ہوئے عددی خط کو دیکھ کر پوچھے گئے سوالوں کے جواب لکھیے۔



- (1) نقطہ B کس ناطق عدد کو ظاہر کرتا ہے؟
 (2) عدد $1\frac{3}{4}$ کس نقطہ سے ظاہر کیا گیا ہے؟
 (3) 'نقطہ D' سے ناطق عدد $\frac{5}{2}$ کو ظاہر کیا گیا ہے۔ یہ بیان صحیح ہے یا غلط لکھیے۔

آئیے سمجھ لیں

ناطق اعداد میں ترتیبی تعلق (Comparison of rational numbers)

ہم جانتے ہیں کہ عددی خط پر اعداد کی ہر جوڑی میں بائیں جانب کا عدد، دائیں جانب کے عدد سے چھوٹا ہوتا ہے۔ اسی طرح ناطق اعداد کے شمار کنندہ اور نسب نما کو کسی ایک غیر صفر عدد سے ضرب دیں تو عدد وہی رہتا ہے یا اس کی قیمت میں کوئی تبدیلی نہیں ہوتی۔

$$\frac{a}{b} = \frac{ka}{kb} \quad \text{جب } k \neq 0$$

مثال (1) $\frac{2}{3}$ اور $\frac{5}{4}$ کے درمیان چھوٹا-بڑا پن طے کیجیے۔ $<, =, >$ ان میں سے مناسب علامت کا استعمال کیجیے۔

$$\frac{5}{4} = \frac{5 \times 3}{4 \times 3} = \frac{15}{12} \quad , \quad \frac{2}{3} = \frac{2 \times 4}{3 \times 4} = \frac{8}{12}$$

$$\therefore \frac{15}{12} > \frac{8}{12} \quad \therefore \frac{5}{4} > \frac{2}{3}$$

حل :

مثال (2) ناطق اعداد $\frac{4}{5}$ اور $\frac{-7}{9}$ کا موازنہ کیجیے۔

حل : منفی عدد ہمیشہ مثبت عدد سے چھوٹا ہوتا ہے۔ اس لیے $\frac{4}{5} < \frac{-7}{9}$

دو منفی اعداد کا موازنہ کرنے کے لیے :

a, b مثبت اعداد ہیں اگر $a < b$ ہو تو $-a > -b$ کا مشاہدہ کریں گے۔

$$\left\{ \begin{array}{l} 2 < 3 \text{ لیکن } -2 > -3 \\ \frac{5}{4} < \frac{7}{4} \text{ لیکن } -\frac{5}{4} > -\frac{7}{4} \end{array} \right.$$

ان اعداد کی عددی خط پر تصدیق کیجیے۔

مثال (3) $\frac{-5}{2}$ اور $\frac{7}{3}$ کا موازنہ کیجیے۔

حل : پہلے $\frac{5}{2}$ اور $\frac{7}{3}$ کا موازنہ کریں گے۔

$$\frac{7}{3} = \frac{7 \times 2}{3 \times 2} = \frac{14}{6}, \quad \frac{5}{2} = \frac{5 \times 3}{2 \times 3} = \frac{15}{6}, \quad \frac{14}{6} < \frac{15}{6}$$

$$\therefore \frac{7}{3} < \frac{5}{2}, \quad \therefore \frac{-7}{3} > -\frac{5}{2}$$

مثال (4) $\frac{4}{10}$ اور $\frac{3}{5}$ ناطق اعداد ہیں، ان کا موازنہ کیجیے۔

$$\frac{3}{5} = \frac{3 \times 2}{5 \times 2} = \frac{6}{10}, \quad \therefore \frac{4}{10} < \frac{6}{10}$$

حل :

ناطق اعداد کا موازنہ کرتے وقت ذیل کے اصول استعمال کرنا مفید ہوتے ہیں۔

$\frac{a}{b}$ اور $\frac{c}{d}$ ناطق اعداد ہیں اگر b اور d مثبت ہوں اور

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \text{ ہو تو } a \times d < b \times c \quad (1)$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ ہو تو } a \times d = b \times c \quad (2)$$

$$\frac{a}{b} > \frac{c}{d} \text{ ہو تو } a \times d > b \times c \quad (3)$$

مشقی سیٹ 1.2

1. درج ذیل اعداد میں چھوٹا- بڑا پن طے کیجیے۔

- | | | | | |
|--------------------------------------|-----------------------------------|---------------------------------|----------------------------------|-------------------------------------|
| (1) $-7, -2$ | (2) $0, \frac{-9}{5}$ | (3) $\frac{8}{7}, 0$ | (4) $\frac{-5}{4}, \frac{1}{4}$ | (5) $\frac{40}{29}, \frac{141}{29}$ |
| (6) $-\frac{17}{20}, -\frac{13}{20}$ | (7) $\frac{15}{12}, \frac{-}{16}$ | (8) $\frac{25}{8}, \frac{9}{4}$ | (9) $\frac{12}{15}, \frac{3}{5}$ | (10) $\frac{-7}{11}, \frac{-3}{4}$ |



ناطق اعداد کا عشری صورت میں اظہار (Decimal representation of rational numbers)

ناطق اعداد کے شمار کنندہ کو نسب نما سے تقسیم کرتے وقت عشری کسروں کا استعمال کریں تو اس عدد کی عشری صورت حاصل ہوتی ہے۔
مثلاً $\frac{7}{4} = 1.75$ ، یہاں 7 کو 4 سے تقسیم کرنے پر باقی صفر آتا ہے۔ تقسیم کرنے کا عمل مکمل ہو چکا ہے۔
ناطق اعداد کی ایسی عشری صورت کو مختتم عشری صورت کہتے ہیں۔ ہم جانتے ہیں کہ ہر ناطق عدد غیر مختتم متوالی عشری صورت میں لکھ سکتے ہیں۔
مثالیں :

$$(1) \frac{7}{6} = 1.1666... = 1.1\bar{6}$$

$$(2) \frac{5}{6} = 0.8333... = 0.8\bar{3}$$

$$(3) \frac{5}{3} = -1.666... = -1.\bar{6}$$

$$(4) \frac{22}{7} = 3.142857142857... = 3.\overline{142857} \quad (5) \frac{23}{99} = 0.2323... = 0.2\bar{3}$$

اسی طرح، $\frac{7}{4} = 1.75 = 1.75000... = 1.75\bar{0}$ مختتم صورت بھی غیر مختتم متوالی عشری صورت میں لکھ سکتے ہیں۔

مشقی سیٹ 1.3

درج ذیل ناطق اعداد کو عشری صورت میں لکھیے۔

$$(1) \frac{9}{37}$$

$$(2) \frac{18}{42}$$

$$(3) \frac{9}{14}$$

$$(4) \frac{-103}{5}$$

$$(5) \frac{11}{13}$$



غیر ناطق اعداد (Irrational numbers)

ناطق اعداد کے علاوہ مزید کئی اعداد عددی خط پر ہوتے ہیں۔ وہ ناطق نہیں ہوتے، یعنی غیر ناطق ہوتے ہیں۔ $\sqrt{2}$ بھی ایک غیر ناطق عدد ہے۔

ہم عدد $\sqrt{2}$ کو عددی خط پر دکھائیں گے۔

● عددی خط پر نقطہ A عدد 1 کو ظاہر کرتا ہے۔ عددی خط پر نقطہ A سے ایک عمودی خط l کھینچیں۔

خط l پر نقطہ P اس طرح لیجیے کہ اکائی OA = AP = 1 ہو۔

● خط OP کھینچیں۔ $\triangle OAP$ ایک قائمہ الزاویہ مثلث بن گیا۔

فیثا غورث کے مسئلے سے،

$$\begin{aligned} OP^2 &= OA^2 + AP^2 \\ &= 1^2 + 1^2 = 1 + 1 = 2 \end{aligned}$$

$$OP^2 = 2$$

(طرفین کا جذر المربع لینے پر) ... $\therefore OP = \sqrt{2}$

• اب مرکز 'O' اور OP کے مساوی نصف قطر لے کر

ایک قوس $\sqrt{2}$ بنائیے۔ وہ قوس عددی خط کو جہاں قطع کرتا ہے اس

نقطے کو Q نام دیجیے۔ OQ فاصلہ ہی $\sqrt{2}$ ہے۔ یعنی

عدد $\sqrt{2}$ کو عددی خط پر Q نقطے سے ظاہر کیا گیا ہے۔

OQ کے مساوی فاصلہ پر کار میں لے کر 'O' کے

بائیں جانب نقطہ R کا تعین کریں تو اس نقطے سے ظاہر کیا گیا عدد $-\sqrt{2}$ ہوگا۔

عدد $\sqrt{2}$ غیر ناطق عدد ہے، اسے ہم آئندہ جماعت میں ثابت کریں گے۔ ناطق اعداد کی عشری صورت غیر ختم اور غیر متوالی ہوتی ہے۔ اسے

بھی ہم آئندہ جماعت میں دیکھیں گے۔

ذہن نشین کیجیے کہ -

گذشتہ جماعت میں ہم نے سیکھا کہ عدد π ناطق نہیں ہے یعنی وہ عدد غیر ناطق ہے۔ ہم اپنے کاروبار میں اس کی قیمت $\sqrt{3}$ یا 3.14 لیتے ہیں لیکن اعداد $\sqrt{3}$ اور 3.14 ناطق ہیں۔

جن اعداد کو عددی خط پر نقاط سے دکھایا جاسکتا ہے، ان اعداد کو حقیقی اعداد (Real Numbers) کہتے ہیں۔ ہم نے دیکھا کہ تمام ناطق اعداد

کو عددی خط پر دکھایا جاسکتا ہے۔ لہذا تمام ناطق اعداد حقیقی اعداد ہیں۔ اسی طرح بے شمار غیر ناطق اعداد بھی حقیقی اعداد ہیں۔

عدد $\sqrt{2}$ غیر ناطق عدد ہے۔ اسے ذہن نشین کیجیے کہ $\sqrt{2} = 1.41421356237$ وغیرہ تمام اعداد غیر ناطق ہیں۔ کیونکہ

اگر $\sqrt{2}$ ناطق عدد ہو تو $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ناطق ہونا چاہیے۔ لیکن یہ صحیح نہیں ہے۔

ہم ناطق اعداد کو عددی خط پر ظاہر کرنا دیکھ چکے ہیں۔ اسی طرح غیر ناطق عدد $\sqrt{2}$ کو بھی عددی خط پر ظاہر کر چکے ہیں۔ لہذا $\sqrt{2}$ ، $\sqrt{3}$ ، ...

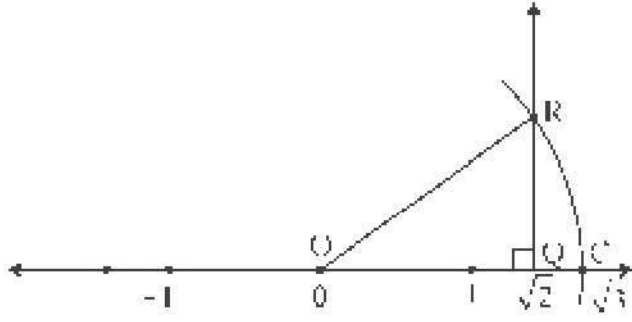
جیسے غیر ناطق اعداد کو بھی ہم عددی خط پر دکھا سکتے ہیں۔

مشقی سیٹ 1.4

1. $\sqrt{2}$ کو عددی خط پر دکھایا گیا ہے۔ اس کی مدد سے $\sqrt{2}$ کو عددی خط پر دکھانے کے لیے ذیل کے عملی کام کے مراحل دیے ہوئے ہیں، ان

مراحل کی خالی جگہوں کو مناسب طریقے سے پر کر کے عملی کام مکمل کیجیے۔

عملی کام :



- عددی خط پر نقطہ Q عدد کو ظاہر کرتا ہے۔
- نقطہ Q سے ایک عمودی خط کھینچا گیا ہے۔ اس خط پر ایک اکائی لمبائی دکھانے والا نقطہ R ہے۔
- OR کو جوڑنے سے $\triangle ORQ$ ایک قائمہ الزاویہ مثلث حاصل ہوتا ہے۔

• $I(OQ) = \sqrt{2}$, $I(QR) = 1$

∴ فیثاغورث کے مسئلے سے،

$$[I(OR)]^2 = [I(OQ)]^2 + [I(QR)]^2$$

$$= \boxed{}^2 + \boxed{}^2 = \boxed{} + \boxed{}$$

$$= \boxed{} , \quad \therefore I(OR) = \boxed{}$$

OR کے مساوی فاصلہ لے کر کھینچا گیا قوس عددی خط کو جہاں قطع کرتا ہے، اس نقطے کو C نام دیجیے۔ نقطہ C $\sqrt{3}$ کو ظاہر کرتا ہے۔

2. عددی خط پر $\sqrt{3}$ دکھائیے۔

3.* عددی خط پر $\sqrt{7}$ دکھائیے۔

جوابات کی فہرست

مشقی سیٹ 1.1

2. (1) $\frac{161}{4}$ (2) C (3) صحیح

مشقی سیٹ 1.2

1. (1) $-7 < -2$ (2) $0 > \frac{9}{5}$ (3) $\frac{8}{7} > 0$ (4) $\frac{5}{2} < \frac{1}{4}$ (5) $\frac{401}{29} < \frac{141}{29}$
- (6) $\frac{17}{20} < \frac{13}{20}$ (7) $\frac{15}{12} > \frac{7}{16}$ (8) $\frac{25}{8} < \frac{9}{4}$ (9) $\frac{2}{15} > \frac{3}{5}$ (10) $\frac{7}{11} > \frac{3}{4}$

مشقی سیٹ 1.3

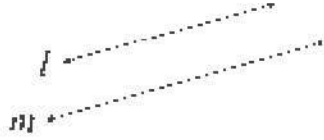
- (1) 0.243 (2) 0.428571 (3) 11.6478571 (4) -20.6
- (5) -0.846153



متوازی خطوط اور تقاطع

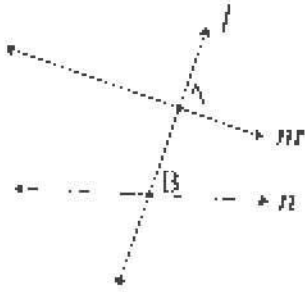
2

آئیے ذرا یاد کریں



ایک ہی مستوی میں واقع ایک دوسرے کو قطع نہیں کرنے والے خطوط متوازی خطوط کہلاتے ہیں۔
خط l اور خط m متوازی خطوط ہیں، اسے 'خط $l \parallel m$ ' لکھتے ہیں۔

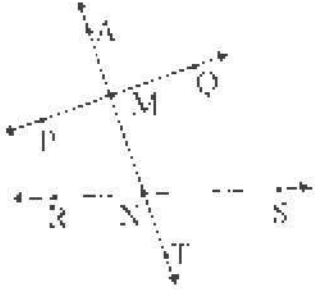
آئیے سمجھ لیں



تقاطع (Transversal)

بازو میں دی ہوئی شکل میں خط m اور خط n کو خط l بالترتیب نقطہ A اور نقطہ B دو متفرق نقاط پر قطع کرتا ہے۔ خط m اور خط n کا خط l تقاطع ہے۔
اگر کوئی خط دیے ہوئے دو خطوط کو دو مختلف نقاط پر قطع کرتا ہو تو اس خط کو ان دو خطوط کا تقاطع کہتے ہیں۔

تقاطع کے ذریعے بننے والے زاویے (Angles made by Transversal)



متصلہ شکل میں تقاطع کے ذریعے نقطہ تقاطع M پر چار اور نقطہ تقاطع N پر چار اس طرح کل 8 زاویے بنے ہوئے دکھائی دیتے ہیں۔ آٹھوں زاویوں میں سے ہر ایک زاویے کی ایک ساق تقاطع پر ہے اور دوسری ساق دو میں سے کسی ایک خط پر ہے۔ اس کا استعمال کر کے زاویوں کی جوڑیاں طے کی گئی ہیں، ان جوڑیوں کا مطالعہ کریں گے۔

داخلی زاویے (Interior Angles)

زاویوں کی جس جوڑی میں زاویے دیے ہوئے دونوں خطوط کے اندرونی جانب ہوتے ہیں۔ اس جوڑی کو داخلی زاویوں کی جوڑی کہتے ہیں۔

نظیری زاویے (Corresponding Angles)

زاویوں کی جس جوڑی میں زاویوں کی تقاطع پر کی ساق ایک ہی سمت ظاہر کرتی ہے اور جو ساق تقاطع پر نہیں ہے وہ تقاطع کے ایک ہی جانب ہوتی ہیں، اس جوڑی کو نظیری زاویوں کی جوڑی کہتے ہیں۔

— مذکورہ بالا شکل میں داخلی زاویوں کی جوڑیاں —

$\angle MNR$ اور $\angle PMN$ (i)

$\angle MNS$ اور $\angle QMN$ (ii)

— مذکورہ بالا شکل میں نظیری زاویوں کی جوڑیاں —

$\angle MNR$ اور $\angle AMP$ (i)

$\angle RNT$ اور $\angle PMN$ (ii)

$\angle MNS$ اور $\angle AMQ$ (iii)

$\angle SNT$ اور $\angle QMN$ (iv)

● متبادلہ زاویے (Alternate Angles)

زاویوں کی ایسی جوڑی جس جوڑی میں زاویے تقاطع کے مخالف جانب ہوتے ہیں اور تقاطع پر واقع ساق مخالف سمت ظاہر کرتی ہے، وہ جوڑی متبادلہ زاویوں کی جوڑی ہوتی ہے۔

شکل میں زاویوں کی دو جوڑیاں داخلی متبادلہ زاویوں کی ہیں تو دو جوڑیاں خارجہ متبادلہ زاویوں کی ہے۔

خارجہ متبادلہ زاویے

(خطوط کے بیرونی جانب والے زاویے)

$\angle TNS$ اور $\angle AMP$ (i)

$\angle RNT$ اور $\angle AMQ$ (ii)

داخلی متبادلہ زاویے

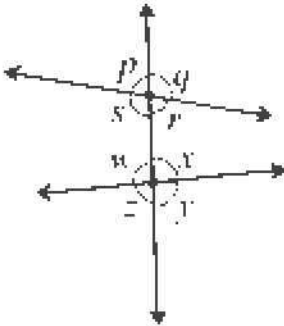
(خطوط کے اندرونی جانب والے زاویے)

$\angle MNS$ اور $\angle PMN$ (i)

$\angle RNM$ اور $\angle QMN$ (ii)

مشقی سیٹ 2.1

1. متصلہ شکل دیکھیے۔ شکل میں زاویوں کے نام ایک حرف سے ظاہر کیے گئے ہیں اس کی مدد سے خالی چوکون پر کیجیے۔



نظیری زاویوں کی جوڑیاں

☐ $\angle p$ اور $\angle q$ (2) ☐ $\angle p$ اور $\angle r$ (1)

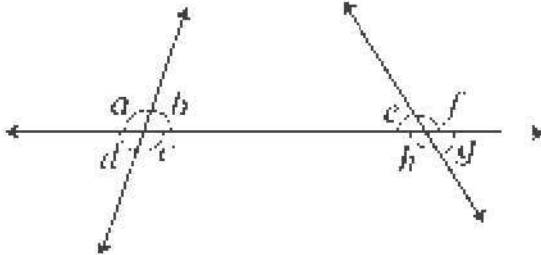
☐ $\angle s$ اور $\angle t$ (4) ☐ $\angle r$ اور $\angle s$ (3)

داخلی متبادلہ زاویوں کی جوڑیاں

☐ $\angle w$ اور $\angle s$ (6) ☐ $\angle s$ اور $\angle t$ (5)

2. متصلہ شکل میں دکھائے ہوئے زاویے دیکھیے۔

درج ذیل جوڑیوں کو ظاہر کرنے والے زاویے لکھیے۔



(1) داخلی متبادلہ زاویے

(2) نظیری زاویے

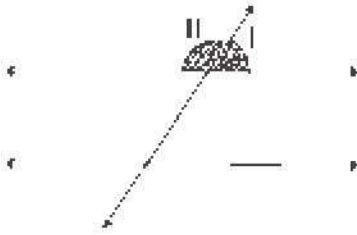
(3) داخلی زاویے

آئیے سمجھ لیں

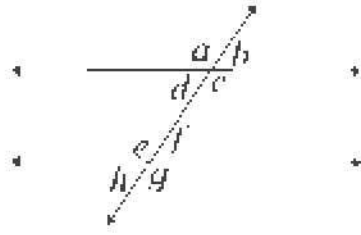
متوازی خطوط اور تقاطع کے ذریعے بننے والے زاویے اور ان کی خصوصیات :

(Properties of angles formed by two parallel lines and transversal)

عملی کام (1) ایک بیاض کے کاغذ پر شکل (A) میں دکھائے ہوئے کے مطابق دو متوازی خطوط کھینچیں اور ان کا تقاطع کھینچیں۔ ٹریسنگ کاغذ کی مدد سے اسی شکل کی ایک نقل ایک سادے کاغذ پر کھینچیں۔ شکل (B) میں دکھائے ہوئے کے مطابق حصہ I اور حصہ II کو مختلف رنگوں سے رنگیے ان دونوں حصوں کو قیچی سے کاٹیں۔



(B)



(A)

اسے ذہن نشین رکھیے کہ حصہ I اور حصہ II سے دکھائے ہوئے زاویے خطی جوڑی میں ہیں۔ اب حصہ I اور حصہ II کو شکل A میں آٹھوں زاویوں میں سے ہر زاویے پر رکھ کر دیکھیے۔

کون کون سے زاویوں سے حصہ I مکمل طور پر منطبق ہوتا ہے؟

کون کون سے زاویوں سے حصہ II مکمل طور پر منطبق ہوتا ہے؟

ایسا دکھائی دے گا کہ، $\angle b \cong \angle d \cong \angle f \cong \angle h$ ، کیونکہ یہ زاویے حصہ I سے منطبق ہوتے ہیں۔

$\angle a \cong \angle c \cong \angle e \cong \angle g$ ، کیوں کہ یہ زاویے حصہ II سے منطبق ہوتے ہیں۔

(1) $\angle a \cong \angle e$, $\angle b \cong \angle f$, $\angle c \cong \angle g$, $\angle d \cong \angle h$... (یہ نظیری زاویوں کی جوڑیاں ہیں)

(2) $\angle d \cong \angle f$, $\angle e \cong \angle c$... (یہ داخلی متبادل زاویوں کی جوڑیاں ہیں)

(3) $\angle a \cong \angle g$, $\angle b \cong \angle h$... (یہ خارجہ متبادل زاویوں کی جوڑیاں ہیں)

(4) $m\angle d + m\angle e = 180^\circ$, $m\angle c + m\angle f = 180^\circ$... (یہ داخلہ زاویوں کی جوڑیاں ہیں)

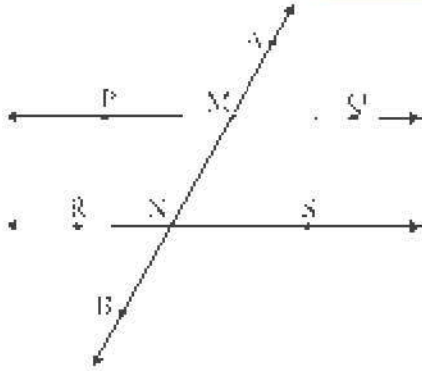
آئیے بحث کریں

دو متوازی خطوط کو ایک تقاطع سے قطع کرنے پر آٹھ زاویے بنتے ہیں۔

ان آٹھ زاویوں میں سے ایک زاویے کی پیمائش دی ہو تو کیا دیگر سات زاویوں کی پیمائش معلوم کی جاسکتی ہیں۔

آئیے سمجھ لیں

(1) نظیری زاویوں کی خصوصیت (Property of corresponding angles)



متوازی خطوط اور تقاطع کے ذریعے بننے والے نظیری زاویوں کی ہر جوڑی میں زاویے ایک دوسرے کے متماثل ہوتے ہیں۔
متصلہ شکل میں خط RS || خط PQ
خط AB اُن کا تقاطع ہے۔

نظیری زاویے

$$\angle AMP \cong \angle MNR, \angle PMN \cong \angle RNB$$

$$\angle AMQ \cong \angle MNS, \angle QMN \cong \angle SNB$$

(3) داخلہ زاویوں کی خصوصیت (Property of Internal angles)

داخلہ زاویے
متوازی خطوط اور تقاطع سے بننے والے داخلہ زاویوں کی ہر جوڑی میں زاویوں کی پیمائشوں کا مجموعہ 180° ہوتا ہے۔

$$m\angle PMN + m\angle MNR = 180^\circ$$

$$m\angle QMN + m\angle MNS = 180^\circ$$

(2) متبادلہ زاویوں کی خصوصیت (Property of alternate angles)

متوازی خطوط اور تقاطع سے بننے والے متبادلہ زاویوں کی ہر جوڑی میں زاویے ایک دوسرے کے متماثل ہوتے ہیں۔

خارجہ متبادلہ زاویے

$$\angle AMP \cong \angle SNB$$

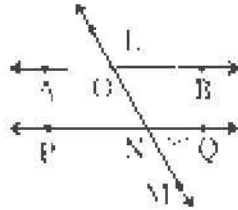
$$\angle AMQ \cong \angle RNB$$

داخلی متبادلہ زاویے

$$\angle PMN \cong \angle MNS$$

$$\angle QMN \cong \angle MNR$$

حل کردہ مثالیں



مثال (1) متصلہ شکل میں خط AB || خط PQ اور

خط LM تقاطع ہے۔ $m\angle MNQ = 70^\circ$ ہو تو

$\angle AON$ کی پیمائش معلوم کیجیے۔

طریقہ II

$$m\angle MNQ = 70^\circ$$

$$\therefore m\angle NOB = 70^\circ \quad \text{... (نظیری زاویے)}$$

$$m\angle AON + m\angle NOB = 180^\circ \quad \text{... (خطی جوڑی کے زاویے)}$$

$$\therefore m\angle AON + 70^\circ = 180^\circ$$

$$\therefore m\angle AON = 110^\circ$$

طریقہ I

حل :

$$m\angle MNQ = m\angle ONP = 70^\circ \quad \text{... (متقابلہ زاویے)}$$

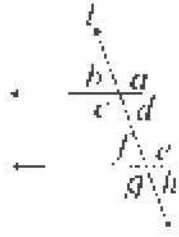
$$m\angle AON + m\angle ONP = 180^\circ \quad \text{... (داخلہ زاویے)}$$

$$\therefore m\angle AON = 180^\circ - m\angle ONP$$

$$= 180^\circ - 70^\circ$$

$$= 110^\circ$$

(مزید مختلف طرح سے غور و خوض کر کے مندرجہ بالا سوال حل کیا جاسکتا ہے)



مثال (2) متصلہ شکل میں خط $n \parallel m$ خط اور خط l تقاطع ہے۔

اگر $m\angle b = (x + 15)^\circ$ اور $m\angle e = (2x + 15)^\circ$ ہو تو x کی قیمت معلوم کیجیے۔

حل : $\angle b = \angle f \dots$ (نظیری زاویے) $\therefore m\angle f = m\angle b = (x + 15)^\circ$

(خطی جوڑی کے زاویے) $m\angle f + m\angle e = 180^\circ$

مساوات میں قیمت رکھ کر،

$$x + 15 + 2x + 15 = 180^\circ, \therefore 3x + 30 = 180^\circ$$

$$\therefore 3x = 180^\circ - 30^\circ \quad \dots \text{ (طرفین سے 30 تفریق کرنے پر)}$$

$$x = \frac{150}{3}$$

(طرفین کو 3 سے تقسیم دینے پر) $\dots$

$$\therefore x = 50^\circ$$

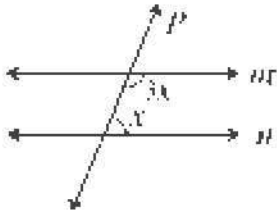
یہ میری سمجھ میں آگیا

دو متوازی خطوط کو ایک تقاطع سے قطع کرنے پر بننے والے زاویوں میں سے

نظیری زاویوں کی ہر جوڑی میں زاویے متماثل ہوتے ہیں۔ متبادل زاویوں کی ہر جوڑی میں زاویے متماثل ہوتے ہیں۔

داخلہ زاویوں کی ہر جوڑی میں زاویے ایک دوسرے کے مکمل ہوتے ہیں۔

مشقی سیٹ 2.2

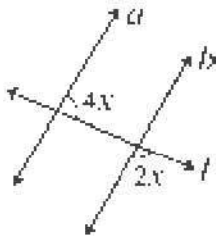


1. مناسب متبادل منتخب کیجیے۔

(1) متصلہ شکل میں اگر خط $n \parallel m$ خط ہو اور خط p ان کا تقاطع ہو تو

x کی قیمت کتنی ہے؟

- (A) 135° (B) 90° (C) 45° (D) 40°



(2) متصلہ شکل میں اگر خط $b \parallel a$ خط ہو اور خط l ان کا تقاطع ہو تو

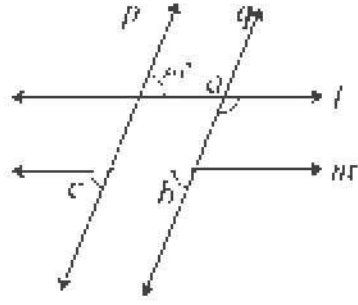
x کی قیمت کتنی ہے؟

- (A) 90° (B) 60° (C) 45° (D) 30°



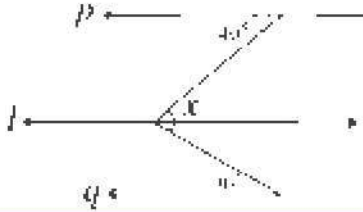
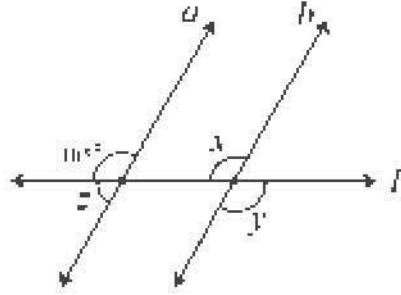
2. متصلہ شکل میں خط $q \parallel p$ خط ہے۔ خط t اور خط s تقاطع ہیں۔

دی ہوئی پیمائش کی مدد سے $\angle x$ اور $\angle y$ کی پیمائش معلوم کیجیے۔



3. متضہ شکل میں خط $q \parallel p$ خط p ہے۔ خط $m \parallel l$ خط l ہے۔
دیے ہوئے زاویے کی پیمائش کی مدد سے $\angle a$ ، $\angle b$ ، $\angle c$ کی پیمائش معلوم کیجیے، وجہ بھی لکھیے۔

- 4*. متضہ شکل میں خط $b \parallel a$ خط a اور خط l تقاطع ہے۔ دیے ہوئے زاویے کی پیمائش کی مدد سے $\angle x$ ، $\angle y$ ، $\angle z$ کی پیمائش معلوم کیجیے۔



- 5*. متضہ شکل میں خط $l \parallel q \parallel p$ خط p ہے اور دی ہوئی پیمائشوں کی مدد سے $\angle x$ کی پیمائش معلوم کیجیے۔

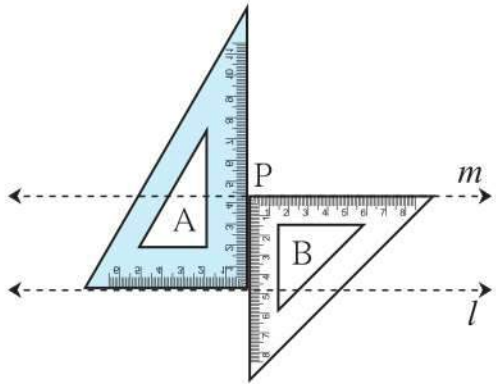
مزید معلومات کے لیے :

- ایک مستوی میں واقع دو خطوط کو ایک تقاطع سے قطع کرنے پر بننے والے —
- نظیری زاویوں کی ایک جوڑی متماثل ہو تو وہ خطوط متوازی ہوتے ہیں۔
- متبادلہ زاویوں کی ایک جوڑی متماثل ہو تو وہ خطوط متوازی ہوتے ہیں۔
- داخلہ زاویوں کی ایک جوڑی متمم ہو تو وہ خطوط متوازی ہوتے ہیں۔

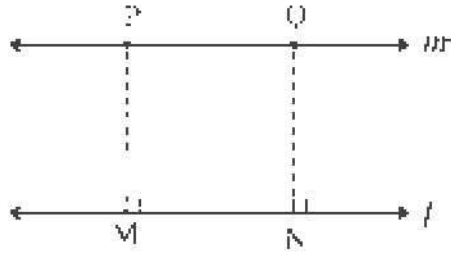
دیے ہوئے خط کے متوازی خط کھینچنا (To draw a line parallel to the given line)

عمل (I) : دیے ہوئے خط کے باہر واقع نقطہ سے گنیا کی مدد سے دیے ہوئے خط کے متوازی خط کھینچنا۔

طریقہ I : عمل کے مراحل



- (1) خط l کھینچیں۔
- (2) خط l کے باہر ایک نقطہ P لیجیے۔
- (3) شکل میں دکھائے ہوئے کے مطابق دو گنیا ایک دوسرے سے مس کر کے رکھیے۔ گنیا A اور B کو پکڑ کر رکھیے۔ گنیا B کا کنارہ نقطہ P پر ہے اس سرے (کنارے) پر خط کھینچیں۔
- (4) اس خط کو m نام دیجیے۔
- (5) خط m ، خط l کے متوازی ہے۔



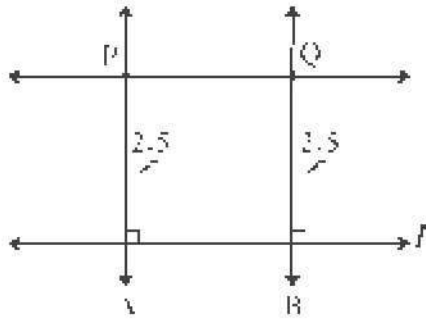
طریقہ II : عمل کے مراحل :

- (1) خط l کھینچیں۔ اس خط کے باہر ایک نقطہ P لیجیے۔
 - (2) نقطہ P سے خط l پر خط PM ایک عمود کھینچیں۔
 - (3) خط l پر ایک دوسرا نقطہ N لیجیے۔
 - (4) نقطہ N سے ایک عمودی خط NQ ، خط l پر کھینچیں۔
- اس طرح کہ $NQ = MP$

(5) نقاط P اور Q سے گزرنے والا خط m دیے ہوئے خط l کے متوازی ہے۔

عمل (III) : دیے ہوئے خط سے دیے ہوئے فاصلہ پر متوازی خط کھینچنا۔

طریقہ : خط l سے 2.5 سم فاصلے پر متوازی خط کھینچیں۔



عمل کے مراحل :

- (1) خط l کھینچیں۔
- (2) خط l پر A اور B دو نقاط لیجیے۔
- (3) نقطہ A اور نقطہ B سے خط l پر عمود کھینچیں۔
- (4) اس خط پر، نقطہ A اور نقطہ B سے 2.5 سم فاصلے پر نقطہ P اور نقطہ Q لیجیے۔
- (5) خط PQ کھینچیں۔
- (6) خط PQ ، خط l سے 2.5 سم فاصلے پر واقع متوازی خط ہے۔

مشقی سیٹ 2.3

1. خط l کھینچیں۔ اس خط کے باہر نقطہ A لیجیے۔ نقطہ A سے گزرنے والا اور خط l کے متوازی ایک خط کھینچیں۔
2. خط l کھینچیں۔ اس کے باہر نقطہ T لیجیے۔ نقطہ T سے گزرنے والا اور خط l کے متوازی ایک خط کھینچیں۔
3. خط m کھینچیں اور اس خط سے 4 سم فاصلے سے متوازی خط n کھینچیں۔

جوابات کی فہرست

- مشقی سیٹ 2.1
1. (1) $\angle w$ (2) $\angle x$ (3) $\angle y$ (4) $\angle z$ (5) $\angle x$ (6) $\angle r$
 2. (1) $\angle c$ اور $\angle e$, $\angle b$ اور $\angle h$ (2) $\angle a$ اور $\angle e$, $\angle b$ اور $\angle f$, $\angle c$ اور $\angle g$, $\angle d$ اور $\angle h$
 - (3) $\angle c$ اور $\angle h$, $\angle b$ اور $\angle e$

- مشقی سیٹ 2.2
1. (1) C (2) D
 2. $\angle x = 140^\circ$, $\angle y = 110^\circ$
 3. $\angle a = 100^\circ$, $\angle b = 80^\circ$, $\angle c = 80^\circ$
 4. $\angle x = 105^\circ$, $\angle y = 105^\circ$, $\angle z = 75^\circ$ 5. $\angle a = 70^\circ$



قوت نما اور جذر المکعب

3

آئیے ذرا یاد کریں



گزشتہ جماعت میں ہم نے قوت نما اور ان کے اصولوں کا مطالعہ کر چکے ہیں۔

• یہاں 2 اساس (قاعدہ) اور 5 قوت نما ہے۔ '2⁵' یہ قوت نمائی عدد ہے۔

• قوت نما کے اصول: m اور n صحیح اعداد ہوں تو

$$(i) a^m \times a^n = a^{m+n} \quad (ii) a^m \div a^n = a^{m-n} \quad (iii) (a \times b)^m = a^m \times b^m \quad (iv) a^0 = 1$$

$$(v) a^{-m} = \frac{1}{a^m} \quad (vi) (a^m)^n = a^{mn} \quad (vii) \left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m} \quad (viii) \left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\frac{b}{a}\right)^m$$

• قوت نماؤں کے اصول کا استعمال کر کے درج ذیل مثالوں میں خالی چوکوں کو مناسب عدد سے پر کیجیے۔

$$(i) 3^5 \times 3^2 = 3^{\square} \quad (ii) 3^7 \div 3^9 = 3^{\square} \quad (iii) (3^4)^5 = 3^{\square}$$

$$(iv) 5^{-3} = \frac{1}{5^{\square}} \quad (v) 5^0 = \square \quad (vi) 5^1 = \square$$

$$(vii) (5 \times 7)^2 = 5^{\square} \times 7^{\square} \quad (viii) \left(\frac{5}{7}\right)^3 = \frac{\square^3}{\square^3} \quad (ix) \left(\frac{5}{7}\right)^{-3} = \left(\frac{\square}{\square}\right)^3$$

آئیے سمجھ لیں



ناطق قوت نما والے اعداد کا مطلب (The number with rational index):

(I) کسی عدد کا قوت نما $\frac{1}{n}$ ہو تو ایسے ناطق عدد کا مطلب

اعداد کا قوت نما $\frac{1}{2}$ ، $\frac{1}{3}$ ، $\frac{1}{5}$ ، $\dots$ ، $\frac{1}{n}$ صورت میں ہو تو ایسے ناطق اعداد کا مطلب سمجھیں گے۔

کسی عدد کا مربع ظاہر کرنے کے لیے اس کا قوت نما 2 لکھتے ہیں اور عدد کے جذر المربع کو ظاہر کرنے کے لیے اس کی قوت نما $\frac{1}{2}$ لکھتے ہیں۔

مثلاً 25 کے جذر المربع کو '√' جذر کی علامت کا استعمال کر کے ہم لکھتے ہیں۔

$$\sqrt{25} = 25^{\frac{1}{2}} \quad \text{لہذا لکھتے ہیں۔}$$

عام طور پر عدد a کے مربع کو a^2 لکھتے ہیں تو a کے جذر المربع کو $\sqrt{a}$ یا $a^{\frac{1}{2}}$ لکھتے ہیں۔

اسی طرح عدد a کے مکعب کو a^3 لکھتے ہیں تو a کے جذر المکعب $\sqrt[3]{a}$ یا $a^{\frac{1}{3}}$ لکھتے ہیں۔

$$4^3 = 4 \times 4 \times 4 = 64 \text{ جیسے،}$$

∴ 64 کے جذور المکعب کو $\sqrt[3]{64}$ یا $(64)^{\frac{1}{3}}$ لکھتے ہیں۔ ذہن نشین رکھیے کہ $64^{\frac{1}{3}} = 4$

$$3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^5 = 243 \text{ یعنی 3 کی 5 ویں قوت 243 ہے۔}$$

اس کے برعکس 243 کے پانچویں جذور کو $(243)^{\frac{1}{5}}$ یا $\sqrt[5]{243}$ لکھتے ہیں۔

$$\therefore (243)^{\frac{1}{5}} = 3$$

عام طور پر a کے n ویں جذور کو $a^{\frac{1}{n}}$ لکھتے ہیں۔ مثلاً

$$(i) \quad 128^{\frac{1}{7}} = \text{جذر 7 کا 128}$$

$$(ii) \quad 900^{\frac{1}{12}} = \text{جذر 12 کا 900}$$

$$x^5 = 10 \text{ ہو تو } 10^{\frac{1}{5}} = x \text{ ذہن نشین رکھیے کہ}$$

مشقی سیٹ 3.1

1. قوت نما کا استعمال کر کے ذیل کے عدد لکھیے۔

$$(1) \quad 13 \text{ کا } 5 \text{ واں جذر} \quad (2) \quad 9 \text{ کا چھٹا جذر} \quad (3) \quad 256 \text{ کا جذر المربع}$$

$$(4) \quad 17 \text{ کا جذر المکعب} \quad (5) \quad 100 \text{ کا آٹھواں جذر} \quad (6) \quad 30 \text{ کا ساتواں جذر}$$

2. درج ذیل قوت نمائی عدد، کس عدد کا کون سا جذر ہے۔ اسے لکھیے۔

$$(1) \quad (81)^{\frac{1}{4}} \quad (2) \quad 49^{\frac{1}{2}} \quad (3) \quad (15)^{\frac{1}{5}} \quad (4) \quad (512)^{\frac{1}{9}} \quad (5) \quad 100^{\frac{1}{19}} \quad (6) \quad (6)^{\frac{1}{7}}$$

$$(I) \quad \text{کسی عدد کا قوت نما } \frac{m}{n} \text{ ہو تو ایسے ناطق عدد کا مطلب}$$

$$\text{ہم جانتے ہیں کہ، } 8^2 = 64$$

$$64 = (64)^{\frac{1}{3}} = (8^2)^{\frac{1}{3}} = 4 \text{ کا جذر المکعب}$$

$$\therefore 8 = 4 \text{ کے مربع کا جذر المکعب} \quad \dots (I) \quad \text{اسی طرح،}$$

$$8 = 8^{\frac{1}{3}} = 2 \text{ کا جذر المکعب}$$

$$\therefore 8 = \left(8^{\frac{1}{3}}\right)^2 = 2^2 = 4 \text{ کے جذر المکعب کا مربع} \quad \dots (II)$$

(I) اور (II) کی مدد سے،

$$8 \text{ کے جذر المکعب کا مربع } = 8 \text{ کے مربع کا جذر المکعب}$$

$$\text{یعنی } (8^2)^{\frac{1}{3}} = \left(8^{\frac{1}{3}}\right)^2 \text{ سمجھ میں آتا ہے۔}$$

قوت نما صحیح عدد ہو تو جو قوت نما کے اصول ہیں وہی اصول ناطق قوت نما والے اعداد کے لیے بھی ہیں۔

$$\text{اس لیے } (a^m)^n = a^{mn}, \text{ اصول استعمال کر کے } (8^2)^{\frac{1}{3}} = \left(8^{\frac{1}{3}}\right)^2 = 8^{\frac{2}{3}}$$

اس بنا پر $8^{\frac{2}{3}}$ کا مطلب دو طرح بتا سکتے ہیں۔

$$(i) \quad 8^{\frac{2}{3}} = (8^2)^{\frac{1}{3}} = \text{8 کے مربع کا جذر المکعب}$$

$$(ii) \quad 8^{\frac{2}{3}} = \left(8^{\frac{1}{3}}\right)^2 = \text{8 کے جذر المکعب کا مربع}$$

اسی طرح $27^{\frac{4}{5}} = (27^4)^{\frac{1}{5}}$ یعنی 27 کی چوتھی قوت کا پانچواں جذر اور $27^{\frac{4}{5}} = (27^{\frac{1}{5}})^4$ یعنی 27 کے 5 ویں جذر کی چوتھی قوت، اس طرح دو مطلب ہوتے ہیں۔

عام طور پر $a^{\frac{m}{n}}$ کا مطلب دو طرح سے ظاہر کیا جاسکتا ہے۔

$$a^{\frac{m}{n}} = (a^m)^{\frac{1}{n}} = \text{جذر } n \text{ واں } m \text{ کی } a$$

$$a \text{ کے } n \text{ ویں جذر کی } m \text{ ویں قوت } a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m \text{ 'یا'}$$

مشقی سیٹ 3.2

1. درج ذیل جدول مکمل کیجیے۔

نمبر شمار	عدد	کس جذر کی کون سی قوت	کس قوت کا کون سا جذر
(1)	$(225)^{\frac{3}{2}}$	225 کے جذر المربع کا مکعب	225 کے مکعب کا جذر المربع
(2)	$(45)^{\frac{4}{5}}$		
(3)	$(81)^{\frac{6}{7}}$		
(4)	$(100)^{\frac{4}{10}}$		
(5)	$(21)^{\frac{3}{7}}$		

2. ناطق قوت نما کی صورت میں ظاہر کیجیے۔

$$(1) \quad 121 \text{ کے پانچویں قوت کا جذر المربع} \quad (2) \quad 324 \text{ کے چوتھے جذر المربع کا مکعب}$$

$$(3) \quad 264 \text{ کے مربع کا پانچواں جذر} \quad (4) \quad 3 \text{ کے جذر المکعب کا مکعب}$$

آئیے ذرا یاد کریں



● $4 \times 4 = 16$ یعنی $4^2 = 16$ اسی طرح $(-4) \times (-4) = (-4)^2 = 16$ یعنی 16 کا ایک مثبت اور دوسرا منفی، یعنی دو جذر المربع ہیں۔

ایسا فرض کر لیا گیا ہے کہ 16 کا مثبت جذر المربع $\sqrt{16}$ اور 16 کا منفی جذر المربع $-\sqrt{16}$ سے ظاہر کرتے ہیں۔ $\sqrt{16} = 4$ اور $-\sqrt{16} = -4$

● ہر مثبت عدد کے دو جذر المربع ہوتے ہیں۔

● عدد صفر کا جذر المربع صفر ہوتا ہے۔

آئیے سمجھ لیں

مکعب اور جذر المکعب (Cube and Cube Root)

کسی عدد کو تین مرتبہ لے کر ان کی ضرب کریں تو حاصل ضرب، اس عدد کا مکعب ہوتا ہے۔ مثلاً $6 \times 6 \times 6 = 6^3$ یعنی 6 کا مکعب 216 ہے۔
ناطق اعداد کا مکعب کرنا :

مثال (1) : 17 کا مکعب کیجیے۔	مثال (2) : (-6) کا مکعب کیجیے۔	مثال (3) : $\left(-\frac{2}{5}\right)$ کا مکعب کیجیے۔
$17^3 = 17 \times 17 \times 17$	$(-6)^3 = (-6) \times (-6) \times (-6)$	$\left(-\frac{2}{5}\right)^3 = \left(-\frac{2}{5}\right) \times \left(-\frac{2}{5}\right) \times \left(-\frac{2}{5}\right)$
$= 4913$	$= -216$	$= -\frac{8}{125}$

مثال (4) : (1.2) کا مکعب کیجیے۔	مثال (5) : (0.02) کا مکعب کیجیے۔
$(1.2)^3 = 1.2 \times 1.2 \times 1.2$	$(0.02)^3 = 0.02 \times 0.02 \times 0.02$
$= 1.728$	$= 0.000008$

آئیے غور کریں

مثال (1) میں 17 مثبت عدد ہے۔ اس عدد کا مکعب 4913 بھی مثبت ہے۔
مثال (2) میں 6- کا مکعب -216 ہے۔ مزید کچھ مثبت اور منفی عدد لے کر ان کا مکعب کر کے دیکھیے۔ اس کی مدد سے کسی عدد کی علامت اور اس عدد کے مکعب کی علامت کے درمیان جو تعلق دکھائی دیتا ہے اسے معلوم کیجیے۔
مثال (4) اور (5) میں دیے ہوئے اعداد میں عشری علامت کے بعد آنے والے ہندسوں کی تعداد اور اس عدد کے مکعب میں آنے والی عشری علامت کے بعد کے ہندسوں کی تعداد میں کون سا تعلق پایا جاتا ہے؟

جذر المکعب معلوم کرنا

ہم دیے ہوئے عدد کے مفرد اجزائے ضربی کے طریقے سے جذر المربع معلوم کرنا سیکھ چکے ہیں،
اسی طریقے سے جذر المکعب معلوم کریں گے۔

مثال (1) : 216 کا جذر المکعب معلوم کیجیے۔

حل : پہلے 216 کے مفرد اجزائے ضربی معلوم کریں گے۔

$$216 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3$$

3 اور 2 جزو ضربی ہر ایک 3 مرتبہ آئے ہیں، لہذا ان کو ایک-ایک مرتبہ لے کر ذیل کے مطابق گروہ بنائیں گے۔

$$\therefore 216 = (3 \times 2) \times (3 \times 2) \times (3 \times 2) = (3 \times 2)^3 = 6^3$$

$$\therefore \sqrt[3]{216} = 6 \quad \text{یعنی} \quad (216)^{\frac{1}{3}} = 6$$

مثال (2): 1331 - کا جذر المکعب معلوم کیجیے۔

حل : 1331 - کا جذر المکعب معلوم کرنے کے لیے پہلے

1331 کا مفرد اجزائے ضربی معلوم کریں گے۔

$$1331 = 11 \times 11 \times 11 = 11^3$$

$$-1331 = (-11) \times (-11) \times (-11)$$

$$= (-11)^3$$

$$\therefore \sqrt[3]{-1331} = -11$$

مثال (3): 1728 کا جذر المکعب معلوم کیجیے۔

حل :

$$1728 = 8 \times 216 = 2 \times 2 \times 2 \times 6 \times 6 \times 6$$

$$\therefore 1728 = 2^3 \times 6^3 = (2 \times 6)^3 \quad \dots \quad a^m \times b^m = (a \times b)^m$$

$$\therefore \sqrt[3]{1728} = 2 \times 6 = 12$$

(ذہن نشین کیجیے کہ 1728 - کا جذر المکعب 12 - آتا ہے۔)

مشقی سیٹ 3.3

1. درج ذیل اعداد کا جذر المکعب معلوم کیجیے۔

- (1) 8000 (2) 729 (3) 343 (4) -512 (5) -2744 (6) 32768

2. حل کیجیے : (1) $\sqrt[3]{\frac{27}{125}}$ (2) $\sqrt[3]{\frac{16}{54}}$

3. اگر $\sqrt[3]{729} = 9$ ہو تو کتنا $\sqrt[3]{0.000729} = ?$

جوابات کی فہرست

مشقی سیٹ 3.1 : 1. (1) $13^{\frac{1}{5}}$ (2) $9^{\frac{1}{6}}$ (3) $256^{\frac{1}{2}}$ (4) $17^{\frac{1}{3}}$ (5) $100^{\frac{1}{8}}$ (6) $30^{\frac{1}{7}}$

2. (1) 15 کا پانچواں جذر (2) 49 کا جذر المربع (3) 81 کا چوتھا جذر

6 کا ساتواں جذر (4) 100 کا انیسواں جذر (5) 512 کا نوواں جذر

مشقی سیٹ 3.2 : 1. (2) 45 کے پانچویں جذر کی چوتھی قوت، 45 کی چوتھی قوت کا پانچواں جذر

(3) 81 کے ساتویں جذر کی چھٹی قوت، 81 کی چھٹی قوت کا ساتواں جذر

(4) 100 کے 10 ویں جذر کی چوتھی قوت، 100 کی چوتھی قوت کا دسواں جذر

(5) 21 کے ساتویں جذر کی تیسری قوت، 21 کی تیسری قوت کا ساتواں جذر

2. (1) $(121)^{\frac{5}{2}}$ (2) $(324)^{\frac{3}{4}}$ (3) $(264)^{\frac{2}{5}}$ (4) $3^{\frac{3}{2}}$

مشقی سیٹ 3.3 : 1. (1) 20 (2) 9 (3) 7 (4) -8 (5) -14 (6) 32

2. (1) $\frac{3}{5}$ (2) $\frac{2}{3}$ 3. 0.09



مثلث کا ارتفاع اور وسطانیہ

4

آئیے ذرا یاد کریں

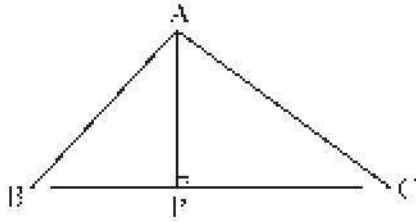


گذشتہ جماعت میں ہم مطالعہ کر چکے ہیں کہ مثلث کے تینوں زاویوں کے ناصف متراکز ہوتے ہیں، مثلث کے اضلاع کے عمودی ناصف متراکز ہوتے ہیں۔ ہمیں یہ بھی معلوم ہے کہ ان کے نقطہ تراکز کو بالترتیب داخلی مرکز اور حائل مرکز کہتے ہیں۔
عملی کام: ایک خط تمچینے۔ خط کے باہر کوئی بھی ایک نقطہ لیجیے۔ گنیے کی مدد سے اس نقطے سے خط پر عمود کھینچیے۔

آئیے سمجھ لیں

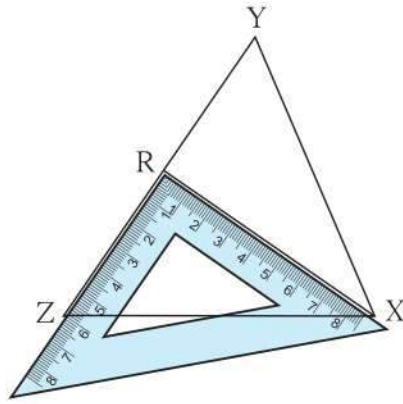


ارتفاع (Altitude)

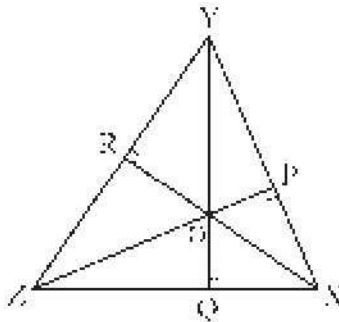


مثلث کے کسی بھی راس سے اس کے مقابل کے ضلع پر کھینچیے گئے عمودی قطعہ خط کو اس مثلث کا ارتفاع کہتے ہیں۔ $\triangle ABC$ میں قطعہ AP قاعدہ BC پر ارتفاع ہے۔

مثلث کا ارتفاع کھینچنا:



1. $\triangle XYZ$ کوئی ایک مثلث بنائیے۔
2. قاعدہ YZ کے مقابل کے راس X سے گنیاء کی مدد سے عمود تمچینے۔ وہ YZ کو جس مقام پر قطع کرتا ہے اس نقطہ کو R نام دیجیے۔ قطعہ XR، قاعدہ YZ پر ارتفاع ہے۔
3. قطعہ XZ کو قاعدہ تصور کریں اور اس کے مقابل کے راس Y سے قطعہ YZ پر عمود کھینچیں تب قطعہ $YQ \perp XZ$ قطعہ
4. خط XY کو قاعدہ لیں اور اس کے مقابل کے راس Z سے خط XY پر عمود کھینچیں تب قطعہ $ZP \perp XY$ قطعہ

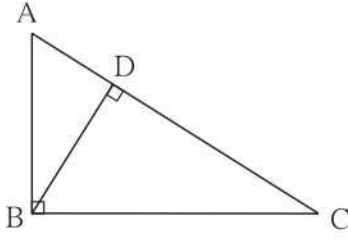


قطعہ XR، قطعہ YQ، قطعہ ZP یہ تینوں $\triangle XYZ$ کے ارتفاع ہیں۔

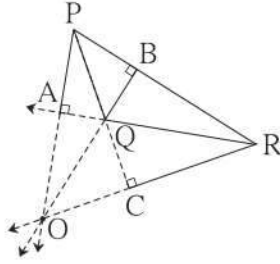
اسے ذہن نشین رکھیے کہ تینوں ارتفاع متراکز ہیں۔ اس نقطہ تراکز کو ارتفاعوں کا نقطہ تراکز یا ارتفاعی تراکز کہتے ہیں۔ ارتفاعی تراکز کو 'O' حرف سے ظاہر کرتے ہیں۔

مثلث کے ارتقاعی مرکز کا مقام :

عملی کام I :

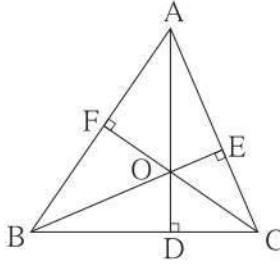


کوئی بھی ایک قائمہ الزاویہ مثلث بنائیے۔ اس کے تمام ارتقاع - منہجے۔ وہ کس نقطہ پر ملتے ہیں، اسے لکھیے۔



عملی کام II :

کوئی بھی ایک منفرجہ الزاویہ مثلث بنائیے۔ اس کے تینوں ارتقاع - منہجے۔ وہ ایک دوسرے کو کہاں ملتے ہیں؟ ان ارتقاعوں کو شامل کرنے والے خطوط - منہجے۔ اس بات کا مشاہدہ کیجیے کہ وہ مثلث کے بیرونی حصے میں واقع ایک نقطہ سے گزرتے ہیں۔



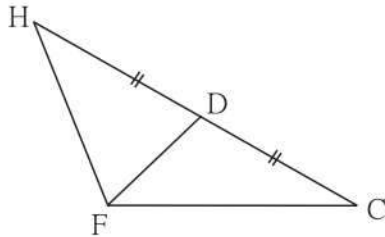
عملی کام III :

$\triangle ABC$ ایک حادہ الزاویہ مثلث بنائیے۔ اس کے تمام ارتقاع - منہجے۔ اس بات کا مشاہدہ کیجیے کہ ارتقاعی تراکز کا مقام کہاں ہے۔

یہ میری سمجھ میں آگیا

- مثلث کے ارتقاع ایک ہی نقطہ سے گزرتے ہیں یعنی ارتقاع متراکز (Concurrent) ہوتے ہیں۔ ان کے نقطہ تراکز کو ارتقاعی مرکز یا مرکز ارتقاع (Orthocenter) کہتے ہیں۔ اسے 'O' حرف سے ظاہر کرتے ہیں۔
- قائمہ الزاویہ مثلث کا نقطہ تراکز یعنی مرکز ارتقاع قائمہ زاویہ بنانے والے راس پر ہوتا ہے۔
- منفرجہ الزاویہ مثلث کا نقطہ تراکز یعنی مرکز ارتقاع اس مثلث کے بیرون میں واقع ہوتا ہے۔
- حادہ الزاویہ مثلث کا نقطہ تراکز یعنی مرکز ارتقاع مثلث کے اندرون میں واقع ہوتا ہے۔

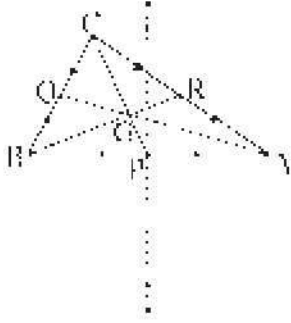
آئیے سمجھ لیں



وسطانیہ (Median)

مثلث کا راس اور مقابل کے ضلع کے وسطی نقطہ کو ملانے والے قطعہ خط کو مثلث کے اس ضلع کا وسطانیہ کہتے ہیں۔ $\triangle HCF$ میں قطعہ FD، ضلع HC کا وسطانیہ ہے۔

مثلث کا وسطانیہ کھینچنا :



1. $\triangle ABC$ بنائیے۔

2. ضلع AB کا وسطی نقطہ حاصل کیجیے اسے P نام دیجیے قطعہ CP۔

3. ضلع BC کا وسطی نقطہ حاصل کیجیے اسے Q نام دیجیے قطعہ AQ۔

4. ضلع AC کا وسطی نقطہ حاصل کیجیے اسے R نام دیجیے قطعہ BR۔

$\triangle ABC$ کے قطعہ CP، قطعہ AQ، قطعہ BR وسطانیے ہیں۔ ذہن نشین رکھیے کہ یہ متراکز

ہیں۔ ان کے نقطہ تراکز کو ہندی مرکز کہتے ہیں۔ اسے G حرف سے ظاہر کرتے ہیں۔

عملی کام IV : ایک قائمہ الزاویہ مثلث، ایک منفرجہ الزاویہ مثلث اور ایک حادہ الزاویہ مثلث بنا کر ان کے وسطانیے کھینچیے۔ مشاہدہ کیجیے کہ وہ متراکز ہیں۔

مثلث کے وسطانیوں کے ہندی مرکز کی خصوصیت :

● $\triangle ABC$ کوئی بھی ایک بڑا مثلث بنائیے۔

● $\triangle ABC$ کے قطعہ AR، قطعہ CP اور قطعہ BQ وسطانیے کھینچیے۔ ہندی مرکز کو G نام دیجیے۔

شکل میں قطعہات خط کی لمبائی ناپ کر جدول کے خالی چوکون پر کیجیے۔

$l(AG) = \square$	$l(GR) = \square$	$l(AG) : l(GR) = \square$
$l(BG) = \square$	$l(GQ) = \square$	$l(BG) : l(GQ) = \square$
$l(CG) = \square$	$l(GP) = \square$	$l(CG) : l(GP) = \square$

نتیجہ اخذ کیجیے کہ یہ تمام نسبتیں تقریباً 2 : 1 ہیں۔

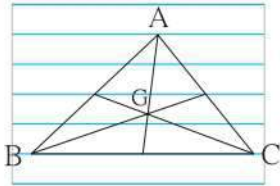
یہ میری سمجھ میں آ گیا

مثلث کے وسطانیے متراکز ہوتے ہیں۔ ان کے نقطہ تراکز کو ہندی مرکز (Centroid) کہتے ہیں۔ اسے G حرف سے ظاہر کرتے ہیں۔

کسی بھی مثلث میں G کا مقام مثلث کے اندرون میں واقع ہوتا ہے۔

نقطہ تراکز یعنی ہندی مرکز ہر وسطانیے کو 2 : 1 کی نسبت میں تقسیم کرتا ہے۔

آئیے بحث کریں

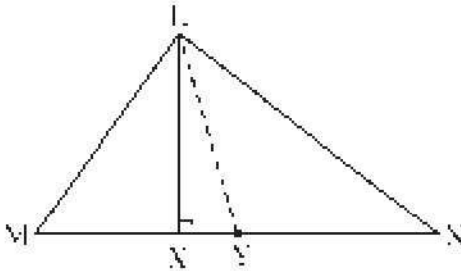


ایک طالب علم نے بیاض کے کاغذ پر پانچ متوازی خطوط کی مدد سے $\triangle ABC$ بنایا۔ متصلہ شکل

کے مطابق اس نے ہندی مرکز G معلوم کیا۔ بتائیے کہ اس نے G کا جو مقام معلوم کیا وہ کس

طرح صحیح ہے؟

مشقی سیٹ 4.1

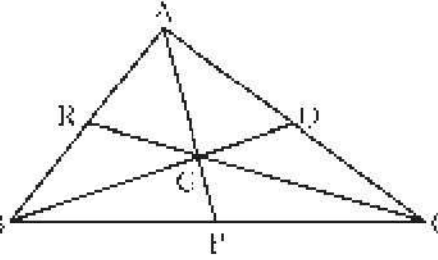
1.  1. $\triangle LMN$ میں ارتفاع ہے اور
وسطانیہ ہے۔
(خالی جگہ میں مناسب قطعہ خط کے نام لکھیے)
2. $\triangle PQR$ ایک حادہ الزاویہ مثلث بنائیے اور اس کے تینوں ارتفاع 'تھچے' - نقطہ تراکز کو 'O' نام دیجیے۔
3. $\triangle STV$ ایک منفرجہ الزاویہ مثلث بنائیے اور اس کے وسطانیہ کھینچ کر ہندسی مرکز بتائیے۔
4. $\triangle LMN$ ایک منفرجہ الزاویہ مثلث بنائیے اور اس کے تمام ارتفاع 'تھچے' - نقطہ تراکز کو 'O' نام دیجیے۔
5. $\triangle XYZ$ ایک قائمہ الزاویہ مثلث بنائیے اس کے وسطانیہ 'تھچے' اور نقطہ تراکز کو 'G' سے ظاہر کیجیے۔
6. کوئی بھی ایک متساوی الساقین مثلث 'تھچے' - اس کے تمام وسطانیہ اور تمام ارتفاع 'تھچے' - ان کے نقطہ تراکز کے بارے میں اپنا مشاہدہ درج کیجیے۔
7. خالی جگہ پر کیجیے۔

$\triangle ABC$ کا G ہندسی مرکز ہے۔

اگر $l(RG) = 2.5$ ہو تو $l(GC) = \dots\dots\dots$

اگر $l(BG) = 6$ ہو تو $l(BQ) = \dots\dots\dots$

اگر $l(AP) = 6$ ہو تو $l(AG) = \dots\dots\dots$ اور $l(GP) = \dots\dots\dots$



- (I) کوئی بھی ایک متساوی الاضلاع مثلث بنائیے۔ اس مثلث کا حائظ مرکز (C)، داخلی مرکز (I)، ہندسی مرکز (G) اور ارتفاعی مرکز (O) معلوم کیجیے۔ مشاہدات درج کیجیے۔
- (II) کوئی بھی ایک متساوی الساقین مثلث بنائیے۔ دیکھیے کہ اس کے ہندسی مرکز، ارتفاعی مرکز، حائظ مرکز اور داخلی مرکز ہم خطی ہیں۔ اس کی تصدیق کیجیے۔

جوابات کی فہرست

مشقی سیٹ 4.1 : 1. قطعہ LX اور قطعہ LY 7. (1) 5 (2) 9 (3) 4, 2



آئیے ذرا یاد کریں



گذشتہ جماعت میں ہم درج ذیل توسیقی ضابطوں کا مطالعہ کر چکے ہیں۔

(i) $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, (ii) $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

(iii) $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

مذکورہ بالا ضابطوں کا استعمال کر کے درج ذیل خالی چوکوں میں مناسب رکن لکھیے۔

(i) $(x + 2y)^2 = x^2 + \boxed{} + 4y^2$

(ii) $(2x - 5y)^2 = \boxed{} - 20xy + \boxed{}$

(iii) $(101)^2 = (100 + 1)^2 = \boxed{} + \boxed{} + 1^2 = \boxed{}$

(iv) $(98)^2 = (100 - 2)^2 = 10000 - \boxed{} + \boxed{} = \boxed{}$

(v) $(5m + 3n)(5m - 3n) = \boxed{} - \boxed{} = \boxed{} - \boxed{}$

آئیے سمجھ لیں



عملی کام: مستطیل اور مربع کے رقبوں کی مدد سے $(x + a)(x + b)$ کی توسیع کیجیے۔

	x	b
x	x^2	xb
a	ax	ab

 $= x \begin{matrix} x \\ \boxed{} \\ x \end{matrix} + a \begin{matrix} \boxed{} \\ x \end{matrix} + \begin{matrix} \boxed{} \\ b \end{matrix} x + a \begin{matrix} \boxed{} \end{matrix}$

$(x + a)(x + b) = x^2 + ax + bx + ab$

$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$

[Expansion of $(x + a)(x + b)$]: کی توسیع (I)

یہ ایک مساوی متغیر کی دو رکنیاں ہیں۔ ان دو رکنیوں کا ضرب کریں گے۔

$(x + a)(x + b) = x(x + b) + a(x + b) = x^2 + bx + ax + ab$

$= x^2 + (a + b)x + ab$

$\therefore (x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$

مثال (1) $(x + 2)(x + 3) = x^2 + (2 + 3)x + (2 \times 3) = x^2 + 5x + 6$

مثال (2) $(y + 4)(y - 3) = y^2 + (4 - 3)y + (4) \times (-3) = y^2 + y - 12$

مثال (3) $(2a + 3b)(2a - 3b) = (2a)^2 + [(3b) + (-3b)]2a + [3b \times (-3b)]$
 $= 4a^2 + 0 \times 2a - 9b^2 = 4a^2 - 9b^2$

مثال (4) $\left(m + \frac{3}{2}\right)\left(m + \frac{1}{2}\right) = m^2 + \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\right)m + \frac{3}{2} \times \frac{1}{2} = m^2 + 2m + \frac{3}{4}$

مثال (5) $(x - 3)(x - 7) = x^2 + (-3 - 7)x + (-3)(-7) = x^2 - 10x + 21$

مشقی سیٹ 5.1

1. توسیع کیجیے :

(1) $(a + 2)(a - 1)$

(2) $(m - 4)(m + 6)$

(3) $(p + 8)(p - 3)$

(4) $(13 + x)(13 - x)$

(5) $(3x + 4y)(3x + 5y)$

(6) $(9x - 5t)(9x + 3t)$

(7) $\left(m + \frac{2}{3}\right)\left(m - \frac{7}{3}\right)$

(8) $\left(x - \frac{1}{3}\right)\left(x - \frac{1}{6}\right)$

(9) $\left(\frac{1}{2} + 4\right)\left(\frac{1}{3} - 9\right)$



(II) $(a + b)^3$ کی توسیع [Expansion of $(a + b)^3$]

$$\begin{aligned}(a + b)^3 &= (a + b)(a + b)(a + b) = (a + b)(a + b)^2 \\&= (a + b)(a^2 + 2ab + b^2) \\&= a(a^2 + 2ab + b^2) + b(a^2 + 2ab + b^2) \\&= a^3 + 2a^2b + ab^2 + ba^2 + 2ab^2 + b^3 \\&= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3\end{aligned}$$

∴ $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

اس توسیعی ضابطے کا استعمال کر کے حل کردہ کچھ مثالوں کا مطالعہ کریں گے۔

مثال 1: $(x + 3)^3$

ہم جانتے ہیں کہ $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

یہاں $a = x$ اور $b = 3$ ہے۔

$$\therefore (x + 3)^3 = (x)^3 + 3 \times x^2 \times 3 + 3 \times x \times (3)^2 + (3)^3$$

$$= x^3 + 9x^2 + 27x + 27$$

(2) مثال $(3x + 4y)^3 = (3x)^3 + 3(3x)^2(4y) + 3(3x)(4y)^2 + (4y)^3$

$$= 27x^3 + 3 \times 9x^2 \times 4y + 3 \times 3x \times 16y^2 + 64y^3$$

$$= 27x^3 + 108x^2y + 144xy^2 + 64y^3$$

(3) مثال $\left(\frac{2m}{n} + \frac{n}{2m}\right)^3 = \left[\frac{2m}{n}\right]^3 + 3\left[\frac{2m}{n}\right]^2\left[\frac{n}{2m}\right] + 3\left[\frac{2m}{n}\right]\left[\frac{n}{2m}\right]^2 + \left[\frac{n}{2m}\right]^3$

$$= \frac{8m^3}{n^3} + 3\left[\frac{4m^2}{n^2} \times \frac{n}{2m}\right] + 3\left[\frac{2m}{n} \times \frac{n^2}{4m}\right] + \frac{n^3}{8m^3}$$

$$= \frac{8m^3}{n^3} + \frac{6m}{n} + \frac{3n}{2m} + \frac{n^3}{8m^3}$$

(4) مثال $(41)^3 = (40 + 1)^3 = (40)^3 + 3 \times (40)^2 \times 1 + 3 \times 40 \times (1)^2 + (1)^3$

$$= 64000 + 4800 + 120 + 1 = 68921$$

مشقی سیٹ 5.2

1. توسیع کیجیے۔

(1) $(k + 4)^3$ (2) $(3x + 8y)^3$ (3) $(7 + m)^3$ (4) $(52)^3$

(5) $(101)^3$ (6) $\left(x + \frac{1}{x}\right)^3$ (7) $\left(2m + \frac{1}{9}\right)^3$ (8) $\left(\frac{5x}{y} + \frac{y}{5x}\right)^3$

عملی کام : a اور b مناسب لمبائی کے کناروں (ضلع) والا ہر ایک کا ایک مکعب بنائیے۔ لمبائی اور چوڑائی دونوں a اور اونچائی b والے 3 مستطیلی منشور (مکعب نما)، اسی طرح لمبائی اور چوڑائی دونوں b اور اونچائی a والے 3 مستطیلی منشور بنائیے۔ ان اجسام کو مناسب ترتیب دے کر $(a + b)$ ضلع والا ایک مکعب تیار کیجیے۔

آئیے سمجھ لیں

(III) $(a - b)^3$ کی توسیع [Expansion of $(a - b)^3$]

$$(a - b)^3 = (a - b)(a - b)(a - b) = (a - b)(a - b)^2$$

$$= (a - b)(a^2 - 2ab + b^2)$$

$$= a(a^2 - 2ab + b^2) - b(a^2 - 2ab + b^2)$$

$$= a^3 - 2a^2b + ab^2 - a^2b + 2ab^2 - b^3$$

$$= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$\therefore (a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

مثال 1: توسیع کیجیے $(x - 2)^3$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

ہم جانتے ہیں کہ

یہاں $a = x$ اور $b = 2$ لے کر

$$(x - 2)^3 = (x)^3 - 3 \times x^2 \times 2 + 3 \times x \times (2)^2 - (2)^3$$

$$= x^3 - 6x^2 + 12x - 8$$

مثال 2: $(4p - 5q)^3$ کی توسیع کیجیے۔

$$(4p - 5q)^3 = (4p)^3 - 3(4p)^2(5q) + 3(4p)(5q)^2 - (5q)^3$$

$$(4p - 5q)^3 = 64p^3 - 240p^2q + 300pq^2 - 125q^3$$

مثال 3: توسیعی ضابطے کا استعمال کر کے 99 کا مکعب معلوم کیجیے۔

$$(99)^3 = (100 - 1)^3$$

$$(99)^3 = (100)^3 - 3 \times (100)^2 \times 1 + 3 \times 100 \times (1)^2 - 1^3$$

$$= 1000000 - 30000 + 300 - 1 = 9,70,299$$

مثال 4: آسان کیجیے۔

$$(i) (p + q)^3 + (p - q)^3$$

$$= p^3 + 3p^2q + 3pq^2 + q^3 + p^3 - 3p^2q + 3pq^2 - q^3$$

$$= 2p^3 + 6pq^2$$

$$(ii) (2x + 3y)^3 - (2x - 3y)^3$$

$$= [(2x)^3 + 3(2x)^2(3y) + 3(2x)(3y)^2 + (3y)^3]$$

$$- [(2x)^3 - 3(2x)^2(3y) + 3(2x)(3y)^2 - (3y)^3]$$

$$= (8x^3 + 36x^2y + 54xy^2 + 27y^3) - (8x^3 - 36x^2y + 54xy^2 - 27y^3)$$

$$= 8x^3 + 36x^2y + 54xy^2 + 27y^3 - 8x^3 + 36x^2y - 54xy^2 + 27y^3$$

$$= 72x^2y + 54y^3$$

یہ میری سمجھ میں آگیا



$$(i) (a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$$

$$(ii) (a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a - b)$$

مشقی سیٹ 5.3

1. توسیع کیجیے۔

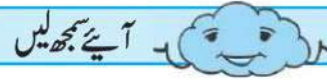
$$(1) (2m - 5)^2 \quad (2) (4 - p)^2 \quad (3) (7x - 9y)^2 \quad (4) (58)^2$$

$$(5) (198)^2 \quad (6) \left(2p - \frac{1}{2p} \right)^2 \quad (7) \left(1 - \frac{1}{a} \right)^2 \quad (8) \left(\frac{x}{3} - \frac{3}{x} \right)^2$$

2. مختصر کیجیے۔

$$(1) (2a + b)^2 - (2a - b)^2 \quad (2) (3r - 2k)^2 + (3r + 2k)^2$$

$$(3) (4a - 3)^2 - (4a + 3)^2 \quad (4) (5x - 7y)^2 + (5x + 7y)^2$$



(IV) $(a + b + c)^2$ کی توسیع [Expansion of $(a + b + c)^2$]

$$\begin{aligned} (a + b + c)^2 &= (a + b + c) \times (a + b + c) \\ &= a(a + b + c) + b(a + b + c) + c(a + b + c) \\ &= a^2 + ab + ac + ab + b^2 + bc + ac + bc + c^2 \\ &= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac \end{aligned}$$

$$\therefore (a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$$

ضابطہ حاصل ہوتا ہے۔

مثال 1: $(p + q + 3)^2$ کی توسیع کیجیے۔

$$\begin{aligned} &= p^2 + q^2 + (3)^2 + 2 \times p \times q + 2 \times q \times 3 + 2 \times p \times 3 \\ &= p^2 + q^2 + 9 + 2pq + 6q + 6p = p^2 + q^2 + 2pq + 6q + 6p + 9 \end{aligned}$$

مثال 2: مربعی توسیع کے مرحلوں کے چوکونوں میں مناسب رکن لکھیے۔

$$\begin{aligned} (2p + 3m + 4n)^2 &= (2p)^2 + (3m)^2 + \boxed{} + 2 \times 2p \times 3m + 2 \times \boxed{} \times 4n + 2 \times 2p \times \boxed{} \\ &= \boxed{} + 9m^2 + \boxed{} + 12pm + \boxed{} + \boxed{} \end{aligned}$$

مثال 3: مختصر کیجیے۔

$$\begin{aligned} (l + 2m + n)^2 + (l - 2m + n)^2 &= l^2 + 4m^2 + n^2 + 4lm + 4mn + 2ln + l^2 + 4m^2 + n^2 - 4lm - 4mn + 2ln \\ &= 2l^2 + 8m^2 + 2n^2 + 4ln \end{aligned}$$

مشقی سیٹ 5.4

1. توسیع کیجیے۔
 (1) $(2p + q + 5)^2$ (2) $(m + 2n + 3r)^2$
 (3) $(3x + 4y - 5p)^2$ (4) $(7m - 3n - 4k)^2$
2. مختصر کیجیے۔
 (1) $(x - 2y + 3)^2 + (x + 2y - 3)^2$
 (2) $(3k - 4r - 2m)^2 - (3k + 4r - 2m)^2$ (3) $(7a - 6b + 5c)^2 + (7a + 6b - 5c)^2$

جوابات کی فہرست

- 5.1 مشقی سیٹ**
- (1) $a + a - 2$ (2) $m^2 + 2m - 24$ (3) $p^2 + 5p - 24$
 (4) $16y^2 - x^2$ (5) $9x^2 + 27xy + 20y^2$ (6) $81x^2 - 18xy - 15y^2$
 (7) $m^2 - \frac{5}{3}m - \frac{14}{9}$ (8) $x^2 - \frac{1}{x}$ (9) $\frac{1}{y^2} - \frac{5}{y} - 36$
- 5.2 مشقی سیٹ**
- (1) $k^3 + 12k^2 + 48k + 64$ (2) $343x^3 + 1176x^2y + 1344xy^2 + 512y^3$
 (3) $343 + 147m + 21m^2 + m^3$ (4) 140608 (5) 1030301
 (6) $x^3 + 3x + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^3}$ (7) $8m^3 + \frac{12m^2}{5} - \frac{6m}{25} + \frac{1}{125}$
 (8) $\frac{125x}{y^3} + \frac{15x}{y^2} + \frac{3y}{5x} + \frac{y^3}{125}$
- 5.3 مشقی سیٹ**
1. (1) $8m^3 - 60m^2 + 150m - 125$ (2) $64 - 48p + 12p^2 - p^3$
 (3) $343x^3 - 1323x^2y + 1701xy^2 - 729y^3$ (4) $1,95,112$
 (5) $771,62,392$ (6) $8p^3 - 6p + \frac{1}{2p} - \frac{1}{8p}$
 (7) $1 - \frac{3}{a} + \frac{3}{a^2} - \frac{1}{a^3}$ (8) $\frac{x^3}{27} - x + \frac{9}{x} - \frac{27}{x^3}$
2. (1) $24a^2b + 2b$ (2) $54r^2 + 72rk^2$
 (3) $-288a^2 - 54$ (4) $250x^3 + 1470xy^2$
- 5.4 مشقی سیٹ**
1. (1) $4p^2 + q^2 + 25 + 4pq + 10q + 20p$
 (2) $m^2 + 4n^2 + 9r^2 + 4mn + 12mr + 6nr$
 (3) $9x^2 + 16y^2 + 25p^2 + 24xy - 40py - 30px$
 (4) $49m^2 + 9n^2 + 16k^2 - 42mn + 24nk - 56km$
2. (1) $2x^2 + 8y^2 + 18 - 24xy$ (2) $32em - 48kr$
 (3) $98a^2 + 72b^2 + 50c^2 - 120bc$



الجبری عبارتوں کے اجزائے ضربی

6

آئیے ذرا یاد کریں



گذشتہ جماعت میں ہم $ax + by$ اور $a^2 - b^2$ کی نوعیت والی الجبری عبارتوں کے اجزائے ضربی کا مطالعہ کر چکے ہیں۔

مثلاً (1) $4xy + 8xy^2 = 4xy(1 + 2y)$

(2) $p^2 - 9q^2 = (p)^2 - (3q)^2 = (p + 3q)(p - 3q)$

آئیے سمجھ لیں



مربعی سرکئی کے اجزائے ضربی (Factors of Quadratic Trinomial) :

$ax^2 + bx + c$ نوعیت کی الجبری عبارت کو مربعی سرکئی کہتے ہیں۔

ہم جانتے ہیں کہ $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$

اس لیے $x^2 + (a + b)x + ab$ کے $(x + a)$ اور $(x + b)$ جزو ضربی ہیں۔

سرکئی $x^2 + 5x + 6$ کے اجزائے ضربی معلوم کرنے کے لیے اس کا موازنہ سرکئی $x^2 + (a + b)x + ab$ سے کرنے پر $a + b = 5$ اور $ab = 6$ آتا ہے۔ لہذا 6 کے ایسے دو جزو ضربی کریں گے کہ ان کی جمع 5 آئے اور سرکئی کو $x^2 + (a + b)x + ab$ کی صورت میں لکھ کر اس کا اجزائے ضربی معلوم کریں گے۔

$x^2 + 5x + 6 = x^2 + (3 + 2)x + 3 \times 2$... [$\because x^2 + (a + b)x + ab$]

[$(3 + 2)$ کو x سے ضرب کرنے پر حاصل ہونے والے 4 ارکان کے دو گروہ بتائیں گے اور اجزائے ضربی حاصل کریں گے]

$= x^2 + 3x + 2x + 2 \times 3$

$= x(x + 3) + 2(x + 3) = (x + 3)(x + 2)$

(دی ہوئی مربعی سرکئی کے اجزائے ضربی کرنے کے طریقے کو سمجھنے کے لیے ذیل کی مثالوں کا مطالعہ کیجیے)

مثال 1 : $2x^2 - 9x + 9$ کے اجزائے ضربی کیجیے۔

حل : مربعی رکن کے ضربی اور مستقل رکن کا ضرب کریں گے۔ ان کا حاصل ضرب $2 \times 9 = 18$ ہے۔

اب 18 کے دو جزو ضربی معلوم کریں گے کہ ان کی جمع درمیانی رکن کے ضربی کے برابر یعنی -9 آئے۔

$$\begin{aligned} 2x^2 - 9x + 9 &= \frac{2x^2 - 6x - 3x + 9}{2x(x - 3) - 3(x - 3)} \\ &= \frac{2x^2 - 6x - 3x + 9}{2x(x - 3) - 3(x - 3)} \\ &= (x - 3)(2x - 3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 18 &= (-6) \times (-3) ; (-6) + (-3) = -9 \\ \text{رکن } -9x &\text{ کو } -6x - 3x \text{ لکھیں گے۔} \\ (x - 3) &\text{ مشترک جزو نکالیں گے۔} \end{aligned}$$

$\therefore 2x^2 - 9x + 9 = (x - 3)(2x - 3)$

مثال 2: $2x^2 + 5x - 18$ کے اجزائے ضربی معلوم کیجیے۔

حل: $2x^2 + 5x - 18$

$$= \frac{2x^2 + 9x}{-4x - 18}$$

$$= x(2x + 9) - 2(2x + 9)$$

$$= (2x + 9)(x - 2)$$

مثال 3: $x^2 - 10x + 21$ کے اجزائے ضربی معلوم کیجیے۔

حل: $x^2 - 10x + 21$

$$= \frac{x^2 - 7x}{-3x + 21}$$

$$= x(x - 7) - 3(x - 7)$$

$$= (x - 7)(x - 3)$$

مثال 4: $2y^2 - 4y - 30$ کے اجزائے ضربی کیجیے۔

حل: $2y^2 - 4y - 30$

$$= 2(y^2 - 2y - 15)$$

(تمام ارکان سے 2 مشترک جزو ضربی نکال کر) ...

$$= 2(y^2 - 5y + 3y - 15)$$

$$\dots \frac{-15}{+3}$$

$$= 2[y(y - 5) + 3(y - 5)]$$

$$= 2(y - 5)(y + 3)$$

مشقی سیٹ 6.1

1. اجزائے ضربی کیجیے۔

(1) $x^2 + 9x + 18$

(2) $x^2 - 10x + 9$

(3) $y^2 + 24y + 144$

(4) $5y^2 + 5y - 10$

(5) $p^2 - 2p - 35$

(6) $p^2 - 7p - 44$

(7) $m^2 - 23m + 120$

(8) $m^2 - 25m + 100$

(9) $3x^2 + 14x + 15$

(10) $2x^2 + x - 45$

(11) $20x^2 - 26x + 8$

(12) $44x^2 - x - 3$



$a^3 + b^3$ کے اجزائے ضربی (Factors of $a^3 + b^3$):

ہم جانتے ہیں کہ، $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

دائیں جانب کی عبارت سے $3ab$ مشترک نکال کر اس توسیعی ضابطے کی ترتیب ذیل کے مطابق کر سکتے ہیں۔

$$(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$$

(طرفین کی اول بدل کر کے) ... $a^3 + b^3 + 3ab(a + b) = (a + b)^3$

$$\therefore a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b) = [(a + b)(a + b)^2] - 3ab(a + b)$$

$$= (a + b)[(a + b)^2 - 3ab] = (a + b)(a^2 + 2ab + b^2 - 3ab)$$

$$= (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$\therefore \boxed{a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)}$$

دو مکعبوں کی جمع کے اجزائے ضربیوں کے مذکورہ بالا ضابطے کا استعمال کر کے کچھ مثالیں حل کریں گے۔

$$\begin{aligned} \text{مثال (1)} \quad x^3 + 27y^3 &= x^3 + (3y)^3 \\ &= (x + 3y) [x^2 - x(3y) + (3y)^2] \\ &= (x + 3y) [x^2 - 3xy + 9y^2] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{مثال (2)} \quad 8p^3 + 125q^3 &= (2p)^3 + (5q)^3 = (2p + 5q) [(2p)^2 - 2p \times 5q + (5q)^2] \\ &= (2p + 5q) (4p^2 - 10pq + 25q^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{مثال (3)} \quad m^3 + \frac{1}{64n^3} &= m^3 + \left(\frac{1}{4n}\right)^3 = \left(m + \frac{1}{4n}\right) \left[m^2 - m \times \frac{1}{4n} + \left(\frac{1}{4n}\right)^2\right] \\ &= \left(m + \frac{1}{4n}\right) \left[m^2 - \frac{1}{4} + \frac{1}{16n^2}\right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{مثال (4)} \quad 250p^3 + 432q^3 &= 2(125p^3 + 216q^3) \\ &= 2[(5p)^3 + (6q)^3] = 2(5p + 6q) (25p^2 - 30pq + 36q^2) \end{aligned}$$

مشقی سیٹ 6.2

1. اجزائے ضربی کیجیے۔

- (1) $x^3 + 64y^3$ (2) $125p^3 + q^3$ (3) $125k^3 + 27m^3$ (4) $2f^3 + 432m^3$
 (5) $24a^3 + 81b^3$ (6) $x^3 + \frac{1}{8y^3}$ (7) $a^3 + \frac{8}{a^3}$ (8) $1 + \frac{q^3}{125}$

آئیے سمجھ لیں

$a^3 - b^3$ کے اجزائے ضربی (Factors of $a^3 - b^3$) :

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a - b);$$

$$\text{اب، } a^3 - b^3 - 3ab(a - b) = (a - b)^3$$

$$\begin{aligned} \therefore a^3 - b^3 &= (a - b)^3 + 3ab(a - b) \\ &= [(a - b)(a - b)^2 + 3ab(a - b)] \\ &= (a - b) [(a - b)^2 + 3ab] \\ &= (a - b) (a^2 - 2ab + b^2 + 3ab) \\ &= (a - b) (a^2 + ab + b^2) \end{aligned}$$

$$\therefore \boxed{a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)}$$

دو مکعبوں کی تفریق کے اجزائے ضربی کے ضابطے کا استعمال کر کے کچھ عبارتوں کے اجزائے ضربی کریں گے۔

مثال (1) $x^3 - 8y^3 = x^3 - (2y)^3$

$$\therefore x^3 - 8y^3 = x^3 - (2y)^3$$

$$= (x - 2y)(x^2 + 2xy + 4y^2)$$

مثال (2) $27p^3 - 125q^3 = (3p)^3 - (5q)^3 = (3p - 5q)(9p^2 + 15pq + 25q^2)$

مثال (3) $54p^3 - 250q^3 = 2[27p^3 - 125q^3] = 2[(3p)^3 - (5q)^3]$

$$= 2(3p - 5q)(9p^2 + 15pq + 25q^2)$$

مثال (4) $a^3 - \frac{1}{a^3} = \left(a - \frac{1}{a}\right)\left(a^2 + 1 + \frac{1}{a^2}\right)$

مثال (5) مختصر کیجیے۔ $(a - b)^3 - (a^3 - b^3)$

حل : $(a - b)^3 - (a^3 - b^3) = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 - a^3 + b^3 = -3a^2b + 3ab^2$

مثال (6) مختصر کیجیے۔ $(2x + 3y)^3 - (2x - 3y)^3$

حل : فرض کیجیے $2x - 3y = b$ اور $2x + 3y = a$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$\therefore (2x + 3y)^3 - (2x - 3y)^3$$

$$= [(2x + 3y) - (2x - 3y)][(2x + 3y)^2 + (2x + 3y)(2x - 3y) + (2x - 3y)^2]$$

$$= [2x + 3y - 2x + 3y][4x^2 + 12xy + 9y^2 + 4x^2 - 9y^2 + 4x^2 - 12xy + 9y^2]$$

$$= 6y(12x^2 + 9y^2) = 72x^2y + 54y^3$$

یہ میری سمجھ میں آ گیا

(i) $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ (ii) $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

مشقی سیٹ 6.3

1. اجزائے ضربی کیجیے۔

(1) $x^3 - 27$ (2) $x^3 - 64y^3$ (3) $27m^3 - 216n^3$ (4) $125x^3 - 1$

(5) $8p^3 - \frac{27}{p^3}$ (6) $343a^3 - 512b^3$ (7) $64x^3 - 729y^3$ (8) $16a^3 - \frac{128}{b^3}$

2. مختصر کیجیے۔ (1) $(x + y)^3 - (x - y)^3$ (2) $(3a + 5b)^3 - (3a - 5b)^3$

(3) $(a + b)^3 - a^3 - b^3$ (4) $p^3 - (p + 1)^3$

(5) $(3xy - 2ab)^3 - (3xy + 2ab)^3$

ناطق الجبری عبارتیں یا الجبری عبارتوں کی نسبت (Rational Algebraic Expressions) :

A اور B دو عبارتیں ہوں تو $\frac{A}{B}$ کو الجبری عبارتوں کی نسبت کہتے ہیں۔ الجبری عبارتوں کی نسبت کو مختصر کرتے وقت استعمال میں آنے والے جمع، تفریق، ضرب، تقسیم وغیرہ اعمال ناطق اعداد پر ہونے والے اعمال کی طرح ہوتے ہیں۔
الجبری عبارتوں کی تقسیم کرنے کے دوران نسب نمایا مقسوم الیہ غیر صفر ہونا چاہیے۔

$$\begin{aligned} \frac{7x^2 + 18x + 8}{49x^2 - 16} \div \frac{14x - 8}{x + 2} \\ \frac{7x^2 + 18x + 8}{49x^2 - 16} \times \frac{x + 2}{2(7x - 4)} \\ = \frac{(7x + 4)(x + 2)}{(7x + 4)(7x - 4)} \times \frac{(x + 2)}{(x - 2)} \\ = 2 \end{aligned}$$

مثال (2)

حل :

$$\begin{aligned} \frac{a^2 + 5a - 6}{a^2 - a - 12} \div \frac{a + 4}{a - 4} \\ \frac{a^2 + 5a - 6}{a^2 - a - 12} \times \frac{a - 4}{a + 4} \\ = \frac{(a + 3)(a - 2)}{(a - 4)(a + 3)} \times \frac{(a - 4)}{(a + 2)(a - 2)} \\ = \frac{1}{a - 2} \end{aligned}$$

حل :

$$\frac{x^2 - 9y^2}{x^2 - 27y^2} \div \frac{x + 3y}{x - 3y} \quad x \neq 3y \quad \text{مثال (3) مختصر کیجیے}$$

$$\begin{aligned} \frac{x^2 - 9y^2}{x^2 - 27y^2} \div \frac{(x + 3y)(x - 3y)}{(x - 3y)(x^2 + 3xy + 9y^2)} \\ = \frac{x - 3y}{x^2 + 3xy + 9y^2} \end{aligned}$$

حل :

مشقی سیٹ 6.4

1. مختصر کیجیے۔

$$(1) \frac{m^2 - n^2}{(m + n)^2} \div \frac{m^2 + mn - n^2}{m^2 - n^2}$$

$$(2) \frac{a^2 + 10a + 21}{a^2 + 6a + 7} \div \frac{a^2 - 2}{a + 3}$$

$$(3) \frac{8x^2 - 27y}{4x^2 - 9y^2}$$

$$(4) \frac{x^2 - 5x - 24}{(x + 3)(x + 8)} \div \frac{x^2 - 64}{(x - 8)^2}$$

$$(5) \frac{3x^2 - x - 2}{x^2 - 7x + 12} \div \frac{3x^2 - 7x - 6}{x^2 - 4}$$

$$(6) \frac{4x^2 - 11x + 6}{16x^2 - 9}$$

$$(7) \frac{a^2 - 27}{5a^2 - 16a + 3} \div \frac{a^2 + 3a + 9}{25a^2 - 1}$$

$$(8) \frac{1 - 2x + x^2}{1 - x^2} \div \frac{1 + x - x^2}{1 - x}$$

جوابات کی فہرست

مشقی سیٹ 6.1

- (1) $(x + 6)(x + 3)$
 - (2) $(x - 9)(x - 1)$
 - (3) $(y + 12)(y + 12)$
 - (4) $8(y + 2)(y - 1)$
 - (5) $(p - 7)(p + 6)$
 - (6) $(p + 4)(p - 11)$
 - (7) $(m - 15)(m - 8)$
 - (8) $(m - 20)(m - 5)$
 - (9) $(x + 3)(3x + 5)$
 - (10) $(x + 5)(2x - 9)$
 - (11) $2(5x - 4)(2x - 1)$
 - (12) $(11x - 3)(4x + 1)$

مشقی سیٹ 6.2

- (1) $(x + 4y)(x^2 - 4xy + 16y^2)$
 - (2) $(5p + q)(25p^2 - 5pq + q^2)$
 - (3) $(5k + 3m)(25k^2 - 15km + 9m^2)$
 - (4) $2(l + 6m)(l^2 - 6lm + 36m^2)$
 - (5) $3(2a + 3b)(4a^2 - 6ab + 9b^2)$
 - (6) $\left(x - \frac{1}{2y}\right)\left(y^2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4y^2}\right)$
 - (7) $\left(a + \frac{2}{a}\right)\left(a^2 - 2 + \frac{4}{a^2}\right)$
 - (8) $\left(1 + \frac{q}{5}\right)\left(1 - \frac{q}{5} + \frac{q^2}{25}\right)$

مشقی سیٹ 6.3

- (1) $(y - 3)(y^2 + 3y + 9)$
 - (2) $(x - 4y)(x^2 + 4xy + 16y^2)$
 - (3) $(3m - 6n)(9m^2 + 18mn + 36n^2)$
 - (4) $(5y - 1)(25y^2 + 5y + 1)$
 - (5) $\left(2p - \frac{3}{p}\right)\left(p^2 + 6 + \frac{9}{p^2}\right)$
 - (6) $(-a - 8b)(49a^2 + 56ab + 64b^2)$
 - (7) $(4x - 9y)(16x^2 + 36xy + 81y^2)$
 - (8) $16\left(a - \frac{2}{b}\right)\left(a^2 - \frac{2a}{b} + \frac{4}{b^2}\right)$
- (1) $6xy^2 + 2y^3$
 - (2) $279a^2b + 250b^3$
 - (3) $3a^2b + 3ab^2$
 - (4) $-3p^2 - 3p - 1$
 - (5) $-108x^2y^2ab - 16a^2b^3$

مشقی سیٹ 6.4

- (1) $\frac{1}{m - n}$
 - (2) $a + 1$
 - (3) $\frac{4x^2 + 6xy + 9y^2}{2x + 3y}$
 - (4) 1
 - (5) $\frac{(x + 1)(x - 2)(x + 2)}{(y - 3)(y - 4)}$
 - (6) $\frac{x - 2}{4x - 3}$
 - (7) $5a + 1$
 - (8) $\frac{1 - y}{1 + y}$



آئیے ذرا یاد کریں



ایک درجن بیاضوں کی قیمت 240 روپے ہو تو 3 بیاضوں کی قیمت کتنی ہوگی؟ 9 بیاضوں کی قیمت کتنی ہوگی؟ 24 بیاضوں کی قیمت کتنی ہوگی؟ 50 بیاضوں کی قیمت کتنی ہوگی؟ اسے معلوم کرنے کے لیے ذیل کی جدول مکمل کیجیے۔

بیاضوں کی تعداد (x)	12	3	9	24	50	1
قیمت (روپے میں) (y)	240					20

مذکورہ بالا جدول سے ایسا سمجھ میں آتا ہے کہ ہر جوڑی میں بیاضوں کی تعداد (x) اور ان کی قیمت (y) کے درمیان $\frac{1}{24}$ کی نسبت ہے۔ یہ مستقل ہے۔ بیاضوں کی تعداد اور ان کی قیمت مستقیم تناسب میں ہے۔ ایسی مثالوں میں دو میں سے ایک کی تعداد بڑھتی ہے تو دوسری بھی اسی تناسب سے بڑھتی ہے۔

آئیے سمجھ لیں



مستقیم تغیر (Direct Variation) :

x اور y مستقیم تناسب میں ہیں۔ اسی بیان کو x اور y مستقیم تغیر میں ہیں یا x اور y کے درمیان مستقیم تغیر ہے، لکھتے ہیں۔ اس بیان کو علامت کا استعمال کر کے $x \propto y$ بھی لکھتے ہیں۔

[$\propto$ (الفا) تغیر کے معنی میں استعمال کیا جانے والا لاطینی حرف ہے]

$x \propto y$ اسے مساوات کی صورت میں $x = ky$ لکھتے ہیں؛ یہاں k مستقل رکن ہے۔

$x = ky$ یا $\frac{x}{y} = k$ تغیر کی مساوات ہے۔ k تغیر کا مستقل عدد ہے۔

درج ذیل بیان تغیر کی علامت استعمال کر کے کس طرح لکھا گیا ہے، اسے دیکھیے۔

(i) دائرے کا رقبہ اس کے نصف قطر کے مربع کے مستقیم تناسب میں ہے۔

دائرے کا رقبہ A ، نصف قطر r ، ان متغیروں کو لے کر مذکورہ بالا بیان کو $A \propto r^2$ لکھ سکتے ہیں۔

(ii) مائع کا دباؤ (p)، مائع کی گہرائی (d) کے ساتھ مستقیم تغیر میں ہوتا ہے۔ اس بیان کو $p \propto d$ لکھتے ہیں۔

مستقیم تغیر کی علامتی ترتیب کے تصور کو سمجھنے کے لیے ذیل کی مثالوں کا مطالعہ کیجیے۔

مثال (1) x، y کے ساتھ مستقیم تغیر میں ہے، جب $x = 5$ ہوتا ہے تب $y = 30$ تو تغیر کا مستقل معلوم کیجیے اور تغیر کی مساوات لکھیے۔

حل : x، y کے ساتھ مستقیم تغیر میں ہے۔ یعنی $x \propto y$

(k) تغیر کا مستقل عدد ہے) ... $\therefore x = ky$

$x = 5$ تب $y = 30$ دیا ہوا ہے۔

(تغیر کا مستقل عدد) ... $\therefore k = \frac{1}{6}$ $\therefore 5 = k \times 30$

اس کی مدد سے $x = ky$ یعنی $x = \frac{1}{6}y$ یا $y = 6x$ مساوات حاصل ہوتی ہے۔

مثال (2) مونگ پھلی کے دانے کی قیمت اس کے وزن کے ساتھ مستقیم تغیر میں ہے۔ 5 کلوگرام مونگ پھلی کے دانے کی قیمت ₹450 ہو تو 1 کونٹل

مونگ پھلی کے دانے کی قیمت معلوم کیجیے۔ (کلوگرام 100 = کونٹل 1)

حل : فرض کیجیے مونگ پھلی کے دانے کی قیمت x ₹ اور مونگ پھلی کے دانے کا وزن y ہے۔

x اور y مستقیم تغیر میں ہیں۔ ... (دیا ہوا ہے) لہذا $x \propto y$ یا $x = ky$

جب $x = 450$ تب $y = 5$ ہوتا ہے۔ ... (دیا ہوا ہے) اس کی مدد سے k معلوم کریں گے۔

(تغیر کا مستقل) ... $\therefore k = 90$ $\therefore 450 = 5k$ $\therefore k = 90$ $x = ky$

اب، $y = 100$ ہو تو x معلوم کریں گے۔ $\therefore$ تغیر کی مساوات $x = 90y$

$$x = 90 \times 100 = 9000$$

$\therefore$ 1 کونٹل مونگ پھلی کے دانوں کی قیمت 9000 روپے ہوگی۔

مشقی سیٹ 7.1

1. تغیر کی علامت استعمال کر کے لکھیے۔

(1) دائرے کا محیط (c) اس کے نصف قطر (r) کے ساتھ مستقیم تناسب میں ہوتا ہے۔

(2) موٹر گاڑی میں بھرے ہوئے پٹرول (l) اور اس کے ذریعے طے کردہ فاصلہ (d) مستقل تغیر میں ہوتے ہیں۔

2. سیبوں کی قیمت اور سیبوں کی تعداد کے درمیان مستقیم تغیر ہے۔ اس کی مدد سے درج ذیل جدول مکمل کیجیے۔

(x) سیبوں کی تعداد	1	4	...	12	...
(y) سیبوں کی قیمت	8	32	56	...	160

3. اگر $m \propto n$ اور جب $m = 154$ تب $n = 7$ ۔ اس لیے اگر $n = 14$ تب m کی قیمت معلوم کیجیے۔

4. m اور n کے ساتھ مستقیم تغیر میں ہے، تو ذیل کی جدول مکمل کیجیے۔

m	3	5	6.5	...	1.25
n	12	20	...	28	...

5. x، y کے جذور المربع کے ساتھ مستقیم تغیر میں بدلتا ہے اور جب $x = 16$ ہوتا ہے تب $y = 24$ تو تغیر کا مستقل عدد معلوم کیجیے اور تغیر کی مساوات لکھیے۔

6. سویا بین کی فصل نکالنے کے لیے 4 مزدوروں کو ₹ 1000 مزدوری دینا پڑتی ہے۔ اگر مزدوری کی رقم اور مزدوروں کی تعداد مستقیم تغیر میں ہو تو 17 مزدوروں کو کتنی مزدوری دینا ہوگی؟

آئیے ذرا یاد کریں



ڈرل کے لیے بچوں کی قطاریں بنائی گئیں۔ ہر قطار میں بچوں کی تعداد اور قطاروں کی تعداد ذیل کے مطابق ہے۔

ہر قطار میں بچوں کی تعداد	40	10	24	12	8
قطاروں کی تعداد	6	24	10	20	30

مذکورہ بالا جدول کی مدد سے ایسا سمجھ میں آتا ہے کہ ہر جوڑی کی ہر قطار میں بچوں کی تعداد اور کل قطاروں کی تعداد کا حاصل ضرب 120 ہے۔
یعنی ان کا حاصل ضرب مستقل ہے۔ (یا) ہر قطار میں بچوں کی تعداد اور قطاروں کی تعداد معکوس تناسب میں ہے۔
جب دو تعداد میں سے ایک تعداد میں اضافہ ہوتا ہے تو دوسری تعداد میں اسی تناسب سے کمی واقع ہوتی ہے۔ تب یہ دونوں تعداد معکوس تناسب میں ہوتی ہیں۔ مثلاً ایک تعداد دوگنا ہوتی ہے تو دوسری تعداد نصف ہو جاتی ہے۔

آئیے سمجھ لیں



معکوس تغیر (Inverse Variation) :

x اور y اعداد معکوس تناسب میں ہیں۔ اس بیان کو x اور y معکوس تغیر میں ہیں، لکھتے ہیں۔ x اور y معکوس تغیر میں ہوں تب $x \times y$ مستقل ہوتا ہے۔ اسے k فرض کر کے مثالیں حل کرنا آسان ہو جاتا ہے۔
 x اور y معکوس تغیر میں ہیں، یعنی اسے $x \propto \frac{1}{y}$ سے ظاہر کرتے ہیں۔
یعنی $x = \frac{k}{y}$ یا $x \times y = k$ یہ سب تغیر کی مساواتیں ہیں۔ k تغیر کا مستقل عدد ہے۔

حل کردہ مثالیں

مثال (1) اگر a ، b کے ساتھ معکوس تغیر میں ہو تو درج ذیل جدول مکمل کیجیے۔

a	6	12	15	
b	20			4
$a \times b$	120	120		

حل : (i) $a \propto \frac{1}{b}$ یعنی $a \times b = k$

(تغیر کا مستقل) ... $\therefore k = 6 \times 20 = 120$ ، تب $a = 6$ ، $b = 20$

$$a = ? \text{ تب } b = 4 \quad (\text{iv})$$

$$a \times b = 120$$

$$\therefore a \times 4 = 120$$

$$\therefore a = 30$$

$$b = ? \text{ تب } a = 15 \quad (\text{iii})$$

$$a \times b = 120$$

$$\therefore 15 \times b = 120$$

$$\therefore b = 8$$

$$b = ? \text{ تب } a = 12 \quad (\text{ii})$$

$$a \times b = 120$$

$$\therefore 12 \times b = 120$$

$$\therefore b = 10$$

مثال (2): $f \propto \frac{1}{d^2}$ ، تب $d = 5$ ، $f = 18$

تو (i) $d = 10$ ہو تو f کی قیمت معلوم کیجیے۔ (ii) $f = 50$ ہو تو d کی قیمت معلوم کیجیے۔

حل: $f \propto \frac{1}{d^2}$ ، $\therefore f \times d^2 = k$

$d = 5$ تب $f = 18$ ہو تو k کی قیمت معلوم کریں گے۔

$$\therefore 18 \times 5^2 = k \quad \therefore k = 18 \times 25 = 450 \quad \dots (\text{تغیر کا مستقل})$$

$$d = ? \text{ ہو تو } f = 50 \quad (\text{ii})$$

$$f \times d^2 = 450$$

$$\therefore 50 \times d^2 = 450$$

$$\therefore d^2 = 9$$

$$\therefore d = 3 \text{ یا } d = -3$$

$$f = ? \text{ ہو تو } d = 10 \quad (\text{i})$$

$$f \times d^2 = 450$$

$$\therefore f \times 10^2 = 450$$

$$\therefore f \times 100 = 450$$

$$\therefore f = 4.5$$

مشقی سیٹ 7.2

1. ایک کام پورا کرنے کے لیے لگائے گئے مزدوروں کی تعداد اور کام پورا ہونے کے لیے درکار دنوں کی معلومات ذیل کی جدول میں دی ہوئی ہے۔ جدول مکمل کیجیے۔

مزدوروں کی تعداد	30	20		10	
دن	6	9	12		36

2. ہر مثال میں تغیر کا مستقل معلوم کیجیے اور تغیر کی مساوات لکھیے۔

$$w = 24 \text{ تب } z = 2.5 \quad z \propto \frac{1}{w} \quad (2) \quad q = 4 \text{ تب } p = 15 \quad p \propto \frac{1}{q} \quad (1)$$

$$y = 9 \text{ تب } x = 15 \quad x \propto \frac{1}{y} \quad (4) \quad t = 5 \text{ تب } s = 4 \quad s \propto \frac{1}{t} \quad (3)$$

3. سیبوں کے ذخیرے سے تمام سیب پیٹیوں میں بھرنا ہے۔ ہر پیٹی میں 24 سیب رکھیں تو اسے بھرنے کے لیے 27 پیٹیاں درکار ہوتی ہیں۔ اگر ہر پیٹی میں 36 سیب رکھیں تو کتنی پیٹیاں درکار ہوں گی؟

4. درج ذیل بیانات کو تغیر کی علامت استعمال کر کے لکھیے۔

(1) آواز کی طولی لہروں کی لمبائی (l) اور تعدد (f) کے درمیان معکوس تغیر ہے۔

(2) بلب کی روشنی کی شدت (I) اور بلب اور پردے کے درمیان فاصلہ (d) کے مربع کے درمیان معکوس تغیر ہے۔

5. $x \propto \frac{1}{y}$ اور $x = 40$ ہوتا ہے تب $y = 16$ ہوتا ہے۔ اگر $x = 10$ ہو تو y کتنا ہوگا؟

6. x اور y کے درمیان معکوس تغیر ہے۔ $x = 15$ تب $y = 10$ ہوتا ہے۔ $x = 20$ ہو تو $y = ?$



وقت، کام، رفتار (Time, Work, Speed) :

کسی تعمیراتی کام کو پورا کرنے کے لیے لگائے گئے مزدوروں کی تعداد اور اس کام کو پورا کرنے کے لیے لگنے والا وقت، جیسی مثالیں معکوس تغیر کی ہوتی ہیں۔ اسی طرح معکوس تغیر کی بعض مثالیں سوار یوں کی رفتار اور ان کے ذریعے متعین کردہ فاصلہ طے کرنے کے لیے درکار وقت سے متعلق ہوتی ہیں۔ ایسی مثالوں کو وقت - کام - رفتار سے متعلق مثالیں کہتے ہیں۔

آئیے دیکھتے ہیں کہ تغیر کی علامت کا استعمال کر کے اس قسم کی مثالیں کس طرح حل کرتے ہیں؟

مثال (1) ایک کھیت میں مونگ پھلی بکالنے کا کام 15 عورتیں 8 دن میں پورا کرتی ہیں۔ وہی کام 6 دنوں میں پورا کرنا ہو تو کتنی عورتیں کام پر ہونا چاہیے؟

حل : کام پورا ہونے کے لیے درکار وقت اور کام کرنے والی عورتوں کی تعداد کے درمیان معکوس تغیر ہوتا ہے۔

فرض کیجیے کہ دنوں کی تعداد (d) اور عورتوں کی تعداد n ہے۔

$$d \propto \frac{1}{n} \quad \therefore d \times n = k \quad \dots \quad (k \text{ تغیر کا مستقل عدد ہے})$$

جب $n = 15$ تب $d = 8$

$$\therefore k = d \times n = 15 \times 8 = 120 \quad \dots \quad (تغیر کا مستقل)$$

اب $d = 6$ ہو تو $n = ?$ معلوم کریں گے۔

$$d \times n = 120$$

$$\therefore 6 \times n = 120, \quad \therefore n = 20$$

$\therefore$ 6 دن میں کام پورا کرنے کے لیے 20 عورتیں کام پر ہونا چاہیے۔

مثال (2) ایک سواری کی اوسط رفتار 48 کلومیٹر فی گھنٹہ ہو تب کچھ فاصلہ طے کرنے کے لیے اسے 6 گھنٹے لگتے ہیں۔ اگر رفتار 72 کلومیٹر فی گھنٹہ ہو جاتی ہے تب اتنا ہی فاصلہ طے کرنے کے لیے اسے کتنا وقت لگے گا؟

حل : فرض کیجیے سواری کی رفتار s ہے اور درکار وقت t ہے۔ رفتار اور وقت کے درمیان معکوس تغیر ہے۔

$$s \propto \frac{1}{t} \quad \therefore s \times t = k \quad \dots \text{ (تغیر کا مستقل عدد ہے)}$$

$$k = s \times t = 48 \times 6 = 288 \quad \dots \text{ (تغیر کا مستقل)}$$

اب $s = 72$ ہو تو t معلوم کریں گے۔

$$s \times t = 288 \quad \therefore 72 \times t = 288 \quad \therefore t = \frac{288}{72} = 4$$

$\therefore$ سواری کی رفتار 72 کلومیٹر فی گھنٹہ ہو تو اتنا ہی فاصلہ طے کرنے کے لیے 4 گھنٹے درکار ہوں گے۔

مشقی سیٹ 7.3

- درج ذیل میں سے کون سے بیانات معکوس تغیر کے ہیں؟
 - (1) مزدوروں کی تعداد اور ان کے کام پورا کرنے کے لیے لگنے والا وقت۔
 - (2) حوض بھرنے کے لیے ایک جیسے نلوں کی تعداد اور حوض بھرنے کے لیے درکار وقت۔
 - (3) سواری میں بھرا ہوا پٹرول اور اس کی قیمت۔
 - (4) دائرے کا رقبہ اور اس دائرے کا نصف قطر۔
- اگر 15 مزدوروں کو ایک دیوار تعمیر کرنے کے لیے 48 گھنٹے لگتے ہیں تو 30 گھنٹوں میں وہ کام پورا کرنے کے لیے کتنے مزدور لگیں گے؟
- تھیلی میں دودھ بھرنے والی مشین کے ذریعے 3 منٹ میں آدھے لٹر کی 120 تھیلیاں بھری جاتی ہیں تو 1800 تھیلیاں بھرنے کے لیے کتنا وقت درکار ہوگا؟
- ایک کار کو 60 کلومیٹر فی گھنٹہ کی اوسط رفتار سے کچھ فاصلہ طے کرنے کے لیے 8 گھنٹے لگتے ہیں۔ وہی فاصلہ ساڑھے سات گھنٹے میں طے کرنے کے لیے کار کی اوسط رفتار میں کتنا اضافہ کرنا ہوگا؟

جوابات کی فہرست

مشقی سیٹ 7.1

1. (1) $c \propto r$ (2) $l \propto d$ 2. x اور $y = 96$ بالترتیب 7 اور 20
3. 308 4. n اور $m = 7$ بالترتیب 26 اور 5 5. $k = 6$, $y = 4\sqrt{x}$ 6. ₹4250

مشقی سیٹ 7.2

1. 5 دن اور مزدوروں کی تعداد بالترتیب 15 اور 5 2. (1) $k = 60$, $pq = 60$
(2) $k = 60$, $zw = 60$ (3) $k = 100$, $st = 100$ (4) $k = 45$, $\sqrt{u} = 45$
3. 18 پیٹیاں 4. (1) $f \propto \frac{1}{g}$ (2) $l \propto \frac{1}{d}$ 5. $y = 256$ 6. $y = 7.5$

مشقی سیٹ 7.3

1. معکوس تغیر (1), (2) 2. 24 مزدور 3. 45 منٹ 4. 4 کلومیٹر فی گھنٹہ



ذواریعۃ الاضلاع بنانا اور ذواریعۃ الاضلاع کی قسمیں

8

آئیے ذرا یاد کریں



• دی ہوئی پیمائشوں کے مطابق مثلث بنائیے۔

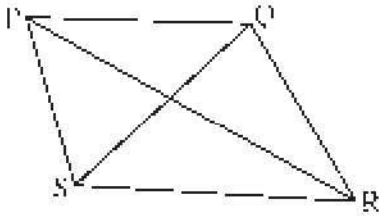
(1) $\triangle ABC$ میں $l(AB) = 5$ سم، $l(BC) = 5.5$ سم، $l(AC) = 6$ سم

(2) $\triangle DEF$ میں $m\angle D = 35^\circ$ ، $m\angle F = 100^\circ$ ، $l(DF) = 4.8$ سم

(3) $\triangle MNP$ میں $m\angle P = 75^\circ$ ، $l(NP) = 4.5$ سم، $l(MP) = 6.2$ سم

(4) $\triangle XYZ$ میں $m\angle Y = 90^\circ$ ، $l(XY) = 4.2$ سم، $l(XZ) = 7$ سم

• کسی بھی ذواریعۃ الاضلاع کے چار زاویے، چار ضلعے اور دو وتر اس طرح کل دس اجزا ہوتے ہیں۔



آئیے سمجھ لیں



ذواریعۃ الاضلاع بنانا (Construction of a quadrilateral) :

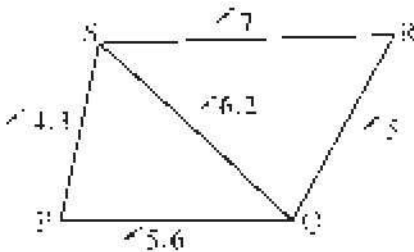
ذواریعۃ الاضلاع کے کل دس اجزا میں سے مخصوص 5 اجزا کی پیمائش معلوم ہو تو اس ذواریعۃ الاضلاع کو ہم بنا سکتے ہیں۔ اس عمل کی بنیاد مثلث بنانے کے عمل کے جیسی ہے۔ اسے ہم ذیل کی مثال سے سمجھ لیں گے۔

(I) ذواریعۃ الاضلاع کے چار اضلاع اور ایک وتر دیا جائے تو ذواریعۃ الاضلاع بنانا :

مثال : $\square PQRS$ ، اس طرح بنائیے کہ $l(PQ) = 5.6$ سم، $l(QR) = 5$ سم، $l(PS) = 4.3$ سم، $l(RS) = 7$ سم

$l(QS) = 6.2$ سم

حل : ہم پہلے کچی شکل بنائیں گے۔



شکل میں ذواریعۃ الاضلاع کے دیے ہوئے اجزا کی معلومات دکھائیے۔

شکل کو دیکھنے پر واضح ہوتا ہے کہ $\triangle SPQ$ اور $\triangle SRQ$ کے تمام

اضلاع کی لمبائی ہمیں معلوم ہیں۔ اس بنا پر $\triangle SPQ$ اور $\triangle SRQ$

بنانے پر، دی ہوئی معلومات کے مطابق $\square PQRS$ حاصل ہوگا۔

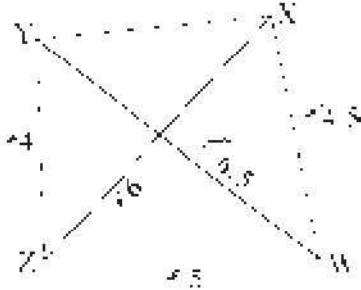
اس ذواریعۃ الاضلاع کو آپ خود بنائیے۔

(II) ذواربعۃ الاضلاع کے تین اضلاع اور دو وتر دیے جائیں تو ذواربعۃ الاضلاع بنانا :

مثال : □WXYZ، اس طرح بنائیے کہ $l(WX) = 4.5$ سم، $l(ZX) = 6$ سم، $l(YZ) = 4$ سم

سم $l(YW) = 6.5$ ، سم $l(ZW) = 5$

حل : کچی شکل بنائیے۔ دی ہوئی معلومات شکل میں دکھائیے۔



شکل کو دیکھنے پر واضح ہوتا ہے کہ $\triangle WZY$ اور $\triangle WXZ$

کے تمام اضلاع کی لمبائی ہمیں دی ہوئی ہے۔ اس بنا پر $\triangle WXZ$

اور $\triangle WZY$ بنائیے۔ اس کے بعد قطعہ XY کھینچنے پر ہمیں

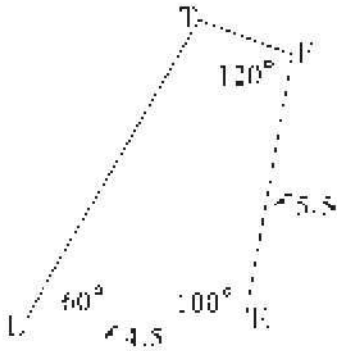
دی ہوئی پیمائش کا □WXYZ حاصل ہوگا۔

اب اس طرح ذواربعۃ الاضلاع آپ خود بنائیے۔

(III) ذواربعۃ الاضلاع کے دو متوازی اضلاع اور کوئی بھی تین زاویے دیے جائیں تو ذواربعۃ الاضلاع بنانا :

مثال : □LEFT، اس طرح بنائیے کہ $m\angle L = 60^\circ$ ، سم $l(EF) = 5.5$ سم، سم $l(EL) = 4.5$ ، $m\angle F = 120^\circ$ ، $m\angle E = 100^\circ$

حل : کچی شکل بنا کر اس میں دی ہوئی معلومات دکھائیے۔



شکل کی مدد سے واضح ہوتا ہے کہ 4.5 سم لمبائی کا قطعہ LE کھینچنا اور

نقطہ E پر 100° پیمائش کا زاویہ بناتے ہوئے قطعہ EF کھینچنے پر

ذواربعۃ الاضلاع کے تین نقاط L، E اور F حاصل ہوتے ہیں۔ نقطہ

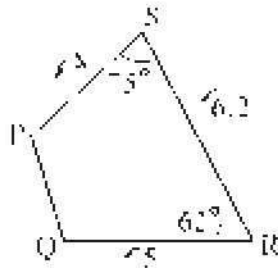
پر 60° پیمائش کا زاویہ بنانے والی اور نقطہ F پر 120° پیمائش کا زاویہ

بنانے والی شعاعیں سمجھنے۔ ان کا نقطہ تقاطع، نقطہ T ہوگا۔ اب آپ یہ

ذواربعۃ الاضلاع بنائیے۔

(IV) ذواربعۃ الاضلاع کے تین اضلاع اور ان میں شامل کیے ہوئے زاویے دیے ہوں تو ذواربعۃ الاضلاع بنانا :

مثال : □PQRS، اس طرح بنائیے کہ سم $l(SP) = 4$ ، سم $l(RS) = 6.2$ ، سم $l(QR) = 5$ ، $m\angle R = 62^\circ$ ، $m\angle S = 75^\circ$



حل : پہلے ذواربعۃ الاضلاع کی کچی شکل بنائیے اور اس میں دی ہوئی معلومات دکھائیے۔

اس بنا پر ہمیں سمجھ میں آتا ہے کہ دی ہوئی لمبائی کا قطعہ QR کھینچ کر نقطہ R پر

62° کا زاویہ بنانے والا قطعہ RS کھینچنے کی بنا پر ذواربعۃ الاضلاع کے نقاط

Q، R اور S حاصل ہوتے ہیں۔

قطعہ RS کے نقطہ S پر 75° پیمائش کا زاویہ بنانے والا قطعہ SP اس طرح پیمائش کہ سم $SP = 4$ قطعہ، قطعہ PQ کھینچنے پر دی ہوئی پیمائش کا $\square PQRS$ حاصل ہوگا۔ اب آپ اس طرح کا عمل کرتے ہوئے شکل بنائیے۔

مشقی سیٹ 8.1

1. ذیل کی پیمائشوں کے مطابق ذواربعتہ الاضلاع بنائیے۔

(1) $\square MORE$ میں $m\angle M = 58^\circ$ ، $m\angle O = 105^\circ$ ، سم $l(OR) = 4.4$ ، سم $l(MO) = 5.8$ ، $m\angle R = 90^\circ$

(2) $\square DEFG$ اس طرح بنائیے کہ سم $l(DG) = 5.5$ ، سم $l(EF) = 6.5$ ، سم $l(DE) = 4.5$ ، سم $l(EG) = 7.8$

سم $l(DF) = 7.2$

(3) $\square ABCD$ میں، سم $l(AB) = 6.4$ ، سم $l(BC) = 4.8$ ، $m\angle A = 70^\circ$ ، $m\angle C = 140^\circ$ ، $m\angle B = 50^\circ$

(4) $\square LMNO$ اس طرح بنائیے کہ سم $l(ON) = l(NM) = 4.5$ ، سم $l(LM) = l(LO) = 6$ ، سم $l(OM) = 7.5$

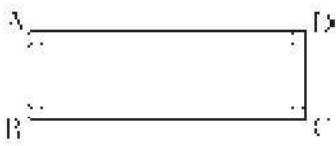
آئیے ذرا یاد کریں



ذواربعتہ الاضلاع کے اضلاع اور زاویوں پر مختلف قسم کی شرائط لگانے پر ذواربعتہ الاضلاع کی مختلف قسمیں حاصل ہوتی ہیں۔ قائمہ الزاویہ ذواربعتہ الاضلاع یا مستطیل اور مربع ان ذواربعتہ الاضلاع کی اقسام کا تعارف آپ کر چکے ہیں۔ ذواربعتہ الاضلاع کی مزید قسموں کا مطالعہ ہم عملی کام کے ذریعے کریں گے۔

قائمہ الزاویہ ذواربعتہ الاضلاع یا مستطیل (Rectangle) :

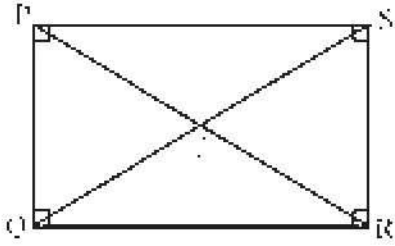
جس ذواربعتہ الاضلاع کے چاروں زاویے قائمہ ہوتے ہیں اس ذواربعتہ الاضلاع کو قائمہ الزاویہ ذواربعتہ الاضلاع یا مستطیل کہتے ہیں۔



ذواربعتہ الاضلاع بنانے کے لیے دیے گئے پانچ اجزا میں سے دو اضلاع متوازی رہنا ہی چاہیے۔ متوازی دو اضلاع اور تین زاویے معلوم ہوں تو آپ ذواربعتہ الاضلاع بنا سکتے ہیں۔

تعریف کے مطابق مستطیل کے تمام زاویے قائمہ ہوتے ہیں۔ اس لیے مستطیل کے متوازی دو ضلع معلوم ہوں تو ہی آپ مستطیل بنا سکتے ہیں۔

عملی کام I : آپ مناسب متوازی اضلاع (لمبائی اور چوڑائی) کا ایک مستطیل PQRS بنائیے۔ ان کے وتروں کے نقطہ تقاطع کو T نام دیجیے۔
اب تقسیم کار اور ناپ پٹی کی مدد سے



(1) ضلع QR اور ضلع PS، (مقابل کے ضلعوں) کی لمبائی ناپیے۔

(2) ضلع PQ اور ضلع SR کی لمبائی ناپیے۔

(3) وتر PR اور وتر QS کی لمبائی ناپیے۔

(4) وتر PR کے حصوں قطعہ PT اور قطعہ TR کی لمبائی ناپیے۔

(5) وتر QS کے حصوں قطعہ QT اور قطعہ TS کی لمبائی ناپیے۔

حاصل ہونے والی تمام پیمائشوں کا مشاہدہ کیجیے۔ کلاس روم میں دیگر طلبہ کی پیمائشوں سے موازنہ کرتے ہوئے بحث کیجیے۔ بحث کے ذریعے مستطیل کی ذیل کی خصوصیات آپ کو سمجھ میں آئیں گی۔

● مستطیل کے مقابل کے اضلاع ایک دوسرے کے متماثل ہوتے ہیں۔

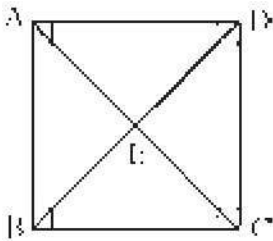
● مستطیل کے وتر متماثل ہوتے ہیں۔

● مستطیل کے وتر ایک دوسرے کی تنصیف کرتے ہیں۔

مرلع Square :

جس ذواربعۃ الاضلاع کے تمام اضلاع متماثل ہوتے ہیں اور تمام زاویے قائمہ ہوتے ہیں۔ اس ذواربعۃ الاضلاع کو مربع کہتے ہیں۔

عملی کام II : آپ ایک مناسب لمبائی کے ضلع کا مربع ABCD بنائیے۔ اس کے وتروں کے نقطہ تقاطع کو E نام دیجیے۔ اب جیومیٹری باکس کے آلات کا استعمال کر کے



(1) وتر AC اور وتر BD کی لمبائی ناپیے۔

(2) نقطہ E کی وجہ سے بنے ہر وتر کے دونوں حصوں کی لمبائی ناپیے۔

(3) نقطہ E پر بنے ہر زاویے کی پیمائش معلوم کیجیے۔

(4) وتر کی وجہ سے مربع کے ہر زاویے کے بننے والے حصوں کی پیمائش ناپیے۔

(مثلاً $\angle ADB$ اور $\angle CDB$)

آپ اور آپ کی کلاس کے دیگر طلبہ کے ذریعے حاصل ہونے والی پیمائشوں کا مشاہدہ کیجیے۔ بحث کیجیے۔

آپ کو مربع کی درج ذیل خصوصیات حاصل ہوتی ہیں۔

● وتر مساوی لمبائی کے یعنی متماثل ہوتے ہیں۔

● وتر ایک دوسرے کی تنصیف کرتے ہیں۔

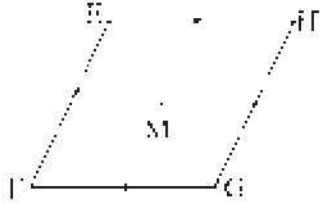
● وتر ایک دوسرے پر عمود ہوتے ہیں۔

● وتر، مربع کے مقابل کے زاویوں کی تنصیف کرتے ہیں۔

مربع (Rhombus) :

جس ذواربعۃ الاضلاع کے تمام اضلاع کی لمبائی مساوی (متماثل) ہو، اس ذواربعۃ الاضلاع کو مربع کہتے ہیں۔

عملی کام III : مناسب لمبائی کا ضلع اور ایک مناسب پیمائش کا زاویہ لے کر ایک مربع EFGH بنائیے۔ اس کے وتر کھینچ کر ان کے نقطہ تقاطع کو M نام دیجیے۔



(1) ذواربعۃ الاضلاع کے مقابل کے زاویے، اسی طرح نقطہ M پر بننے والے تمام زاویے ناپیے۔

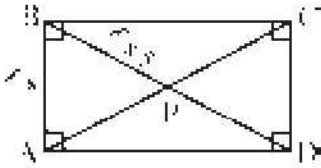
(2) وتر کے ذریعے ذواربعۃ الاضلاع کے ہر زاویے کے بننے والے دونوں زاویے ناپیے۔

(3) دونوں وتروں کی لمبائی ناپیے۔ نقطہ M سے وتروں کے بننے والے حصوں کو ناپیے۔

تمام پیمائشوں کی مدد سے مربع کی درج ذیل خصوصیات آپ کو حاصل ہوں گی۔

- مقابل کے زاویے متماثل ہوتے ہیں۔
- وتر، مربع کے مقابل کے زاویوں کی تنصیف کرتے ہیں۔
- وتر ایک دوسرے کی تنصیف کرتے ہیں، اسی طرح ایک دوسرے پر عمود ہوتے ہیں۔
- ایسا دکھائی دے گا کہ آپ کی جماعت کے دیگر طلبہ کو بھی یہی خصوصیات حاصل ہوئی ہیں۔

حل کردہ مثالیں



مثال (1) مستطیل ABCD کے وتروں کا نقطہ تقاطع P ہے۔

(i) اگر سم $l(AB) = 8$ سم ہو تو $l(DC) = ?$

(ii) سم $l(BP) = 8.5$ سم ہو تو $l(BD)$ اور $l(BC)$ معلوم کیجیے۔

حل : ایک کچی شکل بنا کر اس میں دی ہوئی معلومات ظاہر کیجیے۔

(i) مستطیل کے مقابل کے ضلع متماثل ہوتے ہیں۔

$$\therefore l(DC) = l(AB) = 8 \text{ سم}$$

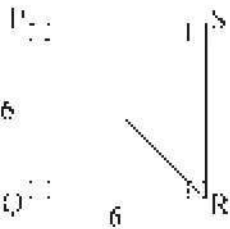
(ii) مستطیل کے وتر ایک دوسرے کی تنصیف کرتے ہیں۔

$$\therefore l(BD) = 2 \times l(BP) = 2 \times 8.5 = 17 \text{ سم}$$

$\triangle BCD$ ، ایک قائمہ الزاویہ مثلث ہے۔ فیثاغورث کے مسئلہ کی رو سے

$$l(BC)^2 = l(BD)^2 - l(CD)^2 = 17^2 - 8^2 = 289 - 64 = 225$$

$$\therefore l(BC) = \sqrt{225} = 15 \text{ سم}$$



مثال (2) 6 سم ضلع کے مربع کے وتر کی لمبائی معلوم کیجیے۔

حل : فرض کیجیے۔ شکل کے مطابق $\square PQRS$ ، 6 سم ضلع والا ایک مربع ہے۔ قطعہ PR وتر ہے۔

$$\begin{aligned} l(PR)^2 &= l(PQ)^2 + l(QR)^2 \\ &= (6)^2 + (6)^2 = 36 + 36 = 72 \end{aligned}$$

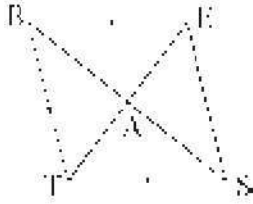
$$\therefore l(PR) = \sqrt{72}$$

اس لیے وتر کی لمبائی $\sqrt{72}$ سم ہے۔

مثال (3) BEST، ایک معین ہے جس کے وتر ایک دوسرے کو نقطہ A پر قطع کرتے ہیں۔

$$(i) \text{ اگر } m\angle BTS = 110^\circ \text{ ہو تو } m\angle TBS \text{ معلوم کیجیے۔}$$

$$(ii) \text{ اگر } l(TE) = 24, l(BS) = 70 \text{ ہو تو } l(TS) \text{ معلوم کیجیے۔}$$



حل : BEST کی کچی شکل بنا کر وتروں کا نقطہ تقاطع A دکھائیے۔

(i) معین کے مقابل کے زاویے متماثل ہوتے ہیں۔

$$\therefore m\angle BES = m\angle BTS = 110^\circ$$

$$\text{اب } m\angle BTS + m\angle BES + m\angle TBE + m\angle TSE = 360^\circ$$

$$\therefore 110^\circ + 110^\circ + m\angle TBE + m\angle TSE = 360^\circ$$

$$\therefore m\angle TBE + m\angle TSE = 360^\circ - 220^\circ = 140^\circ$$

$$\therefore 2m\angle TBE = 140^\circ \quad \dots (\because \text{معین کے مقابل کے زاویے متماثل ہوتے ہیں})$$

$$\therefore m\angle TBE = 70^\circ$$

$$\therefore m\angle TBS = \frac{1}{2} \times 70^\circ = 35^\circ \quad \dots (\text{معین کے وتر مقابل کے زاویوں کی نصف کرتے ہیں})$$

(ii) معین کے وتر ایک دوسرے کے عمودی ناصف ہوتے ہیں۔

اس لیے $\triangle TAS$ میں، $m\angle TAS = 90^\circ$

$$l(TA) = \frac{1}{2} l(TE) = \frac{1}{2} \times 24 = 12, l(AS) = \frac{1}{2} l(BS) = \frac{1}{2} \times 70 = 35$$

فیثاغورث کے مسئلہ کی روش سے

$$l(TS)^2 = l(TA)^2 + l(AS)^2 = (12)^2 + (35)^2 = 144 + 1225 = 1369$$

$$\therefore l(TS) = \sqrt{1369} = 37$$

مشقی سیٹ 8.2

1. سم $l(AB) = 6.0$ اور سم $l(BC) = 4.5$ کا مستطیل ABCD بنائیے۔
2. سم کے ضلع کا ایک مربع WXYZ بنائیے۔
3. سم ضلع اور $m\angle K = 75^\circ$ کا ایک معین KLMN بنائیے۔
4. ایک مستطیل کا وتر 26 سم اور ایک ضلع کی لمبائی 24 سم ہو تو اس کا دوسرا ضلع معلوم کیجیے۔

5. معین ABCD کے وتروں کی لمبائی 16 سم اور 12 سم ہے۔ اس معین کے ضلع کی لمبائی اور احاطہ معلوم کیجیے۔

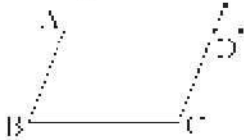
6. 8 سم ضلع کے مربع کا وتر معلوم کیجیے۔

7. ایک معین کے ایک زاویے کی پیمائش 50° ہے۔ اس کے دیگر تین زاویوں کی پیمائشیں معلوم کیجیے۔

متوازی الاضلاع (Parallelogram) :

ذوابعہ الاضلاع کے اس نام سے ہی آپ اس کی تعریف آسانی سے کر سکتے ہیں۔

جس ذوابعہ الاضلاع کے مقابل کے اضلاع ایک دوسرے کے متوازی ہوتے ہیں، اس ذوابعہ الاضلاع کو متوازی الاضلاع کہتے ہیں۔



متوازی الاضلاع کس طرح بنائیں گے؟

مقابل کی شکل کے مطابق ضلع AB اور ضلع BC ایک دوسرے سے کسی بھی پیمائش کا زاویہ بنانے

والے قطعات "مچھتیے"۔ "خط کے باہر واقع نقطے سے، اس خط کے متوازی خط کھینچنا" یہ عمل آپ نے کیا

ہے۔ اس کا استعمال کر کے نقطہ C سے ضلع AB کے متوازی خط "مچھتیے"۔ اسی طرح نقطہ A سے

قطعہ BC کے متوازی خط "مچھتیے" اور ان کے نقطہ تقاطع کو D نام دیجیے۔ متوازی الاضلاع ہے۔

دھیان رکھیے کہ متوازی خطوط کے تقاطع سے بننے والے داخلہ زاویے متماثل ہوتے ہیں۔ اس لیے اوپر کی شکل میں

$$m\angle D + m\angle A = 180^\circ \text{ اور } m\angle C + m\angle D = 180^\circ, m\angle B + m\angle C = 180^\circ, m\angle A + m\angle B = 180^\circ$$

یعنی متوازی الاضلاع کے زاویوں کی ایک خصوصیت ذیل کے مطابق ہے۔

● متوازی الاضلاع کے متوازیوں کی ہر جوڑی کے زاویے ایک دوسرے کے متماثل ہوتے ہیں۔

متوازی الاضلاع کی مزید خصوصیات معلوم کرنے کے لیے PQRS ایک متوازی الاضلاع ذیل کا عملی کام کرتے ہوئے بنائیے۔ کم زیادہ

چوڑائی کی دو ناپ پٹیاں لیجیے۔ ان میں سے ایک پٹی پر کاغذ رکھ کر اس کے کناروں سے لکیریں "مچھتیے"۔ دوسری ناپ پٹی اس پر ترچھی رکھ کر اس کے

کناروں سے لکیریں "مچھتیے"۔ اس کی وجہ سے آپ ایک متوازی الاضلاع حاصل ہوگا۔ اس کے وتر "مچھتیے" اور ان کے نقطہ تقاطع کو T نام دیجیے۔

(1) ذوابعہ الاضلاع کے مقابل کے زاویے کی پیمائشیں ناپ کر لکھیے۔

(2) مقابل کے ضلعوں کی جوڑیوں کی لمبائیاں ناپ کر لکھیے۔

(3) وتروں کی لمبائیاں ناپ کر لکھیے۔

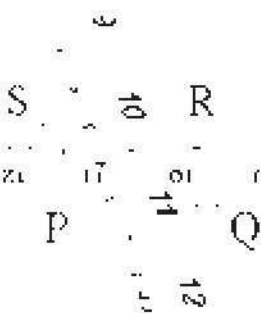
(4) نقطہ T کی وجہ سے بننے والے ہر وتر کے حصے کی لمبائی ناپ کر لکھیے۔

ان پیمائشوں کی مدد سے آپ کو متوازی الاضلاع کی درج ذیل خصوصیات حاصل ہوں گی۔

● مقابل کے زاویوں کی پیمائشیں مساوی ہوتی ہیں۔ یعنی مقابل کے زاویے متماثل ہوتے ہیں۔

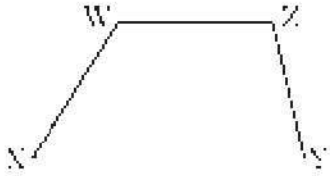
● مقابل کے ضلعوں کی لمبائیاں مساوی ہوتی ہیں یعنی متماثل ہوتے ہیں۔

● وتر ایک دوسرے کی تنصیف کرتے ہیں۔ مختلف متوازی الاضلاع بنا کر ان خصوصیات کی تصدیق کیجیے۔



ذوزلقہ (Trapezium) :

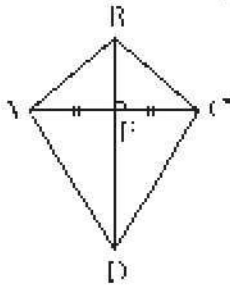
جس ذوزلقہ الاضلاع کے مقابل کے ضلعوں کی ایک جوڑی متوازی ہو، اس ذوزلقہ الاضلاع کو ذوزلقہ کہتے ہیں۔



متصلہ شکل میں □WXYZ میں ضلع WZ اور ضلع XY مقابل کے اضلاع کی صرف ایک جوڑی متوازی ہے۔ تعریف کے مطابق □WXYZ ایک ذوزلقہ ہے۔ متوازی ضلعوں اور ان کے تقاطع کی وجہ سے بننے والے داخلہ زاویوں کی خصوصیت کی بنا پر $m\angle W + m\angle X = 180^\circ$ اور $m\angle Y + m\angle Z = 180^\circ$ ذوزلقہ میں متواتر زاویوں کی چار جوڑیوں میں سے دو جوڑیوں کے زاویے ایک دوسرے کے متمم ہوتے ہیں۔

پتنگ (Kite) :

شکل میں □ABCD دیکھیے۔ اس ذوزلقہ الاضلاع میں وتر BD، وتر AC کا عمودی ناصف ہے۔



جس ذوزلقہ الاضلاع کا ایک وتر، دوسرے وتر کا عمودی ناصف ہوتا ہے ایسے ذوزلقہ الاضلاع کو پتنگ کہتے ہیں۔ اس شکل میں،

$$CD \cong AD \text{ قطعہ اور } BC \cong AB \text{ قطعہ}$$

اس کی تقسیم کار کی مدد سے تصدیق کیجیے۔

اسی طرح $\angle BAD$ اور $\angle BCD$ ناپیے اور وہ متماثل ہیں اس کی بھی تصدیق کیجیے۔

یعنی پتنگ ذوزلقہ الاضلاع کی ایک قسم ہے جس میں دو خصوصیات ہوتی ہیں۔

- متواتر ضلعوں کی دو جوڑیاں متماثل ہوتی ہیں۔
- مقابل کے زاویوں کی ایک جوڑی کے زاویے متماثل ہوتے ہیں۔

حل کردہ مثالیں

مثال (1) ایک متوازی الاضلاع کے متواتر زاویوں کی پیمائشیں $(5x - 7)^\circ$ اور $(4x + 25)^\circ$ ہیں۔ ان زاویوں کی پیمائش معلوم کیجیے۔

حل : متوازی الاضلاع کے متواتر زاویے متمم ہوتے ہیں۔

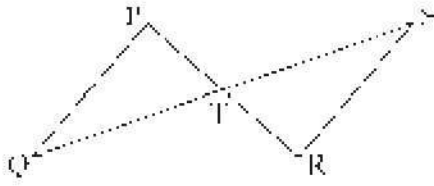
$$\therefore (5x - 7) + (4x + 25) = 180 \quad \therefore 9x = 180 - 18 = 162$$

$$\therefore 9x + 18 = 180 \quad \therefore x = 18$$

$$\text{ایک زاویے کی پیمائش} = (5x - 7)^\circ = 5 \times 18 - 7 = 90 - 7 = 83^\circ$$

$$\text{دوسرے زاویے کی پیمائش} = (4x + 25)^\circ = 4 \times 18 + 25 = 72 + 25 = 97^\circ$$

مثال (2) مقابل کی شکل میں PQRS متوازی الاضلاع ہے۔ اس کے وتروں کا نقطہ تقاطع T ہے۔ شکل کی بنیاد پر ذیل کے سوالوں کے جواب لکھیے۔

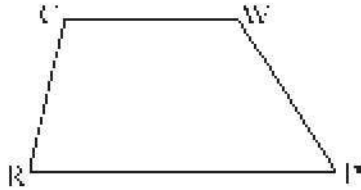


- (i) اگر $l(PS) = 5.4$ سم ہو تو $l(QR) = ?$
- (ii) اگر $l(TS) = 2.5$ سم ہو تو $l(QS) = ?$
- (iii) اگر $m\angle QRS = 118^\circ$ ہو تو $m\angle QPS = ?$
- (iv) اگر $m\angle SRP = 72^\circ$ ہو تو $m\angle RPQ = ?$

حل : متوازی الاضلاع PQRS میں

- (i) $l(QR) = l(PS) = 5.4$ سم (مقابل کے ضلع متماثل) ...
- (ii) $l(QS) = 2 \times l(TS) = 2 \times 2.5 = 5$ سم (وتر ایک دوسرے کی نصف کرتے ہیں) ...
- (iii) $m\angle QPS = m\angle QRS = 118^\circ$ (مقابل کے زاویے متماثل) ...
- (iv) $m\angle RPQ = m\angle SRP = 72^\circ$ (متبادلہ زاویے متماثل) ...

مثال (3) CWPR کے متوازی زاویوں کی پیمائشوں کا تناسب $5 : 3 : 9 : 7$ کی نسبت میں ہے۔ تب اس ذواربعۃ الاضلاع کے زاویوں کی پیمائش معلوم کیجیے اور ذواربعۃ الاضلاع کی قسم پہچانیے۔



حل : فرض کیجیے $m\angle C : m\angle W : m\angle P : m\angle R = 5 : 3 : 9 : 7$

اس لیے فرض کیجیے $\angle C, \angle W, \angle P$ اور $\angle R$ کی پیمائش بالترتیب $5x, 3x, 9x, 7x$

$$\therefore 5x + 3x + 9x + 7x = 360^\circ$$

$$\therefore 24x = 360^\circ, \quad \therefore x = 15$$

$$\therefore m\angle C = 5 \times 15 = 75^\circ, m\angle W = 3 \times 15 = 45^\circ$$

$$m\angle P = 9 \times 15 = 135^\circ \text{ اور } m\angle R = 7 \times 15 = 105^\circ$$

$$\therefore m\angle C + m\angle R = 75^\circ + 105^\circ = 180^\circ, \therefore \text{ضلع } CW \parallel \text{ضلع } RP$$

$$m\angle C + m\angle W = 75^\circ + 45^\circ = 120^\circ \neq 180^\circ$$

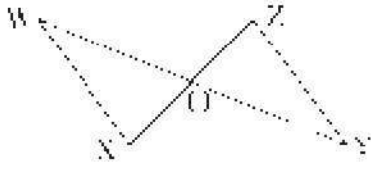
اس لیے ضلع CR، ضلع WP کے متوازی نہیں ہے۔

$\therefore$ CWPR کے مقابل کے ضلعوں کی ایک ہی جوڑی متوازی ہے۔

اس لیے CWPR ذوزنقہ ہے۔

مشقی سیٹ 8.3

1. ایک متوازی الاضلاع کے مقابل کے زاویوں کی پیمائشیں $(3x - 2)^\circ$ اور $(50 - x)^\circ$ ہیں۔ تب ذواربعۃ الاضلاع کے تمام زاویوں کی پیمائش معلوم کیجیے۔



2. مقابل کے متوازی الاضلاع کی شکل کے تعلق سے درج ذیل سوالات کے جوابات لکھیے۔

(1) اگر سم $l(WZ) = 4.5$ ہو تو $l(XY) = ?$

(2) اگر سم $l(YZ) = 8.2$ ہو تو $l(XW) = ?$

(3) اگر سم $l(OX) = 2.5$ ہو تو $l(OZ) = ?$

(4) اگر سم $l(WO) = 3.3$ ہو تو $l(WY) = ?$

(5) اگر $m\angle WZY = 120^\circ$ ہو تو $m\angle WXY = ?$ اور $m\angle XWZ = ?$

3. $\square ABCD$ ، ایک متوازی الاضلاع بنائیے۔ جس میں سم $l(BC) = 7$ ، $\angle ABC = 40^\circ$ ، سم $l(AB) = 3$

4. ایک ذواربعتہ الاضلاع کے چار متوازی زاویے $1 : 2 : 3 : 4$ کے تناسب میں ہیں۔ وہ کس قسم کا ذواربعتہ الاضلاع ہوگا؟ اس ذواربعتہ الاضلاع کے ہر زاویے کی پیمائش معلوم کیجیے۔ وجہ لکھیے۔

5. $\square BARC$ اس طرح بنائیے کہ سم $l(BA) = l(BC) = 4.2$ ، سم $l(AC) = 6.0$ ، سم $l(AR) = l(CR) = 5.6$ ۔

6.* ذواربعتہ الاضلاع $\square PQRS$ اس طرح بنائیے کہ سم $l(PQ) = 3.5$ ، سم $l(QR) = 5.6$ ، سم $l(RS) = 3.5$

اگر $\square PQRS$ متوازی الاضلاع دیا ہوا ہو تو اوپر دی ہوئی کون سی معلومات دینا ضروری نہیں ہے۔

جوابات کی فہرست

مشقی سیٹ 8.2

4. سم 10 5. سم 10 اور احاطہ 40 سم 6. سم 128 7. $130^\circ, 50^\circ, 130^\circ$

مشقی سیٹ 8.3

1. $37^\circ, 143^\circ, 37^\circ, 143^\circ$
 2. (1) سم 4.5 (2) سم 8.2 (3) سم 2.5 (4) سم 6.6 (5) $120^\circ, 60^\circ$
 4. $36^\circ, 72^\circ, 108^\circ, 144^\circ$ ، ذوزنقہ



چھوٹ اور کمیشن

9

آئیے ذرا یاد کریں



درج ذیل خالی چوکوں کو مناسب عدد لکھ کر مکمل کیجیے۔

1. $\frac{12}{100} =$ فی صدی = %
2. 47 فی صدی = %
3. 86% = %
4. 300 کا 4 فی صدی = $300 \times \frac{\text{input}}{\text{input}} = \text{input}$
5. 1700 کا 15% = $1700 \times \frac{\text{input}}{\text{input}} = \text{input}$

آئیے بحث کریں



اس قسم کے اشتہارات آپ نے دیکھے ہوں گے۔ سیل میں کئی چیزوں کی قیمتوں پر چھوٹ یا تخفیف دی جاتی ہے۔ اپنے یہاں عام طور پر جولائی کے مہینے میں، خاص طور پر کپڑوں کے سیل شروع ہوتے ہیں۔ اس کی وجہ دریافت کیجیے اور بحث کیجیے۔

آئیے سمجھ لیں



چھوٹ (رعایت) (Discount) :

شری سریش نے جون اور جولائی مہینے میں فروخت کی گئی ساڑیوں کی تعداد اور نفع کا جدول ذیل میں دیا گیا ہے۔

کل نفع	فروخت کی گئی ساڑیوں کی تعداد	ایک ساڑی پر حاصل ہونے والا نفع (روپے میں)	ساڑی کی فروخت قیمت روپے میں	ساڑی کی اصل قیمت روپے میں	مہینہ
$50 \times 40 = 2000$	40	50	250	200	جون
$30 \times 100 = 3000$	100	30	230	200	جولائی (سیل)

اوپر کے جدول سے آپ کی سمجھ میں آیا ہوگا کہ جولائی میں ساڑیوں کے سیل کا اعلان کر کے ہر ساڑی پر چھوٹ دی گئی ہے۔ اس لیے ان کا ایک ساڑی پر نفع جون مہینے کی بہ نسبت جولائی مہینے میں کم ہوا۔ پھر بھی جولائی مہینے میں زیادہ ساڑیوں کی فروخت ہوئی اس لیے کل نفع میں اضافہ ہوا۔

فروخت کی جانے والی چیزوں پر ان کی قیمت چھپی ہوئی ہوتی ہے۔ اسے اس چیز کی چھپی ہوئی قیمت (Marked Price) کہتے ہیں۔ دکان دار چھپی ہوئی قیمت پر چھوٹ (رعایت) دیتا ہے۔

اشیا فروخت کرتے وقت، دکان دار چھپی ہوئی قیمت سے جتنی رقم کم لیتا ہے، اس رقم کو ”چھوٹ“ کہتے ہیں۔ چھوٹ دینے کے بعد باقی ماندہ قیمت کو فروخت قیمت کہتے ہیں۔

$$\text{چھوٹ} - \text{چھپی ہوئی قیمت} = \text{فروخت قیمت}$$

چھوٹ کی شرح عام طور پر فی صدی میں دی جاتی ہے۔ 20 فی صدی چھوٹ کا مطلب، اشیا کی چھپی ہوئی قیمت سے 20% کم قیمت لے کر چیز بیچنا۔

یعنی اشیا کی چھپی ہوئی قیمت 100 روپے ہو تو اس پر 20% چھوٹ دینے سے اس کی فروخت قیمت = 100 - 20 = 80 روپے ہو جائے گی۔

$$\text{ایسے کاروبار میں اگر } x\% \text{ چھوٹ ہو تو } \frac{\text{اشیا کی قیمت پر چھوٹ}}{\text{چھپی ہوئی قیمت}} = \frac{x}{100} \text{ تعلق ہوتا ہے۔}$$

$$\therefore \text{اشیا کی قیمت پر چھوٹ} = \frac{x \times \text{چھپی ہوئی قیمت}}{100}$$

مزید معلومات کے لیے : آج کل دکان میں جا کر خریدنے کی بجائے کتابیں، کپڑے، موبائیل وغیرہ کئی چیزیں آن لائن خرید و فروخت کی جاتی ہیں۔ جو کمپنی آن لائن اشیا خرید و فروخت کرتی ہیں اسے دکان کی سجاوٹ اور وہاں کے انتظامات کا خرچ بہت کم ہوتا ہے۔ اس لیے آن لائن خرید و فروخت پر چھوٹ ملتی ہے اور اشیا گھر پہنچ جاتی ہیں۔

حل کردہ مثالیں

مثال (1) ایک کتاب کی چھپی ہوئی قیمت 360 روپے ہے۔ دکان دار نے وہ کتاب 306 روپے میں فروخت کی۔ تب اس نے فی صدی چھوٹ کتنی دی؟

حل : 306 = فروخت قیمت ، 360 = چھپی ہوئی قیمت

$$54 = 360 - 306 = \text{چھوٹ}$$

اشیا کی چھپی ہوئی قیمت 360 روپے، تب چھوٹ 54 روپے۔

اس لیے فرض کیجیے اشیا کی چھپی ہوئی قیمت 100 روپے، تب چھوٹ x روپے

$$\frac{\text{چھوٹ}}{\text{چھپی ہوئی قیمت}} = \frac{x}{100}$$

$$\therefore \frac{54}{360} = \frac{x}{100} \quad \therefore x = \frac{54 \times 100}{360} = 15$$

اس لیے کتاب کی چھپی ہوئی قیمت پر 15% چھوٹ دی گئی۔

مثال (2) کرسی کی چھپی ہوئی قیمت 1200 روپے ہے۔ اس پر 10% چھوٹ ہو تو کل چھوٹ کتنی؟ اور کرسی کی فروخت قیمت کتنی ہوگی؟

حل :

طریقہ (I)

10% = چھوٹ، روپے 1200 = چھپی ہوئی قیمت

تعمیم: $\frac{\text{چھوٹ}}{\text{قیمت}} = \frac{\text{تعمیم}}{\text{قیمت}}$ کا تناسب معلوم کریں۔

فرض کیجیے کرسی کی قیمت پر x روپے چھوٹ ملتی ہے۔

$$\therefore \frac{x}{1200} = \frac{10}{100}$$

$$x = \frac{10}{100} \times 1200$$

$$x = 120$$

$$\therefore \text{کل چھوٹ} = 120 \text{ ₹}$$

چھوٹ - چھپی ہوئی قیمت = فروخت قیمت

$$= 1200 - 120$$

$$= 1080$$

اس لیے کرسی کی فروخت قیمت 1080 روپے۔

طریقہ (II)

چھپی ہوئی قیمت پر 10% چھوٹ، یعنی اگر چھپی ہوئی قیمت

100 روپے ہو تو فروخت قیمت 90 روپے۔

اس لیے چھپی ہوئی قیمت 1200 ہو تو

فرض کیجیے فروخت قیمت x روپے

$$\therefore \frac{x}{1200} = \frac{90}{100}$$

$$\therefore x = \frac{90}{100} \times 1200$$

$$\therefore x = 1080$$

اس لیے کرسی کی فروخت قیمت 1080 روپے۔

$$\text{روپے } 120 = 1200 - 1080 = \text{کل چھوٹ}$$

مثال (3) چھپی ہوئی قیمت پر 20% چھوٹ دے کر ایک ساڑی 1120 روپوں میں فروخت کی گئی تو اس ساڑی کی چھپی ہوئی قیمت کتنی ہوگی؟

حل : فرض کیجیے۔ ساڑی کی چھپی ہوئی قیمت 100 روپے ہے۔

اس پر 20% چھوٹ دی گئی۔ یعنی گاہک کو وہ ساڑی روپے $100 - 20 = 80$ میں فروخت کی گئی۔

یعنی جب فروخت قیمت 80 روپے، تب چھپی ہوئی قیمت 100 روپے۔

فرض کیجیے فروخت قیمت 1120 روپے، تب چھپی ہوئی قیمت x روپے۔

$$\therefore \frac{80}{100} = \frac{1120}{x}$$

$$\therefore x = \frac{1120 \times 100}{80}$$

$$= 1400$$

اس لیے ساڑی کی چھپی ہوئی قیمت 1400 روپے ہوگی۔

مثال (4) ایک دکاندار ایک چیز کی کچھ قیمت طے کر کے فروخت کرنا چاہتا ہے اور چیز کی قیمت اس نے طے کی ہوئی قیمت سے 30% بڑھا کر چھاپتا ہے۔ چیز فروخت کرتے وقت گاہک کو 20% چھوٹ دیتا ہے تو دکاندار کو اس کی طے کردہ قیمت سے کتنے فی صدی زیادہ قیمت حاصل ہوگی؟ معلوم کیجیے۔

حل : قیمت میں اضافے اور اسی طرح نفع میں اضافے کا فی صد طے کی ہوئی قیمت پر ہوتا ہے۔ اس لیے طے کی گئی قیمت 100 روپے فرض کریں تو مثال حل کرنا آسان ہوگا۔

فرض کیجیے طے کی ہوئی قیمت 100 روپے ہے۔ اس قیمت کو وہ 30% سے بڑھا کر بتاتا ہے۔

$$\therefore \text{روپے } 130 = \text{چھپی ہوئی قیمت}$$

$$\text{چھوٹ} = 130 \times \frac{20}{100} = 26$$

$$\therefore \text{روپے } 104 = 130 - 26 = \text{فروخت قیمت}$$

اگر طے کی ہوئی قیمت 100 روپے ہو تو اسے 104 روپے حاصل ہوتے ہیں۔

یعنی دکاندار کو اس کی طے کی ہوئی قیمت سے 4% زیادہ قیمت ملتی ہے۔

مثال (5) ایک چیز پر دکاندار، گاہک کو 8% چھوٹ دیتا ہے۔ پھر بھی اسے 15% نفع حاصل ہوتا ہے۔ اگر اس چیز کی چھپی قیمت 1750 روپے ہو تو وہ چیز دکاندار نے کتنی قیمت پر خریدی ہوگی؟

$$8 \text{ فی صدی چھوٹ، روپے } 1750 = \text{چیز کی چھپی قیمت}$$

$$\therefore \text{روپے } 140 = 1750 \times \frac{8}{100}$$

$$\text{روپے } 1610 = 1750 - 140 = \text{چیز کی فروخت قیمت}$$

15% نفع یعنی چیز کی خرید قیمت 100 روپے ہو تو، فروخت قیمت 115 روپے

یعنی، فروخت قیمت 115 روپے ہو تو، خرید قیمت 100 روپے

فرض کیجیے، فروخت قیمت 1610 روپے ہو تو، خرید قیمت x روپے ہے۔

$$\therefore \frac{x}{100} = \frac{1610}{115}, \quad \therefore x = \frac{1610 \times 100}{115} = 1400$$

$$\therefore \text{روپے } 1400 = \text{چیز کی خرید قیمت}$$

یہ میری سمجھ میں آگیا

● فروخت قیمت - چھپی ہوئی قیمت = چھوٹ →

● اگر چھوٹ $x\%$ ہو تب،

$$\frac{x}{100} = \frac{\text{اشیاء کی قیمت پر چھوٹ}}{\text{چھپی ہوئی قیمت}}$$

مشقی سیٹ 9.1

1. اگر چھپی ہوئی قیمت = 1700 روپے، فروخت قیمت = 1540 روپے ہو تو چھوٹ معلوم کیجیے۔
2. اگر 990 ₹ = چھپی ہوئی قیمت اور چھوٹ 10 فی صدی ہو تو فروخت قیمت معلوم کیجیے۔
3. اگر 990 ₹ = فروخت قیمت اور چھوٹ 20 فی صدی ہو تو چھپی ہوئی قیمت معلوم کیجیے۔
4. ایک پنکھے کی چھپی ہوئی قیمت 3000 روپے ہے۔ دکاندار 12% چھوٹ دے تو پنکھے پر دی گئی چھوٹ اور پنکھے کی فروخت قیمت معلوم کیجیے۔
5. 2300 روپے چھپی ہوئی قیمت کا کسر، گا ہک کو 1955 روپے میں ملتا ہے تو گا ہک کو ملنے والی فی صدی چھوٹ معلوم کیجیے۔
6. دکاندار ایک ٹی-وی سیٹ پر 11 فی صد چھوٹ دیتا ہے۔ اس لیے گا ہک کو وہ سیٹ 22250 روپے میں ملتا ہے تو اس T.V. سیٹ کی چھپی ہوئی قیمت معلوم کیجیے۔

7. چھپی ہوئی قیمت پر 10% چھوٹ ہو تو گا ہک کو کل 17 روپے چھوٹ ملتی ہے تو گا ہک کو وہ چیز کتنے روپیوں میں حاصل ہوگی اسے معلوم کرنے کے لیے درج ذیل خالی چوکوں میں مناسب عدد لکھ کر عملی کام مکمل کیجیے۔

عملی کام : فرض کیجیے، چیز کی چھپی ہوئی قیمت 100 روپے ہے۔

$$\text{روپے } 90 = \boxed{} - \boxed{} = \text{گا ہک کو وہ چیز ملے گی۔}$$

یعنی جب $\boxed{}$ روپے چھوٹ، تب فروخت قیمت $\boxed{}$ روپے

فرض کیجیے جب $\boxed{}$ روپے چھوٹ ہو تب فروخت قیمت x روپے۔

$$\therefore \frac{x}{\boxed{}} = \frac{\boxed{}}{\boxed{}}, \quad \therefore x = \frac{\boxed{} \times \boxed{}}{\boxed{}} = \boxed{}$$

اس لیے گا ہک کو وہ چیز 153 روپے میں ملے گی۔

8. دکاندار ایک چیز ایک مخصوص قیمت پر فروخت کرنا طے کرتا ہے اور اس کی قیمت طے کردہ قیمت سے 25% اضافہ کر کے چھاپتا ہے۔ چیز فروخت کرتے وقت وہ گا ہک کو 20% چھوٹ دیتا ہے تو دکاندار کو اس کی طے کردہ قیمت اور فروخت قیمت کے درمیان کتنے فی صدی فرق ہوا؟



کمیشن (Commission) :

اشیا کی پیداوار کرنے والی کمپنی کو خود اپنا مال فروخت کرنا ممکن نہیں ہوتا تب وہ کمپنی کچھ افراد کو اپنا مال مثلاً کتابیں، کپڑے، صابن وغیرہ

فروخت کرنے کی ذمہ داری دیتی ہے۔ اس خدمت کے عوض اس فرد کو کچھ رقم دی جاتی ہے۔ اسے کمیشن کہتے ہیں اس لیے ایسا کام کرنے والے افراد کو کمیشن ایجنٹ کہتے ہیں۔ کمیشن فی صدی میں دیا جاتا ہے۔ اس کی شرح چیزوں کے مطابق مختلف ہوتی ہے۔ زمین (قطعہ اراضی)، گھر، مویشی ان کے مالکوں کو ان چیزوں کے فروخت کرتے وقت آسانی سے گاہک نہیں ملتے۔ اس لیے فروخت کرنے والے اور خریدنے والے ان دونوں کو ایک جگہ لانے کا کام جو شخص کرتا ہے اسے پیچولیا (دلال) یا کمیشن ایجنٹ کہا جاتا ہے۔ اناج، سبزی ترکاری، پھل، پھول وغیرہ زرعی اشیاء کی فروخت جس پیچولیا کے ذریعے ہوتی ہے اس فرد کو دلال یا کمیشن ایجنٹ کہتے ہیں۔ اس کام پر دلال کو جو کمیشن ملتا ہے اسے دلالی کہتے ہیں۔ یہ دلالی یا کمیشن جس کا مال فروخت کرنا ہے اس کی طرف سے یا جو اشیا خریدتا ہے اس کی جانب سے، یا دونوں جانب سے مل سکتا ہے۔

حل کردہ مثالیں

مثال (1) ایک دلال کی مدد سے ریحان 2,50,000 روپے قیمت کا قطعہ اراضی فرحان کو فروخت کرتا ہے۔ دلال نے دونوں سے 2% دلالی لی تو دلال کو کل کتنی دلالی ملی؟

$$\begin{aligned} \text{روپے } 2,50,000 &= \text{قطعہ اراضی کی قیمت} \\ \therefore \text{دلالی} &= 2,50,000 \times \frac{2}{100} = 5000 \text{ روپے} \\ \text{دلالی دونوں جانب سے ملی۔} \end{aligned}$$

$$\text{روپے کل دلالی} = 5000 + 5000 = 10,000$$

مثال (2) احمد نے دلال کی معرفت 10 کونٹل گیہوں، فی کونٹل 4,050 روپے کے حساب سے فروخت کیا۔ اس نے دلال کو 1% دلالی دی۔ تو گیہوں فروخت کرنے پر احمد کو کتنی رقم ملی؟ اسے معلوم کیجیے۔

$$1 \text{ فی صد} = \text{دلالی، روپے } 40500 = 10 \times 4050 = \text{گیہوں کی کل فروخت قیمت}$$

$$\therefore \text{دلالی} = 40500 \times \frac{1}{100} = 405$$

$$\text{دلالی} - \text{گیہوں کی فروخت} = \text{گیہوں فروخت کرنے پر ملنے والی رقم}$$

$$= 40500 - 405 = 40,095$$

$$\text{روپے } 40,095 = \text{گیہوں فروخت کرنے پر احمد کو ملنے والی رقم}$$

تخفیف (Rebate) :

کھادی گرام ادھیوگ، بھنڈار، ہاتھ ماگھ، دست کاری کی اشیا فروخت کرنے والا مرکز، مہیلا بچت گٹ وغیرہ انجمنیں کچھ مخصوص مواقع پر گاہک کو چھوٹ دیتی ہیں۔ مثلاً گاندھی جینتی کے موقع پر کھادی کپڑوں پر چھوٹ دی جاتی ہے۔

ایسے وقت دکاندار کو چھپی قیمت سے جتنی رقم ملتی ہے اس کی تلافی حکومت کرتی ہے۔ اس اسکیم کے تحت گاہک کو جو چھوٹ ملتی ہے اسے تخفیف Rebate کہتے ہیں۔

انکم ٹیکس ادا کرنے والے شخص کی آمدنی طے شدہ حد تک ہوتی ہے تو انھیں انکم ٹیکس میں چھوٹ ملتی ہے۔ اس چھوٹ کو بھی تخفیف (Rebate) کہتے ہیں۔

مختصر تخفیف یعنی ایک قسم کی چھوٹ ہی ہوتی ہے۔ وہ مخصوص شرط کے مطابق منظور شدہ اداروں یا حکومت کی جانب سے دی جاتی ہے۔

حل کردہ مثالیں

مثال : ہاتھ ماگھ منڈل کے ایک دکان سے عبداللہ نے درج ذیل اشیا خریدیں۔

(i) 2 چادر ؛ 375 روپے فی چادر

(ii) 525 روپے فی شطرنجی کے حساب سے 2 شطرنجی

اس خرید پر فی صدی 15 روپے تخفیف ملی تو تخفیف کی کل رقم کتنی؟ عبداللہ دکاندار کو کتنی رقم دے گا؟

حل : $2 \times 525 = ₹1050$ 2 شطرنجی کی قیمت؛ $2 \times 375 = ₹750$ 2 چادر کی قیمت

روپے $1800 = 750 + 1050$ خریدی گئی چیزوں کی کل قیمت

روپے $270 = 1800 \times \frac{15}{100}$ ملنے والی کل تخفیف

روپے $1530 = 1800 - 270$ عبداللہ کے ذریعے دکاندار کو ادا کی جانے والی رقم۔

مشقی سیٹ 9.2

1. جان نے ایک پبلشر کی 4500 روپے قیمت کی کتابیں فروخت کیں۔ اس پر اسے 15% کمیشن ملا۔ تو جان کو کل کتنا کمیشن ملا؟ اسے معلوم کرنے کے لیے خالی چوکون مکمل کیجیے۔

کمیشن کی شرح = ، کتابوں کی فروخت قیمت =

روپے کمیشن = ، حاصل ہونے والا کمیشن =

2. رفیق 4 فی صدی دلالی دے کر دلال کے ذریعے 15000 روپے کے پھول فروخت کرتا ہے۔ دلالی معلوم کیجیے۔ رفیق کو حاصل ہونے والی رقم معلوم کیجیے۔

3. ایک کسان 9200 روپے کا مال ایک دلال کے معرفت فروخت کرتا ہے۔ اسے 2% دلالی دینی پڑی، تو دلال کو کتنی رقم ملے گی؟

4. کھادی بھنڈار سے اُمانتائی درج ذیل چیزیں خریدتی ہے :

(i) 3 ساڑیاں، ہر ایک کی قیمت 560 روپے۔

(ii) شہد کی 6 بوتلیں، ہر ایک کی قیمت 90 روپے۔

اس خرید پر 12% کے حساب سے تخفیف (Rebate) ملی تو اُمانتائی کو وہ چیزیں کتنے روپے میں ملیں؟

5. دی ہوئی معلومات کی مدد سے درج ذیل خالی چوکوں کو مناسب عدد سے پُر کیجیے۔

ایک دلال کے معرفت شریعتی دیپانجلی نے 7,50,000 روپے قیمت کا ایک گھر شریعتی لیلا این سے خریدا۔ دلال نے ہر ایک سے 2% دلالی لی تو

$$(1) \text{ شریعتی دیپانجلی نے گھر خریدنے کے لیے } \boxed{} \times \frac{\boxed{}}{\boxed{}} = \boxed{} \text{ روپے دلالی دی۔}$$

$$(2) \text{ شریعتی لیلا این نے گھر فروخت کرنے کے لیے } \boxed{} \text{ روپے دلالی دی۔}$$

$$(3) \text{ دلال کو اس کاروبار میں کل } \boxed{} \text{ روپے دلالی ملی۔}$$

$$(4) \text{ شریعتی دیپانجلی کو وہ گھر } \boxed{} \text{ روپے میں ملا۔}$$

$$(5) \text{ شریعتی لیلا این کو گھر فروخت کرنے پر } \boxed{} \text{ روپے ملے۔}$$

جوابات کی فہرست

مشقی سیٹ 9.1

- | | | | |
|---------|------------|----------|-----------------------------------|
| 1. ₹160 | 2. ₹891 | 3. ₹1125 | 4. چھوٹ ₹360 اور فروخت قیمت ₹2640 |
| 5. 15% | 6. ₹25,000 | | |

مشقی سیٹ 9.2

- | | | |
|------------------------|---------|-------------|
| 1. ₹14400 اور ₹600 رقم | 2. ₹184 | 3. ₹1953.60 |
|------------------------|---------|-------------|



متفرق مجموعہ سوالات 1

1. ذیل کے سوالوں کے لیے متبادل جوابات دیے ہوئے ہیں۔ ان میں سے مناسب متبادل منتخب کیجیے۔

(1) □ PQRS میں $m\angle P = m\angle R = 108^\circ$ اور $m\angle Q = m\angle S = 72^\circ$ ہو تو ذیل میں سے کون سے

اضلاع متوازی ہیں؟

- (A) ضلع PQ اور ضلع SR (B) ضلع PQ اور ضلع QR
(C) ضلع PS اور ضلع SR (D) ضلع PQ اور ضلع PS

(2) ذیل کے بیانات پڑھیے، اس کے نیچے دیے ہوئے متبادلات سے مناسب متبادل منتخب کیجیے۔

- (i) مستطیل کے وتر ایک دوسرے کے عمودی ناصف ہوتے ہیں۔
(ii) معین کے وتر ایک دوسرے کے عمودی ناصف ہوتے ہیں۔
(iii) متوازی الاضلاع کے وتر ایک دوسرے کے عمودی ناصف ہوتے ہیں۔
(iv) پتنگ کے وتر ایک دوسرے کے عمودی ناصف ہوتے ہیں۔
(A) بیان (ii) اور (iii) صحیح ہیں۔ (B) صرف بیان (ii) صحیح ہے۔
(C) بیان (ii) اور (iv) صحیح ہیں۔ (D) بیان (i)، (iii)، (iv) صحیح ہیں۔

(3) $19^3 = 6859$ ہو تو $\sqrt[3]{0.0006859} = ?$

- (A) 0.19 (B) 0.019 (C) 19 (D) 1.9

2. ذیل کے اعداد کے جذور المکعب معلوم کیجیے۔

- (1) 5832 (2) 4096

3. $m \propto n$ جب $m = 25$ تب $n = 15$ اس کی مدد سے

(1) $n = 87$ ہو تو m کتنا؟ (2) $m = 155$ ہو تو $n = ?$

4. x اور y کے درمیان معکوس تغیر ہے۔ جب $x = 12$ تب $y = 30$ ہو تو

(1) اگر $x = 15$ ہو تو $y = ?$ (2) اگر $y = 18$ ہو تو $x = ?$

5. ایک خط l متوازی خط m سے 3.5 سم کے فاصلے پر ایک متوازی خط n مچھتی ہے۔

6. $(2.56)^{\frac{1}{2}}$ یہ عدد کس عدد کے کس جذور کی کون سی قوت کا ہے؟ لکھیے۔

7. ضابطے کا استعمال کر کے توسیع کیجیے۔

(1) $(5x-7)(5x-9)$ (2) $(2x-3)^2$ (3) $(a + \frac{1}{2})^2$

8. ایک منفرجہ الزاویہ مثلث بنائیے۔ اس مثلث کے تمام وسطانیہ کھینچ کر ان کا نقطہ تراکز دکھائیے۔

9. $\triangle ABC$ اس طرح بنائیے کہ سم $l(BC) = 5.5$ ، $m\angle ABC = 90^\circ$ ، سم $l(AB) = 4$ اس مثلث کے ارتفاعوں کا نقطہ تراکز دکھائیے۔

10. ایک بس کو 48 کلومیٹر فی گھنٹہ کی رفتار سے ایک گاؤں سے دوسرے گاؤں جانے کے لیے 5 گھنٹے لگتے ہیں۔ بس کی رفتار 8 کلومیٹر فی گھنٹہ کم کی جائے تو اتنا ہی فاصلہ طے کرنے کے لیے کتنا وقت لگے گا؟ معلوم کیجیے۔ تغیر کی قسم کی شناخت کر کے مثال حل کیجیے۔

11. $\triangle ABC$ کی قطعہ AD اور قطعہ BE وسطا ہے ہیں۔ G ان کا نقطہ تراکز ہے۔

اگر سم $l(AG) = 5$ ہو تو $l(GD) = ?$ اور سم $l(GE) = 2$ ہو تو $l(BE) = ?$

12. ذیل کے ناطق اعداد کو اعشاریہ کی صورت میں لکھیے۔

(1) $\frac{8}{13}$ (2) $\frac{11}{7}$ (3) $\frac{5}{16}$ (4) $\frac{7}{9}$

13. اجزائے ضربی کیجیے۔

(1) $2x^2 - 11x + 5$ (2) $x^2 - 2x - 80$ (3) $3x^2 - 4x + 1$

14. ایک T.V. سیٹ کی قیمت 50,000 روپے ہے۔ اس سیٹ کو دکاندار 15% رعایت دے کر فروخت کرتا ہے تو گا ہک کو وہ T.V. سیٹ کتنے روپے میں ملے گا؟

15. راجا بھاؤ نے اپنا پلاٹ (قطعہ زمین) ایک دلال کی معرفت وسنت راؤ کو 88,00,000 روپے میں فروخت کیا۔ دلال نے دونوں سے 2% شرح سے دلائی لی۔ تو دلال کو کل کتنے روپے دلائی ملی؟

16. $\square ABCD$ ایک متوازی الاضلاع بنائیے اس طرح کہ سم $l(DC) = 5.5$ ، $m\angle D = 45^\circ$ اور سم $l(AD) = 4$



17. متصلہ شکل میں خط $m \parallel$ خط l خط، اسی طرح $q \parallel$ خط p ہے۔ اس کی مدد سے

$\angle a$ ، $\angle b$ ، $\angle c$ ، $\angle d$ کی پیمائش معلوم کیجیے۔

جوابات کی فہرست

1. (i) B (ii) B (iii) D
2. (1) 18 (2) 16
3. (1) 145 (2) 93
4. (1) 24 (2) 20
6. 256 کے ساتویں جذری پانچویں قوت
7. (1) $25x^2 - 80x + 63$ (2) $8x^2 - 36x + 54$ (3) $x^2 + \frac{3x^2}{2} + \frac{3x}{4} + \frac{1}{8}$
10. معکوس تغیر، 6 گھنٹے
11. سم $l(GD) = 2.5$ ، سم $l(BE) = 6$
12. (1) 0.615384 (2) 1.571428 (3) 0.3125 (4) 0.7
13. (1) $(x^2 - 5)$ (2) $(x - 1)$ (3) $(x - 1)(3x - 1)$
14. ₹42,500
14. ₹3,52,000
17. $78^\circ, 78^\circ, 102^\circ, 78^\circ$



کثیر رکنیوں کی تقسیم

آئیے ذرا یاد کریں



گزشتہ سال الجبری عبارتوں کی جمع، تفریق اور ضرب کے اعمال کا ہم نے مطالعہ کیا ہے۔
درج ذیل مثالوں میں خالی چوکوں مکمل کیجیے۔

(1) $2a + 3a = \square$

(2) $7b - 4b = \square$

(3) $3p \times p^2 = \square$

(4) $5m^2 \times 3m^2 = \square$

(5) $(2x + 5y) \times \frac{3}{x} = \square$

(6) $(3x^2 + 4y) \times (2x + 3y) = \square$

آئیے سمجھ لیں



کثیر رکنیوں کا تعارف (Introduction to polynomials)

ایک متغیری الجبری عبارتوں کے ہر رکن کے متغیر کی قوت نامکمل عدد ہوتی ہے۔ وہ عبارت ایک متغیری کثیر رکنی ہوتی ہے۔
مثلاً $x^2 + 2x + 3$ ، $3y^3 + 2y^2 + y + 5$ یہ ایک متغیری کثیر رکنی ہیں۔

کثیر رکنیاں مخصوص الجبری عبارت ہوتی ہیں، اس لیے کثیر رکنیوں کی جمع، تفریق اور ضرب جیسے اعمال الجبری عبارت کے مطابق کیے جاتے ہیں۔

$$\begin{aligned} (4x - 5) - (3x^2 - 7x + 8) \\ = 4x - 5 - 3x^2 + 7x - 8 \\ = -3x^2 + 11x - 13 \end{aligned}$$

مثال (2)

$$\begin{aligned} (3x^2 - 2x) \times (4x^2 - 3x^2) \\ = 3x^2(4x^2 - 3x^2) - 2x(4x^2 - 3x^2) \\ = 12x^4 - 9x^4 - 8x^3 + 6x^3 \\ = 12x^4 - 17x^3 + 6x^2 \end{aligned}$$

مثال (1)

کثیر رکنیوں کا درجہ (Degree of polynomials)

درج ذیل مثالوں کی کثیر رکنیوں کے متغیروں کا سب سے بڑا قوت نما چوکوں میں لکھیے۔

مثال (1) کثیر رکنی $3x^2 + 4x$ کے متغیر کا سب سے بڑا قوت نما $\square$ ہے۔

مثال (2) کثیر رکنی $7x^3 + 5x + 4x^2 + 2x^4$ کے متغیر کا سب سے بڑا قوت نما $\square$ ہے۔

دی ہوئی کثیر رکنی کے متغیر کا سب سے بڑا قوت نما، اس کثیر رکنی کا درجہ کہلاتا ہے۔

یہ میری سمجھ میں آ گیا

- ایک متغیری الجبری عبارت کے ہر رکن کے متغیر کا قوت نامکمل عدد ہو تو وہ عبارت کثیر رکنی ہوتی ہے۔
- کثیر رکنی میں متغیر کا سب سے بڑا قوت نما اس کثیر رکنی کا درجہ ہوتا ہے۔

آئیے سمجھ لیں

ایک رکنی کو ایک رکنی سے تقسیم کرنا (To Divide a Monomial by Monomial) :

مثال (1) تقسیم کیجیے۔ $15p^3 \div 3p$

حل : تقسیم، ضرب کا معکوس عمل ہوتا ہے۔

اس لیے تقسیم $15p^3 \div 3p$ کے لیے $3p$ ایک رکنی کو کس ایک رکنی سے ضرب

کرنے پر $15p^3$ آئے گا۔

اس بات پر غور کرنا ہوگا۔

$$3p \times 5p^2 = 15p^3 \quad \therefore 15p^3 \div 3p = 5p^2$$

اس مثال کی ترتیب بازو میں دکھائے ہوئے کے مطابق کر سکتے ہیں۔

مثال (2) تقسیم کیجیے اور خالی چوکون میں مناسب ارکان لکھیے۔

(i) $(-36x^2) \div (-9x)$

$$\begin{array}{r} \boxed{} \\ -9x \overline{) -36x^2} \\ \underline{ -36x^2} \\ 0 \end{array}$$

(ii) $(5m^2) \div (-m)$

$$\begin{array}{r} \boxed{} \\ -m \overline{) 5m^2} \\ \underline{ -5m^2} \\ 0 \end{array}$$

(iii) $(-20y^3) \div (2y^2)$

$$\begin{array}{r} \boxed{} \\ 2y^2 \overline{) -20y^3} \\ \underline{ -20y^3} \\ 0 \end{array}$$

کثیر رکنی کو ایک رکنی سے تقسیم کرنا (To divide a polynomial by a monomial) :

درج ذیل مثال کا مطالعہ کیجیے اور کثیر رکنی کو ایک رکنی سے تقسیم کرنے کا طریقہ سمجھ لیں۔

مثال (1) $(6x^2 + 8x^2) \div 2x$

حل :

$$\begin{array}{r} 3x^2 + 4x \\ 2x \overline{) 6x^2 + 8x^2} \\ \underline{ 6x^2} \\ 0 + 8x^2 \\ - 8x^2 \\ 0 \end{array}$$

وضاحت

(i) $2x \times \boxed{3x^2} = 6x^3$

(ii) $2x \times \boxed{4x} = 8x^2$

$\therefore$ خارج قسمت $= 3x^2 + 4x$

باقی $= 0$

مثال (2) $(15y^3 + 10y^2 - 3y) \div 5y^2$

حل :

$$\begin{array}{r} 3y^1 + 2y^0 - \frac{3}{5} \\ 5y^2 \overline{) 15y^3 + 10y^2 - 3y} \\ \underline{-15y^3} \\ 0 + 10y^2 - 3y^1 \\ \underline{-10y^2} \\ 0 - 3y^1 \\ \underline{+3y^1} \\ 0 \end{array}$$

$\therefore$ باقی = 0 ، خارج قسمت = $3y^1 + 2y^0 - \frac{3}{5}$

وضاحت -

(i) $5y^2 \times \boxed{3y^1} = 15y^3$

(ii) $5y^2 \times \boxed{2y^0} = 10y^2$

(iii) $5y^2 \times \boxed{-\frac{3}{5}} = -3y^1$

حل :

$$\begin{array}{r} 4p - 2 \\ 3p^2 \overline{) 12p^2 - 6p + 4p} \\ \underline{-12p^2} \\ 0 - 6p + 4p \\ \underline{+6p} \\ 0 + 4p \end{array}$$

$\therefore$ باقی = 0 ، خارج قسمت = $4p - 2$

وضاحت -

(:) $3p^2 \times \boxed{4p} = 12p^3$

(:) $3p^2 \times \boxed{-2} = -6p^2$

مثال (4) $(5x^3 - 3x^2 + 4x^2 + 2x - 6) \div x^2$

حل :

$$\begin{array}{r} 5x^1 - 3x^0 + 4 \\ x^2 \overline{) 5x^3 - 3x^2 + 4x^2 + 2x - 6} \\ \underline{-5x^3} \\ 0 - 3x^2 + 4x^2 + 2x - 6 \\ \underline{+3x^2} \\ 0 + 4x^2 + 2x - 6 \\ \underline{-4x^2} \\ 0 + 2x - 6 \end{array}$$

$\therefore$ باقی = 0 ، خارج قسمت = $5x^2 - 3x + 4$

وضاحت -

(:) $x^2 \times \boxed{5x^1} = 5x^3$

(ii) $x^2 \times \boxed{-3x^0} = -3x^2$

(iii) $x^2 \times \boxed{4} = 4x^2$

کثیر رکنیوں کی تقسیم کرتے وقت جب باقی صفر آتا ہو، یا باقی رکن کا درجہ، مقسوم الیہ کثیر رکنی کے درجے سے چھوٹا ہو تب تقسیم کا عمل مکمل ہوتا ہے۔
 اوپر کی مثال (3) میں باقی $4p$ کا درجہ مقسوم الیہ $3p^2$ کے درجے سے چھوٹا ہے۔ اسی طرح مثال (4) میں باقی $2x - 6$ کا درجہ مقسوم الیہ x^2 کے درجے سے چھوٹا ہے۔ اسے دھیان میں رکھیے۔

مشقی سیٹ 10.1

1. تقسیم کیجیے : خارج قسمت اور باقی لکھیے۔

(1) $21m^2 \div 7m$

(2) $40a^3 \div (-10a)$

(3) $(-48p^2) \div (-9p^2)$

(4) $40m^2 \div 30m^2$

(5) $(5x^2 - 3x^2) \div x^2$

(6) $(8p^3 - 4p^3) \div 2p^3$

(7) $(2x^2 + 4x^2 + 3) \div 2x^2$

(8) $(21x^2 - 14x^2 + 7x) \div 7x^2$

(9) $(6x^2 - 4x^2 + 8x^2 + 2x^2) \div 2x^2$

(10) $(25m^2 - 15m^2 + 10m + 8) \div 5m^2$



کثیر رکنی کو دو رکنی سے تقسیم کرنا (To Divide a Polynomial by a Binomial) :

کثیر رکنیوں کو دو رکنی سے تقسیم کرنے کا طریقہ، کثیر رکنیوں کو یک رکنی سے تقسیم کرنے کے طریقے کے جیسا ہی ہوتا ہے۔

مثال (1) : $(x^2 + 4x + 4) \div (x + 2)$

حل :

$$\begin{array}{r} x + 2 \\ x + 2 \overline{) x^2 + 4x + 4} \\ \underline{-(x^2 + 2x)} \\ 0 + 2x + 4 \\ \underline{-(2x + 4)} \\ 0 \end{array}$$

وضاحت :

(i) پہلے مقسوم اور مقسوم الیہ کو قوت نما کی اترتی ترتیب میں لکھیے۔

مقسوم الیہ کے پہلے رکن کو x سے ضرب کرنے پر مقسوم کا پہلا رکن

حاصل ہوتا ہے۔

∴ مقسوم الیہ کو x سے ضرب کریں۔

(ii) $(x + 2) \times \boxed{2} = 2x + 4$

∴ خارج قسمت = $x + 2$

باقی = 0

مثال (2) $(y^3 + 24y - 10y^2) \div (y + 4)$

حل : یہاں مقسوم کثیررکنی کا درجہ 4 ہے۔ اس کے متغیروں کے قوت نما اترتی ترتیب میں نہیں ہیں۔ اسی طرح قوت نما 3 کا رکن بھی نہیں ہے۔ اسے $0y^3$ مان کر اور مقسوم کثیررکنی کو قوت نما کی اترتی ترتیب میں لکھ کر تقسیم کریں۔

$$\begin{array}{r}
 y^3 - 4y^2 + 6y \\
 y + 4 \overline{) y^3 + 0y^2 - 10y^2 + 24y} \\
 \underline{-(y^2 + 4y)} \\
 0 - 4y^2 - 10y^2 + 24y \\
 \underline{+ 4y^2 + 16y} \\
 0 + 6y^2 + 24y \\
 \underline{-(6y^2 + 24y)} \\
 0
 \end{array}$$

وضاحت

(i) $(y + 4) \times y^2 = y^3 + 4y^2$

(ii) $(y + 4) \times -4y^2 = -4y^3 - 16y^2$

(iii) $(y + 4) \times 6y = 6y^2 + 24y$

$\therefore$ باقی = 0 ، خارج قسمت = $y^3 - 4y^2 + 6y$

مثال (3) $(6x^3 + 3x^2 - 9 + 5x + 5x^4) \div (x^2 - 1)$

حل :

$$\begin{array}{r}
 6x^2 + 5x + 9 \\
 x^2 - 1 \overline{) 6x^4 + 5x^3 + 3x^2 + 5x - 9} \\
 \underline{-(6x^4 - 6x^2)} \\
 0 + 5x^3 + 9x^2 + 5x - 9 \\
 \underline{-(5x^3 - 5x)} \\
 0 + 9x^2 + 10x - 9 \\
 \underline{-(9x^2 - 9)} \\
 0 + 10x + 0
 \end{array}$$

وضاحت

(i) $(x^2 - 1) \times 6x^2 = 6x^4 - 6x^2$

(ii) $(x^2 - 1) \times 5x = 5x^3 - 5x$

(iii) $(x^2 - 1) \times 9 = 9x^2 - 9$

$\therefore$ باقی = $10x$ ، خارج قسمت = $6x^2 + 5x + 9$



- کثیر رکنی کو تقسیم کرتے وقت جب باقی صفر بنتا ہے یا باقی کا درجہ، مقسوم الیہ کثیر رکنی کے درجے سے چھوٹا ہوتا ہے تب تقسیم کا عمل مکمل ہو جاتا ہے۔
- مقسوم کثیر رکنی کے ارکان قوت نما کی اترتی ترتیب میں نہیں ہوں تو کثیر رکنی کو قوت نما کی اترتی ترتیب میں لکھیے۔ اگر کسی قوت نما کا رکن نہیں ہو تو اس کا ضریب 0 مان کر قوت نما کی اترتی ترتیب مکمل کیجیے۔

مشقی سیٹ 10.2

1. تقسیم کیجیے۔ خارج قسمت اور باقی لکھیے۔

- (1) $(x^3 + 10x^2 + 24x) \div (x + 4)$ (2) $(p^3 + 7p^2 - 5) \div (p + 3)$
 (3) $(3x^3 + 2x^2 + 4x^2) \div (x - 4)$ (4) $(2m^3 + m^2 + m + 9) \div (2m - 1)$
 (5) $(3x^3 - 3x^2 - 12 + x^4 + x^3) \div (2 + x^2)$
 (6*) $(a^4 - a^3 + a^2 - a + 1) \div (a^2 - 2)$
 (7*) $(4x^3 - 5x^2 - 7x + 1) \div (4x - 1)$

جوابات کی فہرست

مشقی سیٹ 10.1

1. $3m, 0$ 2. $-4a^2, 0$ 3. $-\frac{16}{3}p^2, 0$ 4. $\frac{4}{3}m, 0$
 5. $5x - 3, 0$ 6. $4p - 2, 0$ 7. $y + 2, 3$ 8. $3x, -14x^2 + 7x$
 9. $3x^3 - 2x^2 + 4x + 1, 0$ 10. $5m - 3, 10m + 8$

مشقی سیٹ 10.2

1. $x + 6, 0$ 2. $p + 4, -17$ 3. $4x^2 + 18x + 75, 300$
 4. $m^2 + m + 1, 10$ 5. $x^2 + x - 5, x - 2$
 6. $a - 1, a^2 + a - 1$ 7. $x^3 - x^2 - \frac{x}{4} - \frac{29}{16}, \frac{13}{16}$



آئیے ذرا یاد کریں



مثال : نادرہ کے ذریعے ایک کتاب کے روزانہ مطالعہ کیے ہوئے صفحات کی تعداد 60، 50، 54، 46، 50 ہیں۔ اس بنا پر روزانہ پڑھے ہوئے صفحات کا اوسط معلوم کیجیے۔

حل :

$$\text{اوسط} = \frac{\text{تمام شماروں کا مجموعہ}}{\text{شماروں کی کل تعداد}}$$

$$= \frac{60 + \boxed{} + \boxed{} + \boxed{} + 50}{\boxed{}} = \frac{\boxed{}}{\boxed{}} = \boxed{}$$

اس لیے روزانہ مطالعہ کیے ہوئے صفحات کا اوسط $\boxed{}$ ہے۔

اس اوسط کو میانہ کہتے ہیں۔

آئیے سمجھ لیں



مندرجہ بالا مثال میں روزانہ پڑھے ہوئے صفحات کی تعداد کو شماریاتی معلومات کہتے ہیں۔ اس بنا پر نادرہ روزانہ تقریباً 52 صفحات پڑھتی ہے۔ یہ نتیجہ اخذ کیا گیا ہے۔

کسی واقعہ کے تعلق سے یا مسئلے کے متعلق شماریاتی معلومات جمع کرنا، اس معلومات کا مطالعہ کر کے کچھ نتیجہ حاصل کرنا، یہ ایک آزاد علم کی شاخ ہے۔ اس شاخ کو شماریات نام دیا گیا ہے۔

میانہ (Mean)

ہم نے دیکھا کہ 60، 50، 54، 46 اور 50 اعداد کا اوسط 52 ہے۔ اس اوسط کو شماریات کی زبان میں میانہ کہتے ہیں۔

عددی معطیات کا میانہ معلوم کرنے کے لیے معطیات کا مجموعہ کیا جاتا ہے۔ اس مجموعے کو معطیات کی تعداد سے تقسیم کیا جاتا ہے۔

میانہ معلوم کرنے کے اس طریقے کا ہم مزید مطالعہ کریں گے۔ اس لیے ذیل کی مثال دیکھیے۔

مثال : شاہین ہائی اسکول کراڑ میں جماعت آٹھویں کے 37 طلبہ کے ذریعے ریاضی میں 10 مارکس کی ایک آزمائش میں حاصل کردہ مارکس ذیل کے مطابق ہیں۔ ان کا میانہ معلوم کیجیے۔

2, 4, 4, 8, 6, 7, 3, 8, 9, 10, 10, 8, 9, 7, 6, 5, 4, 6, 7, 8, 4, 8, 9, 7, 6,
5, 10, 9, 7, 9, 10, 9, 6, 9, 9, 4, 7.

حل : ہم جانتے ہیں کہ اس مثال میں معطیات کے اعداد کا مجموعہ کرنے میں زیادہ وقت درکار ہوگا۔

اس بنا پر ایک عدد میں وہی عدد جمع کرنے پر عمل آسان ہو جاتا ہے۔ اس بات کو یاد رکھیے۔ اس بات کا استعمال کر کے اوپر کے اعداد کا مجموعہ کرنا سہولت بخش ہوگا۔ اس لیے معطیات کے اعداد کی درجہ بندی کر کے اعداد کا مجموعہ کریں گے۔

مارکس (شمارہ) x_i	شماراتی نشانات	طلبہ کی تعداد f_i	$f_i \times x_i$
2	I	1	$1 \times 2 = 2$
3	I	1	$1 \times 3 = 3$
4		5	$5 \times 4 = 20$
5		2	$2 \times 5 = 10$
6		5	$5 \times 6 = 30$
7	I	6	$6 \times 7 = 42$
8		5	$5 \times 8 = 40$
9		8	$8 \times 9 = 72$
10		4	$4 \times 10 = 40$
		$N = 37$	$\Sigma f_i \times x_i = 259$

$$\begin{aligned} \text{میانہ} &= \frac{\Sigma f_i \times x_i}{N} \\ &= \frac{259}{37} \\ &= 7 \end{aligned}$$

مندرجہ بالا طریقے کے مطابق جدول بنا کر معطیات کا میانہ معلوم کرنے کے لیے ذیل کے مرحلے دھیان میں رکھیے۔

● پہلے ستون میں $x_1 < x_2 < x_3 \dots$ اس طرح چڑھتی ترتیب میں شمارے لکھیے، اسے x_i سے ظاہر کیا گیا ہے۔

● دوسرے ستون میں شماراتی نشانات لگائیے۔

● تیسرے ستون میں ہر شمارے کے تعلق سے شماراتی نشانات گن کر لکھیے۔ اسے تعداد f_i سے ظاہر کیا گیا ہے۔ اس کے نیچے تمام تعداد کا مجموعہ

لکھیے۔ کل تعداد N سے ظاہر کیا گیا ہے۔

● آخری ستون میں $f_i \times x_i$ حاصل ضرب لکھیے۔ اس کے نیچے تمام حاصل ضرب کا مجموعہ کیجیے۔ تمام $f_i \times x_i$ کے مجموعے کو $\Sigma f_i x_i$

سے ظاہر کرتے ہیں۔ 'Σ' (سگما) علامت "مجموعے" کے لیے استعمال کی جاتی ہے۔

میانہ، x (ایکس بار) سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$\therefore \text{میانہ } \bar{x} = \frac{\Sigma f_i \times x_i}{N}$$

مثال : راجا پورگاؤں کے 30 کسانوں کے سویا بین کی فی ایکڑ پیداوار کو نخل میں ذیل کے مطابق ہے۔

9, 7, 5, 8, 6, 5.5, 7.5, 5, 8, 5, 6.5, 5, 5.5, 4, 4, 8, 6, 8, 7.5, 6, 9, 5.5, 7.5, 8, 5, 6.5, 5, 5.5, 4, 8.

اس بنا پر تعددی تقسیمی جدول بنائیے اور سویا بین کی فی ایکڑ پیداوار کا میانہ معلوم کیجیے۔

حل :

فی ایکڑ پیداوار (کو نخل میں) x_i (شمارہ)	شماراتی نشانات	کسانوں کی تعداد f_i (تعدد)	$f_i \times x_i$
4		3	12
5		5	25
5.5		4	22
6		3	18
6.5		2	13
7.5		4	30
8		6	48
9		3	27
		N = 30	$\Sigma f_i \times x_i = 195$

$$\bar{X} = \frac{\Sigma f_i \times x_i}{N} = \frac{195}{30} = 6.5$$

فی ایکڑ سویا بین کی پیداوار کا میانہ 6.5 کو نخل ہے۔

مشقی سیٹ 11.1

1. جماعت آٹھویں کے 30 طلبہ میں سے ہر ایک کے لگائے ہوئے پودوں کی تعداد ذیل کے تعددی تقسیمی جدول میں دی ہوئی ہے۔ اس بنا پر ہر ایک کے ذریعے لگائے ہوئے پودوں کا میانہ معلوم کرنے کے لیے ذیل کا جدول مکمل کیجیے۔

پودوں کی تعداد x_i (شمارہ)	طلبہ کی تعداد f_i (تعدد)	$f_i \times x_i$
1	4	4
2	6	...
3	12	...
4	8	...
	N =	$\Sigma f_i \times x_i = $

$$\bar{X} = \frac{\text{ } }{N}$$

$$= \frac{\text{ } }{\text{ } }$$

$$= \text{ }$$

∴ ہر طالب علم کے ذریعے لگائے

ہوئے پودوں کا میانہ ہے۔

2. ایک گاؤں کے 25 خاندانوں کے ذریعے مہینے میں استعمال کردہ بجلی کا یونٹ ذیل کے جدول میں دیا ہوا ہے۔ جدول مکمل کر کے ذیل کے سوالات کے جوابات لکھیے۔

بجلی کا استعمال (یونٹ) x_i (شمارہ)	خاندان کی تعداد f_i (تعداد)	$f_i \times x_i$
30	7	
45	2	
60	8	
75	5	
90	3	
	$N = \dots\dots\dots$	$\Sigma f_i \times x_i = \dots\dots\dots$

(1) 45 یونٹ استعمال کرنے والے کل

کتنے خاندان ہیں؟

(2) جس شمارے کا تعدد 5 ہے وہ شمارہ

کون سا ہے؟

(3) $N = ?$, $\Sigma f_i \times x_i = ?$

(4) اس بنا پر مہینے میں ہر خاندان کے

ذریعے استعمال کی گئی بجلی کا میانہ

معلوم کیجیے۔

3. بھلار کے 40 خاندان کے افراد کی تعداد دی گئی ہے۔

1, 6, 5, 4, 3, 2, 7, 2, 3, 4, 5, 6, 4, 6, 2, 3, 2, 1, 4, 5, 6, 7, 3, 4, 5, 2, 4, 3, 2, 3, 5,

اس بنا پر 40 خاندانوں کے افراد کی تعداد کا میانہ تعدادی جدول بنا کر معلوم کیجیے۔

4. ماڈل ہائی اسکول ناندپور کے ذریعے ریاستی سطح پر سائنس نمائش میں گزشتہ 20 سال میں پیش کردہ ریاضی اور سائنس کے پروجیکٹ کی تعداد

ذیل کے مطابق ہے۔ اس بنا پر تعدادی جدول بنا کر معطیات کا میانہ معلوم کیجیے۔

2, 3, 4, 1, 2, 3, 1, 5, 4, 2, 3, 1, 3, 5, 4, 3, 2, 2, 3, 2.

آئیے سمجھ لیں

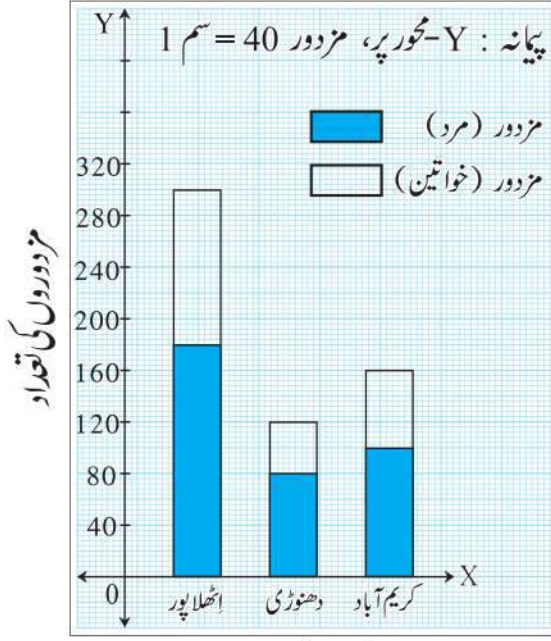
گزشتہ جماعت میں ہم نے سادہ ستونی ترسیم اور متصل ستونی ترسیم کا مطالعہ کیا ہے۔ اب ہم ستونی ترسیم کی دوسری قسموں کا مطالعہ کریں گے۔

تقسیمی ستونی ترسیم (Subdivided bar diagram)

معطیات کا تجزیاتی موازنہ متصل ستونی ترسیم کی طرح تقسیمی ستونی ترسیم سے بھی کیا جاتا ہے۔ اس میں دو یا مزید اجزا کی معطیات ایک ہی ستون میں ظاہر کی جاتی ہے۔ تقسیمی ترسیم کے مراحل کا مطالعہ کریں گے۔

گاؤں	اٹھلا	دھنڑی	کریم آباد
مرد (مزدور)	180	80	100
خواتین (مزدور)	120	40	60
کل مزدور	300		

پہلے آپ ستون میں دی ہوئی معطیات کے مطابق مذکورہ بالا جدول مکمل کیجیے۔



گاؤں کے نام

• ترسیم کاغذ پر X-محور اور Y-محور -مچھینجیے۔

• مساوی فاصلہ رکھتے ہوئے X-محور پر گاؤں کے نام لکھیے۔

• Y-محور پر مزدوروں کی تعداد لکھیے۔ 1 سم = 40 مزدور

پیمانہ لیجیے۔

• اٹھلا پور کے کل 300 مزدور ہیں۔ مزدوروں کی تعداد ایک

ستون کے ذریعے دکھائیے۔

• اس میں کل مزدوروں کے ستون کا ایک حصہ مرد مزدور ہے۔

اسے الگ نشان سے ظاہر کیا گیا ہے۔

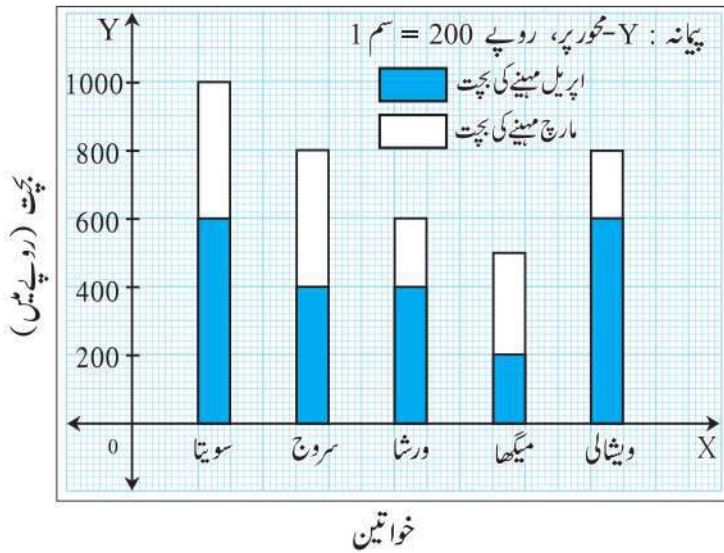
• ستون کا بقیہ حصہ خواتین مزدوروں کی تعداد کو ظاہر کرتا ہے۔

اسے مختلف نشان سے ظاہر کیا گیا ہے۔

• اس طرح دھنوزی اور کریم آباد کے لیے تقسیمی ستون -مچھینجیے۔

اوپر کے مرحلوں کے مطابق تقسیمی ستونی ترسیم بازو کی شکل میں بنا کر دکھایا گیا ہے۔ اس کا معائنہ کیجیے۔

مشقی سیٹ 11.2



خواتین

1. ذیل کی شکل کا معائنہ کیجیے اور سوالات کے جوابات لکھیے۔

(1) یہ کس قسم کا ستونی ترسیم ہے؟

(2) ویشالی کی اپریل مہینے کی بچت کتنی ہے؟

(3) سروج کی مارچ اور اپریل دونوں مہینوں کی

کل بچت کتنی ہے؟

(4) سویتا کی کل بچت میگھا کی کل بچت سے کتنی

زیادہ ہے؟

(5) اپریل مہینے میں کس کی بچت سب سے کم ہے؟

2. ایک ضلع پریشد اسکول میں جماعت پانچویں سے آٹھویں کے لڑکے اور لڑکیوں کی تعداد ذیل کے جدول میں دی گئی ہے۔ اس بنا پر تقسیمی ستونی ترسیم بنائیے۔ (پیمانہ : Y-محور پر 1 سم = 10 طلبہ لیجیے)

جماعت	پانچویں	چھٹی	ساتویں	آٹھویں
لڑکے	34	26	21	25
لڑکیاں	17	14	14	20

3. ذیل کے جدول میں چار گاؤں میں سال 2016 اور 2017 میں لگائے گئے درختوں کی تعداد دی گئی ہے۔ جدول کی معلومات کو تقسیم ستونی ترسیم کے ذریعے دکھائیے۔

گاؤں سال	کرجت	وڑگاؤں	شیواپور	کھنڈالا
2016	150	250	200	100
2017	200	300	250	150

4. درج ذیل جدول میں تین شہروں میں جماعت آٹھویں کے طلبہ کے ذریعے اسکول جانے کے لیے استعمال کی جانے والی سواریوں اور پیدل جانے والوں کی معلومات دی گئی ہے۔ اس معلومات کو ظاہر کرنے کے لیے تقسیمی ستونی ترسیم بنائیے۔ (پیمانہ : Y-محور پر 1 سم = 500 طلبہ لیجیے)

شہر	پٹھن	ایولہ	شاہ پور
سائیکل سواری	3250	1500	1250
بس اور آٹورکشا	750	500	500
پیدل	1000	1000	500

آئیے سمجھ لیں

فی صدی ستونی ترسیم (Percentage bar diagram)

اروی گاؤں میں لگائے گئے 60 درختوں میں سے 42 درخت نموپائے اور مورشی گاؤں میں لگائے گئے 75 درختوں میں سے 45 درخت نموپائے۔ بارشی گاؤں میں لگائے گئے 90 درختوں میں سے 45 درخت نموپائے۔ کس گاؤں میں شجرکاری زیادہ کامیاب ہوئی اسے سمجھنے کے لیے صرف اعداد کافی نہیں ہیں۔ اس کے لیے نموپائے درختوں کا فی صد معلوم کرنا ضروری ہے۔

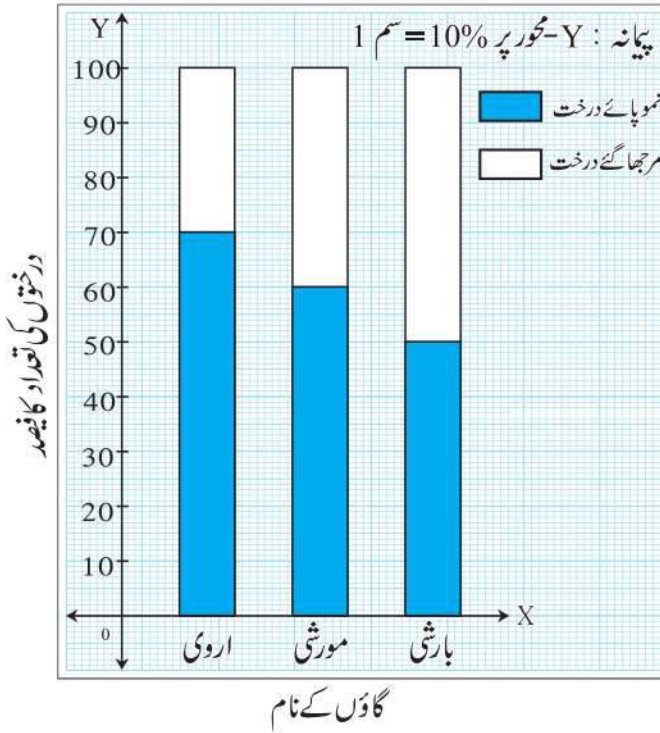
$$\text{اروی میں نموپائے درختوں کا فی صد} = \frac{42}{60} \times 100 = 70$$

$$\text{مورشی میں نموپائے درختوں کا فی صد} = \frac{45}{75} \times 100 = 60$$

اس فی صد سے ہمیں یہ سمجھ میں آتا ہے کہ اروی گاؤں میں نموپائے درختوں کی تعداد کم ہے لیکن فی صد زیادہ ہے۔ یعنی فی صد سے کچھ الگ قسم کی معلومات حاصل ہوتی ہے۔ دی گئی معلومات فی صدی میں تبدیل کر کے جو تقسیمی ستون بناتے ہیں۔ اسے فی صدی ستونی ترسیم کہتے ہیں۔

• فی صدی ستونی ترسیم، تقسیمی ستونی ترسیم کی ایک خاص صورت ہوتی ہے۔ فی صدی ستونی ترسیم ذیل کے مرحلوں کی مدد سے بناتے ہیں۔ پہلے ہم ذیل کے مطابق جدول بنائیں گے۔

بارشی	مورشی	اروی	گاؤں
90	75	60	لگائے گئے درختوں کی تعداد
45	45	42	نموپائے درختوں کی تعداد
$\frac{45}{90} \times 100 = 50$	$\frac{45}{75} \times 100 = 60$	$\frac{42}{60} \times 100 = 70$	نموپائے درختوں کا فی صد

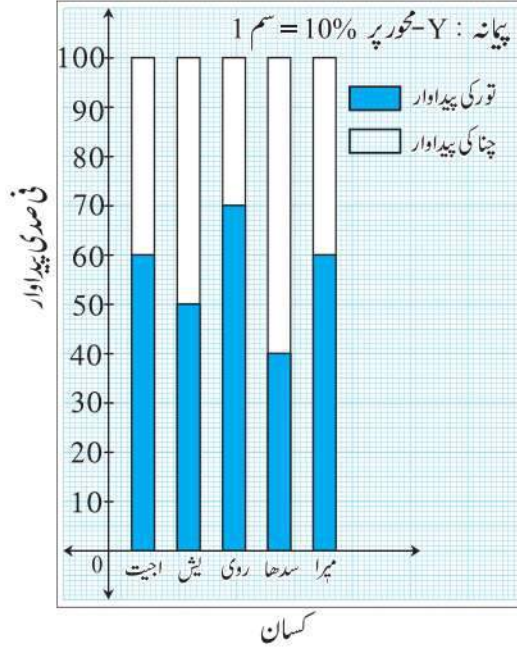


- فی صدی ستونی ترسیم میں تمام ستون 100 اکائی اونچائی کے لیے جاتے ہیں۔
- ہر ستون میں نموپائے درختوں کا فی صد دکھائیں گے۔
- بقیہ فی صد مرجھا جانے والے درختوں کا ہوگا۔
- فی صدی ستونی ترسیم ایک قسم کی تقسیمی ستونی ترسیم ہوتی ہے۔ اس لیے دیگر تمام عمل تقسیمی ستونی ترسیم کے جیسے ہی ہوتے ہیں۔
- اوپر کے مرحلوں کے مطابق بازو میں فی صدی ستونی ترسیم بنائی گئی ہے اس کا مشاہدہ کیجیے۔

مشقی سیٹ 11.3

1. ذیل کے جدول کے مطابق فی صدی ستونی ترسیم بنائیے۔

جماعت آٹھویں کی فریق	A	B	C	D
ریاضی میں 'A' گریڈ پانے والے طلبہ	45	33	10	15
کل طلبہ	60	55	40	75



2. مقابل میں دیے ہوئے ستونی ترسیم کا مشاہدہ کیجیے اور سوالات کے جوابات لکھیے۔

- (1) مقابل میں دیا ہوا ستونی ترسیم کس قسم کی ہے؟
- (2) اجیت کے کھیت میں تور کی پیداوار، کل پیداوار کا کتنے فی صد ہے؟
- (3) لیش اور روی، ان میں سے کس کے کھیت کی چنے کی پیداوار کا فی صد کتنا زیادہ ہے؟
- (4) سب سے کم تور کی پیداوار کا فی صدی کس کا ہے؟
- (5) سدھا کے تور اور چنے کی پیداوار کا فی صد معلوم کیجیے؟

3. کچھ اسکول میں 10 ویں جماعت کے طالب علموں کا سروے کیا گیا۔ حاصل ہوئی معلومات ذیل کے جدول میں دی گئی ہے۔ اس معلومات کو فی صدی ستونی ترسیم کے ذریعے دکھائیے۔

اسکول	پہلی	دوسری	تیسری	چوتھی
سائنس شاخ کی جانب رجحان	90	60	25	16
کامرس شاخ کی جانب رجحان	60	20	25	24

پروجیکٹ : فی صدی ستونی ترسیم اور تقسیمی ستونی ترسیم کا موازنہ کرتے ہوئے بحث کیجیے۔ اس کا استعمال کر کے سائنس، جغرافیہ جیسے مضامین میں ایسی ترسیم کی معلومات حاصل کیجیے۔

جوابات کی فہرست

- 11.1 مشقی سیٹ : 2. (1) 2 (2) 75 (3) $N = 25$, $\sum f_i \times x_i = 1425$ (4) 57 3. 3.9 4. 2.75
- 11.2 مشقی سیٹ : 1. (1) تقسیمی ستونی ترسیم (2) ₹600 (3) ₹800 (4) ₹500 (5) میگھا
- 11.3 مشقی سیٹ : 2. (1) فی صدی ستونی ترسیم (2) 60% (3) 20% زیادہ (4) لیش کی پیداوار (5) 60% اور 40%



یک متغیری مساواتیں

12

آئیے ذرا یاد کریں



گزشتہ جماعتوں میں ہم نے یک متغیری مساوات کا مطالعہ کیا ہے۔

- مساوات میں دیے گئے متغیر کی قیمت رکھنے پر مساوات کے دونوں طرفین مساوی ہو جاتے ہیں وہ قیمت اُس مساوات کا حل ہوتی ہے۔
 - مساوات حل کرنا یعنی اس کا حل معلوم کرنا۔
 - مساوات کے طرفین پر یکساں عمل کرنے سے حاصل ہونے والی مساوات میں کوئی تبدیلی نہیں ہوتی۔ اس خصوصیت کا استعمال کر کے ہم نئی آسان مساوات بنا کر دی ہوئی مساوات کو حل کرتے ہیں۔
- مساوات کے طرفین پر کیے جانے والے اعمال :

(i) طرفین میں مساوی عدد جمع کرنا۔ (ii) طرفین میں مساوی عدد تفریق کرنا۔

(iii) طرفین کو مساوی عدد سے ضرب کرنا۔ (iv) طرفین کو غیر صفر مساوی عدد سے تقسیم کرنا۔

درج ذیل مساوات حل کرنے کے لیے خالی چوکون مکمل کیجیے :

مثال (1) $x + 4 = 9$

$$x + 4 - \boxed{} = 9 - \boxed{}$$

$$\therefore x = \boxed{}$$

مثال (3) $\frac{x}{3} = 4$

$$\frac{x}{3} \times \boxed{} = 4 \times \boxed{}$$

$$\therefore x = \boxed{}$$

مثال (2) $x - 2 = 7$

$$x - 2 + \boxed{} = 7 + \boxed{}$$

$$\therefore x = \boxed{}$$

مثال (4) $4x = 24$

$$\frac{4x}{\boxed{}} = \frac{24}{\boxed{}}$$

$$\therefore x = \boxed{}$$

آئیے سمجھ لیں



یک متغیری مساواتوں کا حل (Solution of equations in one variable)

کبھی کبھی مساوات حل کرنے کے لیے اس پر ایک سے زیادہ اعمال کرنا ہوتا ہے۔ ایسی مساوات کے دونوں جانب عمل کر کے حل معلوم کرنے کی کچھ مثالیں دیکھیں گے۔

مثال (1) مساوات حل کیجیے۔

$$(i) \quad 9x - 4 = 6x + 29$$

حل : طرفین میں 4 جمع کرنے پر

$$9x - 4 + 4 = 6x + 29 + 4$$

$$\therefore 9x = 6x + 33$$

طرفین میں 6x تفریق کرنے پر

$$\therefore 9x - 6x = 6x + 33 - 6x$$

$$\therefore 3x = 33$$

طرفین کو 3 سے تقسیم کرنے پر

$$\therefore \frac{3x}{3} = \frac{33}{3}$$

$$\therefore x = 11$$

$$(ii) \quad 2(x - 3) = \frac{3}{5}(x + 4)$$

حل : طرفین کو 5 سے ضرب کرنے پر

$$10(x - 3) = 3(x + 4)$$

$$\therefore 10x - 30 = 3x + 12$$

طرفین میں 30 جمع کرنے پر

$$\therefore 10x - 30 + 30 = 3x + 12 + 30$$

$$10x = 3x + 42$$

طرفین میں 3x تفریق کرنے پر

$$\therefore 10x - 3x = 3x + 42 - 3x$$

$$\therefore 7x = 42$$

طرفین کو 7 سے تقسیم کرنے پر

$$\frac{7x}{7} = \frac{42}{7}$$

$$\therefore x = 6$$

$$\frac{2}{3} + 5a = 4 \quad (iii)$$

حل : طریقہ (i)

$$\frac{2}{3} + 5a = 4$$

طرفین کے ہر رکن کو 3 سے ضرب کرنے پر

$$3 \times \frac{2}{3} + 3 \times 5a = 4 \times 3$$

$$\therefore 2 + 15a = 12$$

$$\therefore 15a = 12 - 2$$

$$\therefore 15a = 10$$

$$\therefore a = \frac{10}{15}$$

$$\therefore a = \frac{2}{3}$$

طریقہ (ii)

طرفین سے $\frac{2}{3}$ تفریق کرنے پر

$$\frac{2}{3} + 5a - \frac{2}{3} = 4 - \frac{2}{3}$$

$$\therefore 5a = \frac{12 - 2}{3}$$

$$\therefore 5a = \frac{10}{3}$$

طرفین کو 5 سے تقسیم کرنے پر

$$\frac{5a}{5} = \frac{10}{3} \times \frac{1}{5}$$

$$\therefore a = \frac{2}{3}$$

الجبری عبارت $\frac{A}{B} \dots \frac{C}{D}$ میں اگر A، B، C، D غیر صفر اعداد ہوں تو طرفین کو B × D سے ضرب کرنے پر AD = BC

مساوات حاصل ہوتی ہے۔ اس کا استعمال کر کے مثالیں حل کریں گے۔

$$(v) \frac{8m-1}{2m+3} = 2$$

$$\text{حل: } \frac{8m-1}{2m+3} = 2$$

$$1(8m-1) = 2(2m+3)$$

$$\therefore 8m-1 = 4m+6$$

$$\therefore 8m-4m = 6+1$$

$$\therefore 4m = 7 \therefore m = \frac{7}{4}$$

$$(ix) \frac{4x-7}{3x-2} = \frac{5}{4}$$

$$\text{حل: } \frac{4x-7}{3x-2} = \frac{5}{4}$$

$$\therefore 4(4x-7) = 5(3x-2)$$

$$\therefore 4x-28 = 5x-10$$

$$\therefore 4x-5x = -10+28$$

$$\therefore -x = 18 \therefore x = -18$$

مشقی سیٹ 12.1

1. ہر مساوات کے بعد متغیر کے لیے دی گئی قیمت، اس مساوات کا حل ہیں یا نہیں معلوم کیجیے۔

$$(1) x-4=3, \quad x=-1, 7, -7$$

$$(2) 9m=81, \quad m=3, 9, -3$$

$$(3) 2a+4=0, \quad a=2, -2, 1$$

$$(4) 3-y=4, \quad y=-1, 1, 2$$

2. درج ذیل مساوات حل کیجیے۔

$$(1) 17p-2=49$$

$$(2) 2m+7=9$$

$$(3) 3x+12=2x-4$$

$$(4) 5(x-3)=3(x+2) \quad (5) \frac{9x}{8}+1=10$$

$$(6) \frac{y-1}{7}-\frac{y-4}{3}=2$$

$$(7) 13x-5=\frac{3}{2}$$

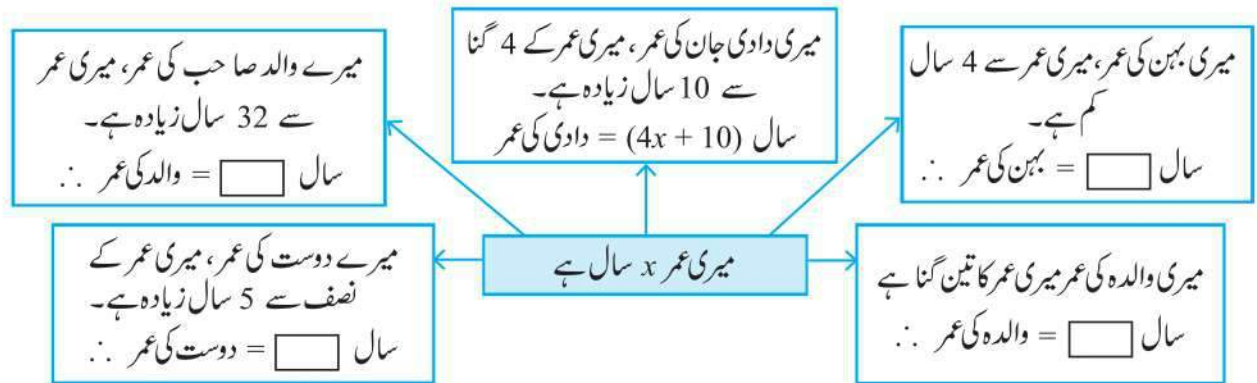
$$(8) 3(y+8)=10(y-4)+8 \quad (9) \frac{x-9}{x-5}=\frac{5}{7}$$

$$(10) \frac{y-4}{3}+3y=4 \quad (11) \frac{b-(b+1)-(b+2)}{4}=21$$

آئیے سمجھ لیں

عبارتی سوالات (Word Problems)

عبارتی سوالات میں دی ہوئی معلومات کے لیے متغیر کا استعمال کر کے الجبری عبارت کس طرح لکھتے ہیں اس کا مطالعہ کریں گے۔



مندرجہ بالا دی ہوئی معلومات کے مطابق میرے دوست کی عمر اگر 12 سال ہو تو میری عمر کتنی؟

$$\text{دوست کی عمر} = \frac{x}{2} + 5, \quad \text{سال } x = \text{میری عمر}$$

$$\frac{x}{2} + 5 = 12$$

... (دیا ہوا ہے)

$$\therefore x + 10 = 24$$

... (ہر رکن کو 2 سے ضرب کرنے پر)

$$\therefore x = 24 - 10$$

$$\therefore x = 14$$

اس لیے میری عمر 14 سال ہے۔ اس طریقے سے مندرجہ بالا معلومات کی مدد سے دیگر افراد کی عمریں معلوم کیجیے۔

عملی کام : خالی چوکون میں مناسب عدد لکھیے۔

$$\begin{aligned} \text{مستطیل کا احاطہ} &= 40 \\ 2(\text{ } x + \text{ } x) &= 40 \\ 2 \times \text{ } x &= 40 \\ \text{ } x &= 40 \\ \therefore x &= \text{ } \end{aligned}$$

چوڑائی کے تین گنا لمبائی

$$\begin{aligned} \text{مستطیل کا احاطہ} &= 40 \\ \text{چوڑائی} &= x \\ \text{لمبائی} &= 3x \end{aligned}$$

$$\text{سم} = \text{مستطیل کی لمبائی اور سم} = \text{مستطیل کی چوڑائی}$$

حل کردہ مثالیں

مثال (1) جوزف کا وزن اس کے چھوٹے بھائی کے وزن کا دگنا ہے۔ دونوں کا کل وزن 63 کلوگرام ہے۔ تو جوزف کا وزن معلوم کیجیے۔

حل : فرض کیجیے جوزف کے چھوٹے بھائی کا وزن x کلوگرام

اس لیے جوزف کا وزن بھائی کے وزن کا دگنا $2x$ کلوگرام

$$x + 2x = 63 \quad \text{شرط کے مطابق،}$$

$$\therefore 3x = 63, \quad \therefore x = 21$$

$$\therefore \text{جوزف کا وزن} = 2x = 2 \times 21 = 42 \text{ کلوگرام}$$

مثال (2) ایک کسر کا شمار کنندہ، اس کے نسب نما سے 5 بڑا ہے۔ شمار کنندہ اور نسب نما ہر ایک میں 4 جمع کرنے پر وہ کسر $\frac{1}{2}$ ہو جاتی ہے،

وہ کسر معلوم کیجیے۔

حل : فرض کیجیے کسر کا نسب نما x ہے۔

اس کسر کا شمار کنندہ، نسب نما سے 5 زیادہ ہے یعنی $(x + 5)$ ہے۔

$$\therefore \text{وہ کسر} = \frac{x + 5}{x}$$

اس کے شمار کنندہ اور نسب نما میں 4 جمع کرنے پر وہ کسر $\frac{6}{5}$ ہوگی۔

$$\therefore \frac{x + 5 + 4}{x + 4} = \frac{6}{5}$$

$$\therefore \frac{x + 9}{x + 4} = \frac{6}{5}$$

$$\therefore 5(x + 9) = 6(x + 4)$$

$$\therefore 5x + 45 = 6x + 24$$

$$\therefore 45 - 24 = 6x - 5x$$

$$21 = x$$

$$\therefore \text{کسر کا نسب نما} = 21$$

$$\text{شمار کنندہ} = 21 + 5 = 26$$

$$\therefore \text{وہ کسر} = \frac{26}{21}$$

مثال (3) رتنا کے پاس رقم، رفیق کے پاس رقم کی رقم کا تین گنا سے 200 روپے زیادہ ہے۔ اگر رتنا کے 300 روپے رفیق کو دیے جائیں تو رتنا کے پاس رقم، رفیق کے پاس رقم کا $\frac{7}{4}$ گنا ہو جاتی ہے۔ تو رفیق کے پاس ابتدا میں کتنی رقم تھی؟ اصل قیمت معلوم کرنے کے لیے ذیل کا عمل مکمل کیجیے۔

حل : رتنا کے پاس رقم، رفیق کے پاس رقم کے تین گنا سے 200 روپے زیادہ ہے۔ فرض کیجیے رفیق کے پاس x روپے ہیں۔

$\therefore$ رتنا کے پاس کی رقم روپے ہیں۔

$\therefore$ رتنا سے 300 روپے لے کر رفیق کو دیے، لہذا رتنا کے پاس روپے باقی رہے۔

اس لیے رفیق کے پاس کی رقم $x + 300$ روپے
رتنا کے پاس باقی ماندہ رقم، رفیق کی رقم کا $\frac{7}{4}$ گنا ہو گئی۔

$$\frac{\text{رتنا کی رقم}}{\text{رفیق کی رقم}} = \frac{\text{}}{\text{}}$$

$$\frac{3x - 100}{x + 300} = \frac{\text{}}{\text{}}$$

$$4 \text{ } \text{ } = 7 \text{ } \text{ }$$

$$12x - 400 = 7x + 2100$$

$$12x - 7x = \text{ }$$

$$5x = \text{ }$$

$$x = \text{ }$$

$\therefore$ رفیق کے پاس روپے تھے۔

مشقی سیٹ 12.2

1. ماں کی عمر بیٹے کی عمر سے 25 سال زیادہ ہے۔ 8 سال بعد، بیٹے کی عمر اور ماں کی عمر کے درمیان نسبت $\frac{4}{3}$ ہو جائے گی تو بیٹے کی عمر معلوم کیجیے۔

2. ایک کسر کا نسب نما، شمار کنندہ سے 12 زیادہ ہے۔ اس کے نسب نما سے 2 تفریق کریں اور شمار کنندہ میں 7 جمع کرنے پر حاصل ہونے والی کسر $\frac{1}{2}$ کے مساوی ہوتی ہے۔ وہ کسر معلوم کیجیے۔

3. پیتل میں تانبہ اور جست کا تناسب 13 : 7 ہے۔ 700 گرام پیتل کے برتن میں جست کتنا ہوگا؟
- 4*. تین متواتر مکمل اعداد کا مجموعہ 45 سے زیادہ لیکن 54 سے کم ہے۔ وہ اعداد معلوم کیجیے۔
5. دو ہندسی عدد کے دہائی کا ہندسہ، اکائی کے ہندسے کا دگنا ہے۔ ہندسوں کا مقام آپس میں تبدیل کرنے پر حاصل ہونے والا عدد اور اصل عدد کا مجموعہ 66 ہے۔ تو اصل عدد معلوم کیجیے۔
- 6*. ایک تھیٹر پر ڈراما کے 200 روپے اور 100 روپے والے کچھ ٹکٹ فروخت ہوئے۔ 200 روپے والے ٹکٹوں کی تعداد، 100 روپے والے ٹکٹوں کی تعداد سے 20 زیادہ ہے۔ دونوں قسم کے ٹکٹ فروخت کرنے پر تھیٹر کو 37,000 روپے حاصل ہوئے۔ تو 100 روپے کے کل کتنے ٹکٹ فروخت ہوئے؟
7. تین متواتر طبعی اعداد میں سب سے چھوٹے عدد کا پانچ گنا، سب سے بڑے عدد کے چار گنا سے 9 زیادہ ہے۔ وہ اعداد معلوم کیجیے۔
8. راجو نے ایک سائیکل 8% نفع پر امیت کو فروخت کی۔ امیت نے 54 روپے خرچ کر کے اسے درست کیا۔ وہ سائیکل اس نے نکھل کو 1134 روپے میں فروخت کیا۔ تب امیت کو نہ نفع ہوا نہ نقصان۔ تو راجو نے سائیکل کتنے روپے میں خریدی تھی؟
9. ایک کرکٹ کھلاڑی نے ایک مقابلے میں 180 رن بنائے۔ دوسرے مقابلے میں 256 رن بنائے۔ تیسرے مقابلے میں اسے کتنے رن بنانے ہوں گے کہ مقابلوں میں بنائے ہوئے رنوں کا اوسط 230 ہو جائے؟
10. سدھیر کی عمر، دیرو کی عمر کا تین گنا سے 5 زیادہ ہے۔ انیل کی عمر سدھیر کی عمر کا نصف ہے۔ سدھیر کی عمر اور دیرو کی عمر کا مجموعہ اور انیل کی عمر کا تین گنا کی نسبت 5 : 6 ہے۔ تو دیرو کی عمر معلوم کیجیے۔

جوابات کی فہرست

12.1 مشقی سیٹ : 1. مساوات کے حل کی قیمت (1) $x = 7$ (2) $m = 9$ (3) $a = -2$

(4) $y = -1$ (5) $p = 5$ (6) $m = 1$ (7) $x = -16$ (8) $x = \frac{21}{2}$ (9) $x = 8$ (10) $y = -$

(11) $x = \frac{1}{2}$ (12) $y = 8$ (13) $x = 19$ (14) $y = \frac{8}{5}$ (15) $p = 27$

12.2 مشقی سیٹ : 1. 12 سال 2. $\frac{23}{35}$ 3. 245 گرام 4. 15, 16, 17 یا 16, 17, 18

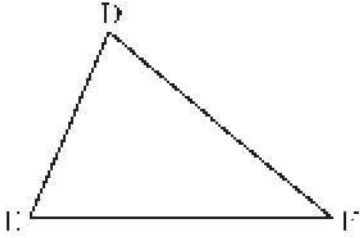
5. 42 6. 110 7. 17, 18, 19 8. ₹1000 9. 253 10. 5 سال



مثلثوں کی متماثلت

13

آئیے ذرا یاد کریں



متصلہ شکل کی مدد سے درج ذیل سوالات کے جوابات معلوم کیجیے۔

- (i) ضلع DE کے مقابل کا زاویہ کون سا ہے؟
- (ii) $\angle E$ ، کس ضلع کے مقابل کا زاویہ ہے؟
- (iii) ضلع DE اور ضلع DF کو شامل کرنے والا زاویہ کون سا ہے؟
- (iv) $\angle E$ اور $\angle F$ کو شامل کرنے والا ضلع کون سے ہیں؟
- (v) ضلع DE سے متصل کون سے زاویے ہیں؟

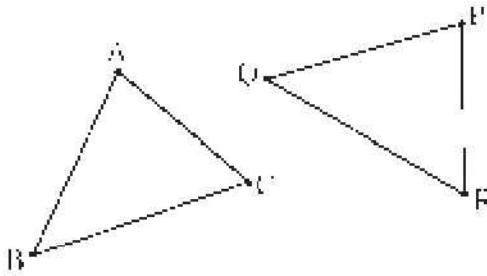
- جو اشکال ایک دوسرے پر پوری طرح منطبق ہو جاتی ہیں انہیں متماثل اشکال کہتے ہیں۔
- جن قطعات خط کی لمبائیاں مساوی ہوں انہیں متماثل قطعات خط کہتے ہیں۔
- جن زاویوں کی پیمائشیں مساوی ہوتی ہیں انہیں متماثل زاویے کہتے ہیں۔

آئیے سمجھ لیں



مثلثوں کی متماثلت (Congruence of triangles)

عملی کام : متصلہ شکل کا مشاہدہ کیجیے۔

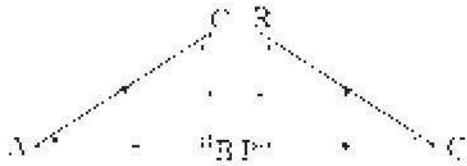


شفاف ٹرینگ کاغذ پر $\triangle ABC$ بنائیے اور کاغذ کو $\triangle PQR$ پر رکھ کر مشاہدہ کیجیے۔ نقطہ A، نقطہ P پر، نقطہ B، نقطہ Q پر اور نقطہ C، نقطہ R پر آتا ہے تو دونوں ہی مثلث ایک دوسرے پر مکمل طور پر منطبق ہو جاتے ہیں۔ یعنی ایسا معلوم ہوتا ہے کہ یہ دونوں متماثل مثلث ہیں۔

عملی کام میں $\triangle ABC$ کو $\triangle PQR$ پر رکھنے کا ایک طریقہ دیا گیا ہے۔ لیکن نقطہ A، نقطہ Q پر، نقطہ B، نقطہ R پر اور نقطہ C، نقطہ P پر رکھیں تو دونوں مثلث ایک دوسرے پر منطبق نہیں ہوتے، یعنی مخصوص طریقے پر رکھنے سے ہی ایک دوسرے پر منطبق ہوتے ہیں۔ اس طریقے سے منطبق ہونے کو ایک سے ایک مطابقت کے ذریعے ظاہر کیا جاتا ہے۔ نقطہ A کا نظیری نقطہ P ہے۔ اسے $A \leftrightarrow P$ اس طرح لکھا جاتا ہے۔ نقطہ A کی مطابقت نقطہ P سے ہے۔ اسے $A \leftrightarrow P$ لکھتے ہیں۔ یہاں $A \leftrightarrow P$ ، $B \leftrightarrow Q$ ، $C \leftrightarrow R$ کی مطابقت سے دونوں مثلث متماثل ہیں۔ اس طریقے سے جب مثلث متماثل ہوں تو $\angle A \cong \angle P$ ، $\angle B \cong \angle Q$ ، $\angle C \cong \angle R$ اسی طرح $PQ \cong AB$ ، $QR \cong BC$ ، $RP \cong CA$ قطعہ اس طرح کل چھ متماثلت حاصل ہوتی ہیں۔ اس لیے

ایسا کہتے ہیں $\triangle ABC$ اور $\triangle PQR$ مطابقت $ABC \leftrightarrow PQR$ کے ذریعے متماثل ہیں۔ اور اسے $\triangle ABC \cong \triangle PQR$ لکھتے ہیں۔ اس طرح $A \leftrightarrow P$ ، $B \leftrightarrow Q$ ، $C \leftrightarrow R$ نقاط راس کی ایک سے ایک کی مطابقت لکھتے ہیں۔ اس سے حاصل ہونے والی چھ متماثلتیں ان میں شامل ہوتی ہیں۔ اسے دھیان میں رکھیے کہ دو مثلث متماثل ہوں تو انھیں لکھنے کے لیے نقاط راس کی ترتیب اور متماثلت کی ایک سے ایک کی مطابقت پوری ہونی چاہیے۔

آئیے بحث کریں



$\triangle ABC$ اور $\triangle PQR$ متماثل مثلثوں کے متماثل اجزاء یکساں نشانات سے ظاہر کیے گئے ہیں۔

انیل، ریچانہ اور سرجیت نے مندرجہ ذیل طریقے سے مثلثوں کی متماثلت لکھا۔

ان میں سے کون سا لکھا ہوا طریقہ

صحیح ہے اور کون سا غلط ہے؟

بحث کریں

$$\triangle ABC \cong \triangle QPR$$

انیل کے لکھنے کا طریقہ :

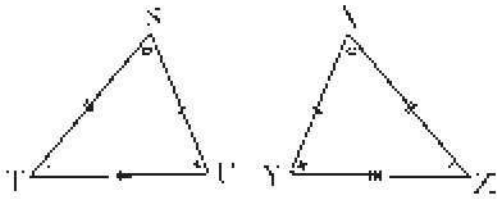
$$\triangle BAC \cong \triangle PQR$$

ریچانہ کے لکھنے کا طریقہ :

$$\triangle ABC \cong \triangle PQR$$

سرجیت کے لکھنے کا طریقہ :

حل کردہ مثالیں



مثال (1) متصلہ شکل میں مثلثوں کے یکساں نشانات سے ظاہر کیے گئے اجزاء متماثل ہیں۔

(i) نقاط راس کی جس ایک سے ایک کی مطابقت کے ذریعے دونوں

مثلث متماثل ہوتے ہیں اس مطابقت سے مثلثوں کی متماثلت دو طریقوں سے لکھیے۔

(ii) $\triangle XYZ \cong \triangle STU$ یہ صحیح لکھا گیا ہے یا غلط وجہ کے ساتھ لکھیے۔

حل : مشاہدہ کی مدد سے دیے ہوئے مثلثوں میں $STU \leftrightarrow XZY$ ایک سے ایک کی مطابقت سے متماثل ہیں۔

(i) پہلا طریقہ : $\triangle STU \cong \triangle XZY$

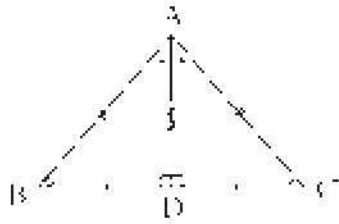
(ii) دوسرا طریقہ : $\triangle UST \cong \triangle YXZ$ اس متماثلت کو دوسرے طریقے سے لکھنے کی کوشش کریں۔

(iii) اگر ان مثلثوں کی متماثلت کو $\triangle XYZ \cong \triangle STU$ لکھیں تو XY ضلع $ST \cong$ ضلع مطلب ہوتا ہے جو غلط ہے۔

$\therefore \triangle XYZ \cong \triangle STU$ لکھنا غلط ہے۔

$\triangle XYZ \cong \triangle STU$ لکھنے میں اور کون سی غلطی ہوتی ہے یہ طلبہ خود معلوم کریں۔ لیکن جواب کیوں غلط ہے یہ بتانے کے لیے کوئی بھی ایک غلطی دکھانا کافی ہوتا ہے۔)

مثال (2) درج ذیل میں دکھائی گئی شکل میں مثلثوں کی جوڑی میں یکساں نشانات سے ظاہر کیے گئے اجزاء متماثل ہیں۔ ان مثلثوں کے نقاط راس میں ایک سے ایک کی کس مطابقت کی بناء پر وہ مثلث متماثل ہیں بتائیے اور مثلثوں کی متماثلت علامت کے ذریعے ظاہر کیجیے۔



حل : $\triangle ABD$ اور $\triangle ACD$ میں ضلع AD مشترک قطعہ خط ہے۔

ہر قطعہ خط خود کا متماثل ہوتا ہے۔

مطابقت $\triangle ABD \cong \triangle ACD$ ، $D \leftrightarrow D$ ، $B \leftrightarrow C$ ، $A \leftrightarrow A$

نوٹ : مشترک ضلع پر 'A' اس قسم کا نشان لگانے کا طریقہ رائج ہے۔

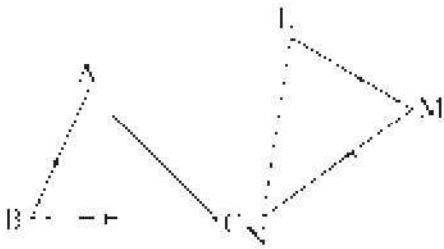


آئیے سمجھ لیں

بعض مرتبہ دیے گئے دو مثلث متماثل ہیں اسے دکھانے کے لیے تمام چھ اجزاء کی متماثلت بتانے کی ضرورت نہیں ہوتی۔ ایک مثلث کے تین مخصوص اجزاء دوسرے مثلث کے تین نظیری اجزاء کے متماثل ہوں تو بقیہ تین اجزاء کی جوڑیاں بھی ایک دوسرے کے متماثل ہوتی ہیں یعنی تین مخصوص اجزاء متماثلت کی آزمائش کا تعین کرتے ہیں۔

ہم نے مثلث بنانے کے کچھ عمل کا مطالعہ کیا ہے۔ جن دیے ہوئے تین اجزاء سے مثلث کی ایک اور صرف ایک شکل بنا سکتے ہیں وہی اجزاء متماثلت کی آزمائش متعین کرتے ہیں ہم اس کی جانچ کریں گے۔

(1) دو اضلاع اور ان کو شامل کرنے والا زاویہ : ضل راضل آزمائش



اضلاع کی دو جوڑیاں متماثل ہوں اور ان کو شامل کرنے والے زاویے

بھی متماثل ہوں ایسے $\triangle ABC$ اور $\triangle LMN$ بنائیے۔

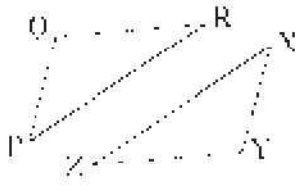
$l(AB) = l(LM)$ میں $\triangle ABC$ اور $\triangle LMN$

$m\angle ABC = m\angle LMN$ ، $l(BC) = l(MN)$

$\triangle ABC$ ، ٹریسنگ کاغذ پر بنائیے اور ٹریسنگ کاغذ $\triangle LMN$ پر اس طرح رکھیے کہ نقطہ A نقطہ L پر، ضلع AB ضلع LM پر،

$\angle B$ ، $\angle M$ پر اور ضلع BC، ضلع MN پر ہو تو $\triangle ABC \cong \triangle LMN$ دکھائی دیتا ہے۔

(2) تین نظیری اضلاع : ضل ضل آزمائش



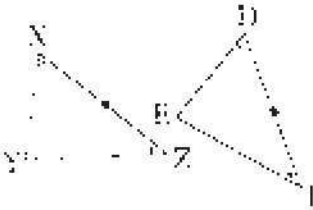
$$l(RP) = l(ZX), l(QR) = l(YZ), l(PQ) = l(XY)$$

اس طرح سے $\triangle XYZ$ اور $\triangle PQR$ بنائے۔

ٹرینگ کاغذ پر $\triangle PQR$ بنائے اور اسے $\triangle XYZ$ پر اس طرح رکھیے کہ ایک سے ایک

کی مطابقت $P \leftrightarrow X, Q \leftrightarrow Y, R \leftrightarrow Z$ ہو جائے۔ ہم مشاہدہ کرتے ہیں کہ $\triangle PQR \cong \triangle XYZ$

(3) دو زاویے اور ان کو شامل کرنے والا ضلع : زا ضل زا آزمائش



$\triangle XYZ$ اور $\triangle DEF$ اس طرح بنائے کہ،

$$\angle Z \cong \angle F \text{ اور } \angle X \cong \angle D, l(XZ) = l(DF)$$

ٹرینگ کاغذ پر $\triangle XYZ$ بنائے اور اس کاغذ کو $\triangle DEF$ پر اس طرح رکھیے کہ

$X \leftrightarrow D, Z \leftrightarrow F$ اور اس مطابقت کی بناء پر $\triangle XYZ \cong \triangle DEF$ دکھائی دیتا ہے۔

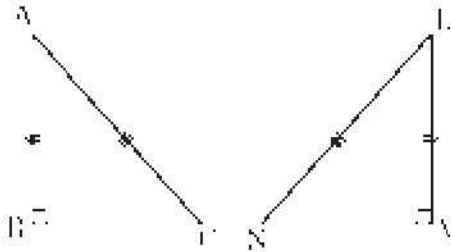
(4) زا ضل (یا ضل زا) آزمائش :

دو مثلثوں میں نظیری زاویوں کی دو جوڑیاں متماثل ہوں تو باقی زاویے بھی متماثل ہوتے ہیں کیونکہ ہر مثلث کے تینوں زاویوں کی پیمائشوں

کا مجموعہ 180° ہوتا ہے۔ یعنی کوئی بھی دو زاویے اور ایک زاویے کا متصل ضلع، دوسرے مثلث کے دو زاویے اور نظیری ضلع کے متماثل ہو

تو زا ضل زا آزمائش کی شرط پوری ہو جاتی ہے اور وہ دونوں مثلث متماثل ہوتے ہیں۔

(5) قائمہ الزاویہ مثلثوں کی وتر ضلع آزمائش :



قائمہ الزاویہ مثلث کا وتر اور ایک ضلع دیا گیا ہو تو ایک اور صرف ایک مثلث بنا

سکتے ہیں۔ ایک قائمہ الزاویہ مثلث کا وتر اور ایک ضلع دوسرے قائمہ الزاویہ مثلث

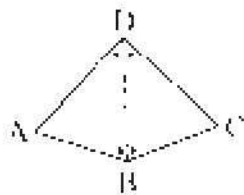
کے نظیری متماثل اجزاء والے دو قائمہ الزاویہ مثلث بنائے۔ درج بالا طریقے کے

مطابق وہ متماثل ہیں یا نہیں اس کی جانچ کیجیے۔

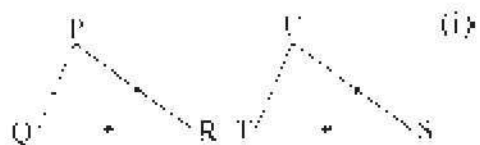
حل کردہ مثالیں

مثال (1) درج ذیل اشکال میں مثلثوں کی ہر جوڑی میں یکساں نشانات سے ظاہر کیے گئے اجزاء متماثل ہیں۔ ہر جوڑی میں مثلث کس آزمائش کے

ذریعے اور نقاط اس کی کس ایک سے ایک کی مطابقت کے ذریعے متماثل ہیں لکھیے۔



(ii)

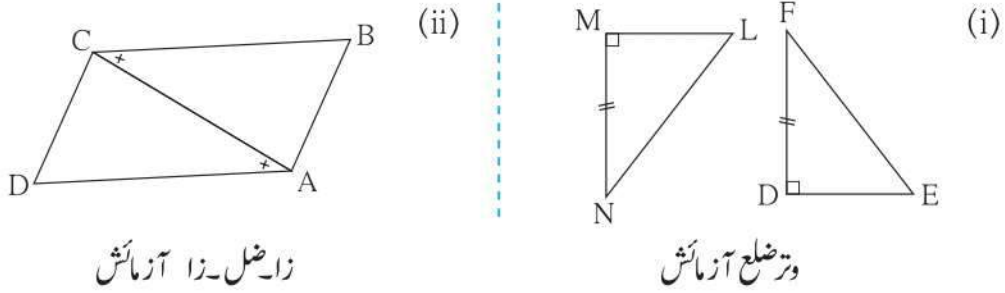


(i)

حل : (i) ضل ضل آزمائش کے ذریعے $PQR \leftrightarrow UTS$ کی مطابقت کے ذریعے

(ii) زاضل زا آزمائش کے ذریعے $DBA \leftrightarrow DBC$ کی مطابقت کے ذریعے

مثال (2) درج ذیل شکل میں مثلثوں کی جوڑی میں یکساں نشانات سے ظاہر کیے گئے اجزاء متماثل ہیں۔ ہر شکل کے نیچے مثلثوں کی متماثلت کی آزمائش لکھی گئی ہے۔ اس آزمائش کے ذریعے مثلثوں کو متماثل ہونے کے لیے اور کون سی معلومات دینا ضروری ہے اور وہ معلومات دینے کے بعد مثلث کے راسوں کی کس ایک سے ایک کی مطابقت سے متماثل ہوں گے لکھیے۔



زا۔ ضل۔ زا آزمائش

وتر ضلع آزمائش

حل : (i) دیے گئے مثلث قائمہ الزاویہ مثلث ہیں۔ ان میں صرف ایک ضلع متماثل ہیں لہذا ان کے وتر قطعہ LN اور قطعہ EF متماثل ہوں

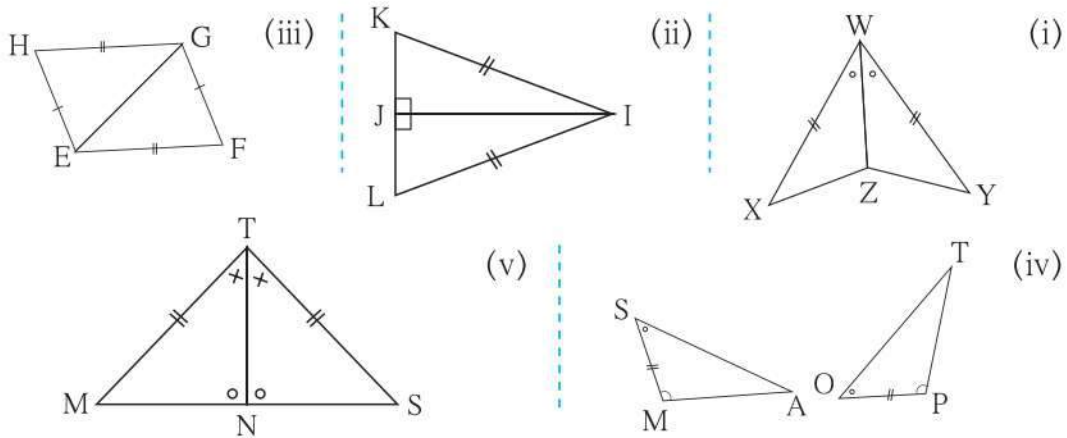
یہ معلومات دینا ضروری ہے۔ یہ معلومات دینے پر $LMN \leftrightarrow EDF$ مطابقت کی بناء پر مثلث متماثل ہوتے ہیں۔

(ii) شکل میں قطعہ CA مشترک ضلع ہے یعنی $\angle DCA \cong \angle BAC$ یہ معلومات دینا ضروری ہے، یہ معلومات دینے پر

$DCA \leftrightarrow BAC$ مطابقت کی بناء پر مثلث متماثل ہوں گے۔

مشقی سیٹ 13.1

1. درج ذیل اشکال میں مثلثوں کی ہر جوڑی میں یکساں نشانات سے ظاہر کیے گئے اجزاء متماثل ہیں۔ ہر جوڑی میں مثلث کس آزمائش کے ذریعے اور نقاط راس کی ایک سے ایک کی مطابقت کے ذریعے متماثل ہیں لکھیے۔



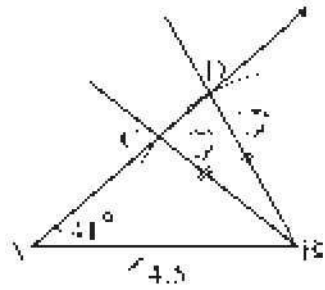
یہ میری سمجھ میں آگیا

- (1) ضل زاضل آزمائش : اگر ایک مثلث کے دو اضلاع اور ان کو شامل کرنے والا زاویہ دوسرے مثلث کے دو نظیری اضلاع اور ان کو شامل کرنے والے زاویے کے متماثل ہوں تو وہ مثلث ایک دوسرے کے متماثل ہوں گے۔
- (2) ضل ضل ضل آزمائش : اگر ایک مثلث کے تین اضلاع دوسرے مثلث کے تین نظیری اضلاع کے متماثل ہوں تو دونوں مثلث ایک دوسرے کے متماثل ہوتے ہیں۔
- (3) زاضل زاضل آزمائش : اگر ایک مثلث کے دو زاویے اور ان کو شامل کرنے والا ایک ضلع دوسرے مثلث کے دو نظیری زاویے اور ان کو شامل کرنے والے ضلع کے متماثل ہوں تو دونوں مثلث ایک دوسرے کے متماثل ہوں گے۔
- (4) زاضل زاضل آزمائش : ایک مثلث کے دو زاویے اور ان کو شامل نہ کرنے والا ضلع دوسرے مثلث کے دو نظیری زاویے اور ان کو شامل نہ کرنے والے نظیری ضلع کے متماثل ہوں تو دونوں مثلث ایک دوسرے کے متماثل ہوتے ہیں۔
- (5) وتر ضلع آزمائش : اگر ایک قائمہ الزاویہ مثلث کا وتر اور ایک ضلع، دوسرے قائمہ الزاویہ مثلث کے وتر اور نظیری ضلع کے متماثل ہوں تو دونوں مثلث ایک دوسرے کے متماثل ہوتے ہیں۔

مزید معلومات کے لیے :

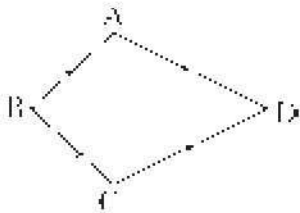
ایک مثلث کے دو اضلاع اور ان کو شامل نہ کرنے والا زاویہ دوسرے مثلث کے نظیری اجزاء کے متماثل ہوں تو دونوں مثلث ایک دوسرے کے متماثل ہوتے ہیں یا نہیں؟

متصلہ شکل کا مشاہدہ کیجیے $\triangle ABC$ اور $\triangle ABD$ میں AB مشترک ضلع ہے۔
 $BC \cong BD$ ضلع اور $\angle A$ مشترک زاویہ ہے لیکن وہ ضلعوں کو شامل کرنے والا زاویہ نہیں ہے۔ یعنی ایک مثلث کے تین اجزاء دوسرے مثلث کے نظیری اجزاء کے متماثل ہیں۔ لیکن وہ مثلث متماثل نہیں ہیں۔



اس کی مدد سے ہم کہہ سکتے ہیں کہ ایک مثلث کے دو اضلاع اور ان کو شامل نہ کرنے والے زاویے دوسرے مثلث کے نظیری اجزاء کے متماثل ہوں تو دونوں مثلث متماثل ہوں گے ایسا نہیں بھی ہو سکتا ہے۔

حل کردہ مثالیں



مثال (1) شکل میں $\square ABCD$ میں مساوی اضلاع کو یکساں نشانات سے ظاہر کیا گیا ہے۔

اس شکل میں متماثل زاویوں کی جوڑیاں ہیں یا نہیں معلوم کیجیے۔

حل : $\triangle ABD$ اور $\triangle CBD$ میں،

ضلع $AB \cong$ ضلع CB ... (دیا ہوا ہے)

ضلع $DA \cong$ ضلع DC ... (دیا ہوا ہے)

ضلع BD مشترک ہے۔

(ضلع ضلع آزمائش کے ذریعے) ...

$$\therefore \triangle ABD \cong \triangle CBD$$

$$\therefore \angle BAD \cong \angle BCD$$

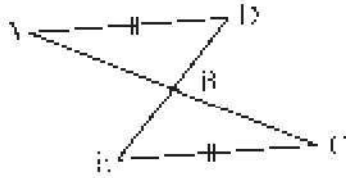
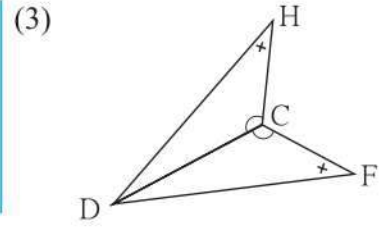
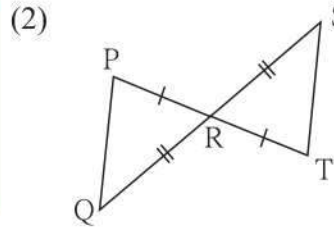
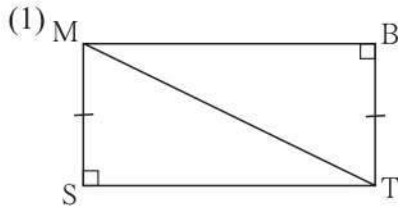
$$\therefore \angle ABD \cong \angle CBD$$

$$\angle ADB \cong \angle CDB$$

(متماثل مثلثوں کے نظیری زاویے) ...

مشقی سیٹ 13.2

1. مندرجہ ذیل میں مثلثوں کی ہر جوڑی میں یکساں نشانات سے ظاہر کیے گئے اجزاء متماثل ہیں۔ ہر جوڑی کے مثلث، نقاط راس کی کس مطابقت کے ذریعے اور کس آزمائش کے ذریعے متماثل ہیں لکھیے۔ ہر جوڑی میں مثلثوں کے باقی ماندہ نظیری متماثل اجزاء لکھیے۔



- 2.* متصلہ شکل میں $AD \cong EC$ قطعہ اور مزید کون سی معلومات دی جائے کہ $\triangle EBC$ اور $\triangle ABD$ ضلع زا زا آزمائش کے ذریعے ایک دوسرے کے متماثل ہو جائیں۔

جوابات کی فہرست

- 13.1 مشقی سیٹ : 1. (i) ضلع زا ضلع , $XWZ \leftrightarrow YWZ$ (ii) وتر ضلع , $KJI \leftrightarrow LJI$ (iii) ضلع ضلع ضلع , $HEG \leftrightarrow FGE$ (iv) زا ضلع زا , $SMA \leftrightarrow OPT$ (v) ضلع زا زا یا زا ضلع زا , $MTN \leftrightarrow STN$

- 13.2 مشقی سیٹ : 1. (1) $\triangle MST \cong \triangle TBM$, وتر ضلع , ضلع $ST \cong$ ضلع MB , $\angle SMT \cong \angle BTM$

$$\angle STM \cong \angle BMT \quad (2) \triangle PRQ \cong \triangle TRS, \text{ ضلع زا زا , ضلع } PQ \cong \text{ ضلع } TS, \angle RPQ \cong \angle RTS,$$

$$\angle PQR \cong \angle TSR \quad (3) \triangle DCH \cong \triangle DCF, \text{ ضلع زا زا , } \angle DHC \cong \angle DFC, \text{ ضلع } HC \cong \text{ ضلع } FC$$

2. (1) $\angle ADB \cong \angle ECB$ اور $\angle ABD \cong \angle EBC$ یا $\angle DAB \cong \angle CEB$



کوئی شخص، بینک، امداد باہمی انجمن وغیرہ اداروں سے کچھ رقم متعین شرح سود سے قرض کے طور پر لیتا ہے اور کچھ عرصے کے بعد قرض لی گئی رقم واپس کرتا ہے۔ اس رقم کو استعمال کرنے کے عوض میں کچھ زیادہ رقم ہر سال دیتا ہے اسے سود کہتے ہیں۔

مفرد سود معلوم کرنے کے لیے $I = \frac{PNR}{100}$ ضابطے کا استعمال ہم کر چکے ہیں۔

اس ضابطے میں سود = I، اصل زر = P، مدت سال میں = N، شرح فی صدی فی سال = R ہوتا ہے۔

آئیے سمجھ لیں

مرکب سود (Compound interest): امانت (بینک میں جمع کی گئی رقم) یا قرض پر بینک سود تحسب (محسوب) کرتی ہے۔ یہ کیوں اور کس طرح معلوم کرتے ہیں اس کا ہم مطالعہ کریں گے۔

استانی : جن رائے ایک بینک سے 10 فی صدی فی سال شرح سے ایک سال میں واپس کرنے کی شرط پر 10,000 روپے قرض لیا تو سال کے آخر میں اسے سود سمیت کتنی رقم دینا ہوگی؟

طالب علم : یہاں، روپے P = 10,000، R = 10، سال N = 1

$$I = \frac{PNR}{100} = \frac{10000 \times 10 \times 1}{100} = 1000 \text{ روپے}$$

جن رائے کو سال کے آخر میں سود سمیت 11,000 = 10,000 + 1000 روپے واپس کرنے ہوں گے۔

طالب علم : لیکن اگر سال کے آخر میں کسی قرض دار نے سود کی رقم ادا نہیں کی تو کیا ہوگا؟

استانی : بینک ہر سال کے آخر میں سود محسوب کرتا ہے اور ہر سال قرض دار کو وہ سود کی رقم ادا کرنا چاہیے ایسی توقع کرتا ہے۔ قرض دار نے پہلے سال کے آخر میں سود ادا نہیں کیا تو دوسرے سال کے لیے بینک اصل زر اور پہلے سال کا سود ملا کر حاصل ہونے والی رقم کو قرض مان لیتا ہے اصل زر اور پہلے سال کا سود ملا کر جو رقم بنتی ہے وہ دوسرے سال کا اصل زر مان کر آگے سود محسوب کرتے ہیں۔ یعنی دوسرے سال سود معلوم کرنے کے لیے اصل زر کی رقم پہلے سال کے کل زر کے مساوی ہوگی۔ اس طریقے سے سود محسوب کرنا، مرکب سود کہلاتا ہے۔

طالب علم : جن رائے قرض واپس کرنے کی مدت ایک سال اور بڑھالی تو کیا ہوگا؟

استانی : دوسرے سال کے لیے 11000 روپے اصل زر مان کر اس پر سود اور کل زر معلوم کرنا ہوگا۔

طالب علم : کیا اس کے لیے گزشتہ جماعت میں مطالعہ کیے گئے $\frac{110}{100} = \frac{\text{کل زر}}{\text{اصل زر}}$ نسبت کا استعمال کر سکتے ہیں؟

استانی : یقیناً! ہر سال کے لیے $\frac{\text{کل زر}}{\text{اصل زر}}$ نسبت مستقل ہے۔ مرکب سود معلوم کرنے کے لیے ہر سال گذشتہ سال کا کل زر ہی اگلے سال کا اصل زر ہوتا ہے۔ یعنی سود معلوم کرنے کی بجائے کل زر معلوم کرنا آسان ہوتا ہے۔ پہلے سال کے بعد کل زر A_1 ، دوسرے سال کے بعد کل زر A_2 ، تیسرے سال کے بعد کل زر A_3 سے ظاہر کریں تو پہلا اصل زر P ہوتا ہے۔

$$\therefore \frac{A_1}{P} = \frac{110}{100}, \quad \therefore A_1 = P \times \frac{110}{100}$$

دوسرے سال کا کل زر معلوم کرنے کے لیے

$$\therefore \frac{A_2}{A_1} = \frac{110}{100}, \quad \therefore A_2 = A_1 \times \frac{110}{100} = P \times \frac{110}{100} \times \frac{110}{100}$$

طالب علم : پھر تیسرے سال کا کل زر A_3 معلوم کرنے کے لیے

$$\therefore \frac{A_3}{A_2} = \frac{110}{100}, \quad \therefore A_3 = A_2 \times \frac{110}{100} = P \times \frac{110}{100} \times \frac{110}{100} \times \frac{110}{100}$$

استانی : شاباش! یہ مرکب سود معلوم کرنے کا ضابطہ ہے۔ یہاں $\frac{110}{100}$ سال کے آخر میں ایک روپے پر حاصل ہونے والا کل زر ہے۔ اسے دھیان میں رکھیں۔ جتنے سال کا کل زر معلوم کرنا ہوا اتنی مرتبہ اصل زر کو اس نسبت سے ضرب کرتے ہیں۔

طالب علم : یعنی پہلے سال کے آخر میں $\frac{\text{کل زر}}{\text{اصل زر}}$ نسبت کو M اور اصل زر کو P مانیں تو سال کے آخر میں کل زر $P \times M$ ، دوسرے سال کے آخر میں کل زر $P \times M^2$ اور اسی طرح تیسرے سال کے آخر میں کل زر $P \times M^3$ ہوتا ہے۔ اس طریقے سے کتنے بھی سال کا کل زر معلوم کر سکتے ہیں۔

استانی : صحیح ہے! R فی صد فی سال شرح سود ہو تو

$$1 = 1 \times N = 1 \times \left(1 + \frac{R}{100}\right) = 1 \times \left(\frac{100 + R}{100}\right)$$

$$\therefore \text{روپے کا 1 سال کا کل زر } P = P \times \left(1 + \frac{R}{100}\right) = P \times \frac{100 + R}{100}$$

$\therefore$ اصل زر P ، شرح سود R فی صد فی سال اور مدت N ہو تو

$$N = N = P \times \left(1 + \frac{R}{100}\right)^N = P \times \frac{(100 + R)^N}{100^N}$$

حل کردہ مثالیں

مثال (1) 4000 روپے کا 3 سال کا $12\frac{1}{2}\%$ فی صد فی سال شرح سے مرکب سود معلوم کیجیے۔

حل : یہاں، $P = 4000$ ، $R = 12\frac{1}{2}\%$ ، سال $N = 3$

$$A = P \left(1 + \frac{R}{100} \right)^N = P \left(1 + \frac{12.5}{100} \right)^3$$

$$= 4000 \left(1 + \frac{12.5}{100} \right)^3$$

$$A = 4000 \left(\frac{112.5}{100} \right)^3 = 4000 \left(\frac{9}{8} \right)^3$$

$$= 5695.31 \text{ روپے}$$

اصل زر - کل زر = تین سال بعد مرکب سود

$$= 5695.31 - 4000 = 1695.31 \text{ روپے}$$

مشقی سیٹ 14.1

1. مرکب سود کے حساب سے کل زر اور مرکب سود معلوم کیجیے۔

نمبر شمار	اصل زر (روپے)	شرح (فی صدی فی سال)	مدت (سال)
1	2000	5	2
2	5000	8	3
3	4000	7.5	2

2. سمیراؤ نے ایک امداد باہمی انجمن سے 12 فی صدی فی سال شرح سے 3 سال کے لیے 12500 روپے قرض لیے۔ تو اسے تیسرے سال کے آخر میں مرکب سود کے حساب سے کل کتنے روپے واپس کرنا ہوگا؟
3. شلا کا نے $10\frac{1}{2}$ فی صدی فی سال شرح سود سے 8000 روپے قرض لے کر ایک کاروبار شروع کیا 2 سال بعد قرض واپس کرتے وقت مرکب سود کے حساب سے اسے کتنا سود ادا کرنا ہوگا؟

مزید معلومات کے لیے :

- (1) کچھ مالیاتی کاروبار میں شرح سود ششماہی محسوب کیا جاتا ہے۔ N سال کی مدت کے لیے شرح سود R ہو تو ششماہی سود محسوب کرنے کے لیے دیے گئے اصل زر کے لیے شرح $\frac{R}{2}$ لیتے ہیں۔ N سال کے لیے چھ ماہ کے 2N مرحلے ہوتے ہیں اسے دھیان میں رکھتے ہوئے سود محسوب کرتے ہیں۔
- (2) بہت سے مالیاتی ادارے مرکب سود محسوب کرنے کے لیے ماہانہ شرح استعمال کرتے ہیں، اس وقت سود کی ماہانہ شرح $\frac{R}{12}$ لیتے ہیں اور مدت $12 \times N$ یعنی ایک سال کے کل مہینے لے کر سود محسوب کرتے ہیں۔
- (3) آج کل بینک روزانہ سود کے حساب سے مرکب سود محسوب کرتا ہے۔

سرگرمی : آپ کے گھر کے قریب جو بینک ہو وہاں جا کر مختلف اسکیموں کے بارے میں جانکاری حاصل کریں۔ ان اسکیموں میں دیے ہوئے سود کی شرحوں کی جدول تیار کر کے کلاس میں لگائیں۔

مرکب سود کے ضابطے کا اطلاق (Application of formula for compound interest)

مرکب سود کے طریقے سے کل زر معلوم کرنے کے ضابطے کا استعمال روزمرہ کی زندگی میں اور دوسرے شعبوں میں مثالیں حل کرنے کے لیے استعمال ہوتا ہے، مثلاً آبادی میں اضافہ، کسی سواری کی قیمت میں ہر سال ہونے والی کمی وغیرہ۔

بعض اشیاء کچھ عرصہ استعمال کرنے کے بعد فروخت کرنے پر ان کی قیمت خرید سے کم قیمت میں فروخت ہوتی ہیں۔ قیمت میں ہونے والی کمی کو نقصان یا خسارہ (depreciation) کہتے ہیں۔

قیمتوں میں ہونے والا خسارہ متعین مدت میں متعین شرح سے ہوتا ہے۔ مثلاً مشینوں کی قیمت ہر سال متعین فیصدی کم ہوتی ہے۔ کچھ مدت بعد کم ہونے والی قیمت معلوم کرنے کے لیے مرکب سود کا ضابطہ استعمال کرتے ہیں۔

یہ قیمت معلوم کرنے کے لیے خسارے کی شرح معلوم ہونا چاہیے۔ شے کی قیمت کم ہونے پر خسارے کی شرح R منفی لی جاتی ہے۔

حل کردہ مثالیں

مثال (1) ایک شہر کی آبادی ہر سال 8% بڑھتی ہے سال 2010 میں اس شہر کی آبادی 250000 تھی تو سال 2012 میں اس شہر کی آبادی کتنی تھی؟

حل : یہاں، $P = 2,50,000$ سال 2010 میں آبادی

$A = ?$ سال 2012 میں آبادی

$R = 8\%$ آبادی میں اضافہ کی شرح

$N = 2$ سال

2012 میں یعنی 2 سال بعد ہونے والی آبادی A

$$\begin{aligned} A &= P \times \left(1 + \frac{R}{100}\right)^N = 250000 \times \left(1 + \frac{8}{100}\right)^2 \\ &= 250000 \times \frac{108}{100} \\ &= 250000 \times \frac{108}{100} \times \frac{108}{100} \\ &= 2,91,600 \end{aligned}$$

∴ 2012 میں شہر کی آبادی 2,91,600 تھی۔

مثال (2) نازیہ نے ایک اسکوٹر 2015 میں 60,000 روپے کا خریدا۔ خسارے کی شرح 20 فی صدی فی سال ہو تو 2 سال بعد اس اسکوٹر کی قیمت کیا ہو جائے گی؟

حل : یہاں روپے $P = 60000$ ، 2 سال بعد ملنے والی رقم A ، خسارے کی شرح $R = -20\%$ ، سال $N = 2$

A = 2 سال بعد ملنے والی رقم

$$A = P \times \left(1 + \frac{R}{100}\right)^N$$

$$= 60000 \times \left(1 + \frac{-20}{100}\right)^2$$

$$= 60000 \times \left(1 - \frac{1}{5}\right)^2$$

$$= 60000 \times \left(\frac{4}{5}\right)^2$$

$$= 60000 \times \frac{4}{5} \times \frac{4}{5}$$

$$A = 38400 \text{ روپے}$$

2 سال بعد نازیہ کے اس اسکوٹر کی قیمت 38,400 روپے ہو جائے گی۔

مرکب سود کے طریقے سے سود معلوم کرنے کے ضابطے میں A ، P ، N ، R ان چاروں میں سے کوئی تین دیے جائیں تو چوتھا معلوم کیا جاسکتا ہے۔

مثال (3) ایک رقم کا 10 فی صدی فی سال شرح سے 3 سال میں مرکب سود کے حساب سے 6655 روپے کل زر ہوتا ہے۔ وہ رقم معلوم کیجیے۔

حل : یہاں روپے $A = 6655$ ، فی صدی فی سال شرح $R = 10$ ، سال $N = 3$

$$A = P \times \left(1 + \frac{R}{100}\right)^N$$

$$\therefore 6655 = P \times \left(1 + \frac{10}{100}\right)^3 = P \times \frac{1100}{1000} = P \times \frac{11}{10}$$

$$\therefore P = \frac{6655 \times 10}{11 \times 11 \times 11} \therefore P = 5 \times 10^3 = 5000$$

$\therefore$ وہ رقم 5000 روپے ہے۔

مثال (4) 10 فی صدی فی سال شرح سے 9000 روپے کا کتنے سال میں مرکب سود 1890 روپے ہو جائے گا۔

حل : یہاں، $R = 10$ ، روپے $P = 9000$ ، روپے $I = 1890$ = مرکب سود

پہلے مرکب سود کے حساب سے کل زر معلوم کریں گے۔

$$A = P + I = 9000 + 1890 = 10890$$

مرکب سود کے حساب سے کل زر معلوم کرنے کا ضابطہ لکھ کر اس میں قیمت رکھیں گے۔

$$A = 10890 = P \times \left(1 + \frac{R}{100}\right)^N = 9000 \times \left(1 + \frac{10}{100}\right)^N = 9000 \times \frac{11^N}{10^N}$$

$$\therefore \frac{11^N}{10^N} = \frac{10890}{9000} = \frac{121}{100} \therefore \frac{11^N}{10^N} = \frac{121}{100} = \frac{11^2}{10^2} \therefore N = 2$$

$\therefore$ 2 سال میں مرکب سود 1890 روپے ہو جائے گا۔

مشقی سیٹ 14.2

1. ایک عبوری (فلائی اور) پل کی تعمیر میں ابتداء میں 320 مزدور تھے۔ ہر سال مزدوروں کی تعداد میں 25% اضافہ ہوتا ہے تو 2 سال بعد اس کام پر کتنے مزدور ہوں گے؟
2. ایک گڈریے کے پاس ابتداء میں 200 بکریاں تھیں۔ ہر سال ان کی تعداد میں 10% اضافہ ہوتا ہے تو 2 سال بعد گڈریے کے پاس کتنی بکریاں ہوں گی؟
3. ایک تحفظ گاہ میں 40,000 درخت تھے۔ درختوں کی تعداد میں ہر سال 5% کی شرح سے اضافہ کرنے کا فیصلہ کیا گیا تو 3 سال بعد تحفظ گاہ میں درختوں کی تعداد کیا ہو جانا چاہیے؟
4. آج ایک مشین 2,50,000 روپے میں خریدی گئی۔ خسارے کی شرح 10% فی سال ہے۔ اسے 2 سال بعد فروخت کر دیا جائے تو فروخت قیمت، خرید قیمت سے کتنا کم ہو جائے گی؟
5. ایک اصل زر کی 16 فی صدی فی سال شرح سے مرکب سود کے حساب سے 2 سال کا کل زر 4036.80 روپے ہے تو 2 سال میں ہونے والا سود کتنا ہوگا؟
6. 15000 روپے 12 فی صدی فی سال شرح مرکب سود کے حساب سے قرض لیا گیا تو 3 سال بعد کتنے روپے واپس کرنا ہوں گے؟
7. 18 فی صدی فی سال شرح مرکب سود کے حساب سے ایک اصل زر کا 2 سال کا کل زر 13924 روپے ہوتا ہے تو اصل زر کتنا تھا؟
8. شہر کے ایک محلے کی آبادی متعین شرح سے بڑھتی ہے۔ اس محلے کی موجودہ اور 2 سال بعد آبادی بالترتیب 16000 اور 17640 ہے تو آبادی میں اضافہ کی شرح معلوم کیجیے؟
9. 700 روپے کا 10 فی صدی فی سال شرح سے کتنے سال میں کل زر 847 روپے ہوگا؟
10. 8 فی صدی فی سال شرح سود سے 20,000 روپے کا 2 سال میں ہونے والے مفرد سود اور مرکب سود کے درمیان فرق معلوم کیجیے۔

جوابات کی فہرست

- 14.1 مشقی سیٹ : 1. (1) ₹2205, ₹205 (2) ₹6298.56, ₹1298.56 (3) ₹4622.5, ₹622.5
2. ₹17561.60 3. ₹1768.2
- 14.2 مشقی سیٹ : 1. 500 مزدور 2. 242 بکریاں 3. 46,305 درخت 4. ₹47,500 5. ₹1036.80
6. ₹21,073.92 7. ₹10,000 8. 5 فی صدی فی سال 9. 2 سال میں 10. ₹128



آئیے ذرا یاد کریں



ہم جانتے ہیں کہ ہندکثیر ضلعی کے اضلاع سینٹی میٹر، میٹر، کلومیٹر اکائیوں میں دیے جاتے ہیں اور ان کے رقبے بالترتیب مربع سینٹی میٹر، مربع میٹر، مربع کلومیٹر اکائیوں میں حاصل ہوتے ہیں کیونکہ رقبہ کی پیمائش مربع کی صورت میں کرتے ہیں۔

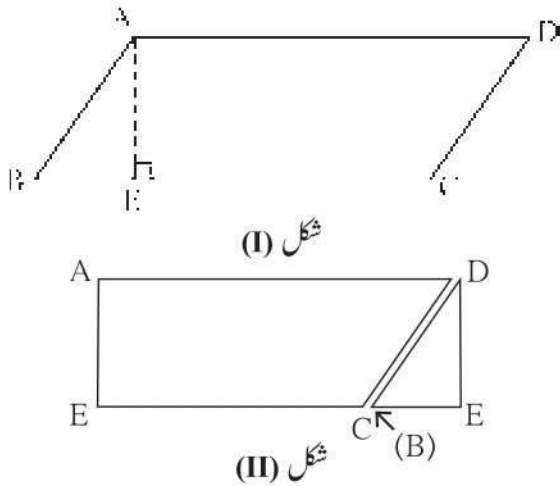
- (1) $\text{مربع کا رقبہ} = \text{ضلع}^2$
- (2) $\text{چوڑائی} \times \text{لمبائی} = \text{مستطیل کا رقبہ}$
- (3) $\text{قائمہ زاویہ بنانے والے ضلعوں کا حاصل ضرب} \times \frac{1}{2} = \text{قائمہ الزاویہ مثلث کا رقبہ}$
- (4) $\text{اونچائی} \times \text{قاعدہ} \times \frac{1}{2} = \text{مثلث کا رقبہ}$

آئیے سمجھ لیں



متوازی الاضلاع کا رقبہ (Area of parallelogram)

عملی کام :



• ایک کاغذ پر کافی بڑا متوازی الاضلاع ABCD بنائیے۔

نقطہ A سے ضلع BC پر عمود $\triangle AEB$ قائمہ الزاویہ مثلث کاٹ لیجیے۔ اسے سرکاتے ہوئے شکل (II) میں دکھائے ہوئے طریقے سے $\square ABCD$ کے باقی بچے ہوئے حصے سے جوڑتے ہیں۔ تیار ہونے والی شکل مستطیل ہے اسے دھیان میں رکھتے ہیں۔

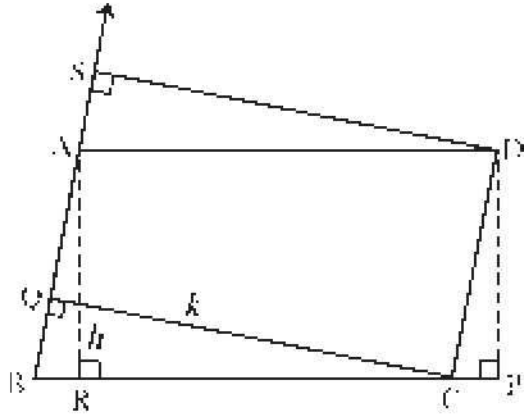
• متوازی الاضلاع سے ہی یہ مستطیل تیار ہوا ہے یعنی دونوں کے رقبے مساوی ہیں۔

• متوازی الاضلاع کا قاعدہ یعنی مستطیل کے ایک ضلع کی لمبائی اور متوازی الاضلاع کی اونچائی یعنی مستطیل کے دوسرے ضلع یعنی مستطیل کی چوڑائی ہے۔

$$\therefore \text{متوازی الاضلاع کا رقبہ} = \text{قاعدہ} \times \text{اونچائی}$$

دھیان رکھیں کہ متوازی الاضلاع کے متوازی ضلعوں میں اگر ایک ضلع کو قاعدہ مانیں تو ان متوازی ضلعوں کا درمیانی فاصلہ ہی اس متوازی الاضلاع کی نظیری قاعدے پر اونچائی ہوتا ہے۔

□ABCD ایک متوازی الاضلاع ہے۔



ضلع BC $\perp$ DP قطعہ، ضلع BC $\perp$ AR قطعہ، ضلع BC کو قاعدہ مانیں تو

$$\text{اونچائی} = l(AR) = l(DP) = h$$

اگر AB ضلع $\perp$ CQ قطعہ ہو اور اگر AB کو قاعدہ مانیں تو

اس قاعدہ کی نظیری اونچائی یعنی $l(QC) = k$ ہے۔

$$\therefore A(\square ABCD) = l(BC) \times h = l(AB) \times k$$

حل کردہ مثالیں

مثال (1) ایک متوازی الاضلاع کا قاعدہ 8 سم اور اونچائی 5 سم ہے۔ اس متوازی الاضلاع کا رقبہ معلوم کیجیے۔

حل : متوازی الاضلاع کا رقبہ = اونچائی $\times$ قاعدہ = 8×5

$$= 40$$

$\therefore$ متوازی الاضلاع کا رقبہ = 40 مربع سم

مثال (2) ایک متوازی الاضلاع کا رقبہ 112 مربع سم ہے۔ اس کا قاعدہ 10 سم ہے اس کی اونچائی معلوم کیجیے۔

حل : اونچائی $\times$ قاعدہ = متوازی الاضلاع کا رقبہ

$$\therefore 112 = 10 \times \text{اونچائی}$$

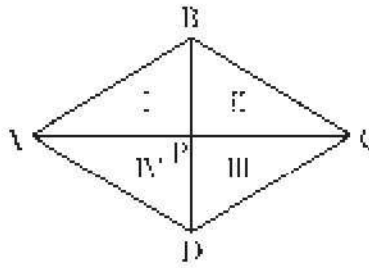
$$\therefore \frac{112}{10} = \text{اونچائی}$$

متوازی الاضلاع کی اونچائی 11.2 سم ہے۔

مشقی سیٹ 15.1

1. ایک متوازی الاضلاع کا قاعدہ 18 سم اور اونچائی 11 سم ہے تو اس متوازی الاضلاع کا رقبہ معلوم کیجیے۔
2. ایک متوازی الاضلاع کا رقبہ 29.6 مربع سم اور قاعدہ 8 سم ہے تو اس متوازی الاضلاع کی اونچائی معلوم کیجیے۔
3. متوازی الاضلاع کا رقبہ 83.2 مربع سم ہے۔ اس کی اونچائی 6.4 سم ہو تو اس کے قاعدے کی لمبائی کیا ہوگی؟

معین کا رقبہ (Area of a rhombus)



عملی کام : شکل میں دکھائے گئے طریقے کے مطابق ایک معین بنائیے۔

ہمیں معلوم ہے کہ معین کے وتر ایک دوسرے کے عمودی ناصف ہوتے ہیں۔

$$l(BD) = d_2 \text{ اور } l(AC) = d_1$$

فرض کریں $\square ABCD$ ایک معین ہے، اس کے وتر نقطہ P پر قطع کرتے ہیں۔

اس سے ہمیں چار متماثل قائمہ الزاویہ مثلث حاصل ہوتے ہیں۔

ہر قائمہ الزاویہ مثلث کا ضلع $\frac{1}{2} l(AC)$ اور $\frac{1}{2} l(BD)$ کے مساوی ہے۔

$$l(AP) = l(PC) = \frac{1}{2} l(AC) = \frac{d_1}{2}$$

$$l(BP) = l(PD) = \frac{1}{2} l(BD) = \frac{d_2}{2}$$

چاروں قائمہ الزاویہ مثلثوں کے رقبے مساوی ہیں۔

اسی طرح

$$\square ABCD = 4 \times A(\triangle APB)$$

$$= 4 \times \frac{1}{2} \times l(AP) \times l(BP)$$

$$= 2 \times \frac{d_1}{2} \times \frac{d_2}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \times d_1 \times d_2$$

$$\therefore \text{معین کا رقبہ} = \frac{1}{2} \times \text{وتروں کی لمبائی کا حاصل ضرب}$$

حل کردہ مثالیں

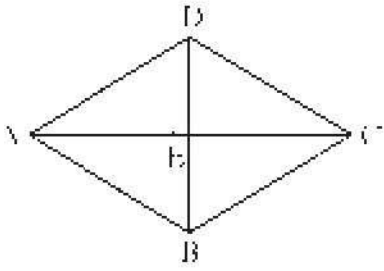
مثال (1) ایک معین کے دونوں وتروں کی لمبائیاں بالترتیب 11.2 سم اور 7.5 سم ہیں۔ اس معین کا رقبہ معلوم کیجیے۔

حل : وتروں کی لمبائیوں کا حاصل ضرب $\times \frac{1}{2} =$ معین کا رقبہ

$$= \frac{1}{2} \times \frac{11.2}{1} \times \frac{7.5}{1} = 56 \times 7.5$$

$$= 42 \text{ مربع سم}$$

مثال (2) ایک معین کا رقبہ 96 مربع سم ہے۔ اس کے ایک وتر کی لمبائی 12 سم ہے۔ تو معین کے ضلع کی لمبائی معلوم کیجیے۔



حل : فرض کریں □ABCD ایک معین ہے۔

اس کے وتر BD کی لمبائی 12 سم ہے۔

معین کا رقبہ 96 مربع سم ہے۔

اس کی مدد سے پہلے وتر AC کی لمبائی معلوم کرتے ہیں۔

$$\text{معین کا رقبہ} = \frac{1}{2} \times \text{دوڑوں کی لمبائیوں کا حاصل ضرب}$$

$$\therefore 96 = \frac{1}{2} \times 12 \times AC = 6 \times AC$$

$$\therefore AC = 16$$

فرض کریں دوڑوں کا نقطہ تقاطع E ہے۔ معین کے وتر ایک دوسرے کے عمودی ناصف ہوتے ہیں۔

اس لیے $\triangle ADE$ میں $m\angle E = 90^\circ$

$$AE = \frac{1}{2} AC = \frac{1}{2} \times 16 = 8; \quad DE = \frac{1}{2} BD = \frac{1}{2} \times 12 = 6$$

فیثاغورث کے مسئلے کے ذریعے

$$\begin{aligned} AD^2 &= AE^2 + DE^2 = 8^2 + 6^2 \\ &= 64 + 36 = 100 \end{aligned}$$

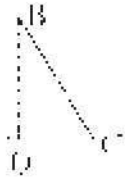
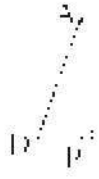
$$\therefore AD = 10$$

اس لیے معین کے ضلع کی لمبائی 10 سم ہے۔

مشقی سیٹ 15.2

1. ایک معین کے دوڑوں وتروں کی لمبائیاں 15 اور 24 سم ہیں۔ اس کا رقبہ معلوم کیجیے۔
2. ایک معین کے دوڑوں وتروں کی لمبائیاں بالترتیب 16.5 سم اور 14.2 سم ہیں۔ معین کا رقبہ معلوم کیجیے۔
3. ایک معین کا احاطہ 100 سم ہے۔ اس کے ایک وتر کی لمبائی 48 سم ہے۔ معین کا رقبہ کتنا ہوگا؟
- 4*. ایک معین کے ایک وتر کی لمبائی 30 سم ہے۔ اس کا رقبہ 240 مربع سم ہے۔ معین کا احاطہ معلوم کیجیے۔

ذوزنقہ کا رقبہ (Area of a trapezium)



عملی کام : قطعہ $AB \parallel DC$ قطعہ والا ایک ذوزنقہ $\square ABCD$ ایک کاغذ پر بنائیے

قطعہ اور $AP \perp DC$ ضلع

قطعہ بنائیے $BQ \perp DC$ ضلع

فرض کریں $l(AP) = l(BQ) = h$

ذوزنقہ کی اونچائی h ، یعنی متوازی خطوط کا درمیانی فاصلہ، عمودین بنانے کی وجہ سے $\square ABCD$ کے 3 حصے ہو جاتے ہیں۔ ان میں

سے $\triangle DPA$ اور $\triangle BQC$ قائمہ الزاویہ مثلث ہیں۔

$\square ABQP$ ایک مستطیل ہے نقاط P اور Q قطعہ DC پر ہیں۔

$$ABCD = A(\triangle APD) + A(\square APQB) + A(\triangle BQC)$$

$$= \frac{1}{2} \times l(DP) \times h + l(PQ) \times h + \frac{1}{2} \times l(QC) \times h$$

$$= h \left[\frac{1}{2} DP + PQ + \frac{1}{2} QC \right]$$

$$= \frac{1}{2} \times h [l(DP) + 2l(PQ) + l(QC)]$$

$$= \frac{1}{2} \times h [l(DP) + l(PQ) + l(AB) + l(QC)] \dots [\because l(PQ) = l(AB)]$$

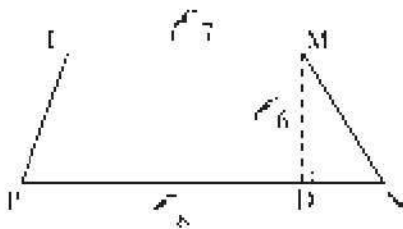
$$= \frac{1}{2} \times h [l(DP) + l(PQ) + l(QC) + l(AB)]$$

$$= \frac{1}{2} \times h [l(DC) + l(AB)]$$

$$A(\square ABCD) = \frac{1}{2} \times (\text{متوازی اضلاع کی لمبائی کا مجموعہ}) \times h$$

$$\text{ذوزنقہ کا رقبہ} = \frac{1}{2} \times \text{متوازی اضلاع کی لمبائی کا مجموعہ} \times \text{اونچائی}$$

حل کردہ مثالیں



مثال (1) ایک ذوزنقہ کے مقابل کے اضلاع کی ایک جوڑی ایک دوسرے کے متوازی

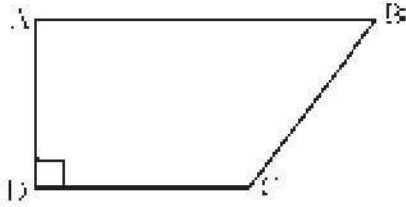
ہے۔ ان اضلاع کا درمیانی فاصلہ 6 سم ہے اور متوازی ضلعوں کی لمبائیاں بالترتیب

7 سم اور 8 سم ہیں۔ ذوزنقہ کا رقبہ معلوم کیجیے۔

حل :

$$\begin{aligned} \text{سم } 6 &= \text{ذوزلقہ کی اونچائی} = \text{متوازی ضلعوں کا درمیانی فاصلہ} \\ \text{اونچائی} \times (\text{متوازی ضلعوں کی لمبائی کا مجموعہ}) \times \frac{1}{2} &= \text{ذوزلقہ کا رقبہ} \\ &= \frac{1}{2} (7 + 8) \times 6 = 45 \text{ مربع سم} \end{aligned}$$

مشقی سیٹ 15.3

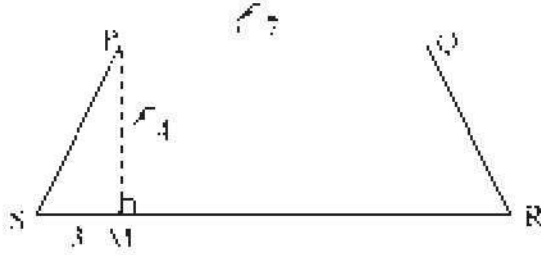


1. ذواربعۃ الاضلاع □ABCD میں سم $l(AB) = 13$

سم $l(AD) = 8$ ، سم $l(DC) = 9$

تو رقبہ معلوم کیجیے۔

2. ایک ذوزلقہ کے متوازی ضلعوں کی لمبائیاں بالترتیب 8.5 سم اور 11.5 سم ہیں۔ اس کی اونچائی 4.2 سم ہے۔ ذوزلقہ کا رقبہ معلوم کیجیے۔



3*. □PQRS ایک متساوی الساقین ذوزلقہ ہے۔

سم $l(PQ) = 7$ ، ضلع $SR \perp PM$ قطعہ

سم $l(SM) = 3$ ، متوازی ضلعوں کا درمیانی فاصلہ 4 سم ہے۔

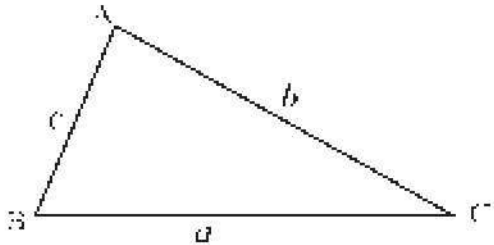
تو رقبہ معلوم کیجیے۔



مثلث کا رقبہ (Area of a Triangle)

ہم جانتے ہیں کہ ارتفاع $\times$ قاعدہ $\times \frac{1}{2} =$ مثلث کا رقبہ

اب ہم دیکھتے ہیں کہ مثلث کی اونچائی نہیں دی گئی ہوتا ہم مثلث کے تینوں اضلاع کی لمبائیاں دی گئی ہوں تو اس مثلث کا رقبہ کس طرح معلوم کرتے ہیں۔



△ABC کے اضلاع کی لمبائیاں a ، b ، c ہیں۔

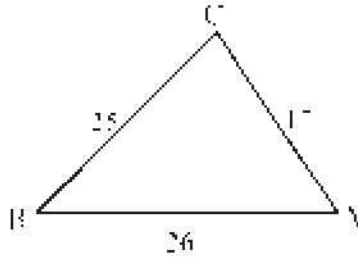
اس مثلث کا نصف احاطہ معلوم کرتے ہیں۔

$$s = \frac{1}{2} (a + b + c) \text{ - نصف احاطہ}$$

$$\text{مثلث کا رقبہ} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

اس ضابطے کو ہیرون کا ضابطہ (Heron's Formula) کہتے ہیں۔

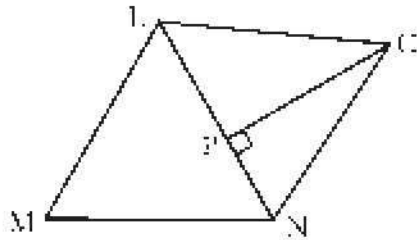
مثال (1) ایک مثلث کے اضلاع 17 سم، 25 سم اور 26 سم ہیں۔ مثلث کا رقبہ معلوم کیجیے۔



حل : $c = 26$, $b = 25$, $a = 17$

$$\text{نصف احاطہ} = s = \frac{a + b + c}{2} = \frac{17 + 25 + 26}{2} = \frac{68}{2} = 34$$

$$\begin{aligned} \text{مثلث کا رقبہ} &= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \\ &= \sqrt{34(34-17)(34-25)(34-26)} \\ &= \sqrt{34 \times 17 \times 9 \times 8} \\ &= \sqrt{17 \times 2 \times 17 \times 3 \times 3 \times 2 \times 2 \times 2} \\ &= \sqrt{17 \times 2^3 \times 3^2} \\ &= 17 \times 2 \times 3 \times 3 = 244 \text{ مربع سم} \end{aligned}$$



مثال (2) متعلقہ شکل میں ایک قطعہ اراضی کا نقشہ دیا گیا ہے۔

$$l(MN) = 60 \text{ میٹر} \quad l(LM) = 60 \text{ میٹر}$$

$$l(OP) = 70 \text{ میٹر} \quad l(LN) = 96 \text{ میٹر}$$

اس قطعہ اراضی کا رقبہ معلوم کیجیے۔

حل : اس شکل میں $\triangle LMN$ اور $\triangle LON$ بننے والے مثلث نظر آتے ہیں۔

$\triangle LMN$ کے تمام اضلاع کی لمبائیاں معلوم ہیں اس لیے بیرون کے ضابطے کا استعمال کر کے اس کا رقبہ معلوم کریں گے۔

$\triangle LON$ میں ضلع LN قاعدہ ہے اور $l(OP)$ کو ارتفاع مان کر $\triangle LON$ کا رقبہ معلوم کرتے ہیں۔

$$\text{نصف احاطہ } \triangle LMN = s = \frac{60 + 60 + 96}{2} = \frac{216}{2} = 108$$

$$\begin{aligned} A(\triangle LMN) &= \sqrt{108(108-60)(108-60)(108-96)} \\ &= \sqrt{108 \times 48 \times 48 \times 12} \\ &= \sqrt{12 \times 9 \times 48 \times 48 \times 12} \end{aligned}$$

$$A(\triangle LMN) = 12 \times 3 \times 48 = 1728 \text{ مربع میٹر}$$

$$\begin{aligned} A(\triangle LNO) &= \frac{1}{2} \times \text{قاعدہ} \times \text{ارتفاع} \\ &= \frac{1}{2} \times 96 \times 70 \\ &= 90 \times 35 = 3360 \text{ مربع سم} \end{aligned}$$

$$\text{قطعہ اراضی } \square LMNO = A(\triangle LMN) + A(\triangle LNO)$$

$$= 1728 + 3360$$

$$= 5088 \text{ مربع میٹر}$$

یہ میری سمجھ میں آ گیا

$$\text{ارتفاع} \times \text{قاعدہ} = \text{متوازی الاضلاع کا رقبہ}$$

$$\text{وتروں کی لمبائیوں کا حاصل ضرب} \times \frac{1}{2} = \text{معین کا رقبہ}$$

$$\text{اونچائی} \times \text{متوازی اضلاع کی لمبائیوں کا مجموعہ} \times \frac{1}{2} = \text{ذوزنقہ کا رقبہ}$$

اگر $\triangle ABC$ کے اضلاع a, b, c ہوں تو ہیرون کے ضابطے کا استعمال کر کے مثلث کا رقبہ معلوم کرتے ہیں۔

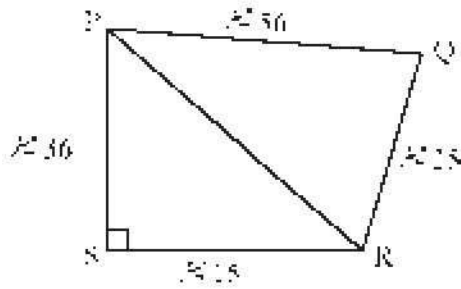
$$A(\triangle ABC) = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$s = \frac{a+b+c}{2} \text{ جس میں}$$

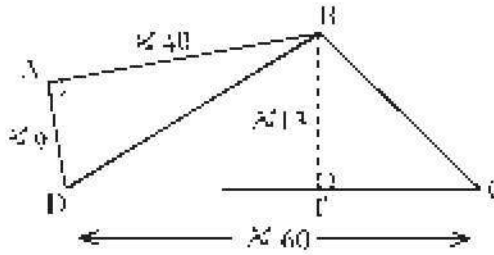
مشقی سیٹ 15.4

1. ایک مثلث کے اضلاع کی لمبائیاں 45 سم، 39 سم اور 42 سم ہیں۔

مثلث کا رقبہ معلوم کیجیے۔



2. شکل میں دکھائی گئی پینٹشوں کو دھیان میں رکھ کر PQRS کا رقبہ معلوم کیجیے۔



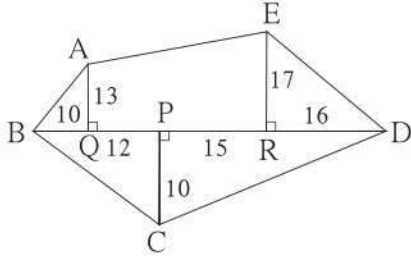
3. متصلہ شکل میں کچھ پینٹشیں دکھائی گئیں ہیں ان کی مدد سے ABCD کا

رقبہ معلوم کیجیے۔

آئیے سمجھ لیں

غیر منتظم جگہ کا رقبہ :

قطعہ اراضی، کھیتی کی زمین وغیرہ کی شکل عام طور پر غیر منتظم کثیر الاضلاع کی ہوتی ہے۔ ان کی تقسیم مثلث یا مخصوص قسم کے ذواربعۃ الاضلاع میں کرتے ہیں۔ اس طرح قطعہ اراضی کی تقسیم کر کے ان کا رقبہ کس طرح معلوم کرتے ہیں اسے ذیل کی مثالوں سے سمجھ لیجیے۔



مثال : متصلہ شکل میں ABCDE ایک کثیر ضلعی دیا گیا ہے۔ شکل میں تمام پیمائش میٹر میں دی گئی ہیں۔ اس شکل کا رقبہ معلوم کیجیے۔

حل : یہاں $\triangle AQB$ اور $\triangle ERD$ قائمہ الزاویہ مثلث ہیں۔

$\square AQRE$ ذوزنقہ ہے۔

$\triangle BCD$ کا قاعدہ BD اور ارتفاع PC دیا ہوا ہے۔

اب ہم ہر شکل کا رقبہ معلوم کریں گے۔

$$A(\triangle AQB) = \frac{1}{2} \times l(BQ) \times l(AQ) = \frac{1}{2} \times 10 \times 13 = 65 \text{ مربع میٹر}$$

$$A(\triangle ERD) = \frac{1}{2} \times l(RD) \times l(ER) = \frac{1}{2} \times 16 \times 17 = 136 \text{ مربع میٹر}$$

$$\begin{aligned} A(\square AQRE) &= \frac{1}{2} [l(AQ) + l(ER)] \times l(QR) \\ &= \frac{1}{2} [13 + 17] \times (12 + 15) \\ &= \frac{1}{2} \times 30 \times 27 = 15 \times 27 = 405 \text{ مربع میٹر} \end{aligned}$$

$$l(BD) = l(BP) + l(PD) = 10 + 12 + 15 + 16 = 53 \text{ میٹر}$$

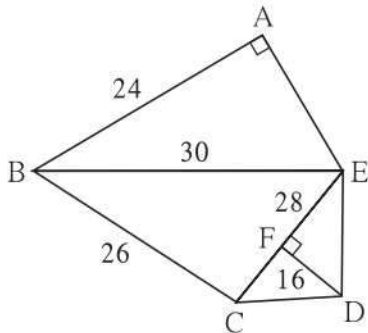
$$A(\triangle BCD) = \frac{1}{2} \times l(BD) \times l(PC) = \frac{1}{2} \times 53 \times 10 = 265 \text{ مربع میٹر}$$

$\therefore$ کثیر ضلعی $\square ABCDE$ کا رقبہ

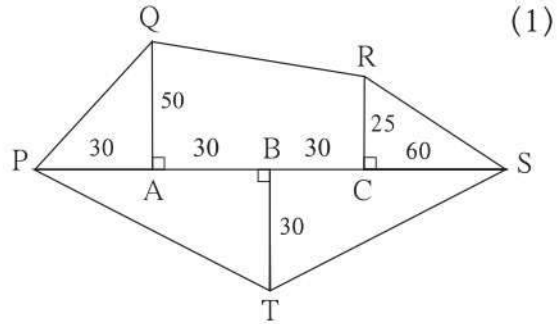
$$\begin{aligned} &= A(\triangle AQB) + A(\square AQRE) + A(\triangle ERD) + A(\triangle BCD) \\ &= 65 + 405 + 136 + 265 \\ &= 871 \text{ مربع میٹر} \end{aligned}$$

مشقی سیٹ 15.5

1. درج ذیل قطعہ اراضی کا رقبہ معلوم کیجیے۔ (تمام پیمائش میٹر میں ہیں)



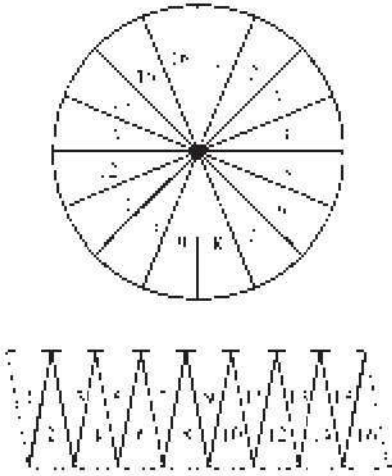
(2)



(1)

دائرے کا رقبہ (Area of a Circle) :

عملی کام : ایک کارڈ شیٹ پر ایک بڑا دائرہ بنائیے۔



دائرے میں شکل کے مطابق دائرے کے تراشے بنا کر انہیں کاٹ کر الگ الگ کیجیے۔ دائرے کو 16 یا 32 مساوی حصے میں تقسیم کیجیے۔ یا 360° کے مساوی حصے کر کے دائرے کے 18 یا 20 مساوی حصے کیجیے۔ اس کے بعد ان حصوں کو نصف قطروں پر کاٹ کر الگ الگ تراشے حاصل کیجیے۔ شکل میں دکھائے گئے طریقے کے مطابق انہیں جوڑیے۔ اس سے تقریباً ایک مستطیل جیسی شکل تیار ہوتی ہے۔

اگر دائرے کے مساوی حصوں کی تعداد جتنی زیادہ کی جائے گی اتنی ہی شکل مستطیل جیسی ہوتی جائے گی۔

$$2\pi r^2 = \text{دائرے کا احاطہ}$$

اس لیے مستطیل کی لمبائی πr یعنی نصف محیط کے مساوی اور چوڑائی r کے مساوی ہے۔

$$\therefore \text{دائرے کا رقبہ} = \text{مستطیل کا رقبہ} = \text{لمبائی} \times \text{چوڑائی} = \pi r \times r$$

$$\therefore \text{دائرے کا رقبہ} = \pi r^2$$

حل کردہ مثالیں

مثال (1) ایک دائرے کا نصف قطر 21 سم ہے۔ دائرے کا رقبہ معلوم کیجیے۔

حل :

$$\text{دائرے کا رقبہ} = \pi r^2$$

$$= \frac{22}{7} \times 21^2$$

$$= \frac{22}{7} \times \frac{21}{1} \times \frac{21}{1} = 66 \times 21 = 1386 \text{ مربع سم}$$

$\therefore$ دائرے کا رقبہ 1386 مربع سم ہے۔

مثال (2) ایک دائروں کے میدان کا رقبہ 3850 مربع میٹر ہے۔ میدان کا نصف قطر معلوم کیجیے۔

حل :

$$\text{دائرے کا رقبہ} = \pi r^2$$

$$3850 = \frac{22}{7} \times r^2$$

$$r^2 = \frac{3850 \times 7}{22}, \quad r^2 = 1225, \quad r = 35 \text{ میٹر}$$

اس لیے میدان کا نصف قطر 35 میٹر ہے۔

مشقی سیٹ 15.6

1. ذیل میں دائرے کے نصف قطر دیے گئے ہیں۔ دائروں کے رقبے معلوم کیجیے۔

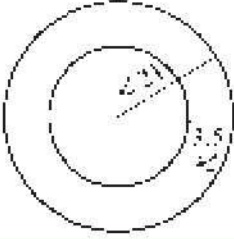
(1) 28 سم (2) 10.5 سم (3) 17.5 سم

2. ذیل میں کچھ دائروں کے رقبے دیے گئے ہیں۔ ان دائروں کے قطر معلوم کیجیے۔

(1) 176 مربع سم (2) 394.24 مربع سم (3) 12474 مربع سم

3. ایک دائروی باغ کا قطر 42 میٹر ہے اس باغ کے گرد 3.5 میٹر چوڑائی کا راستہ ہے۔

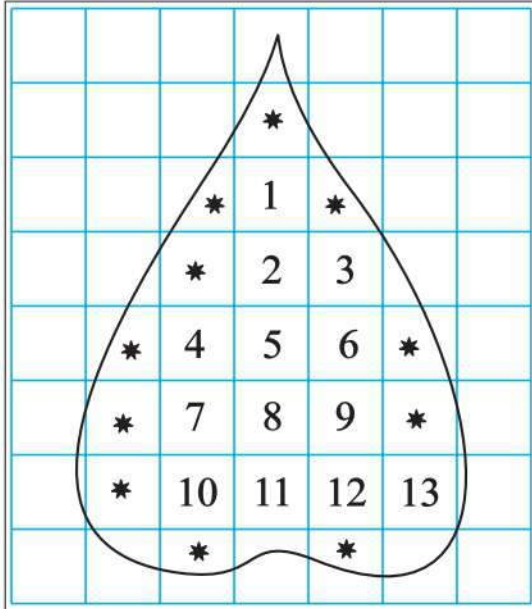
راستے کا رقبہ معلوم کیجیے۔



4. ایک دائرے کا محیط 88 سم ہے۔ دائرے کا رقبہ معلوم کیجیے۔

غیر منتظم شکل کا اندازاً رقبہ معلوم کرنا :

تریبی کاغذ کی مدد سے کسی بھی بند شکل کا رقبہ معلوم کر سکتے ہیں۔ دی گئی شکل یا شے کو تریبی کاغذ پر رکھ کر اس کے کناروں پر پنسل چلاتے ہیں اور اس کا خاکہ تریبی کاغذ پر بنی ہوئی شکل کا رقبہ معلوم کرنے کے لیے استعمال کرتے ہیں۔ تریبی کاغذ پر مربعوں کی تعداد کس طرح معلوم کریں گے اسے درج ذیل عملی کام کے ذریعے سمجھ لیں۔



(1) شکل میں 1 مربع سم رقبے والے مربعوں کی تعداد = 13

∴ ان کا رقبہ = 13 مربع سم

(2) شکل میں $\frac{1}{2}$ مربع سم سے زیادہ لیکن 1 مربع سم سے کم رقبے والے

مربعوں کی تعداد = 11

∴ ان کا رقبہ = تقریباً 11 مربع سم

(3) شکل میں $\frac{1}{4}$ مربع سم رقبے والے مربعوں کی تعداد = 0

∴ ان کا رقبہ = 0 مربع سم

(4) شکل میں $\frac{1}{2}$ مربع سم سے کم رقبے والے مربعوں کے

رقبوں پر غور نہیں کریں گے۔

∴ ان کا رقبہ = 0 مربع سم

∴ (تقریباً) مربع سم = 13 + 11 + 0 + 0 = 24 دی ہوئی شکل کا اندازاً رقبہ

گننے کے لیے استعمال ہونے والے مربع جتنے چھوٹے ہوں گے اتنا ہی شکل کا رقبہ اندازاً صحیح ہوگا۔

عملی کام : تریسی کاغذ پر 28 ملی میٹر نصف قطر کا ایک دائرہ، کوئی بھی ایک مثلث اور کوئی بھی ایک ذوزنقہ بنائیے۔ ان تینوں اشکال کا رقبہ تریسی کاغذ کی مدد سے چھوٹے مربعوں کی تعداد گن کر معلوم کیجیے۔ جانچ کیجیے کہ یہ رقبہ ضابطے کے ذریعے معلوم کیے گئے رقبوں کے مساوی ہیں، تصدیق کیجیے۔

جوابات کی فہرست

15.1 مشقی سیٹ :	1. 198 مربع سم	2. 3.7 سم	3. 13 سم	
15.2 مشقی سیٹ :	1. 180 مربع سم	2. 117.15 مربع سم	3. 336 مربع سم	4. 68 سم
15.3 مشقی سیٹ :	1. 88 مربع سم	2. 42	3. 40 مربع سم	
15.4 مشقی سیٹ :	1. 756 مربع سم	2. 690 مربع سم	3. 570 مربع سم	
15.5 مشقی سیٹ :	1. 6000 مربع میٹر	2. 776 مربع میٹر		
15.6 مشقی سیٹ :	1. (1) 2464 مربع سم	(2) 346.5 مربع سم	(2) 962.5 مربع سم	
	2. (1) 256 مربع سم	(2) 22.4 سم	(2) 126 سم	
	3. 500.50 مربع سم			
	4. 616 مربع سم			

مزید معلومات کے لیے :

ہمارے ملک میں پیمائش کا عشری نظام رائج ہے۔

سرکاری دستاویز میں زمین کا رقبہ آر، ہیکٹر جیسی عشری اکائیوں میں درج کرتے ہیں۔

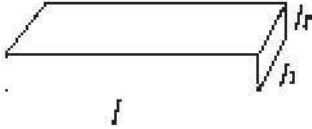
مربع میٹر 10,000 = ہیکٹر 1 = آر 100 ، آر 1 = مربع میٹر 100

کاروبار یا لین دین میں زمین کا رقبہ گنتھا، ایکڑ جیسی اکائیوں میں پیمائش کرنے کا طریقہ آج بھی رائج ہے۔ رقبہ 1 گنتھا تقریباً 1 آر

کے مساوی ہے۔ یعنی تقریباً 100 مربع میٹر ہوتا ہے۔ 1 ایکڑ تقریباً 0.4 ہیکٹر ہوتا ہے۔

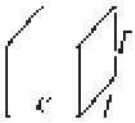


آئیے ذرا یاد کریں



$$\text{مکعب نما یا مستطیلی منشور کی سطحوں کا کل رقبہ} = 2(l \times b + b \times h + l \times h)$$

$$6l^2 = \text{مکعب کی کل سطحوں کا رقبہ}$$



$$\begin{aligned} \text{مربع سم} &= 10^4 \text{ سم} = 10000 \text{ مربع سم} = 100 \times 100 \text{ مربع میٹر} = 1 \text{ سم} = 100 \text{ میٹر} \\ \text{مربع ملی میٹر} &= 10^2 \text{ مربع ملی میٹر} = 100 \text{ مربع ملی میٹر} = 10 \times 10 \text{ مربع سم} = 1 \text{ ملی میٹر} = 10 \text{ سم} \end{aligned}$$

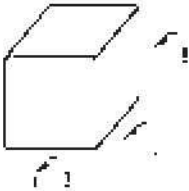
آئیے سمجھ لیں



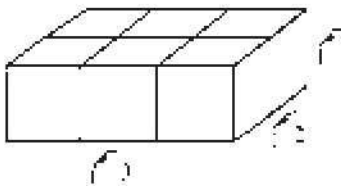
مستطیلی منشور، مکعب اور مدور استوانہ وغیرہ اشیاء ابعادی یعنی مجسم ہوتی ہیں۔ یہ مجسم اشکال مکانی جگہ گھیرتی ہیں۔ کسی بھی مجسم شکل سے گھری ہوئی جگہ کو اس کا حجم کہتے ہیں۔

حجم کی معیاری اکائی (Standard unit of volume)

متصلہ شکل میں مکعب کے ہر ضلع کی لمبائی 1 سم ہے۔ اس مکعب کے ذریعے گھری ہوئی جگہ، حجم ناپنے کی معیاری اکائی ہے۔ جو 1 مکعب سینٹی میٹر مختصراً 1 مکعب سم لکھتے ہیں۔



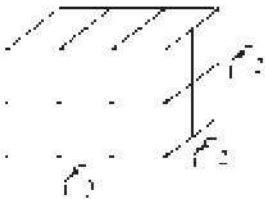
عملی کام I: 1 سم ضلع کی لمبائی والے کئی مکعب ملا کر رکھیے۔ شکل میں دکھائے گئے طریقے کے مطابق 6 مکعب ملا کر رکھے گئے ہیں۔ جس سے ایک مستطیلی منشور بنتا ہے۔ اس مستطیلی منشور کی لمبائی 3 سم، چوڑائی 2 سم اور اونچائی 1 سم ہے۔



ایک سم لمبائی والے 6 مکعب ملا کر مستطیلی منشور بنایا گیا ہے۔

$$\text{مکعب سم} = 6 = 3 \times 2 \times 1 = \text{اس مستطیلی منشور کا حجم}$$

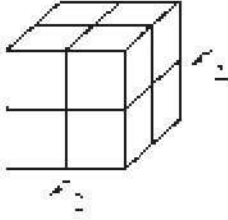
عملی کام II: متصلہ شکل میں مستطیلی منشور کی لمبائی 3 سم، چوڑائی 2 سم اور اونچائی 2 سم ہے اس مستطیلی منشور میں 1 مکعب سم حجم والے 12 مکعب $3 \times 2 \times 2 = 12$ مکعب ہیں۔ یعنی اس مستطیلی منشور کا حجم 12 مکعب سم ہے۔ اس بنا پر،



$$\text{اونچائی} \times \text{چوڑائی} \times \text{لمبائی} = \text{مستطیلی منشور کے حجم کا ضابطہ}$$

$$\text{اگر لمبائی } l, \text{ چوڑائی } b \text{ اور اونچائی } h \text{ ہو تو}$$

$$\text{مستطیلی منشور کا حجم} = l \times b \times h$$



عملی کام III : متصلہ شکل میں 1 مکعب سم حجم والے 8 مکعب ایک دوسرے سے ملا کر

رکھے گئے ہیں جس سے ایک مکعب تیار ہوتا ہے جس کے ضلع کی لمبائی 2 سم ہے۔

$$2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8 \text{ مکعبوں کا حجم}$$

اس بنا پر 1 ضلع والے مکعب کا حجم درج ذیل ہے۔

$$1^3 = 1 \times 1 \times 1 = 1 \text{ ضلع والے مکعب کا حجم}$$

مانع کا حجم : مانع کی جسامت یعنی مانع کا حجم ہوتا ہے۔

مانع کا حجم تاپنے کے لیے ملی لٹر اور لٹراکائیاں استعمال ہوتی ہیں اسے ہم جانتے ہیں۔

شکل میں 10 سم ضلع والا ایک کھوکھلا مکعب ہے۔

$$10^3 = 10 \times 10 \times 10 = 1000 \text{ مکعب سم ہے۔}$$

اگر اس مکعب کو پانی سے بھرا جائے تو اس میں موجود پانی کا حجم 1000 مکعب سم ہوگا۔

اس جسامت کو 1 لٹر کہتے ہیں۔ ہم جانتے ہیں کہ ملی لٹر 1 = 1000 لٹر

اس لیے دھیان میں رکھیے کہ

$$1000 \text{ لٹر} = 1000 \text{ مکعب سم} = 1000 \text{ لٹر} \quad \text{اس بنا پر} \quad 1 \text{ لٹر} = 1 \text{ مکعب سم} \quad \text{ہوتا ہے۔}$$

یعنی 1 سم والے مکعب میں سمانے والے پانی کی جسامت 1 ملی لٹر ہوتی ہے۔

حل کردہ مثالیں

مثال (1) مستطیلی منشور نما شکل کے شیشے کے ایک مچھلی گھر کی لمبائی 1 میٹر، چوڑائی 40 سم اور اونچائی 50 سم ہے تو اس مچھلی گھر میں کتنا پانی

سمائے گا؟ معلوم کیجیے۔

حل : مچھلی گھر میں سمانے والے پانی کا حجم اس مکعب نما مچھلی گھر کے مساوی ہوگا۔

مچھلی گھر کی لمبائی = 1 میٹر = 100 سم، چوڑائی 40 سم اور اونچائی 50 سم ہے۔

$$\text{مکعب سم} = l \times b \times h = 100 \times 40 \times 50 = 2,00,000$$

$$\text{لٹر} = \frac{2,00,000}{1000} = 200 \quad (\because 1000 \text{ مکعب سم} = 1 \text{ لٹر})$$

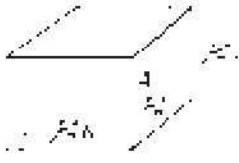
اس لیے مچھلی گھر میں 200 لٹر پانی سمائے گا۔

مثال (2) ایک مستطیلی منشور گودام کی لمبائی 6 میٹر، چوڑائی 4 میٹر اور اونچائی 4 میٹر ہے۔ اس گودام میں 40 سم ضلع والے مکعب زیادہ

سے زیادہ کتنے رکھے جاسکتے ہیں۔

حل : گودام مکمل بھرنے پر تمام بسوں (مکعب) کا کل حجم گودام کے حجم کے مساوی ہوگا۔

مثال حل کرنے کے لیے درج ذیل مرحلوں پر غور کریں۔



(1) گودام کا حجم معلوم کیجیے۔

(2) ایک بکس (مکعب) کا حجم معلوم کیجیے۔

(3) بکسوں کی تعداد معلوم کیجیے۔

مرحلہ (1) سم 600 = میٹر 6 = گودام کی لمبائی

سم 400 = میٹر 40 = چوڑائی = اونچائی

مکعب سم $600 \times 400 \times 400$ = اونچائی $\times$ چوڑائی $\times$ لمبائی = گودام کا حجم

مرحلہ (2) مکعب سم $40 \times 40 \times 40 = (40)^3 = (ضلع)^3$ = ایک بکس کا حجم

مرحلہ (3) $1500 = \frac{600 \times 400 \times 400}{40 \times 40 \times 40} = \frac{\text{گودام کا حجم}}{\text{ایک بکس کا حجم}} = \text{بکسوں کی تعداد}$

∴ اس گودام میں زیادہ سے زیادہ 1500 بکس رکھے جاسکتے ہیں۔

مثال (3) برنی تیار کرنے کے لیے کھوا اور شکر کا پگھلا ہوا 5 لٹر آمیزہ ایک مکعب نما ٹرے میں انڈیا لایا گیا تو ٹرے مکمل طور پر بھر گئی۔ ٹرے کی چوڑائی 40 سم اور اونچائی 2.5 سم ہے۔ تو ٹرے کی لمبائی معلوم کیجیے۔

حل : مثال حل کرنے کے لیے درج ذیل مرحلوں میں خانہ پری کیجیے۔ خانوں میں مناسب عدد بھریے۔

(1) مرحلہ (مکعب سم 1000 = 1 لٹر ∴) ... مکعب سم $\square$ = 5 لٹر = ٹرے کی گنجائش

(2) مرحلہ مکعب سم $\square$ = آمیزے کا حجم

(3) مرحلہ آمیزے کا حجم = مستطیلی ٹرے کا حجم

مکعب سم $\square$ = اونچائی $\times$ چوڑائی $\times$ لمبائی

سم 50 = $\frac{\square}{100}$ = ٹرے کی لمبائی ∴ ، مکعب سم $\square$ = $40 \times 2.5 \times \text{لمبائی}$

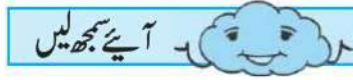
یہ میری سمجھ میں آ گیا

• $l \times b \times h = \text{اونچائی} \times \text{چوڑائی} \times \text{لمبائی} = \text{مستطیلی منشور کا حجم}$ • $l^3 = (\text{ضلع})^3 = \text{مکعب کا حجم}$

مشقی سیٹ 16.1

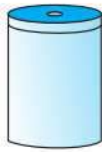
1. ایک بکس کی لمبائی 20 سم، چوڑائی 10.5 سم اور اونچائی 8 سم ہے اس کا حجم معلوم کیجیے۔
2. ایک مستطیلی منشور شکل کے صابن کی ٹکلیہ کا حجم 150 مکعب سم ہے۔ اس کی لمبائی 10 سم اور چوڑائی 5 سم ہو تو اس کی موٹائی کتنی ہوگی؟
3. 6 میٹر لمبائی، 2.5 میٹر اونچائی اور 0.5 میٹر چوڑائی کی ایک دیوار تیار کرنا ہے۔ اس کے لیے 25 سم لمبائی، 15 سم چوڑائی اور 10 سم اونچائی والی کتنی اینٹیں درکار ہوں گی؟

4. بارش کا پانی ذخیرہ کرنے کے لیے ایک بستی میں 10 میٹر لمبائی، 6 میٹر چوڑائی اور 3 میٹر گہرائی کا حوض تیار کیا گیا۔ اس حوض کی گنجائش کتنی ہے؟ حوض میں کتنے لٹر پانی سمائے گا؟



مدور استوانے کی سطح کا رقبہ (Surface area of a cylinder)

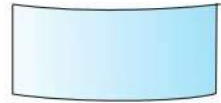
ایک مدور استوانہ شکل کا ڈبا لیجیے۔ اس کی اونچائی کے مساوی چوڑائی والا ایک مستطیلی کاغذ لیجیے۔ اسے ڈبے کی خمدار سطح پر اچھی طرح لپیٹیں کہ سطح مکمل طور سے ڈھک جائے۔ کاغذ کا بچا ہوا حصہ کاٹ لیجیے۔



مدور استوانہ



کاغذ لپٹا ہوا



لمبائی = دائرے کا محیط

لپٹا ہوا کاغذ نکالے جو مستطیل شکل کا ہے۔ اس مستطیل کا رقبہ یعنی مدور استوانے کی خمدار سطح کا رقبہ، مستطیل کی لمبائی یعنی دائروں کا محیط اور مستطیل کی چوڑائی یعنی مدور استوانے کی اونچائی

$$\begin{aligned} \text{چوڑائی} \times \text{لمبائی} &= \text{مستطیل کا رقبہ} = \text{مدور استوانے کی خمدار سطح کا رقبہ} \\ \text{مدور استوانے کی اونچائی} \times \text{مدور استوانے کے قاعدہ کا محیط} &= \\ 2\pi r h &= 2\pi r \times h = \text{مدور استوانے کی خمدار سطح کا رقبہ} \end{aligned}$$

بند مدور استوانے میں قاعدے کی سطح اور اوپری حصے کی سطح دائروں ہوتی ہے۔

$$\begin{aligned} \text{قاعدے کا رقبہ} + \text{اوپری سطح کا رقبہ} + \text{مدور استوانے کی خمدار سطح کا رقبہ} &= \text{بند دائروں استوانے کی کل سطح کا رقبہ} \\ \therefore \text{دائرہ کا رقبہ} \times 2 + \text{مدور استوانے کی خمدار سطح کا رقبہ} &= \text{بند دائروں استوانے کی کل سطحوں کا رقبہ} \\ 2\pi r^2 + 2\pi r h &= 2\pi r (h + r) \end{aligned}$$

حل کردہ مثالیں

مثال (1) ایک مدور استوانہ نما پانی کی ٹانگی کا قطر 1 میٹر اور اونچائی 2 میٹر ہے۔ ٹانگی پر ڈھکن لگا ہے۔ ٹانگی کے اندر اور باہر ڈھکن سمیت

رنگ و روغن کرنا ہے۔ رنگ و روغن کرنے کا خرچ 80 روپے فی مربع میٹر ہے تو ٹانگی کو رنگنے کا خرچ کتنا ہوگا؟ ($\pi = 3.14$)

حل : ٹانگی کے اندر اور باہر رنگ و روغن یعنی رنگے جانے والے حصوں کا رقبہ ٹانگی کی کل بیرونی سطحوں کے رقبے کا دگنا ہوگا۔

مدور استوانے کے قاعدے کا قطر 1 میٹر ہے۔

اس لیے نصف قطر 0.5 میٹر اور مدور استوانے کی اونچائی 2 میٹر ہے۔

$$\therefore \text{مدور استوانے کی کل سطحوں کا رقبہ} = 2\pi r(h + r) = 2 \times 3.14 \times 0.5(2.0 + 0.5)$$

$$= 2 \times 3.14 \times 0.5 \times 2.5 = 7.85 \text{ مربع میٹر}$$

$$\text{مربع میٹر} = 2 \times 7.85 = 15.70 \text{ رنگ و روغن کیے جانے والے حصوں کا رقبہ}$$

$$\text{روپے} = 15.70 \times 80 = 1256 \text{ ٹانگی کورنگے کا کل خرچ}$$

مثال (2) ایک ایلومینیم کے مستطیلی پترے (ٹین) کی لمبائی 3.3 میٹر اور چوڑائی 3 میٹر ہے۔ اس پترے سے 3.5 سم نصف قطر اور 30 سم لمبائی کے زیادہ سے زیادہ کتنی نلیاں بنائی جاسکتی ہے؟

حل :

$$\text{چوڑائی} \times \text{لمبائی} = \text{مستطیلی پترے کا رقبہ}$$

$$= 3.3 \times 300 = 330 \times 300 \text{ مربع میٹر}$$

$$\text{سم} = h = 30 \text{ ایک نلی کی لمبائی یعنی مدور استوانے کی اونچائی}$$

$$\text{سم} = r = 3.5 \text{ مدور استوانے کے قاعدے کا نصف قطر} = \text{نلی کا نصف قطر}$$

$$\text{ایک نلی کی خمدار سطح کا رقبہ} = \text{ایک نلی تیار کرنے کے لیے درکار پترا}$$

$$= 2\pi rh = 2 \times \frac{22}{7} \times \frac{3.5}{100} \times \frac{30}{1}$$

$$= 2 \times 22 \times 15 = 660 \text{ مربع سم}$$

$$\text{پترے سے تیار ہونے والی نلیوں کی تعداد} = \frac{\text{پترے کا رقبہ}}{\text{ایک نلی کی خمدار سطح کا رقبہ}} = \frac{330 \times 300}{660} = 150$$

مشقی سیٹ 16.2

1. درج ذیل ہر مثال میں مدور استوانے کے قاعدے کا نصف قطر r اور اونچائی h دی گئی ہے۔ اس پر سے ہر ایک مدور استوانے کی خمدار سطح کا رقبہ اور کل سطحوں کا رقبہ معلوم کیجیے۔

$$(1) \text{ سم } r = 7, h = 10 \quad (2) \text{ سم } r = 1.4, h = 2.1 \quad (3) \text{ سم } r = 2.5, h = 7$$

$$(4) \text{ سم } r = 70, h = 1.4 \quad (5) \text{ سم } r = 4.2, h = 14$$

2. 50 سم قطر اور 45 سم اونچائی کے دونوں جانب سے بند ڈرم کی کل سطحوں کا رقبہ معلوم کیجیے۔ ($\pi = 3.14$)

3. ایک مدور استوانے کی خمدار سطح کا رقبہ 660 مربع سم اور اونچائی 21 سم ہے۔ اس کا نصف قطر اور قاعدے کا رقبہ معلوم کیجیے۔
4. ایک مدور استوانے کی شکل کے پترے کے ڈبے کا قطر 28 سم ہے اور اونچائی 20 سم ہے۔ ڈبا ایک جانب سے کھلا ہے تو اسے تیار کرنے میں لگنے والے پترے کا رقبہ معلوم کیجیے۔ اس ڈبے کا 2 سم اونچائی کا ڈھکنا تیار کرنے کے لیے اندازاً کتنے مربع سم پترا لگے گا معلوم کیجیے۔



مدور استوانے کا حجم (Volume of a Cylinder)

مدور استوانہ نمائشی کی ٹانگی میں کتنا پانی سمائے گا یہ معلوم کرنے کے لیے ٹانگی کا حجم معلوم کرنا ہوتا ہے۔

(عام ضابطہ) ... اونچائی $\times$ قاعدے کا رقبہ = کسی بھی منتظم قاعدے والے جسم کا حجم

یہ ایک عام ضابطہ ہے۔

مدور استوانے کا قاعدہ، دائرہ کی شکل کا ہے۔

$$\therefore \text{مدور استوانے کا حجم} = \pi r^2 h$$

حل کردہ مثالیں

مثال (1) ایک مدور استوانے کے قاعدے کا نصف قطر 5 سم اور اونچائی 10 سم ہے۔ اس مدور استوانے کا حجم معلوم کیجیے۔ ($\pi = 3.14$)

حل : سم $h = 10$ اونچائی اور سم $r = 5$ مدور استوانے کے قاعدے کا نصف قطر

$$\text{مکعب سم} = \pi r^2 h = 3.14 \times 5^2 \times 10 = 3.14 \times 25 \times 10 = 785$$

مثال (2) ایک مدور استوانہ نمائشی کے ڈرم کی اونچائی 56 سم ہے اس ڈرم کی گنجائش 70.4 لٹر ہے۔ ڈرم کا نصف قطر معلوم کیجیے۔

$$(\pi = \frac{22}{7})$$

فرض کریں r = مدور استوانہ شکل کے ڈرم کے قاعدہ کا نصف قطر

$$\text{مکعب سم} = 704 \times 100 = 70400 \text{ سم} = 70.4 \times 1000 \text{ ڈرم کا حجم} = \text{ڈرم کی گنجائش}$$

$$\text{ملی لیٹر} = 70400 \text{ لیٹر} = 70.4 \text{ لیٹر} \therefore \text{ملی لیٹر} = 1000 \text{ لیٹر}$$

$$\text{ڈرم کا حجم} = \pi r^2 h = 70400$$

$$\therefore r = \frac{70400}{\pi h} = \frac{70400 \times 7}{22 \times 56} = \frac{70400}{22 \times 8} = \frac{8000}{22} = 400$$

$$\therefore r = 20$$

$\therefore$ ڈرم کا نصف قطر 20 سم ہے۔

مثال (3) تانبے کے ایک ٹھوس مدور استوانہ کے قاعدہ کا نصف قطر 4.2 سم اور اونچائی 16 سم ہے۔ اسے پگھلا کر 1.4 سم قطر اور 0.2 سم موٹائی کی کتنی نکلیاں تیار کی جاسکیں گی؟

حل :

$$\text{سم } H = 16 = \text{اونچائی} , \text{سم } R = 4.2 = \text{مدور استوانے کے قاعدہ کا نصف قطر}$$

$$\text{مدور استوانہ کا حجم} = \pi R^2 H = \pi \times 4.2 \times 4.2 \times 16.0$$

$$\text{سم } 0.7 = 1.4 \div 2 = \text{نکلیہ کے قاعدے کا نصف قطر}$$

$$\text{سم } 0.2 = \text{مدور استوانے کی اونچائی} = \text{نکلیہ کی موٹائی}$$

$$\text{نکلیہ کا حجم} = \pi r^2 h = \pi \times 0.7 \times 0.7 \times 0.2$$

فرض کریں ٹھوس مدور استوانے کو پگھلانے پر n نکلیہ بنتی ہے۔

$$\therefore n \times \text{ایک نکلیہ کا حجم} = \text{ٹھوس مدور استوانے کا حجم}$$

$$n = \frac{\text{مدور استوانے کا حجم}}{\text{ایک نکلیہ کا حجم}} = \frac{\pi R^2 H}{\pi r^2 h} = \frac{R^2 H}{r^2 h} = \frac{4.2 \times 4.2 \times 16}{0.7 \times 0.7 \times 0.2}$$

$$= \frac{42 \times 42 \times 160}{7 \times 7 \times 2} = 6 \times 6 \times 80 = 2880$$

$\therefore$ 2880 نکلیاں تیار کی جاسکیں گی۔

یہ میری سمجھ میں آ گیا

$$\text{مدور استوانے کی کل سطح کا رقبہ} = 2\pi r(h + r) , \text{مدور استوانے کی خمدار سطح کا رقبہ} = 2\pi rh$$

$$\text{مدور استوانے کا حجم} = \pi r^2 h$$

مشقی سیٹ 16.3

1. درج ذیل میں مدور استوانے کے قاعدے کا نصف قطر (r) اور اونچائی (h) دی گئی ہے۔

اس پر سے مدور استوانے کا حجم معلوم کیجیے۔

$$(1) \text{سم } h = 8 , \text{سم } r = 10.5 \quad (2) \text{سم } h = 7 , \text{سم } r = 2.5$$

$$(3) \text{سم } h = 5 , \text{سم } r = 4.2 \quad (4) \text{سم } h = 5 , \text{سم } r = 5.6$$

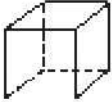
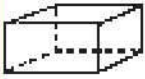
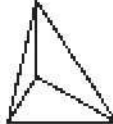
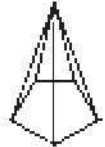
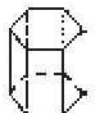
2. 90 سم لمبائی اور 1.4 سم قطر کی لوہے کی ایک سلاخ تیار کرنے کے لیے درکار لوہے کا حجم معلوم کیجیے۔

3. مدور استوانے کی شکل کے ایک حوض کا اندرونی قطر 1.6 میٹر ہے اس کی گہرائی 0.7 میٹر ہے تو اس حوض میں زیادہ سے زیادہ کتنے لٹر پانی سمائے گا؟

4. ایک مدور استوانے کے قاعدے کا احاطہ 132 سم ہے۔ اونچائی 25 سم ہے۔ مدور استوانے کا حجم کتنا ہوگا؟

آئیلر کا قانون :

سطح (F)، راس (V) اور کنارے (E) والی ٹھوس اجسام سے متعلق ایک دلچسپ قانون، بہت ہی کم عمر میں (بچپن میں) لیونارڈ آئیلر نامی مشہور ریاضی داں نے معلوم کیا۔ درج ذیل جدول میں ٹھوس اجسام کے کنارے، راس (کونے) اور سطحیں شمار کر کے جدول مکمل کیجیے اور آئیلر کے قانون $V + F = E + 2$ کی تصدیق کیجیے۔

نام	مکعب	مستطیلی منشور	منشور مثلثی	مثلثی هرم	خمسی هرم	معدسی منشور
اجسام کی شکل						
سطحیں (F)	6					8
راس (V)	8					12
کنارے (E)		12			10	

جوابات کی فہرست

16.1 مشقی سیٹ : 1. مکعب سم 1680 2. سم 3 3. اینٹیں 2000 4. لٹر 1,80,000

16.2 مشقی سیٹ : 1. (1) 440 مربع سم، 748 مربع سم (2) 18.48 مربع سم، 30.80 مربع سم

(3) 110 مربع سم، 149.29 مربع سم (4) 616 مربع سم، 31416 مربع سم

(5) 369.60 مربع سم، 480.48 مربع سم

2. 10,990 مربع سم 3. سم 5، 78.50 مربع سم

4. ڈھکن کے لیے اندازاً پترا 792 مربع سم درکار ہوگا، مربع سم 2376

16.3 مشقی سیٹ : 1. (1) 2772 مربع سم (2) 137.5 مربع سم (3) 277.2 مربع سم (4) 492.8 مربع سم

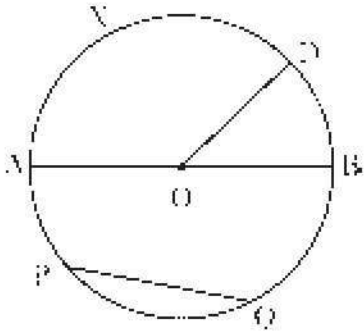
2. 138.6 مربع سم 3. لٹر 1408 4. 34650 مربع سم



دائرہ - وتر اور قوس

17

آئیے ذرا یاد کریں



متصلہ شکل میں O، دائرے کا مرکز ہے۔

شکل کی مدد سے درج ذیل بیانات میں خالی جگہیں پر کیجیے۔

● قطعہ OD، دائرے کا ہے۔

● قطعہ AB، دائرے کا ہے۔

● قطعہ PQ، دائرے کا ہے۔

● مرکزی زاویہ ہے۔

● اصغر قوس : قوس AXD، قوس BD،،،،

● اکبر قوس : قوس PAB، قوس PDQ،،

● نصف دائرہ قوس : قوس ADB،،

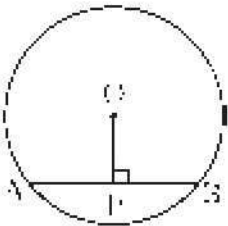
● $m(\text{قوس DB}) = m\angle \dots\dots\dots$ ● $m(\text{قوس DAB}) = 360^\circ - m\angle \dots\dots\dots$

آئیے سمجھ لیں



دائرے کے وتر کی خصوصیات (Properties of chord of a Circle)

عملی کام 1:



O، مرکز والے ایک دائرے کا قطعہ AB وتر بنائیے۔

مرکز O سے وتر AB پر عمودی قطعہ OP نمائیں۔

قطعہ AP اور قطعہ PB کی لمبائیاں ناپیے۔

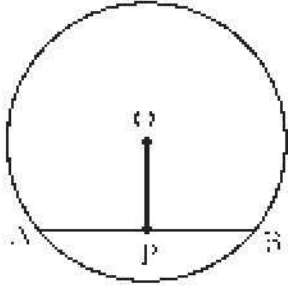
اسی طرح الگ الگ نصف قطر لے کر ایک کاغذ پر پانچ دائرے بنائیے۔ ہر دائرے میں ایک وتر بنا کر مرکز سے اس وتر پر عمود بنائیے۔

کیا وتروں پر بننے والے دونوں حصے مساوی ہیں؟ تقسیم کار (ڈیوائڈر) کے ذریعے اس کی جانچ کیجیے۔

مشاہدہ کیجیے کہ آپ کو درج ذیل خصوصیت حاصل ہوتی ہے۔

دائرے کے مرکز سے وتر پر کھینچا گیا عمود وتر کی تنصیف کرتا ہے۔

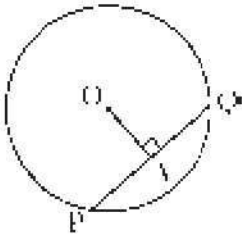
عملی کام II :



ایک کاغذ پر الگ الگ نصف قطر کے پانچ دائرے بنائیے۔ ہر دائرے میں ایک وتر بنائیے۔ ان وتروں کا وسطی نقطہ حاصل کیجیے۔ مرکز O اور وتر کے وسطی نقطوں کو جوڑیے۔ متصلہ شکل کے مطابق ہر وتر کو AB اور وتر کے وسطی نقطہ کو P نام دیجیے۔ $\angle APO$ اور $\angle BPO$ قائمہ الزاویہ ہیں اس کی جانچ گنیے کی مدد سے یا چاندے کی مدد سے کیجیے۔

ہر دائرے کے وتر کے لحاظ سے یہی مشاہدہ ہوتا ہے۔ اس بنا پر آپ کو درج ذیل خصوصیت حاصل ہوگی۔
دائرے کے مرکز اور اس دائرے کے وتر کے وسطی نقطے کو ملانے والا قطعہ وتر پر عمود ہوتا ہے۔

حل کردہ مثالیں



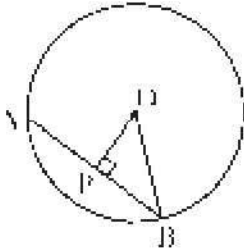
مثال (1) O مرکز والے دائرے میں وتر PQ کی لمبائی 7 سم ہے۔

PQ وتر $OA \perp$ قطعہ تو $l(AP)$ معلوم کیجیے۔

حل : PQ وتر $OA \perp$ قطعہ، اس لیے نقطہ A، وتر PQ کا وسطی نقطہ ہے۔

$$\therefore l(PA) = \frac{1}{2} l(PQ) = \frac{1}{2} \times 7 = 3.5 \text{ سم}$$

مثال (2) O مرکز والے ایک دائرے کا نصف قطر 10 سم ہے اس دائرے کا ایک وتر مرکز سے 6 سم فاصلے پر ہے اس وتر کی لمبائی معلوم کیجیے۔



حل : دائرے کے وتر کا مرکز سے فاصلہ یعنی مرکز سے اس وتر پر کھینچے گئے عمود کی لمبائی ہوتی ہے۔

دائرے کا مرکز O اور وتر AB ہے اس لیے AB وتر $OP \perp$ قطعہ

$$\text{سم } l(OP) = 6, \text{ سم } l(OB) = 10 = \text{دائرے کا نصف قطر}$$

یہاں $\triangle OPB$ قائمہ الزاویہ مثلث ہے۔

فیثاغورث کے مسئلے کی رو سے،

$$[l(OP)]^2 + [l(PB)]^2 = [l(OB)]^2$$

$$\therefore 6^2 + [l(PB)]^2 = 10^2$$

$$\therefore [l(PB)]^2 = 10^2 - 6^2$$

$$\therefore [l(PB)]^2 = (10 + 6)(10 - 6) = 16 \times 4 = 64$$

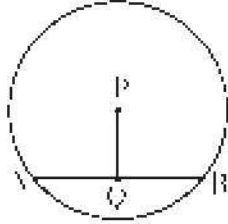
$$\therefore l(AB) = 8 \text{ سم}$$

ہم جانتے ہیں کہ دائرے کے مرکز سے وتر پر کھینچا ہوا عمود وتر کی تنصیف کرتا ہے۔

$$\therefore l(AB) = 2 l(PB) = 2 \times 8 = 16$$

اس لیے وتر AB کی لمبائی 16 سم ہے۔

مشقی سیٹ 17.1



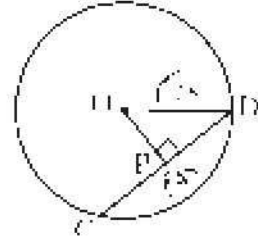
1. P مرکز والے دائرے کے وتر AB کی لمبائی 13 سم ہے۔

AB وتر PQ $\perp$ قطعہ تو $l(QB)$ معلوم کیجیے۔

2. O مرکز والے دائرے کا نصف قطر 25 سم ہے۔

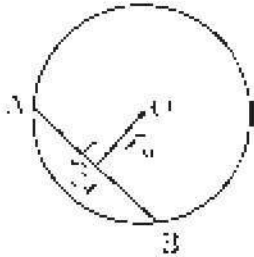
اس دائرے میں 48 سم لمبائی کا ایک وتر کھینچا گیا ہے۔

تو دائرے کے مرکز سے وہ وتر کتنے فاصلے پر ہے۔



3. O مرکز والے دائرے کے ایک وتر کی لمبائی 24 سم ہے۔

مرکز سے وتر 9 سم فاصلے پر ہے تو دائرے کا نصف قطر معلوم کیجیے۔

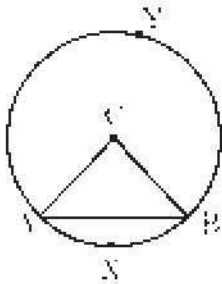


4. ایک دائرے کا مرکز C ہے اس کا نصف قطر 10 سم ہے۔

اس دائرے کے ایک وتر کی لمبائی 12 سم ہے تو وہ وتر دائرے کے مرکز سے کتنے فاصلے پر ہے؟



دائرے کے وتر کا متعلقہ قوس (Arc corresponding to chord of a Circle)

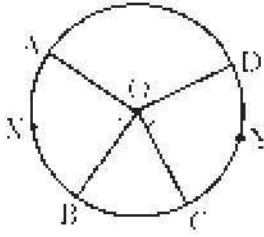


متصلہ شکل میں O مرکز والے دائرے میں قطعہ AB وتر ہے۔ قوس AXB اصغر قوس اور

قوس AYB اکبر قوس ہے۔ ان قوسین کو وتر AB کے متعلقہ قوسین کہتے ہیں۔ اس کے برعکس

وتر AB، قوس AXB اور قوس AYB کا متعلقہ وتر ہے۔

متماثل قوسین (Congruent Arcs)



اگر کسی دائرے کے دو قوسین کی پیمائش مساوی ہو تو وہ متماثل قوسین ہوتے ہیں۔
O مرکز والے دائرے میں

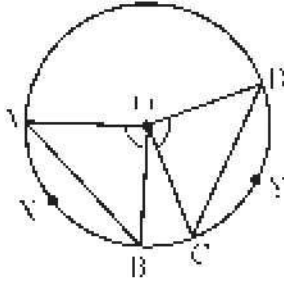
$$m\angle AOB = m\angle COD$$

$$\therefore m(\text{قوس } AXB) = m(\text{قوس } CYD)$$

$$\therefore \text{قوس } AXB \cong \text{قوس } CYD$$

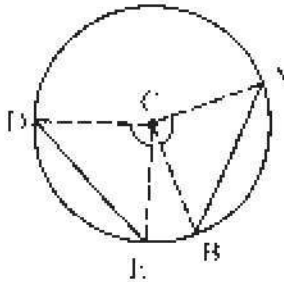
اس کی جانچ ہم ٹرینگ کاغذ کی مدد سے کر سکتے ہیں۔
دائرے کے وتر اور متعلقہ قوس کی خصوصیت درج ذیل عملی کام کے ذریعے جانچ کیجیے اور اسے دھیان میں رکھیے۔

عملی کام I :



- (1) O مرکز والا ایک دائرہ بنائیے۔
- (2) دائرے میں $\angle AOB$ اور $\angle COD$ مساوی پیمائش کے دو زاویے بنائیے۔
اس کی مدد سے قوس AXB اور قوس CYD متماثل قوسین حاصل ہوتے ہیں۔
- (3) وتر AB اور وتر CD بنائیے۔
- (4) تقسیم کار (ڈیوائڈر) کی مدد سے وتر AB اور وتر CD کی لمبائیاں، مساوی ہیں اس کی جانچ کیجیے۔

عملی کام II :

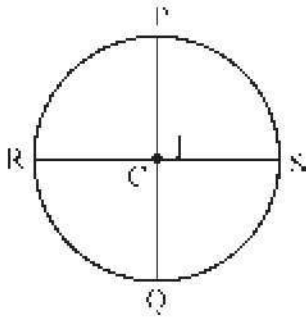


- (1) C مرکز والا ایک دائرہ بنائیے۔
- (2) اس دائرے میں قطعہ AB اور قطعہ DE دو متماثل وتر بنائیے۔
قطعہ CA، قطعہ CB، قطعہ CD، قطعہ CE نصف قطر بنائیے۔
- (3) $\angle ACB$ اور $\angle DCE$ متماثل ہیں، دکھائیے۔
- (4) اس بنا پر قوس AB اور قوس DE کی پیمائش مساوی ہوں گی یعنی یہ متماثل قوسین ہیں، اسے دکھائیے۔

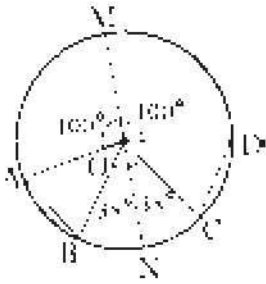
یہ میری سمجھ میں آ گیا

- کسی دائرے کے متماثل قوسین کے متعلقہ وتر متماثل ہوتے ہیں، کسی دائرے میں دو وتر متماثل ہوں تو ان کے متعلقہ اصغر قوسین اور متعلقہ اکبر قوسین متماثل ہوتے ہیں۔

مشقی سیٹ 17.2



1. C مرکز والے دائرے میں قطعہ PQ اور قطعہ RS قطر ہیں۔
 جو قائمہ زاویہ بناتے ہوئے ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں۔
 تو بتائیے کہ قوس PS اور قوس SQ متماثل ہیں۔
 قوس PS کے متماثل دیگر قوسوں کے نام لکھیے۔



2. شکل میں O مرکز والے دائرے میں قطعہ MN قطر ہے۔
 کچھ مرکزی زاویوں کی پیمائشیں دی گئی ہیں۔
 اس بنا پر

(1) $\angle AOB$ اور $\angle COD$ کی پیمائش معلوم کیجیے۔

(2) دکھائیے کہ قوس $AB \cong$ قوس CD

(3) دکھائیے کہ وتر $AB \cong$ وتر CD

جوابات کی فہرست

مشقی سیٹ 17.1 : 1. 6.5 سم 2. 7 سم 3. 15 سم 4. 8 سم

مشقی سیٹ 17.2 : 1. (1) کیونکہ قوسین کے متعلقہ زاویوں کی پیمائشیں مساوی ہیں اور ہر ایک کی پیمائش 90° ہے۔

(2) قوس $PS \cong$ قوس $PR \cong$ قوس RQ

2. (1) $m\angle AOB = m\angle COD = 45^\circ$

(2) قوس $AB \cong$ قوس CD کیوں کہ قوسین کے متعلقہ مرکزی زاویے مساوی پیمائش کے ہیں ہر ایک کی پیمائش 45° ہے۔

(3) وتر $AB \cong$ وتر CD کیوں کہ متماثل قوسین کے متعلقہ وتر متماثل ہوتے ہیں۔



متفرق مجموعہ سوالات 2

1. ذیل کے سوالوں کے لیے متبادل جوابات دیے ہوئے ہیں۔ ان میں سے مناسب متبادل منتخب کیجیے۔
 - (1) ایک دائرے کا رقبہ 1386 مربع سم ہو تو اس کا محیط کتنا ہوگا؟
 (A) مربع سم 132 (B) سم 132 (C) سم 42 (D) مربع سم 21
 - (2) ایک مکعب کا ضلع 4 میٹر ہے۔ اسے دگنا کریں تو اس کا حجم کتنے گنا بڑھ جائے گا؟
 (A) دو گنا (B) تین گنا (C) چار گنا (D) آٹھ گنا
2. پریا 100 میٹر دوڑ کی شرط کی مشق کر رہی تھی۔ اس کے لیے اس نے 100 میٹر فاصلے کی 20 مرتبہ دوڑ لگائی۔ ہر مرتبہ اس دوڑ کے لیے درکار وقت سیکنڈ میں درج ذیل کے مطابق تھا۔
 $15, 16, 14, 15, 16, 15, 16, 15, 17, 16, 15, 14, 15, 16, 15, 17, 15, 16, 15, 14, 15$
 دوڑنے کے لیے اس کو لگنے والے وقت کا میانہ معلوم کیجیے۔
3. $\triangle DEF$ اور $\triangle LMN$ یہ دونوں مثلث $EDF \leftrightarrow LMN$ ایک سے ایک کی مطابقت کی رو سے متماثل ہیں تو اس مطابقت کے لحاظ سے ہونے والے متماثل اضلاع کی اور متماثل زاویوں کی جوڑیاں لکھیے۔
4. ایک مشین کی قیمت 2,50,000 روپے ہے۔ اس کی قیمت ہر سال 4% شرح سے کم ہوتی ہے تو مشین خریدنے کے تین سال بعد اس کی قیمت کتنی ہو جائے گی؟
5. $\square ABCD$ میں $DC \parallel AB$ ضلع، $DC \perp AE$ ضلع، AE قطعہ، اگر $l(AB) = 9$ سم، $l(AE) = 10$ سم، $A(\square ABCD) = 115$ مربع سم ہو تو $l(DC)$ معلوم کیجیے۔
6. مدور استوانہ جسامت کی ایک ٹانگی کے تہہ کا قطر 1.75 میٹر اور اونچائی 3.2 میٹر ہے تو اس ٹانگی کی گنجائش کتنے لٹر ہے؟ $(\pi = \frac{22}{7})$
7. 9.1 سم نصف قطر والے دائرے کے ایک وتر کی لمبائی 16.8 سم ہے تو اس وتر کا مرکز سے کتنا فاصلہ ہے؟
8. روزگار ضمانت اسکیم کے تحت A، B، C اور D گاؤں میں جاری کاموں پر مرد اور عورت مزدوروں کی تعداد ذیل کے جدول میں دی ہوئی ہے۔

گاؤں	A	B	C	D
عورتیں	150	240	90	140
مرد	225	160	210	110

(1) یہ معلومات تقسیمی ستونی ترسیم کے ذریعے دکھائیے۔

(2) یہ معلومات فی صد ستونی ترسیم کے ذریعے دکھائیے۔

9. ذیل کی مساواتیں حل کیجیے۔

$$(1) 17(x+4) + 8(x+6) = 11(x+5) + 15(x+3)$$

$$(2) \frac{3x-1}{2} + \frac{1}{4} = 5 - \frac{x-2}{4}$$

$$(3) 5(1-2x) = 9(1-x)$$

10. ذیل کے عملی کام کو دیے ہوئے مرحلوں کے مطابق کیجیے۔

(1) $\square ABCD$ ایک معین بنائیے اور اس کا وتر AC منیجیے۔

(2) متماثل اجزاء کو یکساں نشانیوں سے ظاہر کیجیے۔

(3) $\triangle ABC$ اور $\triangle ADC$ کس مطابقت سے اور کس آزمائش سے متماثل ہوتے ہیں۔ لکھیے۔

(4) $\angle DCA \cong \angle BCA$ ، اسی طرح $\angle DAC \cong \angle BAC$ ، بتانے کے لیے وجہ لکھیے۔

(5) مذکورہ بالا مراحل سے ذہن میں آنے والے معین کی خصوصیت لکھیے۔

11. ایک کھیتی کی زمین کی شکل ذواربعۃ الاضلاع کے جیسی ہے۔ اس کے چاروں کونوں کو P، Q، R، S نام دے کر لیے گئے ناپ ذیل کے مطابق ہیں۔

$$l(PQ) = 170 \text{ میٹر}، l(QR) = 250 \text{ میٹر}، l(RS) = 100 \text{ میٹر}، l(PS) = 240 \text{ میٹر}، l(PR) = 260 \text{ میٹر}$$

تو اس کھیتی کی زمین کا رقبہ ہیکٹر میں معلوم کیجیے۔ (مربع میٹر = 10,000 ہیکٹر)

12. ایک لائبریری میں کل کتابوں کا 50% کتابیں اردو کی ہیں۔ اردو کی کتابوں کا $\frac{1}{3}$ کتابیں انگریزی کی اور انگریزی کی کتابوں کا 25%

کتابیں ریاضی کی ہیں۔ باقی ماندہ 560 کتابیں دیگر مضامین کی ہیں تو بتائیے لائبریری میں کل کتنی کتابیں ہیں؟

13. دورکنی $(2x+1)$ سے کثیررکنی $(6x^3 + 11x^2 - 10x - 7)$ کو تقسیم دیجیے۔ خارج قسمت اور باقی لکھیے۔

جوابات کی فہرست

1. (1) B (2) D 2. سینڈ 15.7

3. ضلع $ED \cong$ ضلع LM ، ضلع $DF \cong$ ضلع MN ، ضلع $EF \cong$ ضلع LN

$$\angle E \cong \angle L، \angle D \cong \angle M، \angle F \cong \angle N$$

4. ₹ 2,21,184

5. سم 14

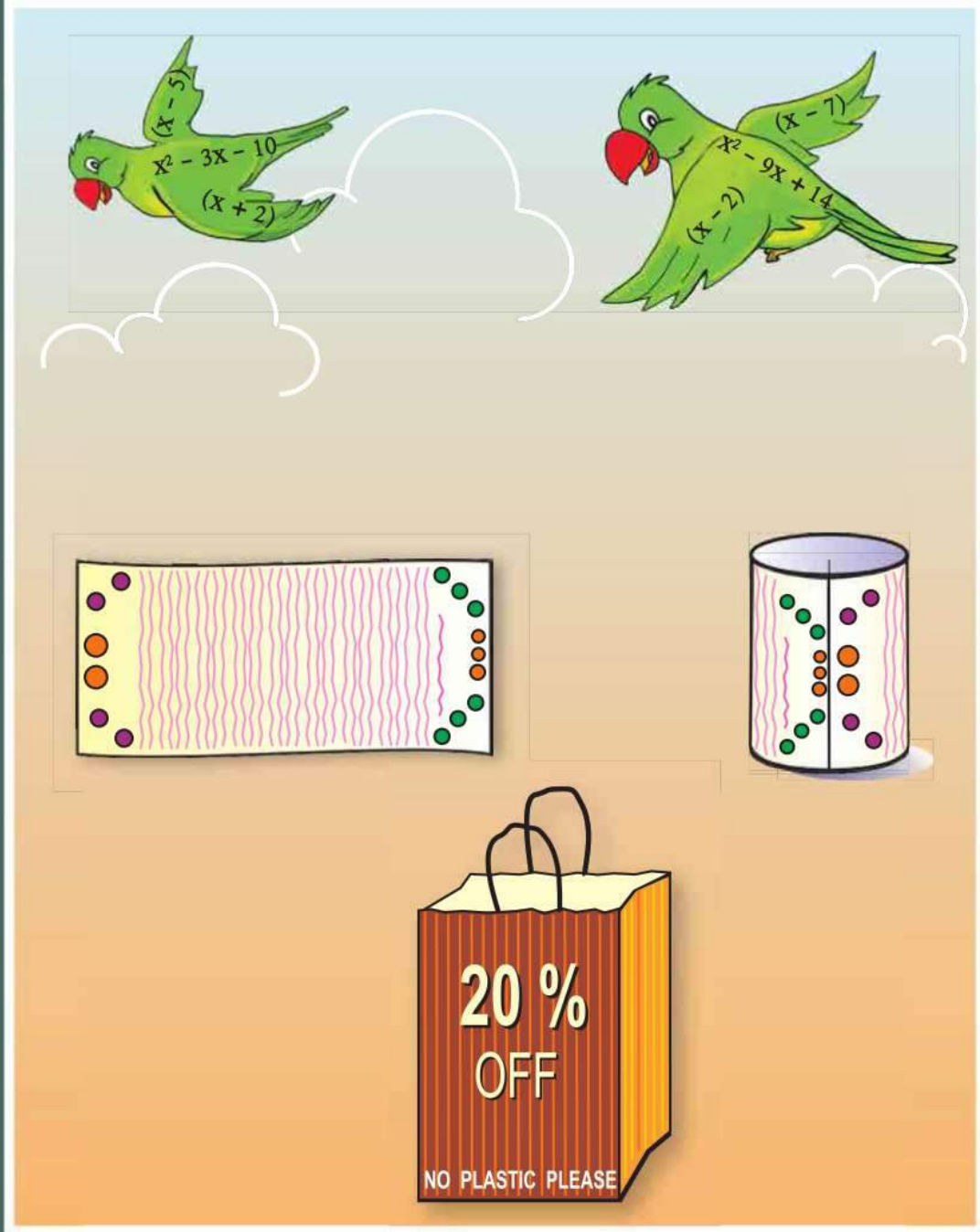
6. 7700

7. سم 3.5

9. (1) $x = 16$ (2) $y = \frac{9}{4}$ (3) $x = -4$ (11) 3.24 ہیکٹر

12. 1920 13. باقی = 0، خارج قسمت = $3x^2 + 4x - 7$





महाराष्ट्र राजीव पाठ्यपुस्तक निदेशक, पुणे - ४११००४

उर्दू गणित इ. ८ वी

₹ 48.00