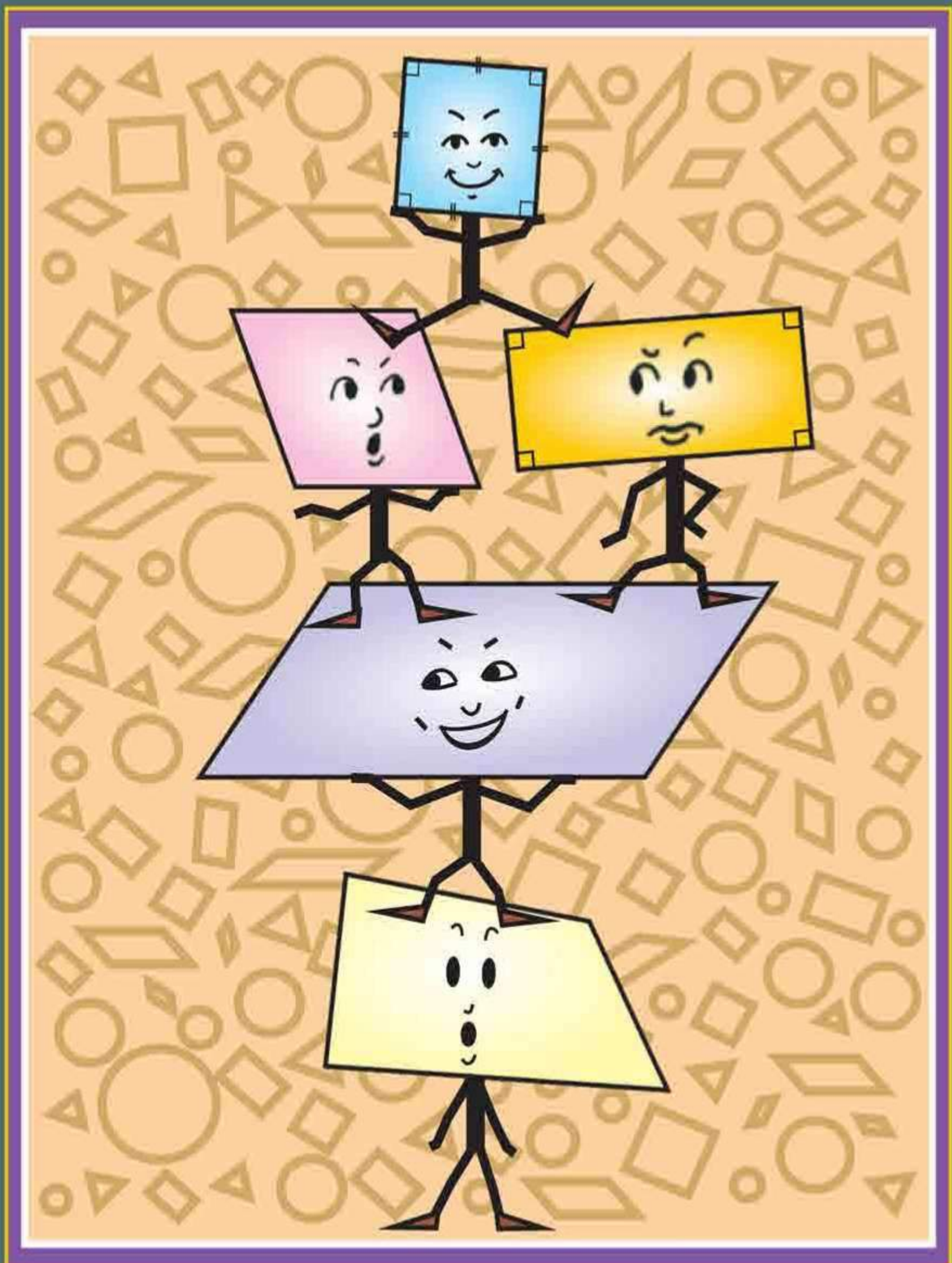
ریاضی

آٹھویں جماعت



سرکاری فیصلہ نمبر: ابھیاس - ۲۱۱۶ (پر.نمبر ۴۳/۱۶) ایس ڈی-۴ مؤرخہ ۲۵/اپریل ۲۰۱۶ء کے مطابق قائم کی گئی رابطہ کارکمیٹی کی مؤرخہ ۲۹/دسمبر ۲۰۱۷ء کے منعقدہ نشست میں اس کتاب کو تعلیمی سال ۱۹-۲۰۱۸ سے درسی کتاب کے طور پر منظوری دی گئی۔

ریاضی

آٹھویں جماعت

मराराष्ट्र राज्य पाठ्यपुस्तक निर्मिती व अभ्यासक्रम संशोधन मंडळ

مہاراشٹر راجیہ پاٹھیہ پستک نرمتی وابھیاس کرم سنشودھن منڈل، پونہ - ۴۱۱۰۰۴

D5KF4H

اپنے اسمارٹ فون میں انسٹال کردہ Diksha App کے ذریعے درسی کتاب کے پہلے صفحے پر درج Q.R. code اسکین کرنے سے ڈیجیٹل درسی کتاب اور ہر سبق میں درج Q.R. code کے ذریعے متعلقہ سبق کی درس و تدریس کے لیے مفید سمعی وبصری ذرائع دستیاب ہوں گے۔

طبع اوّل : ۲۰۱۸ء
(2018)

ریاضی مضمون کی کمیٹی

- ڈاکٹر منگلا نارلیکر (صدر)
- ڈاکٹر شریمتی جے شری اترے (رکن)
- ڈاکٹر ونا یک گوڈبولے (رکن)
- شریمتی پراجکتی گوکھلے (رکن)
- شری رما کانت سرودے (رکن)
- شری سندیپ پنچ بھائی (رکن)
- شریمتی پوجا جادھو (رکن)
- شریمتی اجولا گوڈبولے (رکن سکریٹری)

ریاضی مضمون کی مجلس عاملہ

- شریمتی جے شری پورندرے
- شری راجندر چودھری
- شری سندیش سوناونے
- شری گیانیشور ماشالکر
- شریمتی سورنا دیش پانڈے
- شری شریپاد دیشپانڈے
- شری سریش داتے
- شری اُمیش ریلے
- شری بنسی ہوالے
- شری رونی شرکے
- شری پرکاش جھینڈے
- شری لکشمن داون کر
- شری شری کانت رتن پارکھی
- شری سنیل شری واستو
- جناب انصاری عبدالحمید عبدالمجید
- جناب انصار شیخ
- شریمتی تروبین پوپٹ
- شری پرمود ٹھونبرے
- ڈاکٹر بھارتی سہستر بُدھے
- شریمتی سواتی دھرما دھیکاری
- شری پرتاپ کاشد
- شری ملند بھاکرے
- شری انا پا پریٹ
- شری گنیش کولتے
- شری راما وہنیالکر
- شری سدھیر پاٹل
- شری پرکاش کاپسے
- شری رویندر کھندارے
- شری وسنت شیوالے
- شری اروند کمار تیواری
- شری مللے شام بیتھی
- شریمتی آریا بھڑے

Urdu Translators
Mr. Ansari Abdul Hameed Abdul Majeed
Mr. Ansari Badrudduja Shamsuddoha
Mr. Momin Al-Nasir Abdus Samad

Co-ordinator (Urdu)
Khan Naveedul Haque Inamul Haque
Special Officer for Urdu,
M.S. Bureau of Textbooks, Balbharati - Pune

Co-ordinator (Marathi)
Smt. Ujwala S. Godbole
I/O. Special Officer for Mathematics
M.S. Bureau of Textbooks, Balbharati - Pune

Urdu D.T.P. & Layout
Altaf Ameen (Sadan Graphics)
Malegaon-423203

Cover, Art work & Computer Designing
Shri. Sandeep Koli, Artist, Mumbai

Production
Shri Sachchitanand Aphale (C.P.O)
Shri Sanjay Kamble (Production Officer)
Shri Prashant Harne (Asst. Production Officer)

Paper
70, GSM Creamwove

Print Order
N/PB/2018-19/20,000

Printer
SOHAIL ENTERPRISES, THANE

Publisher
Shri Vivek Uttam Gosavi (Controller)
M.S. Bureau of Textbook Production,
Prabhadevi, Mumbai - 25

بھارت کا آئین

تمہید

ہم بھارت کے عوام متانت وسنجیدگی سے عزم کرتے ہیں کہ بھارت کو
ایک مقتدر سماج وادی غیر مذہبی عوامی جمہوریہ بنائیں
اور اس کے تمام شہریوں کے لیے حاصل کریں :
انصاف، سماجی ، معاشی اور سیاسی ؛
آزادی خیال، اظہار، عقیدہ ، دین اور عبادت ؛
مساوات بہ اعتبارِ حیثیت اور موقع،
اور ان سب میں
اُخوّت کو ترقّی دیں جس سے فرد کی عظمت اور قوم کے اتحاد اور
سالمیت کا تیقّن ہو؛
اپنی آئین ساز اسمبلی میں آج چھبّیس نومبر ۱۹۴۹ء کو یہ آئین
ذریعۂ ہٰذا اختیار کرتے ہیں،
وضع کرتے ہیں اور اپنے آپ پر نافذ کرتے ہیں۔

راشٹر گیت

جَنَ گَنَ مَنَ - اَدِھ نایک جَیَہ ہے
بھارَتَ - بھاگیہ وِدَھاتا۔
پَنْجاب، سِندُھ، گُجراتَ، مَراٹھا
دراوِڑ، اُتکَل، بَنگ،
وِندھیہ، ہِماچَل، یَمُنا، گنگا،
اُچّھل جَل دِھ تَرَنگ،
تَوشُبھَ نامے جاگے، تَوشُبھ آ شِس ماگے،
گاہے تَوجَیَہ گاتھا،
جَنَ گَنَ منگل دَایَک جَیَہ ہے،
بھارَتَ - بھاگیہ وِدھاتا۔
جَیَہ ہے، جَیَہ ہے، جَیَہ ہے،
جَیَہ جَیَہ جَیَہ، جَیَہ ہے۔

عہد

بھارت میرا ملک ہے۔ سب بھارتی میرے بھائی اور بہنیں ہیں۔

مجھے اپنے وطن سے پیار ہے اور مَیں اس کے عظیم و گونا گوں وِرثے پر فخر محسوس کرتا ہوں۔ مَیں ہمیشہ اِس ورثے کے قابل بننے کی کوشش کروں گا۔

میں اپنے والدین، استادوں اور بزرگوں کی عزّت کروں گا اور ہر ایک سے خوش اخلاقی کا برتاؤ کروں گا۔

میں اپنے ملک اور اپنے لوگوں کے لیے خود کو وقف کرنے کی قسم کھاتا ہوں۔ اُن کی بہتری اور خوش حالی ہی میں میری خوشی ہے۔

پیش لفظ

عزیز طلبہ!

آٹھویں جماعت میں آپ سب کا استقبال ہے۔

پہلی جماعت سے ساتویں جماعت تک کی درسی کتابوں کا آپ مطالعہ کر چکے ہیں۔ آٹھویں جماعت کی درسی کتاب آپ کو پیش کرتے ہوئے ہمیں بہت مسرت ہورہی ہے۔

ہمیں توقع ہے کہ آپ مضمون ریاضی کو صحیح طور پر سمجھیں گے، دلچسپی سے لطف اٹھائیں گے، اس مقصد کے تحت اس درسی کتاب میں کچھ عملی سرگرمیاں اور ہندسی عمل دیے ہوئے ہیں، انھیں ضرور بہ ضرور انجام دیں۔ اس سے متعلق ایک دوسرے سے تبادلۂ خیال کریں۔ جس کی مدد سے آپ ریاضی کی کچھ نئی خصوصیات سے روشناس ہوں گے۔

ہمیں امید ہے کہ آپ درسی کتاب کے ہر باب کو توجہ وانہماک سے پڑھیں گے۔ کوئی اکائی، ذیلی اکائی آپ کو ٹھیک طور پر نہیں سمجھ میں آئے تو اساتذہ، سرپرست یا دیگر طلبہ کی مدد لیں۔ اس کے لیے اطلاعاتی مواصلاتی ٹیکنالوجی کی مدد بھی حاصل کریں۔ ہر باب کے آخر میں Q.R. Code دیا ہوا ہے۔ اس کا بھی استعمال کریں۔

باب میں اکائیوں کی وضاحت وتشریح سمجھ میں آجائے تو مشقی سیٹ کی مثالیں حل کریں۔ مشق سے اکائیوں کے اہم نکات زیادہ بہتر طور پر سمجھ میں آجائیں گے اور ذہن نشین ہوجائیں گے۔ مشقی سیٹ میں دی ہوئی مثالوں کی طرح کئی مثالیں آپ خود تیار کرسکیں گے۔ مشقی سیٹ میں تارے کی علامت والی مثالیں ذرا فکر انگیز اور چنوتی دینے والی ہیں، اسے ضرور حل کریں۔

ریاضی کے مطالعہ میں دی ہوئی معلومات کم دکھائی دے تب ذرا منطقی غور وفکر سے مزید نتیجے اخذ کیے جا سکتے ہیں۔ مثلاً مثلثوں کی متماثلت کی آزمائشیں۔ آئندہ مطالعے میں ان آزمائشوں کا استعمال بڑے پیمانے پر ہونے والا ہے۔ اس کا مطالعہ باریک بینی سے کریں۔

روز مرہ زندگی میں مالی لین دین میں استعمال ہونے والے مرکب سود، رعایت - کمیشن، کرنسی، منتظم و غیر منتظم مختلف اشکال کے رقبے، بعض سہ ابعادی اجسام کے حجم وغیرہ کو اس کتاب میں سمجھایا گیا ہے۔

ریاضی کا مطالعہ کرنے کے دوران گذشتہ جماعتوں میں سیکھے ہوئے علم کا استعمال کیا جاتا ہے۔ لہٰذا مختلف اکائیوں میں اہم ضابطے، خصوصیت وغیرہ 'یہ میری سمجھ میں آگیا' عنوان کے تحت چوکون میں دیے ہوئے ہیں۔ اسے ذہن نشین کرلیں۔

آٹھویں جماعت کا سال، ابتدائی تعلیم کا آخری سال ہے۔ اس سال میں اچھا مطالعہ کرکے ثانوی تعلیم کے لیے نویں جماعت میں خود اعتمادی کے ساتھ داخلہ لیں۔ اس کے لیے آپ کو خلوص دل سے نیک تمنائیں۔

پونہ :

مورخہ : ۱۸/اپریل ۲۰۱۸ء اکشیہ ترتیہ

بھارتیہ شمسی تاریخ : ۲۸/چیتر ۱۹۴۰

(ڈاکٹر سنیل مگر)

ڈائرکٹر

مہاراشٹر راجیہ پاٹھیہ پستک نرمتی

وابھیاس کرم سنشودھن منڈل، پونہ

آٹھویں جماعت - ریاضی کے درسی ما حصل

درس میں تجویز کردہ تعلیمی عمل	درسی ما حصل
تمام طلبہ کو (مختلف ضرورتوں کے حامل بچوں کے ساتھ) انفرادی/ جوڑی میں/ اجتماعی طور پر عمل کرنے کی ترغیب دی جائے - • طاق اعداد کی تمام بنیادی اعمال کے ساتھ مثالیں معلوم کرنا اور ان اعمال میں تواتر تلاش کرنا۔ • مربع اعداد، جذر المربع، مکعب اعداد، جذر المکعب کے تواتر معلوم کر کے صحیح اعداد کے قوت نما کے لیے اُصول معلوم کرنا۔ • ایسے مواقع پیدا کرنا کہ آسان مساواتیں بنا سکیں اور آسان طریقے کا استعمال کر کے اسے حل کر سکیں، اس کے لیے ترغیب دینا۔ • اعداد کی توسیع خصوصیت پر مبنی، دو الجبرائی ارکان یا کثیر رکنیوں کو ضرب کا تجربہ دینا اور مختلف الجبرائی متماثلہ (دائمی) مساواتوں کو مثالوں سے تعمیم کرنا۔ • دو اعداد کے اجزائے ضربی سابقہ علم کے ذریعے کرنا۔ مناسب عمل کی مدد سے الجبرائی کثیر رکنیوں کے اجزائے ضربی کی پہچان کرانا۔ • فی صدی کا استعمال ذیل کے سب امور میں ہوتا ہے، چھوٹ (رعایت)، نفع - نقصان، GST کا تعارف، مفرد سود، مرکب سود وغیرہ کے لیے واقعات مہیا کرنا۔ • مفرد سود بار بار معلوم کر کے مرکب سود کا ضابطہ معلوم کرنا۔ اس کے لیے مختلف مثالیں بنا کر دینا۔ • ایک رکن کا دوسرے رکن پر انحصار ہوتا ہے، ایسے واقعات اور مثالیں مہیا کرنا۔ دونوں ارکان میں ایک کے اضافے سے دوسرے میں اضافہ ہوتا ہے یا ایک رکن کے اضافے سے دوسرے رکن میں کمی واقع ہوتی ہے۔ ایسے واقعات پہچاننے کے لیے ان کو ترغیب دینا۔ مثال کے طور پر سواریوں کی رفتار میں اضافے سے ان کے فاصلہ طے کرنے کے لیے درکار وقت میں کمی واقع ہوتی ہے۔ • مختلف ذو اربعۃ الاضلاع کے زاویے اور ضلعوں کی پیائش کرنا اور ان کے درمیان تعلق کا تواتر معلوم کرنا۔ ان کی تعمیم کر کے اصول و ضابطہ معلوم کرنا اور مثالوں کے ذریعے ان کی تصدیق کرنا۔ • متوازی الاضلاع کی خصوصیت، ذو اربعۃ الاضلاع کی تشکیل کر کے، ان کے وتر بنا کر، ضلع اور زاویہ کی پیائش کر کے تصدیق و جانچ دیکھنے کے لیے کہنا اور وجہ بتانا۔	طالب علم - • تواتر کے ذریعے ناطق اعداد کی جمع، تفریق، ضرب اور تقسیم کی خصوصیات کی تعمیم کرتا ہے۔ • دیے ہوئے دو ناطق اعداد کے درمیان زیادہ سے زیادہ ناطق اعداد معلوم کرتا ہے۔ • مختلف طریقوں سے اعداد کے مربع، مکعب، جذر المربع اور جذر المکعب معلوم کرتا ہے۔ • صحیح اعداد کی قوت نما والی مثالوں کو حل کرتا ہے۔ • متغیر کا استعمال کر کے معمے اور روزمرہ زندگی سے متعلق مثالیں حل کرتا ہے۔ • الجبرائی عبارتوں کی ضرب کرتا ہے۔ • $(2x+5)\ (3x^2+7)$ کی توسیع کرتا ہے۔ • روزمرہ زندگی کی عبارتی مثالوں کو حل کرنے کے لیے الجبرائی متماثلہ مساواتوں کا استعمال کرتا ہے۔ • رعایت اور مرکب سود کی مثالوں میں GST، اسی طرح نفع اور نقصان معلوم کرنے کے لیے فی صدی کے تصورات کا استعمال کرتا ہے۔ • چھپی ہوئی قیمت اور رعایت دی ہوئی ہو تو فی صدی رعایت معلوم کرتا ہے یا فروخت قیمت اور نفع دیا ہوا ہو تو فی صدی نفع معلوم کرتا ہے۔ • مستقیم تغیر اور معکوس تغیر پر مبنی مثالیں حل کرتا ہے۔ • ذو اربعۃ الاضلاع کے زاویوں کی خصوصیت کا استعمال کر کے ذو اربعۃ الاضلاع کے زاویوں کی پیائشوں کی جمع پر مبنی مثالیں حل کرتا ہے۔ • متوازی الاضلاع کی خصوصیات کی تصدیق کرتا ہے اور ان کے تعلق کو وجوہات دے کر واضح کرتا ہے۔ • تواتر کے ذریعے آئیلر (Euler's) کے ضابطے کی تصدیق کرتا ہے۔ • کمپاس (گنیوں) اور اسکیل پٹی کی مدد سے مختلف ذو اربعۃ الاضلاع بناتا ہے۔

درس میں تجویز کردہ تعلیمی عمل	درسی ماحصل
• ہندسی وسائل کی مدد سے مختلف ذو اربعۃ الاضلاع کی تشکیل کے عملی کام اور تجربات دینا۔ • ترسیمی کاغذ پر ذو زنقہ اور دیگر کثیر الاضلاع بنانا اور طلبہ کا مربع اکائیوں کو شمار کرکے اُن کا رقبہ طے کرنا۔ • مثلث اور مستطیل (مربع) کے رقبوں کا استعمال کرکے ذو زنقہ کا رقبہ معلوم کرنا۔ • مکعب، مکعب نما / مستطیلی منشور اور دائروی استوانہ جیسی سہ ابعادی اشکال کی سطحوں کو پہچاننا۔ • مکعب اور مکعب نما / مستطیلی منشور، دائروی استوانہ کے سطحوں کے رقبے کا ضابطہ، مستطیل، مربع اور دائرہ کے رقبوں کے ضابطوں کا استعمال کرکے معلوم کرنا۔ • مکعب اور مکعب نما / مستطیلی منشور کے حجم، اکائی مکعب کا استعمال کرکے معلوم کرنا۔ • معطیات / شمارے جمع کرنا، اس کی جماعت بندی کرنا اور ستونی ترسیم بنانا۔ • دیے ہوئے معطیات کا میانیہ معلوم کرنا۔ • متماثلت کا نتیجہ پیشگی طے کرکے اور اشکال ایک دوسرے پر رکھ کر متماثلت کی خصوصیت کی تصدیق کرنا۔	• ترسیمی کاغذ/مربعی جالی کا استعمال کرکے ذو زنقہ اور دیگر کثیر الاضلاع کے رقبے کا اندازہ لگاتا ہے اور ضابطے کا استعمال کرکے اس کی تصدیق کرتا ہے۔ • کثیر الاضلاع کا رقبہ معلوم کرتا ہے۔ • مکعب نما (مستطیلی منشور) اور استوانہ اشکال والی چیزوں کی سطحوں کا رقبہ اور حجم معلوم کرتا ہے۔ • ستونی ترسیم پڑھتا ہے اور اس کی تشریح کرتا ہے۔ • دو متوازی خطوط اور ان کے تقاطع سے بننے والے زاویوں کی جوڑیوں کی خصوصیات کی تصدیق کرتا ہے۔ • ضل ضل ضل، ضل زا ضل، زا ضل زا ، وتر-ضلع؛ ان آزمائشوں کا استعمال کرکے مثلثوں کی متماثلت کی وضاحت کرتا ہے۔ • ترسیمی کاغذ یا مربعی چوکون والے چوکڑی کاغذ کا استعمال کرکے بند شکل کا اندازاً رقبہ معلوم کرتا ہے۔ • روزمرہ کاروبار میں حاصل شدہ تجربات سے جمع کردہ معطیات کا میانیہ معلوم کرتا ہے۔ • فی صدی اور تقسیمی ستونی ترسیم بناتا ہے۔ • دیے ہوئے خط کے متوازی خط کھینچتا ہے۔

اساتذہ کے لیے ہدایت

آٹھویں جماعت کی درسی کتاب کا استعمال جماعت میں سوال و جواب، سرگرمی، بحث اور طلبہ سے مکالمہ، وغیرہ مختلف ذرائع سے کیا جانا ضروری ہے۔ اس لیے درسی کتاب کا تفصیلی مطالعہ کیجیے۔ مطالعہ کرنے کے دوران تدریس کے نکتۂ نظر سے اہم جملوں کو خط کشیدہ کیجیے۔ ان کے حوالہ جات سمجھنے کے لیے گذشتہ اور آئندہ جماعتوں کی درسی کتابوں اور دیگر وسائل کا مطالعہ کیجیے۔ اس کے لیے Q.R.Code پر دی ہوئی معلومات کا استعمال کیجیے۔

کتاب میں ہمارا ماحول، جغرافیہ، سائنس، معاشیات، ان تمام مضامین کا ریاضی سے ربط قائم کیا گیا ہے۔ ایسے کئی مضامین میں ریاضی کے تصورات کا استعمال ہوتا ہے۔ اساتذہ طلبہ کو بتائیں۔ اساتذہ طلبہ سے سرگرمی، پروجیکٹ اور تجربات کروائیں۔ اس طرح ریاضی کے لین دین میں استعمال کی وضاحت ہوگی اور اس کے سیکھنے کی اہمیت کا طلبہ کو احساس ہوگا۔ ریاضی کی کتاب میں تصورات کی وضاحت آسان زبان میں دی گئی ہے۔ مشقی سیٹ میں دی ہوئی مثالوں پر منحصر کئی مثالیں اساتذہ خود تیار کرکے طلبہ کو حل کرنے کے لیے اور انھیں بھی نئی مثالیں بنانے کی ترغیب دیں۔

طلبہ کے لیے بعض فکر انگیز اور چنوتی والے سوال تارے سے نشان زد کیے ہوئے ہیں۔ 'مزید معلومات کے لیے' عنوان کے تحت تھوڑی زیادہ معلومات دی ہوئی ہے۔ یہ معلومات ریاضی کے آئندہ مطالعہ کے دوران طلبہ کے لیے یقیناً فائدہ مند ثابت ہوں گی۔ ہمیں امید ہے کہ آٹھویں جماعت کی ریاضی کی درسی کتاب آپ کو یقیناً پسند آئے گی۔

فہرست

حصہ 1

حصہ 2

حصّہ 1

1 ناطق اور غیر ناطق اعداد

آیئے ذرا یاد کریں

ہم طبعی اعداد کے گروہ، مکمل اعداد کے گروہ اور صحیح اعداد کے گروہ اور ناطق اعداد کے گروہ کی شناخت کر چکے ہیں۔

صحیح اعداد کا گروہ	مکمل اعداد کا گروہ	طبعی اعداد کا گروہ
...,−4,−3,−2,−1, 0, 1, 2, 3,...	0,1,2,3,4, ...	1,2,3,4,...

ناطق اعداد کا گروہ

$\frac{-25}{3}$, $\frac{10}{-7}$, −4, 0, 3, 8, $\frac{32}{3}$, $\frac{67}{5}$, وغیرہ

ناطق اعداد کا گروہ

$\frac{m}{n}$ کی صورت والے اعداد کو ناطق اعداد کہتے ہیں۔ یہاں m اور n صحیح اعداد ہوتے ہیں لیکن n غیر صفر صحیح عدد ہے۔

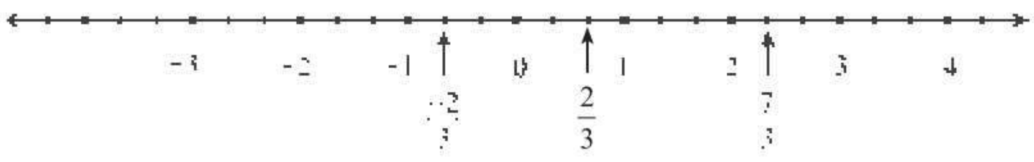
ہم جانتے ہیں کہ دو ناطق اعداد کے درمیان بے شمار ناطق اعداد ہوتے ہیں۔

آیئے سمجھ لیں

عددی خط پر ناطق عدد دکھانا (To show rational numbers on a number line)

اعداد $\frac{7}{3}$ ، 2 ، $\frac{2}{3}$ کو عددی خط پر دکھائیں گے۔

پہلے ایک عددی خط کھینچیں گے۔



- 2 ناطق عدد ہے اور صحیح عدد بھی ہے۔ اسے عددی خط پر دکھائیں گے۔
- $\frac{7}{3} = 7 \times \frac{1}{3}$ یعنی صفر کے دائیں طرف ہر اکائی کے تین مساوی حصے کریں گے۔ صفر سے ساتواں نقطہ $\frac{7}{3}$ عدد کو ظاہر کرتا ہے۔ یا
  $\frac{7}{3} = 2 + \frac{1}{3}$ یعنی 2 عدد کے بعد $\frac{1}{3}$ اکائی فاصلے پر واقع نقطہ $\frac{7}{3}$ عدد کو ظاہر کرتا ہے۔

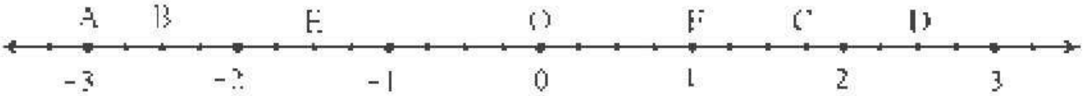
- عددی خط پر $\frac{2}{3}$ دکھانے سے قبل $\frac{2}{3}$ عدد ظاہر کر کے 0 کے بائیں جانب اتنے ہی فاصلے پر عدد $\frac{2}{3}$ ظاہر کیا جائے گا۔

مشقی سیٹ 1.1

1. عددی خط پر درج ذیل ناطق اعداد دکھایئے۔ ہر مثال کے لیے علیٰحدہ عددی خط کھینچیے۔

(1) $\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, -\frac{3}{2}$ (2) $\frac{7}{5}, \frac{2}{5}, \frac{4}{5}$ (3) $\frac{5}{8}, \frac{11}{8}$ (4) $\frac{13}{10}, \frac{17}{10}$

2. دیے ہوئے عددی خط کو دیکھ کر پوچھے گئے سوالوں کے جواب لکھیے۔



(1) نقطہ B کس ناطق عدد کو ظاہر کرتا ہے؟

(2) عدد $1\frac{3}{4}$ کس نقطہ سے ظاہر کیا گیا ہے؟

(3) 'نقطہ 'D' سے ناطق عدد $\frac{5}{2}$ کو ظاہر کیا گیا ہے۔' یہ بیان صحیح ہے یا غلط لکھیے۔

آیئے سمجھ لیں

ناطق اعداد میں ترتیبی تعلق (چھوٹا بڑا پن) (Comparison of rational numbers)

ہم جانتے ہیں کہ عددی خط پر اعداد کی ہر جوڑی میں بائیں جانب کا عدد، دائیں جانب کے عدد سے چھوٹا ہوتا ہے۔ اسی طرح ناطق اعداد کے شمار کنندہ اور نسب نما کو کسی ایک غیر صفر عدد سے ضرب دیں تو عدد وہی رہتا ہے یا اس کی قیمت میں کوئی تبدیلی نہیں ہوتی۔

یعنی $\frac{a}{b} = \frac{ka}{kb}$ جب $k \neq 0$

مثال (1) $\frac{5}{4}$ اور $\frac{2}{3}$ کے درمیان چھوٹا-بڑا پن طے کیجیے۔ $<$, $=$, $>$ ان میں سے مناسب علامت کا استعمال کیجیے۔

حل : $\frac{5}{4} = \frac{5 \times 3}{4 \times 3} = \frac{15}{12}$, $\frac{2}{3} = \frac{2 \times 4}{3 \times 4} = \frac{8}{12}$

$\therefore \frac{15}{12} > \frac{8}{12}$. $\therefore \frac{5}{4} > \frac{2}{3}$

مثال (2) ناطق اعداد $\frac{4}{5}$ ، $\frac{-7}{9}$ کا موازنہ کیجیے۔

حل : منفی عدد ہمیشہ مثبت عدد سے چھوٹا ہوتا ہے۔ اس لیے $-\frac{7}{9} < \frac{4}{5}$

دو منفی اعداد کا موازنہ کرنے کے لیے :

a ، b مثبت اعداد ہیں اگر $a < b$ ہو تو $-a > -b$ کا مشاہدہ کریں گے۔

$$\left.\begin{array}{l} 2 < 3 \text{ لیکن } -2 > -3 \\ \frac{5}{4} < \frac{7}{4} \text{ لیکن } \frac{-5}{4} > \frac{-7}{4} \end{array}\right\}$$

ان اعداد کی عددی خط پر تصدیق کیجیے۔

مثال (3) $\frac{-5}{2}$ ، $\frac{-7}{3}$ کا موازنہ کیجیے۔

حل : پہلے $\frac{7}{3}$ اور $\frac{5}{2}$ کا موازنہ کریں گے۔

$$\frac{7}{3} = \frac{7\times 2}{3\times 2} = \frac{14}{6}, \quad \frac{5}{2} = \frac{5\times 3}{2\times 3} = \frac{15}{6}, \quad \frac{14}{6} < \frac{15}{6}$$

$$\therefore \frac{7}{3} < \frac{5}{2}, \quad \therefore \frac{-7}{3} > \frac{-5}{2}$$

مثال (4) $\frac{3}{5}$ اور $\frac{6}{10}$ ناطق اعداد ہیں، ان کا موازنہ کیجیے۔

حل : $\frac{3}{5} = \frac{3\times 2}{5\times 2} = \frac{6}{10}, \quad \therefore \frac{3}{5} = \frac{6}{10}$

ناطق اعداد کا موازنہ کرتے وقت ذیل کے اصول استعمال کرنا مفید ہوتے ہیں۔

$\frac{a}{b}$ اور $\frac{c}{d}$ ناطق اعداد میں اگر b اور d مثبت ہوں اور

(1) اگر $a \times d < b \times c$ ہو تو $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$

(2) اگر $a \times d = b \times c$ ہو تو $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

(3) اگر $a \times d > b \times c$ ہو تو $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$

مشقی سیٹ 1.2

1. درج ذیل اعداد میں چھوٹا - بڑا پن طے کیجیے۔

(1) $-7, -2$ (2) $0, \frac{-9}{5}$ (3) $\frac{8}{7}, 0$ (4) $\frac{-5}{4}, \frac{1}{4}$ (5) $\frac{40}{29}, \frac{141}{29}$

(6) $-\frac{17}{20}, \frac{-13}{20}$ (7) $\frac{15}{12}, \frac{7}{16}$ (8) $\frac{25}{8}, \frac{9}{4}$ (9) $\frac{12}{15}, \frac{3}{5}$ (10) $\frac{-7}{11}, \frac{-3}{4}$

آیئے سمجھ لیں

ناطق اعداد کا عشری صورت میں اظہار **(Decimal representation of rational numbers)**

ناطق اعداد کے شمار کنندہ کو نسب نما سے تقسیم کرتے وقت عشری کسروں کا استعمال کریں تو اس عدد کی عشری صورت حاصل ہوتی ہے۔

مثلاً $\frac{7}{4} = 1.75$، یہاں 7 کو 4 سے تقسیم کرنے پر باقی صفر آتا ہے۔ تقسیم کرنے کا عمل مکمل ہو چکا ہے۔

ناطق اعداد کی ایسی عشری صورت کو مختتم عشری صورت کہتے ہیں۔ ہم جانتے ہیں کہ ہر ناطق عدد غیر مختتم متوالی عشری صورت میں لکھ سکتے ہیں۔

مثالیں :

(1) $\frac{7}{6} = 1.1666... = 1.1\dot{6}$ (2) $\frac{5}{6} = 0.8333... = 0.8\dot{3}$

(3) $-\frac{5}{3} = -1.666... = -1.\dot{6}$

(4) $\frac{22}{7} = 3.142857142857... = 3.\overline{142857}$ (5) $\frac{23}{99} = 0.2323... = 0.\overline{23}$

اسی طرح، $\frac{7}{4} = 1.75 = 1.75000... = 1.75\dot{0}$ مختتم صورت بھی غیر مختتم متوالی عشری صورت میں لکھ سکتے ہیں۔

مشقی سیٹ 1.3

درج ذیل ناطق اعداد کو عشری صورت میں لکھیے۔

(1) $\frac{9}{37}$ (2) $\frac{18}{42}$ (3) $\frac{9}{14}$ (4) $\frac{-103}{5}$ (5) $-\frac{11}{13}$

آیئے سمجھ لیں

غیر ناطق اعداد **(Irrational numbers)**

ناطق اعداد کے علاوہ مزید کئی اعداد عددی خط پر ہوتے ہیں۔ وہ ناطق نہیں ہوتے، یعنی غیر ناطق ہوتے ہیں۔ $\sqrt{2}$ بھی ایک غیر ناطق عدد ہے۔

ہم عدد $\sqrt{2}$ کو عددی خط پر دکھائیں گے۔

- عددی خط پر نقطہ A عدد 1 کو ظاہر کرتا ہے۔ عددی خط پر نقطہ A سے ایک عمودی خط l کھینچیے۔

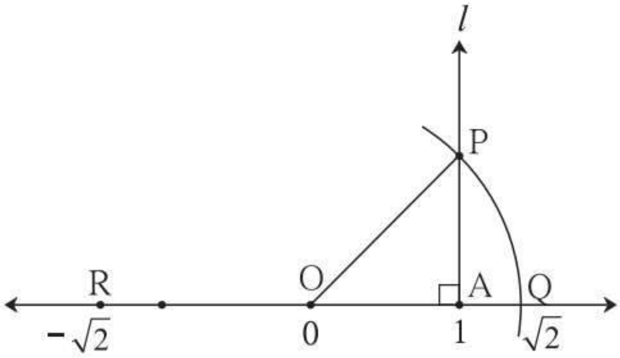
  خط l پر نقطہ P اس طرح لیجیے کہ اکائی OA = AP = 1 ہو۔
- خط OP کھینچیے۔ $\triangle$OAP ایک قائمۃ الزاویہ مثلث بن گیا۔

فیثا غورث کے مسئلے سے،

$$OP^2 = OA^2 + AP^2$$

$$= 1^2 + 1^2 = 1 + 1 = 2$$

$$OP^2 = 2$$



(طرفین کا جذرالمربع لینے پر) ... $\therefore OP = \sqrt{2}$

- اب مرکز 'O' اور OP کے مساوی نصف قطر لے کر ایک قوس کھینچیے۔ وہ قوس عددی خط کو جہاں قطع کرتا ہے اس نقطے کو Q نام دیجیے۔ OQ فاصلہ ہی $\sqrt{2}$ ہے۔یعنی عدد $\sqrt{2}$ کو عددی خط پر Q نقطے سے ظاہر کیا گیا ہے۔ OQ کے مساوی فاصلہ پرکار میں لے کر 'O' کے بائیں جانب نقطہ R کا تعین کریں تو اس نقطے سے ظاہر کیا گیا عدد $-\sqrt{2}$ ہوگا۔

عدد $\sqrt{2}$ غیر ناطق عدد ہے، اسے ہم آئندہ جماعت میں ثابت کریں گے۔ ناطق اعداد کی عشری صورت غیر مختتم اور غیر متوالی ہوتی ہے۔ اسے بھی ہم آئندہ جماعت میں دیکھیں گے۔

ذہن نشین کیجیے کہ —

گذشتہ جماعت میں ہم نے سیکھا کہ عدد π ناطق نہیں ہے یعنی وہ عدد غیر ناطق ہے۔ ہم اپنے کاروبار میں اس کی قیمت $\frac{22}{7}$ یا 3.14 لیتے ہیں لیکن اعداد $\frac{22}{7}$ اور 3.14 ناطق ہیں۔

جن اعداد کو عددی خط پر نقاط سے دکھایا جاسکتا ہے، ان اعداد کو حقیقی اعداد (Real Numbers) کہتے ہیں۔ ہم نے دیکھا کہ تمام ناطق اعداد کو عددی خط پر دکھایا جاسکتا ہے۔ لہٰذا تمام ناطق اعداد حقیقی اعداد ہیں۔ اسی طرح بے شمار غیر ناطق اعداد بھی حقیقی اعداد ہیں۔

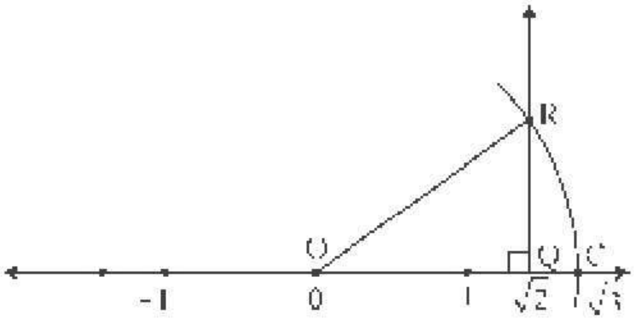
عدد $\sqrt{2}$ غیر ناطق عدد ہے۔ اسے ذہن نشین کیجیے کہ $3\sqrt{2}$ ، $\sqrt{2} + 7$ ، $\sqrt{2} - 3$ وغیرہ تمام اعداد غیر ناطق ہیں۔ کیونکہ اگر $3\sqrt{2}$ ناطق عدد ہوتو $\frac{3\sqrt{2}}{3}$ ناطق ہونا چاہیے۔ لیکن یہ صحیح نہیں ہے۔

ہم ناطق اعداد کو عددی خط پر ظاہر کرنا دیکھ چکے ہیں۔ اسی طرح غیر ناطق عدد $\sqrt{2}$ کو بھی عددی خط پر ظاہر کر چکے ہیں۔ لہٰذا $\sqrt{3}$ ، $\sqrt{5}$ ، ... جیسے غیر ناطق اعداد کو بھی ہم عددی خط پر دکھا سکتے ہیں۔

مشقی سیٹ 1.4

1. $\sqrt{2}$ کو عددی خط پر دکھایا گیا ہے۔ اس کی مدد سے $\sqrt{3}$ کو عددی خط پر دکھانے کے لیے ذیل کے عملی کام کے مراحل دیے ہوئے ہیں، ان مراحل کی خالی جگہوں کو مناسب طریقے سے پر کرکے عملی کام مکمل کیجیے۔

عملی کام :



- عددی خط پر نقطہ Q .... عدد کو ظاہر کرتا ہے۔
- نقطہ Q سے ایک عمودی خط کھینچا گیا ہے۔ اس خط پر ایک اکائی لمبائی دکھانے والا نقطہ R ہے۔
- OR کو جوڑنے سے $\triangle ORQ$ ایک قائمۃ الزاویہ مثلث حاصل ہوتا ہے۔
- $l(OQ) = \sqrt{2}$ ، $l(QR) = 1$

$\therefore$ فیثا غورث کے مسئلے سے،

$$[l(OR)]^2 = [l(OQ)]^2 + [l(QR)]^2$$
$$= \boxed{}^2 + \boxed{}^2 = \boxed{} + \boxed{}$$
$$= \boxed{} \quad , \quad \therefore l(OR) = \boxed{}$$

OR کے مساوی فاصلہ لے کر کھینچا گیا قوس عددی خط کو جہاں قطع کرتا ہے، اس نقطے کو C نام دیجیے۔ نقطہ C $\sqrt{3}$ کو ظاہر کرتا ہے۔

2. عددی خط پر $\sqrt{5}$ دکھائیے۔

*3. عددی خط پر $\sqrt{7}$ دکھائیے۔

جوابات کی فہرست

مشقی سیٹ 1.1

2. (1) $-\frac{10}{4}$ (2) C (3) صحیح

مشقی سیٹ 1.2

1. (1) $-7 < -2$ (2) $0 > \frac{9}{5}$ (3) $\frac{8}{7} > 0$ (4) $\frac{5}{4} < \frac{1}{4}$ (5) $\frac{40}{29} < \frac{141}{29}$

(6) $-\frac{17}{20} < -\frac{15}{20}$ (7) $\frac{15}{12} > \frac{7}{16}$ (8) $-\frac{25}{8} < -\frac{9}{4}$ (9) $\frac{12}{15} > \frac{3}{5}$ (10) $\frac{7}{11} > \frac{3}{4}$

مشقی سیٹ 1.3

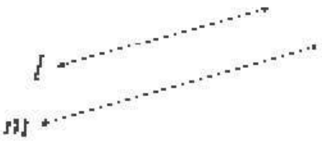
(1) 0.243 (2) 0.428571 (3) $0.\overline{6428571}$ (4) -20.6

(5) $-0.\dot{8}46153$

D5UB65

2 متوازی خطوط اور تقاطع

آیئے ذرا یاد کریں

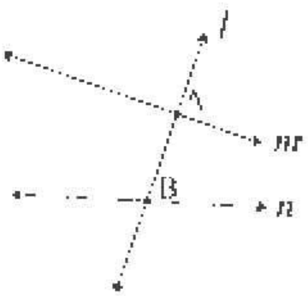


ایک ہی مستوی میں واقع ایک دوسرے کو قطع نہیں کرنے والے خطوط متوازی خطوط کہلاتے ہیں۔

خط l اور خط m متوازی خطوط ہیں، اسے 'خط $l \parallel$ خط m' لکھتے ہیں۔

آیئے سمجھ لیں

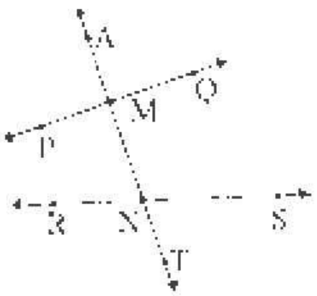
تقاطع (Transversal)



بازو میں دی ہوئی شکل میں خط m اور خط n کو خط l بالترتیب نقطہ A اور نقطہ B دو متفرق نقاط پر قطع کرتا ہے۔ خط m اور خط n کا خط l تقاطع ہے۔

اگر کوئی خط دیے ہوئے دو خطوط کو دو مختلف نقاط پر قطع کرتا ہو تو اس خط کو ان دو خطوط کا تقاطع کہتے ہیں۔

تقاطع کے ذریعے بننے والے زاویے (Angles made by Transversal)



متصلہ شکل میں تقاطع کے ذریعے نقطہ تقاطع M پر چار اور نقطہ تقاطع N پر چار اس طرح کل 8 زاویے بنے ہوئے دکھائی دیتے ہیں۔ آٹھوں زاویوں میں سے ہر ایک زاویے کی ایک ساق تقاطع پر ہے اور دوسری ساق دو میں سے کسی ایک خط پر ہے۔ اس کا استعمال کر کے زاویوں کی جوڑیاں طے کی گئی ہیں، ان جوڑیوں کا مطالعہ کریں گے۔

• نظیری زاویے (Corresponding Angles)

زاویوں کی جس جوڑی میں زاویوں کی تقاطع پر کی ساق ایک ہی سمت ظاہر کرتی ہے اور جو ساق تقاطع پر نہیں ہے وہ تقاطع کے ایک ہی جانب ہوتی ہیں، اس جوڑی کو نظیری زاویوں کی جوڑی کہتے ہیں۔

• داخلی زاویے (Interior Angles)

زاویوں کی جس جوڑی میں زاویے دیے ہوئے دونوں خطوط کے اندرونی جانب ہوتے ہیں۔ اس جوڑی کو داخلی زاویوں کی جوڑی کہتے ہیں۔

مذکورہ بالا شکل میں نظیری زاویوں کی جوڑیاں —

(i) $\angle AMP$ اور $\angle MNR$

(ii) $\angle PMN$ اور $\angle RNT$

(iii) $\angle AMQ$ اور $\angle MNS$

(iv) $\angle QMN$ اور $\angle SNT$

مذکورہ بالا شکل میں داخلی زاویوں کی جوڑیاں —

(i) $\angle PMN$ اور $\angle MNR$

(ii) $\angle QMN$ اور $\angle MNS$

متبادلہ زاویے (Alternate Angles)

زاویوں کی ایسی جوڑی جس جوڑی میں زاویے تقاطع کے مخالف جانب ہوتے ہیں اور تقاطع پر واقع ساق مخالف سمت ظاہر کرتی ہے، وہ جوڑی متبادلہ زاویوں کی جوڑی ہوتی ہے۔

شکل میں زاویوں کی دو جوڑیاں داخلی متبادلہ زاویوں کی ہیں تو دو جوڑیاں خارجہ متبادلہ زاویوں کی ہے۔

داخلی متبادلہ زاویے

(خطوط کے اندرونی جانب والے زاویے)

(i) $\angle PMN$ اور $\angle MNS$

(ii) $\angle QMN$ اور $\angle RNM$

خارجہ متبادلہ زاویے

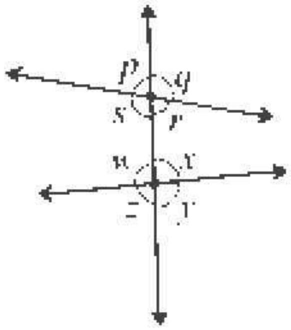
(خطوط کے بیرونی جانب والے زاویے)

(i) $\angle AMP$ اور $\angle TNS$

(ii) $\angle AMQ$ اور $\angle RNT$

مشقی سیٹ 2.1

.1 متصلہ شکل دیکھیے۔ شکل میں زاویوں کے نام ایک حرف سے ظاہر کیے گئے ہیں اس کی مدد سے خالی چوکون پر کیجیے۔



نظیری زاویوں کی جوڑیاں

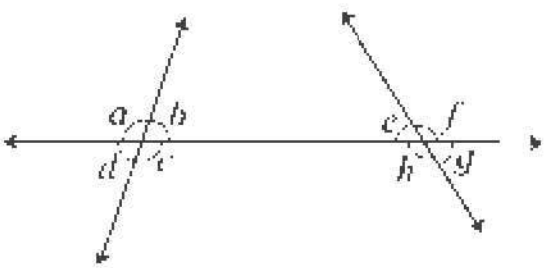
(1) $\angle p$ اور ☐ (2) $\angle q$ اور ☐

(3) $\angle r$ اور ☐ (4) $\angle s$ اور ☐

داخلی متبادلہ زاویوں کی جوڑیاں

(5) $\angle s$ اور ☐ (6) $\angle w$ اور ☐

.2 متصلہ شکل میں دکھائے ہوئے زاویے دیکھیے۔



درج ذیل جوڑیوں کو ظاہر کرنے والے زاویے لکھیے۔

(1) داخلی متبادلہ زاویے

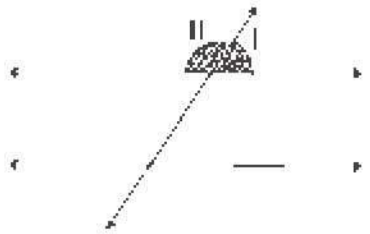
(2) نظیری زاویے

(3) داخلی زاویے

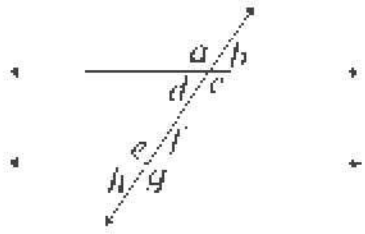
آیئے سمجھ لیں

متوازی خطوط اور تقاطع کے ذریعے بننے والے زاویے اور ان کی خصوصیات :
(Properties of angles formed by two parallel lines and transversal)

عملی کام (1) ایک بیاض کے کاغذ پر شکل (A) میں دکھائے ہوئے کے مطابق دو متوازی خطوط اور ان کا تقاطع ۔ ٹریسنگ کاغذ کی مدد سے اسی شکل کی ایک نقل ایک سادے کاغذ پر ۔ شکل (B) میں دکھائے ہوئے کے مطابق حصہ I اور حصہ II کو مختلف رنگوں سے رنگیے ان دونوں حصوں کو قینچی سے کاٹیے۔



(B)


(A)

اسے ذہن نشین رکھیے کہ حصہ I اور حصہ II سے دکھائے ہوئے زاویے خطی جوڑی میں ہیں۔اب حصہ I اور حصہ II کو شکل A میں آٹھوں زاویوں میں سے ہر زاویے پر رکھ کر دیکھیے۔

کون کون سے زاویوں سے حصہ I مکمل طور پر منطبق ہوتا ہے؟

کون کون سے زاویوں سے حصہ II مکمل طور پر منطبق ہوتا ہے؟

ایسا دکھائی دے گا کہ، $\angle b \cong \angle d \cong \angle f \cong \angle h$ ، کیونکہ یہ زاویے حصہ I سے منطبق ہوتے ہیں۔

$\angle a \cong \angle c \cong \angle e \cong \angle g$ ، کیوں کہ یہ زاویے حصہ II سے منطبق ہوتے ہیں۔

(یہ نظیری زاویوں کی جوڑیاں ہیں) ... (1) $\angle a \cong \angle e,\ \angle b \cong \angle f,\ \angle c \cong \angle g,\ \angle d \cong \angle h$

(یہ داخلی متبادلہ زاویوں کی جوڑیاں ہیں) ... (2) $\angle d \cong \angle f$ ، $\angle e \cong \angle c$

(یہ خارجہ متبادلہ زاویوں کی جوڑیاں ہیں) ... (3) $\angle a \cong \angle g$ ، $\angle b \cong \angle h$

(یہ داخلہ زاویوں کی جوڑیاں ہیں) ... (4) $m\angle d + m\angle e = 180^\circ$ ، $m\angle c + m\angle f = 180^\circ$

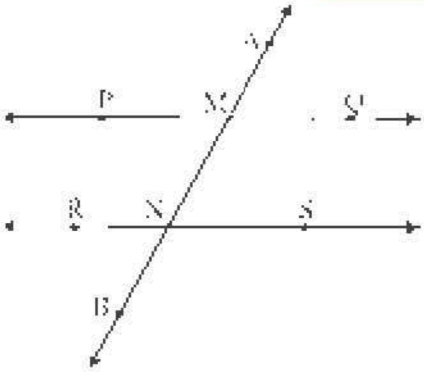
آیئے بحث کریں

دو متوازی خطوط کو ایک تقاطع سے قطع کرنے پر آٹھ زاویے بنتے ہیں۔

ان آٹھ زاویوں میں سے ایک زاویے کی پیائش دی ہو تو کیا دیگر سات زاویوں کی پیائشیں معلوم کی جا سکتی ہیں۔

آیئے سمجھ لیں

(1) نظیری زاویوں کی خصوصیت (Property of corresponding angles)



متوازی خطوط اور تقاطع کے ذریعے بننے والے نظیری زاویوں کی ہر جوڑی میں زاویے ایک دوسرے کے متماثل ہوتے ہیں۔

متصلہ شکل میں خط RS || خط PQ

خط AB اُن کا تقاطع ہے۔

نظیری زاویے

$\angle AMP \cong \angle MNR$, $\angle PMN \cong \angle RNB$

$\angle AMQ \cong \angle MNS$, $\angle QMN \cong \angle SNB$

(2) متبادلہ زاویوں کی خصوصیت (Property of alternate angles)

متوازی خطوط اور تقاطع سے بننے والے متبادلہ زاویوں کی ہر جوڑی میں زاویے ایک دوسرے کے متماثل ہوتے ہیں۔

داخلی متبادلہ زاویے	خارجہ متبادلہ زاویے
$\angle PMN \cong \angle MNS$	$\angle AMP \cong \angle SNB$
$\angle QMN \cong \angle MNR$	$\angle AMQ \cong \angle RNB$

(3) داخلہ زاویوں کی خصوصیت (Property of Internal angles)

داخلہ زاویے

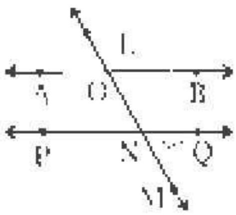
متوازی خطوط اور تقاطع سے بننے والے داخلہ زاویوں کی ہر جوڑی میں زاویوں کی پیمائشوں کا مجموعہ $180°$ ہوتا ہے۔

$m\angle PMN + m\angle MNR = 180°$

$m\angle QMN + m\angle MNS = 180°$

حل کردہ مثالیں

مثال (1) متصلہ شکل میں خط PQ || خط AB اور خط LM تقاطع ہے۔ $m\angle MNQ = 70°$ ہو تو $\angle AON$ کی پیمائش معلوم کیجیے۔



حل :

طریقہ I

$m\angle MNQ = m\angle ONP = 70°$ ... (متقابلہ زاویے)

$m\angle AON + m\angle ONP = 180°$ ... (داخلہ زاویے)

$\therefore\ m\angle AON = 180° - m\angle ONP$

$= 180° - 70°$

$= 110°$

طریقہ II

$m\angle MNQ = 70°$

$\therefore\ m\angle NOB = 70°$ ...(نظیری زاویے)

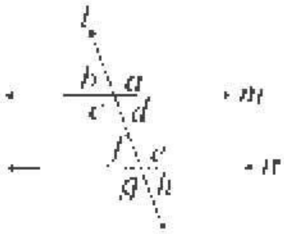
$m\angle AON + m\angle NOB = 180°$ ...(خطی جوڑی کے زاویے)

$\therefore\ m\angle AON + 70° = 180°$

$\therefore\ m\angle AON = 110°$

(مزید مختلف طرح سے غور و خوض کر کے مندرجہ بالا سوال حل کیا جا سکتا ہے)

مثال (2) متصلہ شکل میں خط n || خط m اور خط l تقاطع ہے۔



اگر $m\angle b = (x + 15)^\circ$ اور $m\angle e = (2x + 15)^\circ$ ہوتو x کی قیمت معلوم کیجیے۔

حل : $\angle b = \angle f$ ... (نظیری زاویے) , $\therefore\ m\angle f = m\angle b = (x + 15)^\circ$

$m\angle f + m\angle e = 180^\circ$ ... (خطی جوڑی کے زاویے)

مساوات میں قیمت رکھ کر،

$x + 15 + 2x + 15 = 180^\circ$, $\therefore\ 3x + 30 = 180^\circ$

$\therefore\ 3x = 180^\circ - 30^\circ$ ... (طرفین سے 30 تفریق کرنے پر)

$x = \frac{150}{3}$ ... (طرفین کو 3 سے تقسیم دینے پر)

$\therefore\ x = 50^\circ$

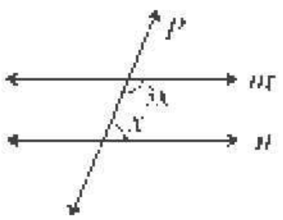
یہ میری سمجھ میں آگیا

دومتوازی خطوط کوایک تقاطع سے قطع کرنے پر بننے والے زاویوں میں سے

- نظیری زاویوں کی ہر جوڑی میں زاویے متماثل ہوتے ہیں۔ متبادلہ زاویوں کی ہر جوڑی میں زاویے متماثل ہوتے ہیں۔
- داخلہ زاویوں کی ہر جوڑی میں زاویے ایک دوسرے کے متمم ہوتے ہیں۔

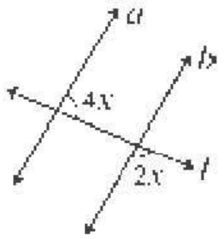
مشقی سیٹ 2.2

.1 مناسب متبادل منتخب کیجیے۔



(1) متصلہ شکل میں اگر خط n || خط m ہو اور خط p ان کا تقاطع ہوتو x کی قیمت کتنی ہے؟

(A) 135° (B) 90° (C) 45° (D) 40°

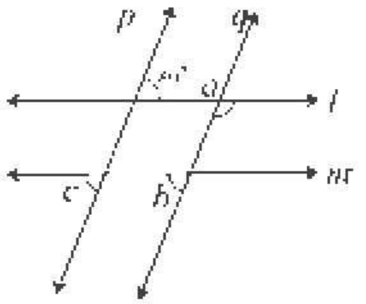


(2) متصلہ شکل میں اگر خط b || خط a ہو اور خط l ان کا تقاطع ہوتو x کی قیمت کتنی ہے؟

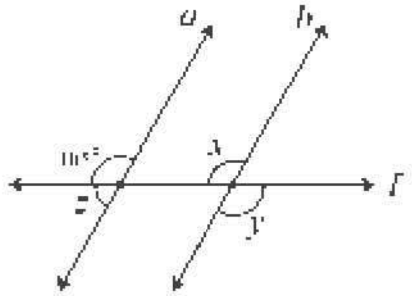
(A) 90° (B) 60° (C) 45° (D) 30°

.2 متصلہ شکل میں خط q || خط p ہے۔ خط t اور خط s تقاطع ہیں۔
دی ہوئی پیمائش کی مدد سے $\angle x$ اور $\angle y$ کی پیمائش معلوم کیجیے۔

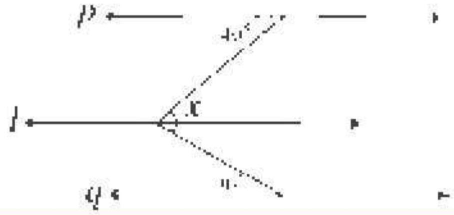
3. متصلہ شکل میں خط q || خط p ہے۔ خط m || خط l ہے۔ دیے ہوئے زاویے کی پیمائش کی مدد سے $\angle a$، $\angle b$، $\angle c$ کی پیمائشیں معلوم کیجیے، وجہ بھی لکھیے۔



*4. متصلہ شکل میں خط b || خط a اور خط l تقاطع ہے۔ دیے ہوئے زاویے کی پیمائش کی مدد سے $\angle x$، $\angle y$، $\angle z$ کی پیمائشیں معلوم کیجیے۔



*5. متصلہ شکل میں خط l || خط q || خط p ہے اور دی ہوئی پیمائشوں کی مدد سے $\angle x$ کی پیمائش معلوم کیجیے۔



مزید معلومات کے لیے :

ایک مستوی میں واقع دو خطوط کو ایک تقاطع سے قطع کرنے پر بننے والے —

- نظیری زاویوں کی ایک جوڑی متماثل ہو تو وہ خطوط متوازی ہوتے ہیں۔
- متبادلہ زاویوں کی ایک جوڑی متماثل ہو تو وہ خطوط متوازی ہوتے ہیں۔
- داخلہ زاویوں کی ایک جوڑی متمم ہو تو وہ خطوط متوازی ہوتے ہیں۔

دیے ہوئے خط کے متوازی خط کھینچنا (To draw a line parallel to the given line)

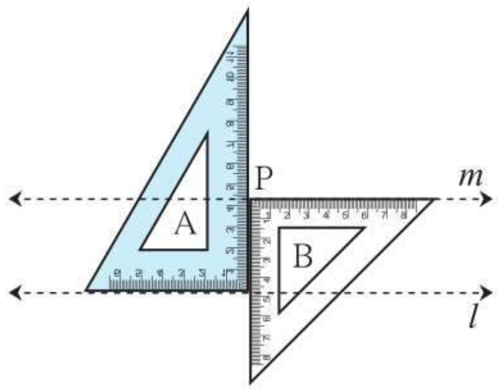
عمل (I) : دیے ہوئے خط کے باہر واقع نقطہ سے گنیا کی مدد سے دیے ہوئے خط کے متوازی خط کھینچنا۔

طریقہ I : عمل کے مراحل

(1) خط l کھینچیے۔

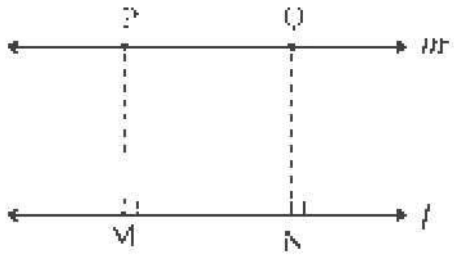
(2) خط l کے باہر ایک نقطہ P لیجیے۔

(3) شکل میں دکھائے ہوئے کے مطابق دو گنیا ایک دوسرے سے مَس کر کے رکھیے۔ گنیا A اور B کو پکڑ کر رکھیے۔ گنیا B کا کنارا نقطہ P پر ہے اس سرے (کنارے) پر خط کھینچیے۔



(4) اس خط کو m نام دیجیے۔

(5) خط m، خط l کے متوازی ہے۔



طریقہ II : عمل کے مراحل :

(1) خط l کھینچیے۔ اس خط کے باہر ایک نقطہ P لیجیے۔

(2) نقطہ P سے خط l پر خط PM ایک عمود کھینچیے۔

(3) خط l پر ایک دوسرا نقطہ N لیجیے۔

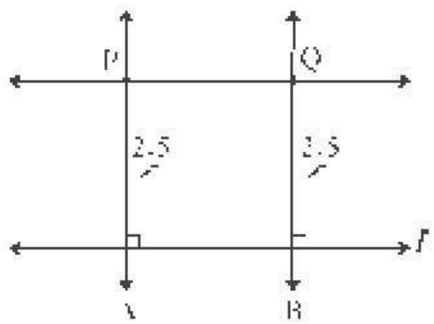
(4) نقطہ N سے ایک عمودی خط NQ، خط l پر کھینچیے۔

اس طرح کہ NQ = MP

(5) نقاط P اور Q سے گذرنے والا خط m دیے ہوئے خط l کے متوازی ہے۔

عمل (II) : دیے ہوئے خط سے دیے ہوئے فاصلہ پر متوازی خط کھینچنا۔

طریقہ : خط l سے 2.5 سم فاصلے پر متوازی خط کھینچیے۔



عمل کے مراحل :

(1) خط l کھینچیے۔

(2) خط l پر A اور B دونقاط لیجیے۔

(3) نقطہ A اورنقطہ B سے خط l پرعمود کھینچیے۔

(4) اس خط پر، نقطہ A اور نقطہ B سے 2.5 سم فاصلے پر
نقطہ P اور نقطہ Q لیجیے۔

(5) خط PQ کھینچیے۔

(6) خط PQ، خط l سے 2.5 سم فاصلے پر واقع متوازی خط ہے۔

مشقی سیٹ 2.3

1. خط l کھینچیے۔ اس خط کے باہر نقطہ A لیجیے۔ نقطہ A سے گذرنے والا اور خط l کے متوازی ایک خط کھینچیے۔

2. خط l کھینچیے۔ اس کے باہر نقطہ T لیجیے۔ نقطہ T سے گذرنے والا اور خط l کے متوازی ایک خط کھینچیے۔

,3 خط m کھینچیے اور اس خط سے 4 سم فاصلے سے متوازی خط n کھینچیے۔

جوابات کی فہرست

مشقی سیٹ 2.1 1. (1) $\angle w$ (2) $\angle x$ (3) $\angle y$ (4) $\angle z$ (5) $\angle x$ (6) $\angle r$

2. (1) $\angle c$ اور $\angle e$, $\angle b$ اور $\angle h$ (2) $\angle a$ اور $\angle e$, $\angle b$ اور $\angle f$, $\angle c$ اور $\angle g$, $\angle d$ اور $\angle h$

(3) $\angle c$ اور $\angle h$, $\angle b$ اور $\angle e$

مشقی سیٹ 2.2 1. (1) C (2) D 2. $\angle x = 140^\circ$, $\angle y = 110^\circ$

3. $\angle a = 100^\circ$, $\angle b = 80^\circ$, $\angle c = 80^\circ$

4. $\angle x = 105^\circ$, $\angle y = 105^\circ$, $\angle z = 75^\circ$ 5. $\angle x = 70^\circ$

D6477S

3 قوت نما اور جذر المکعب

آیئے ذرا یاد کریں

گذشتہ جماعت میں ہم نے قوت نما اور ان کے اصولوں کا مطالعہ کر چکے ہیں۔

- $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$، اس ضربی صورت میں دیے ہوئے عدد کو مختصراً 2^5 لکھتے ہیں۔

یہاں 2 اساس (قاعدہ) اور 5 قوت نما ہے۔ '2^5' یہ قوت نمائی عدد ہے۔

- قوت نما کے اصول : m اور n صحیح اعداد ہوں تو

(i) $a^m \times a^n = a^{m+n}$ (ii) $a^m \div a^n = a^{m-n}$ (iii) $(a \times b)^m = a^m \times b^m$ (iv) $a^0 = 1$

(v) $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$ (vi) $(a^m)^n = a^{mn}$ (vii) $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$ (viii) $\left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\frac{b}{a}\right)^m$

- قوت نماؤں کے اصول کا استعمال کر کے درج ذیل مثالوں میں خالی چوکونوں کو مناسب عدد سے پر کیجیے۔

(i) $3^5 \times 3^2 = 3^{\square}$ (ii) $3^7 \div 3^9 = 3^{\square}$ (iii) $(3^4)^5 = 3^{\square}$

(iv) $5^{-3} = \frac{1}{5^{\square}}$ (v) $5^0 = \square$ (vi) $5^1 = \square$

(vii) $(5 \times 7)^2 = 5^{\square} \times 7^{\square}$ (viii) $\left(\frac{5}{7}\right)^3 = \frac{\square^3}{\square^3}$ (ix) $\left(\frac{5}{7}\right)^{-3} = \left(\frac{\square}{\square}\right)^3$

آیئے سمجھ لیں

ناطق قوت نما والے اعداد کا مطلب (The number with rational index) :

(I) کسی عدد کا قوت نما $\frac{1}{n}$ ہو تو ایسے ناطق عدد کا مطلب

اعداد کا قوت نما $\frac{1}{2}$ ، $\frac{1}{3}$ ، $\frac{1}{5}$ ، ....، $\frac{1}{n}$ ، صورت میں ہو تو ایسے ناطق اعداد کا مطلب سمجھیں گے۔

کسی عدد کا مربع ظاہر کرنے کے لیے اس کا قوت نما 2 لکھتے ہیں اور عدد کے جذر المربع کو ظاہر کرنے کے لیے اس کی قوت نما $\frac{1}{2}$ لکھتے ہیں۔

مثلاً 25 کے جذر المربع کو '$\sqrt{\ }$' جذر کی علامت کا استعمال کر کے ہم $\sqrt{25}$ لکھتے ہیں۔

قوت نما کا استعمال کر کے اس عدد کو $25^{\frac{1}{2}}$ لکھتے ہیں۔ لہٰذا $\sqrt{25} = 25^{\frac{1}{2}}$

عام طور پر عدد a کے مربع کو a^2 لکھتے ہیں تو a کے جذر المربع کو $\sqrt[2]{a}$ یا $\sqrt{a}$ یا $a^{\frac{1}{2}}$ لکھتے ہیں۔

اسی طرح عدد a کے مکعب کو a^3 لکھتے ہیں تو a جذر المکعب $\sqrt[3]{a}$ یا $a^{\frac{1}{3}}$ لکھتے ہیں۔

جیسے، $4^3 = 4 \times 4 \times 4 = 64$

$\therefore$ 64 کے جذرالمکعب کو $\sqrt[3]{64}$ یا $(64)^{\frac{1}{3}}$ لکھتے ہیں۔ ذہن نشین رکھیے کہ $64^{\frac{1}{3}} = 4$

$3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^5 = 243$ یعنی 3 کی 5ویں قوت 243 ہے۔

اس کے برعکس 243 کے پانچویں جذر کو $(243)^{\frac{1}{5}}$ یا $\sqrt[5]{243}$ لکھتے ہیں۔

$$\therefore\ (243)^{\frac{1}{5}} = 3$$

عام طور پر a کے n ویں جذر کو $a^{\frac{1}{n}}$ لکھتے ہیں۔ مثلاً

(i) $128^{\frac{1}{7}}$ = 128 کا 7واں جذر (ii) $900^{\frac{1}{12}}$ = 900 کا 12واں جذر

ذہن نشین رکھیے کہ $x^5 = 10$ ہو تو $10^{\frac{1}{5}} = x$

مشقی سیٹ 3.1

1. قوت نما کا استعمال کر کے ذیل کے عدد لکھیے۔

(1) 13 کا 5واں جذر (2) 9 کا چھٹا جذر (3) 256 کا جذرالمربع

(4) 17 کا جذرالمکعب (5) 100 کا آٹھواں جذر (6) 30 کا ساتواں جذر

2. درج ذیل قوت نمائی عدد، کس عدد کا کون سا جذر ہے۔ اسے لکھیے۔

(1) $(81)^{\frac{1}{4}}$ (2) $49^{\frac{1}{2}}$ (3) $(15)^{\frac{1}{5}}$ (4) $(512)^{\frac{1}{9}}$ (5) $100^{\frac{1}{19}}$ (6) $(6)^{\frac{1}{7}}$

(I) کسی عدد کا قوت نما $\frac{m}{n}$ ہو تو ایسے ناطق عدد کا مطلب

ہم جانتے ہیں کہ، $8^2 = 64$،

64 کا جذرالمکعب $= (64)^{\frac{1}{3}} = (8^2)^{\frac{1}{3}} = 4$

اسی طرح، $\therefore$ 8 کے مربع کا جذرالمکعب $= 4$ ... (I)

8 کا جذرالمکعب $= 8^{\frac{1}{3}} = 2$

$\therefore$ 8 کے جذرالمکعب کا مربع $= \left(8^{\frac{1}{3}}\right)^2 = 2^2 = 4$ ... (II)

(I) اور (II) کی مدد سے،

8 کے جذرالمکعب کا مربع = 8 کے مربع کا جذرالمکعب

یعنی $(8^2)^{\frac{1}{3}} = \left(8^{\frac{1}{3}}\right)^2$ سمجھ میں آتا ہے۔

قوت نما صحیح عدد ہو تو جو قوت نما کے اصول ہیں وہی اصول ناطق قوت نما والے اعداد کے لیے بھی ہیں۔

اس لیے $(a^m)^n = a^{mn}$، اصول استعمال کر کے $(8^2)^{\frac{1}{3}} = \left(8^{\frac{1}{3}}\right)^2 = 8^{\frac{2}{3}}$

اس بنا پر $8^{\frac{2}{3}}$ کا مطلب دو طرح بتا سکتے ہیں۔

(i) $8^{\frac{2}{3}} = (8^2)^{\frac{1}{3}}$ = 8 کے مربع کا جذرالمکعب (ii) $8^{\frac{2}{3}} = \left(8^{\frac{1}{3}}\right)^2$ = 8 کے جذرالمکعب کا مربع

اسی طرح $(27^4)^{\frac{1}{5}} = 27^{\frac{4}{5}}$ یعنی 27 کی چوتھی قوت کا پانچواں جذر اور $27^{\frac{4}{5}} = \left(27^{\frac{1}{5}}\right)^4$ یعنی 27 کے 5 ویں جذر کی چوتھی قوت، اس طرح دو مطلب ہوتے ہیں۔

عام طور پر $a^{\frac{m}{n}}$ کا مطلب دو طرح سے ظاہر کیا جا سکتا ہے۔

a کی m ویں قوت کا n واں جذر $= (a^m)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{m}{n}}$

'یا'، a کے n ویں جذر کی m ویں قوت $a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m$

مشقی سیٹ 3.2

.1 درج ذیل جدول مکمل کیجیے۔

نمبر شمار	عدد	کس جذر کی کون سی قوت	کس قوت کا کون سا جذر
(1)	$(225)^{\frac{3}{2}}$	225 کے جذر المربع کا مکعب	225 کے مکعب کا جذر المربع
(2)	$(45)^{\frac{4}{5}}$		
(3)	$(81)^{\frac{6}{7}}$		
(4)	$(100)^{\frac{4}{10}}$		
(5)	$(21)^{\frac{3}{7}}$		

.2 ناطق قوت نما کی صورت میں ظاہر کیجیے۔

(1) 121 کے پانچویں قوت کا جذر المربع (2) 324 کے چوتھے جذر المربع کا مکعب

(3) 264 کے مربع کا پانچواں جذر (4) 3 کے جذر المکعب کا مکعب

آیئے ذرا یاد کریں

- $4 \times 4 = 16$ یعنی $4^2 = 16$ اسی طرح $(-4) \times (-4) = (-4)^2 = 16$ یعنی 16 کا ایک مثبت اور دوسرا منفی، یعنی دو جذر المربع ہیں۔

ایسا فرض کر لیا گیا ہے کہ 16 کا مثبت جذر المربع $\sqrt{16}$ اور 16 کا منفی جذر المربع $-\sqrt{16}$ سے ظاہر کرتے ہیں۔ $\sqrt{16} = 4$ اور $-\sqrt{16} = -4$

- ہر مثبت عدد کے دو جذر المربع ہوتے ہیں۔
- عدد صفر کا جذر المربع صفر ہوتا ہے۔

آیئے سمجھ لیں

مکعب اور جذرالمکعب (Cube and Cube Root)

کسی عدد کو تین مرتبہ لے کر ان کی ضرب کریں تو حاصل ضرب، اس عدد کا مکعب ہوتا ہے۔ مثلاً $6^3 = 6 \times 6 \times 6$ یعنی 6 کا مکعب 216 ہے۔

ناطق اعداد کا مکعب کرنا :

مثال (1) : 17 کا مکعب کیجیے۔

$$17^3 = 17 \times 17 \times 17$$
$$= 4913$$

مثال (2) : (-6) کا مکعب کیجیے۔

$$(-6)^3 = (-6) \times (-6) \times (-6)$$
$$= -216$$

مثال (3) : $\left(-\frac{2}{5}\right)$ کا مکعب کیجیے۔

$$\left(-\frac{2}{5}\right)^3 = \left(-\frac{2}{5}\right) \times \left(-\frac{2}{5}\right) \times \left(-\frac{2}{5}\right)$$
$$= -\frac{8}{125}$$

مثال (4) : (1.2) کا مکعب کیجیے۔

$$(1.2)^3 = 1.2 \times 1.2 \times 1.2$$
$$= 1.728$$

مثال (5) : (0.02) کا مکعب کیجیے۔

$$(0.02)^3 = 0.02 \times 0.02 \times 0.02$$
$$= 0.000008$$

آیئے غور کریں

مثال (1) میں 17 مثبت عدد ہے۔ اس عدد کا مکعب 4913 بھی مثبت ہے۔

مثال (2) میں 6– کا مکعب 216– ہے۔ مزید کچھ مثبت اور منفی عدد لے کر ان کا مکعب کر کے دیکھیے۔ اس کی مدد سے کسی عدد کی علامت اور اس عدد کے مکعب کی علامت کے درمیان جو تعلق دکھائی دیتا ہے اسے معلوم کیجیے۔

مثال (4) اور (5) میں دیے ہوئے اعداد میں عشری علامت کے بعد آنے والے ہندسوں کی تعداد اور اس عدد کے مکعب میں آنے والی عشری علامت کے بعد کے ہندسوں کی تعداد میں کون سا تعلق پایا جاتا ہے؟

جذرالمکعب معلوم کرنا

ہم دیے ہوئے عدد کے مفرد اجزائے ضربی کے طریقے سے جذرالمربع معلوم کرنا سیکھ چکے ہیں، اسی طریقے سے جذرالمکعب معلوم کریں گے۔

مثال (1) : 216 کا جذرالمکعب معلوم کیجیے۔

حل : پہلے 216 کے مفرد اجزائے ضربی معلوم کریں گے۔

$$216 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3$$

3 اور 2 جزو ضربی ہر ایک 3 مرتبہ آئے ہیں، لہٰذا ان کو ایک-ایک مرتبہ لے کر ذیل کے مطابق گروہ بنائیں گے۔

$$\therefore\ 216 = (3 \times 2) \times (3 \times 2) \times (3 \times 2) = (3 \times 2)^3 = 6^3$$

$\therefore\ \sqrt[3]{216} = 6$ یعنی $(216)^{\frac{1}{3}} = 6$

مثال (2) : 1331– کا جذرالمکعب معلوم کیجیے۔

حل : 1331– کا جذرالمکعب معلوم کرنے کے لیے پہلے 1331 کا مفرد اجزائے ضربی معلوم کریں گے۔

$$1331 = 11 \times 11 \times 11 = 11^3$$

$$-1331 = (-11) \times (-11) \times (-11)$$

$$= (-11)^3$$

$$\therefore \sqrt[3]{-1331} = -11$$

مثال (4) : $\sqrt[3]{0.125}$ معلوم کیجیے۔

حل :

$$\sqrt[3]{0.125} = \sqrt[3]{\frac{125}{1000}}$$

$$= \frac{\sqrt[3]{125}}{\sqrt[3]{1000}} \quad \cdots \left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$$

$$= \frac{\sqrt[3]{5^3}}{\sqrt[3]{10^3}} \quad \cdots \left(a^m\right)^{\frac{1}{m}} = a$$

$$= \frac{5}{10} \quad = 0.5$$

مثال (3) : 1728 کا جذرالمکعب معلوم کیجیے۔

حل :

$$1728 = 8 \times 216 = 2 \times 2 \times 2 \times 6 \times 6 \times 6$$

$$\therefore 1728 = 2^3 \times 6^3 = (2 \times 6)^3 \quad \ldots \mid \because a^m \times b^m = (a \times b)^m$$

$$\therefore \sqrt[3]{1728} = 2 \times 6 = 12$$

(ذہن نشین کیجیے کہ 1728– کا جذرالمکعب 12– آتا ہے۔)

مشقی سیٹ 3.3

.1 درج ذیل اعداد کا جذرالمکعب معلوم کیجیے۔

(1) 8000 (2) 729 (3) 343 (4) -512 (5) -2744 (6) 32768

.2 حل کیجیے : (1) $\sqrt[3]{\frac{27}{125}}$ (2) $\sqrt[3]{\frac{16}{54}}$

.3 اگر $\sqrt[3]{729} = 9$ ہوتو $\sqrt[3]{0.000729}$ = کتنا ؟

جوابات کی فہرست

مشقی سیٹ 3.1 : **1.** (1) $13^{\frac{1}{5}}$ (2) $9^{\frac{1}{6}}$ (3) $256^{\frac{1}{2}}$ (4) $17^{\frac{1}{3}}$ (5) $100^{\frac{1}{8}}$ (6) $30^{\frac{1}{7}}$

2. (1) 81 کا چوتھا جذر (2) 49 کا جذرالمربع (3) 15 کا پانچواں جذر

(4) 512 کا نواں جذر (5) 100 کا انیسواں جذر (6) 6 کا ساتواں جذر

مشقی سیٹ 3.2 : .1 (2) 45 کے پانچویں جذر کی چوتھی قوت، 45 کی چوتھی قوت کا پانچواں جذر

(3) 81 کے ساتویں جذر کی چھٹی قوت، 81 کی چھٹی قوت کا ساتواں جذر

(4) 100 کے 10ویں جذر کی چوتھی قوت، 100 کی چوتھی قوت کا دسواں جذر

(5) 21 کے ساتویں جذر کی تیسری قوت، 21 کی تیسری قوت کا ساتواں جذر

2. (1) $(121)^{\frac{5}{2}}$ (2) $(324)^{\frac{3}{4}}$ (3) $(264)^{\frac{2}{5}}$ (4) $3^{\frac{3}{3}}$

مشقی سیٹ 3.3 : 1. (1) 20 (2) 9 (3) 7 (4) -8 (5) -14 (6) 32

2. (1) $\frac{3}{5}$ (2) $\frac{2}{3}$ 3. 0.09

D6D39F

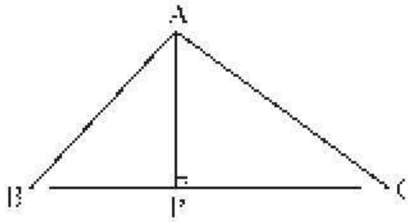
4 مثلث کا ارتفاع اور وسطانیہ

آیئے ذرا یاد کریں

گذشتہ جماعت میں ہم مطالعہ کر چکے ہیں کہ مثلث کے تینوں زاویوں کے ناصف متراکز ہوتے ہیں، مثلث کے اضلاع کے عمودی ناصف متراکز ہوتے ہیں۔ ہمیں یہ بھی معلوم ہے کہ ان کے نقطۂ تراکز کو بالترتیب داخلی مرکز اور حائط مرکز کہتے ہیں۔

عملی کام : ایک خط کھینچیے۔ خط کے باہر کوئی بھی ایک نقطہ لیجیے۔ گنیے کی مدد سے اس نقطے سے خط پر عمود کھینچیے۔

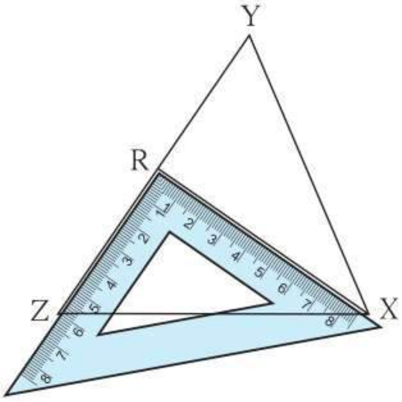
آیئے سمجھ لیں



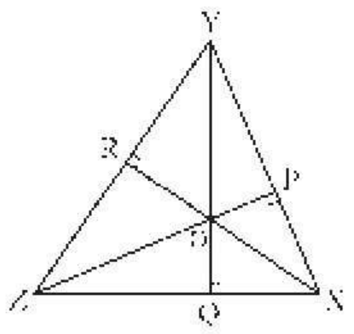
ارتفاع (Altitude)

مثلث کے کسی بھی راس سے اس کے مقابل کے ضلع پر کھینچے گئے عمودی قطعہ خط کو اس مثلث کا ارتفاع کہتے ہیں۔ $\triangle ABC$ میں قطعہ AP قاعدہ BC پر ارتفاع ہے۔

مثلث کا ارتفاع کھینچنا :



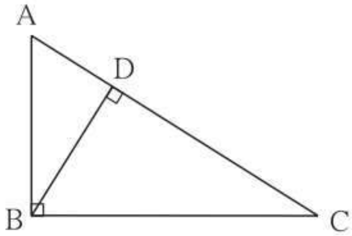
1. $\triangle XYZ$ کوئی ایک مثلث بنایئے۔
2. قاعدہ YZ کے مقابل کے راس X سے گنیا کی مدد سے عمود کھینچیے۔ وہ YZ کو جس مقام پر قطع کرتا ہے اس نقطہ کو R نام دیجیے۔ قطعہ XR، قاعدہ YZ پر ارتفاع ہے۔
3. قطعہ XZ کو قاعدہ تصور کریں اور اس کے مقابل کے راس Y سے قطعہ XZ پر عمود کھینچیں تب قطعہ $YQ \perp$ قطعہ XZ
4. خط XY کو قاعدہ لیں اور اس کے مقابل کے راس Z سے خط XY پر عمود کھینچیں تب قطعہ $ZP \perp$ قطعہ XY



قطعہ XR، قطعہ YQ، قطعہ ZP یہ تینوں $\triangle XYZ$ کے ارتفاع ہیں۔

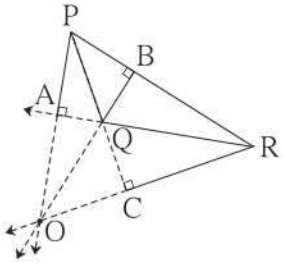
اسے ذہن نشین رکھیے کہ تینوں ارتفاع متراکز ہیں۔ اس نقطۂ تراکز کو ارتفاعوں کا نقطۂ تراکز یا ارتفاعی تراکز کہتے ہیں۔ ارتفاعی تراکز کو 'O' حرف سے ظاہر کرتے ہیں۔

مثلث کے ارتقاعی مرکز کا مقام :



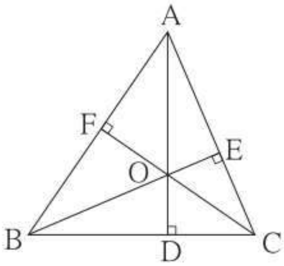
عملی کام I :

کوئی بھی ایک قائمۃ الزاویہ مثلث بنائیے۔اس کے تمام ارتفاع کھینچیے۔ وہ کس نقطہ پر ملتے ہیں،اسے لکھیے۔



عملی کام II :

کوئی بھی ایک منفرجۃ الزاویہ مثلث بنائیے۔اس کے تینوں ارتفاع کھینچیے۔ وہ ایک دوسرے کو کہاں ملتے ہیں؟ ان ارتفاعوں کو شامل کرنے والے خطوط کھینچیے۔اس بات کا مشاہدہ کیجیے کہ وہ مثلث کے بیرونی حصے میں واقع ایک نقطے سے گذرتے ہیں۔



عملی کام III :

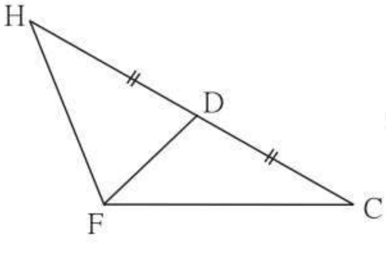
$\triangle ABC$ ایک حادۃ الزاویہ مثلث بنائیے۔اس کے تمام ارتفاع کھینچیے۔اس بات کا مشاہدہ کیجیے کہ ارتقاعی تراکز کا مقام کہاں ہے۔

یہ میری سمجھ میں آگیا

مثلث کے ارتفاع ایک ہی نقطے سے گذرتے ہیں یعنی ارتفاع متراکز (Concurrent) ہوتے ہیں۔ان کے نقطۂ تراکز کو ارتفاعی مرکز یا مرکزِ ارتفاع (Orthocenter) کہتے ہیں۔اسے 'O' حرف سے ظاہر کرتے ہیں۔

- قائمۃ الزاویہ مثلث کا نقطۂ تراکز یعنی مرکز ارتفاع قائمہ زاویہ بنانے والے راس پر ہوتا ہے۔
- منفرجۃ الزاویہ مثلث کا نقطۂ تراکز یعنی مرکز ارتفاع اس مثلث کے بیرون میں واقع ہوتا ہے۔
- حادۃ الزاویہ مثلث کا نقطۂ تراکز یعنی مرکز ارتفاع مثلث کے اندرون میں واقع ہوتا ہیں۔

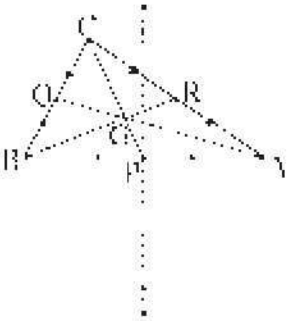
آئیے سمجھ لیں



وسطانیہ (Median)

مثلث کا راس اور مقابل کے ضلع کے وسطی نقطے کو ملانے والے قطعہ خط کو مثلث کے اس ضلع کا وسطانیہ کہتے ہیں۔ $\triangle HCF$ میں قطعہ FD، ضلع HC کا وسطانیہ ہے۔

مثلث کا وسطانیہ کھینچنا :



1. $\triangle ABC$ بنائیے۔
2. ضلع AB کا وسطی نقطہ حاصل کیجیے اسے P نام دیجیے قطعہ CP کھینچیے۔
3. ضلع BC کا وسطی نقطہ حاصل کیجیے اسے Q نام دیجیے قطعہ AQ کھینچیے۔
4. ضلع AC کا وسطی نقطہ حاصل کیجیے اسے R کا نام دیجیے۔ قطعہ BR کھینچیے۔

$\triangle ABC$ کے قطعہ CP، قطعہ AQ، قطعہ BR وسطانیے ہیں۔ ذہن نشین رکھیے کہ یہ متراکز ہیں۔ ان کے نقطۂ تراکز کو ہندسی مرکز کہتے ہیں۔ اسے G حرف سے ظاہر کرتے ہیں۔

عملی کام IV : ایک قائمۃ الزاویہ مثلث، ایک منفرجۃ الزاویہ مثلث اور ایک حادۃ الزاویہ مثلث بنا کر ان کے وسطانیے کھینچیے۔ مشاہدہ کیجیے کہ وہ متراکز ہیں۔

مثلث کے وسطانیوں کے ہندسی مرکز کی خصوصیت :

- $\triangle ABC$ کوئی بھی ایک بڑا مثلث بنائیے۔
- $\triangle ABC$ کے قطعہ AR، قطعہ CP اور قطعہ BQ وسطانیے کھینچیے۔ ہندسی مرکز کو G نام دیجیے۔

شکل میں قطعات خط کی لمبائی ناپ کر جدول کے خالی چوکون پر کیجیے۔

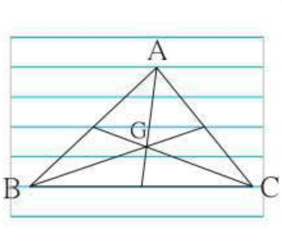
$l(AG) = \square$	$l(GR) = \square$	$l(AG) : l(GR) = \square$
$l(BG) = \square$	$l(GQ) = \square$	$l(BG) : l(GQ) = \square$
$l(CG) = \square$	$l(GP) = \square$	$l(CG) : l(GP) = \square$

نتیجہ اخذ کیجیے کہ یہ تمام نسبتیں تقریباً $2 : 1$ ہیں۔

یہ میری سمجھ میں آ گیا

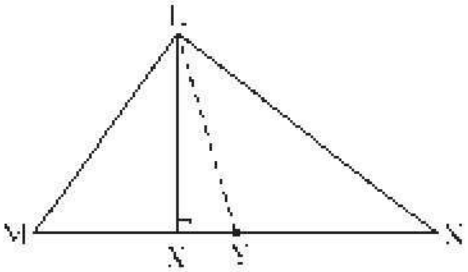
مثلث کے وسطانیے متراکز ہوتے ہیں۔ ان کے نقطۂ تراکز کو ہندسی مرکز (Centroid) کہتے ہیں۔ اسے G حرف سے ظاہر کرتے ہیں۔
کسی بھی مثلث میں G کا مقام مثلث کے اندرون میں واقع ہوتا ہے۔
نقطۂ تراکز یعنی ہندسی مرکز ہر وسطانیے کو $2 : 1$ کی نسبت میں تقسیم کرتا ہے۔

آیئے بحث کریں



ایک طالب علم نے بیاض کے کاغذ پر پانچ متوازی خطوط کی مدد سے $\triangle ABC$ بنایا۔ متصلہ شکل کے مطابق اس نے ہندسی مرکز G معلوم کیا۔ بتائیے کہ اس نے G کا جو مقام معلوم کیا وہ کس طرح صحیح ہے؟

مشقی سیٹ 4.1



.1 $\triangle LMN$ میں .... ارتفاع ہے اور .... وسطانیہ ہے۔
(خالی جگہ میں مناسب قطعہ خط کے نام لکھیے)

.2 $\triangle PQR$ ایک حادۃ الزاویہ مثلث بنائیے اور اس کے تینوں ارتفاع کھینچیے۔ نقطۂ تراکز کو 'O' نام دیجیے۔

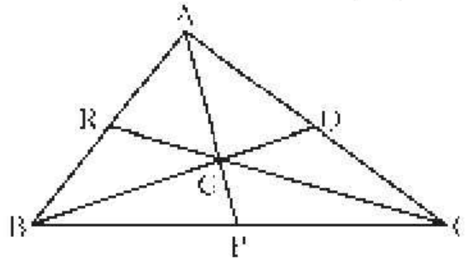
.3 $\triangle STV$ ایک منفرجۃ الزاویہ مثلث بنائیے اور اس کے وسطانیے کھینچ کر ہندسی مرکز بتائیے۔

.4 $\triangle LMN$ ایک منفرجۃ الزاویہ مثلث بنائیے اور اس کے تمام ارتفاع کھینچیے۔ نقطۂ تراکز کو 'O' نام دیجیے۔

.5 $\triangle XYZ$ ایک قائمۃ الزاویہ مثلث بنائیے اس کے وسطانیے کھینچیے اور نقطۂ تراکز کو 'G' سے ظاہر کیجیے۔

.6 کوئی بھی ایک متساوی الساقین مثلث کھینچیے۔ اس کے تمام وسطانیے اور تمام ارتفاع کھینچیے۔ ان کے نقطۂ تراکز کے بارے میں اپنا مشاہدہ درج کیجیے۔

.7 خالی جگہ پر کیجیے۔



$\triangle ABC$ کا G ہندسی مرکز ہے۔

اگر $l(RG) = 2.5$ ہو تو $l(GC) =$ ....

اگر $l(BG) = 6$ ہو تو $l(BQ) =$ ....

اگر $l(AP) = 6$ ہو تو $l(AG) =$ .... اور $l(GP) =$ ....

اسے کیجیے

(I) کوئی بھی ایک متساوی الاضلاع مثلث بنائیے۔ اس مثلث کا حائط مرکز (C)، داخلی مرکز (I)، ہندسی مرکز (G) اور ارتفاعی مرکز (O) معلوم کیجیے۔ مشاہدات درج کیجیے۔

(II) کوئی بھی ایک متساوی الساقین مثلث بنائیے۔ دیکھیے کہ اس کے ہندسی مرکز، ارتفاعی مرکز، حائط مرکز اور داخلی مرکز ہم خطی ہیں۔ اس کی تصدیق کیجیے۔

جوابات کی فہرست

مشقی سیٹ 4.1 : **1.** قطعہ LX اور قطعہ LY **7.** (1) 5 (2) 9 (3) 4, 2

❑❑❑

D6LYB3

5 توسیعی ضابطے

آیئے ذرا یاد کریں

گذشتہ جماعت میں ہم درج ذیل توسیعی ضابطوں کا مطالعہ کر چکے ہیں۔

(i) $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. (ii) $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

(iii) $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

مذکورہ بالا ضابطوں کا استعمال کر کے درج ذیل خالی چوکونوں میں مناسب رکن لکھیے۔

(i) $(x + 2y)^2 = x^2 + \boxed{} + 4y^2$

(ii) $(2x - 5y)^2 = \boxed{} - 20xy + \boxed{}$

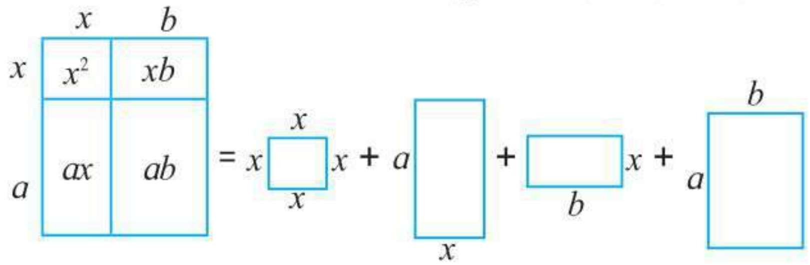
(iii) $(101)^2 = (100 + 1)^2 = \boxed{} + \boxed{} + 1^2 = \boxed{}$

(iv) $(98)^2 = (100 - 2)^2 = 10000 - \boxed{} + \boxed{} = \boxed{}$

(v) $(5m + 3n)(5m - 3n) = \boxed{} - \boxed{} = \boxed{} - \boxed{}$

آیئے سمجھ لیں

عملی کام : مستطیل اور مربع کے رقبوں کی مدد سے $(x + a)(x + b)$ کی توسیع کیجیے۔



$(x + a)(x + b) = x^2 + ax + bx + ab$

$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$

(I) $(x + a)(x + b)$ کی توسیع : [Expansion of $(x + a)(x + b)$]

$(x + a)$ اور $(x + b)$ یہ ایک مساوی متغیر کی دو رکنیاں ہیں۔ ان دو رکنیوں کا ضرب کریں گے۔

$$(x + a)(x + b) = x(x + b) + a(x + b) = x^2 + bx + ax + ab$$

$$= x^2 + (a + b)x + ab$$

$\therefore$ $\boxed{(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab}$

مثال (1) $(x + 2)(x + 3) = x^2 + (2 + 3)x + (2 \times 3) = x^2 + 5x + 6$

مثال (2) $(y + 4)(y - 3) = y^2 + (4 - 3)y + (4) \times (-3) = y^2 + y - 12$

مثال (3) $(2a + 3b)(2a - 3b) = (2a)^2 + [(3b) + (-3b)]2a + [3b \times (-3b)]$

$$= 4a^2 + 0 \times 2a - 9b^2 = 4a^2 - 9b^2$$

مثال (4) $\left(m + \frac{3}{2}\right)\left(m + \frac{1}{2}\right) = m^2 + \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\right)m + \frac{3}{2} \times \frac{1}{2} = m^2 + 2m + \frac{3}{4}$

مثال (5) $(x - 3)(x - 7) = x^2 + (-3 - 7)x + (-3)(-7) = x^2 - 10x + 21$

مشقی سیٹ 5.1

.1 توسیع کیجیے :

(1) $(a + 2)(a - 1)$ (2) $(m - 4)(m + 6)$ (3) $(p + 8)(p - 3)$

(4) $(13 + x)(13 - x)$ (5) $(3x + 4y)(3x + 5y)$ (6) $(9x - 5t)(9x + 3t)$

(7) $\left(m + \frac{2}{3}\right)\left(m - \frac{7}{3}\right)$ (8) $\left(x - \frac{1}{5}\right)\left(x - \frac{1}{6}\right)$ (9) $\left(\frac{1}{x} + 4\right)\left(\frac{1}{x} - 9\right)$

آیئے سمجھ لیں

(II) $(a + b)^3$ کی توسیع [Expansion of $(a + b)^3$] :

$$(a + b)^3 = (a + b)(a + b)(a + b) = (a + b)(a + b)^2$$

$$= (a + b)(a^2 + 2ab + b^2)$$

$$= a(a^2 + 2ab + b^2) + b(a^2 + 2ab + b^2)$$

$$= a^3 + 2a^2b + ab^2 + ba^2 + 2ab^2 + b^3$$

$$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$\therefore \boxed{(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3}$$

اس توسیعی ضابطے کا استعمال کرکے حل کردہ کچھ مثالوں کا مطالعہ کریں گے۔

مثال 1 : $(x + 3)^3$

ہم جانتے ہیں کہ $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

یہاں $a = x$ اور $b = 3$ ہے۔

$$\therefore (x+3)^3 = (x)^3 + 3 \times x^2 \times 3 + 3 \times x \times (3)^2 + (3)^3$$

$$= x^3 + 9x^2 + 27x + 27$$

مثال (2) $\quad (3x+4y)^3 = (3x)^3 + 3(3x)^2(4y) + 3(3x)(4y)^2 + (4y)^3$

$$= 27x^3 + 3 \times 9x^2 \times 4y + 3 \times 3x \times 16y^2 + 64y^3$$

$$= 27x^3 + 108x^2y + 144xy^2 + 64y^3$$

مثال (3) $\quad \left(\frac{2m}{n} + \frac{n}{2m}\right)^3 = \left(\frac{2m}{n}\right)^3 + 3\left(\frac{2m}{n}\right)^2\left(\frac{n}{2m}\right) + 3\left(\frac{2m}{n}\right)\left(\frac{n}{2m}\right)^2 + \left(\frac{n}{2m}\right)^3$

$$= \frac{8m^3}{n^3} + 3\left(\frac{4m^2}{n^2} \times \frac{n}{2m}\right) + 3\left(\frac{2m}{n} \times \frac{n^2}{4m^2}\right) + \frac{n^3}{8m^3}$$

$$= \frac{8m^3}{n^3} + \frac{6m}{n} + \frac{3n}{2m} + \frac{n^3}{8m^3}$$

مثال (4) $\quad (41)^3 = (40+1)^3 = (40)^3 + 3 \times (40)^2 \times 1 + 3 \times 40 \times (1)^2 + (1)^3$

$$= 64000 + 4800 + 120 + 1 \quad = 68921$$

مشقی سیٹ 5.2

.1 توسیع کیجیے۔

(1) $(k+4)^3$ (2) $(7x+8y)^3$ (3) $(7+m)^3$ (4) $(52)^3$

(5) $(101)^3$ (6) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^3$ (7) $\left(2m+\frac{1}{5}\right)^3$ (8) $\left(\frac{5x}{y}+\frac{y}{5x}\right)^3$

عملی کام : a اور b مناسب لمبائی کے کناروں (ضلعے) والا ہرایک کا ایک مکعب بنائیے۔ لمبائی اور چوڑائی دونوں a اوراونچائی b والے 3 مستطیلی منشور (مکعب نما)، اسی طرح لمبائی اور چوڑائی دونوں b اوراونچائی a والے 3 مستطیلی منشور بنائیے۔ ان اجسام کو مناسب ترتیب دے کر $(a+b)$ ضلعے والا ایک مکعب تیار کیجیے۔

آیئے سمجھ لیں

(III) $(a-b)^3$ کی توسیع [Expansion of $(a-b)^3$] :

$$(a-b)^3 = (a-b)(a-b)(a-b) = (a-b)(a-b)^2$$

$$= (a-b)(a^2 - 2ab + b^2)$$

$$= a(a^2 - 2ab + b^2) - b(a^2 - 2ab + b^2)$$

$$= a^3 - 2a^2b + ab^2 - a^2b + 2ab^2 - b^3$$
$$= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$
$$\therefore \quad \boxed{(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3}$$

مثال 1 : توسیع کیجیے $(x-2)^3$

ہم جانتے ہیں کہ $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

یہاں $a = x$ اور $b = 2$ لے کر

$$(x-2)^3 = (x)^3 - 3 \times x^2 \times 2 + 3 \times x \times (2)^2 - (2)^3$$
$$= x^3 - 6x^2 + 12x - 8$$

مثال 2 : $(4p-5q)^3$ کی توسیع کیجیے۔

$$(4p-5q)^3 = (4p)^3 - 3(4p)^2(5q) + 3(4p)(5q)^2 - (5q)^3$$
$$(4p-5q)^3 = 64p^3 - 240p^2q + 300pq^2 - 125q^3$$

مثال 3 : توسیعی ضابطے کا استعمال کر کے 99 کا مکعب معلوم کیجیے۔

$$(99)^3 = (100-1)^3$$
$$(99)^3 = (100)^3 - 3 \times (100)^2 \times 1 + 3 \times 100 \times (1)^2 - 1^3$$
$$= 1000000 - 30000 + 300 - 1 = 9,70,299$$

مثال 4 : آسان کیجیے۔

(i) $(p+q)^3 + (p-q)^3$
$$= p^3 + 3p^2q + 3pq^2 + q^3 + p^3 - 3p^2q + 3pq^2 - q^3$$
$$= 2p^3 + 6pq^2$$

(ii) $(2x+3y)^3 - (2x-3y)^3$
$$= [(2x)^3 + 3(2x)^2(3y) + 3(2x)(3y)^2 + (3y)^3]$$
$$- [(2x)^3 - 3(2x)^2(3y) + 3(2x)(3y)^2 - (3y)^3]$$
$$= (8x^3 + 36x^2y + 54xy^2 + 27y^3) - (8x^3 - 36x^2y + 54xy^2 - 27y^3)$$
$$= 8x^3 + 36x^2y + 54xy^2 + 27y^3 - 8x^3 + 36x^2y - 54xy^2 + 27y^3$$
$$= 72x^2y + 54y^3$$

یہ میری سمجھ میں آگیا

(i) $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$

(ii) $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a-b)$

مشقی سیٹ 5.3

.1 توسیع کیجیے۔

(1) $(2m-5)^2$ (2) $(4-p)^2$ (3) $(7x-9y)^2$ (4) $(58)^2$

(5) $(198)^2$ (6) $\left(2p-\frac{1}{2p}\right)^2$ (7) $\left(1-\frac{1}{a}\right)^2$ (8) $\left(\frac{x}{3}-\frac{3}{x}\right)^2$

.2 مختصر کیجیے۔

(1) $(2a+b)^2-(2a-b)^2$ (2) $(3r-2k)^2+(3r+2k)^2$

(3) $(4a-3)^2-(4a+3)^2$ (4) $(5x-7y)^2+(5x+7y)^2$

آیئے سمجھ لیں

(IV) $(a+b+c)^2$ کی توسیع [Expansion of $(a+b+c)^2$] :

$$
\begin{aligned}
(a+b+c)^2 &= (a+b+c)\times(a+b+c)\\
&= a(a+b+c)+b(a+b+c)+c(a+b+c)\\
&= a^2+ab+ac+ab+b^2+bc+ac+bc+c^2\\
&= a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac
\end{aligned}
$$

$$\therefore \boxed{(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac}$$

ضابطہ حاصل ہوتا ہے۔

مثال 1 : $(p+q+3)^2$ کی توسیع کیجیے۔

$= p^2+q^2+(3)^2+2\times p\times q+2\times q\times 3+2\times p\times 3$

$= p^2+q^2+9+2pq+6q+6p \qquad = p^2+q^2+2pq+6q+6p+9$

مثال 2 : مربعی توسیع کے مرحلوں کے چوکونوں میں مناسب رکن لکھیے۔

$(2p+3m+4n)^2$

$= (2p)^2+(3m)^2+\boxed{}+2\times 2p\times 3m+2\times\boxed{}\times 4n+2\times 2p\times\boxed{}$

$= \boxed{}+9m^2+\boxed{}+12pm+\boxed{}+\boxed{}$

مثال 3 : مختصر کیجیے۔

$(l+2m+n)^2+(l-2m+n)^2$

$= l^2+4m^2+n^2+4lm+4mn+2ln+l^2+4m^2+n^2-4lm-4mn+2ln$

$= 2l^2+8m^2+2n^2+4ln$

مشقی سیٹ 5.4

1. توسیع کیجیے۔

(1) $(2p + q + 5)^2$ (2) $(m + 2n + 3r)^2$

(3) $(3x + 4y - 5p)^2$ (4) $(7m - 3n - 4k)^2$

2. مختصر کیجیے۔

(1) $(x - 2y + 3)^2 + (x + 2y - 3)^2$

(2) $(3k - 4r - 2m)^2 - (3k + 4r - 2m)^2$ (3) $(7a - 6b + 5c)^2 + (7a + 6b - 5c)^2$

جوابات کی فہرست

مشقی سیٹ 5.1 (1) $a^2 + a - 2$ (2) $m^2 + 2m - 24$ (3) $p^2 + 5p - 24$

(4) $169 - x^2$ (5) $9x^2 + 27xy + 20y^2$ (6) $81x^2 - 18xt - 15t^2$

(7) $m^2 - \frac{5}{3}m - \frac{14}{9}$ (6) $x^2 - \frac{1}{x^2}$ (9) $\frac{1}{x^2} + \frac{5}{x} - 36$

مشقی سیٹ 5.2 (1) $k^3 + 12k^2 + 48k + 64$ (2) $343x^3 + 1176x^2y + 1344xy^2 + 512y^3$

(2) $343 + 147m + 21m^2 + m^3$ (4) 140608 (5) 1030301

(6) $x^3 + 3x + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^3}$ (7) $8m^3 + \frac{12m^2}{5} + \frac{6m}{25} + \frac{1}{125}$

(8) $\frac{125x^3}{y^3} + \frac{15x}{y} + \frac{3y}{5x} + \frac{y^3}{125x^3}$

مشقی سیٹ 5.3 1. (1) $8m^3 - 60m^2 + 150m - 125$ (2) $64 - 48p + 12p^2 - p^3$

(3) $343x^3 - 1323x^2y + 1701xy^2 - 729y^3$ (4) 1,95,112

(5) 77,62,392 (6) $8p^3 - 6p + \frac{3}{2p} - \frac{1}{8p^3}$

(7) $1 - \frac{3}{a} + \frac{3}{a^2} - \frac{1}{a^3}$ (8) $\frac{x^3}{27} - x + \frac{9}{x} - \frac{27}{x^3}$

2. (1) $24a^2b + 2b^3$ (2) $54r^3 + 72rk^2$

(3) $-288a^2 - 54$ (4) $250x^3 + 1470xy^2$

مشقی سیٹ 5.4 1. (1) $4p^2 + q^2 + 25 + 4pq + 10q + 20p$

(2) $m^2 + 4n^2 + 9r^2 + 4mn + 12nr + 6mr$

(3) $9x^2 + 16y^2 + 25p^2 + 24xy - 40py - 30px$

(4) $49m^2 + 9n^2 + 16k^2 - 42mn + 24nk - 56km$

2. (1) $2x^2 + 8y^2 + 18 - 24y$ (2) $32rm - 48kr$

(3) $98a^2 + 72b^2 + 50c^2 - 120bc$

DELQ58

6 الجبری عبارتوں کے اجزائے ضربی

آیئے ذرا یاد کریں

گذشتہ جماعت میں ہم $ax + by$ اور $a^2 - b^2$ کی نوعیت والی الجبری عبارتوں کے اجزائے ضربی کا مطالعہ کر چکے ہیں۔

مثلاً (1) $4xy + 8xy^2 = 4xy(1 + 2y)$

(2) $p^2 - 9q^2 = (p)^2 - (3q)^2 = (p + 3q)(p - 3q)$

آیئے سمجھ لیں

مربعی سہ رکنی کے اجزائے ضربی (Factors of Quadratic Trinomial) :

$ax^2 + bx + c$ نوعیت کی الجبری عبارت کو مربعی سہ رکنی کہتے ہیں۔

ہم جانتے ہیں کہ $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$

اس لیے $x^2 + (a + b)x + ab$ کے $(x + a)$ اور $(x + b)$ جزو ضربی ہیں۔

سہ رکنی $x^2 + 5x + 6$ کے اجزائے ضربی معلوم کرنے کے لیے اس کا موازنہ سہ رکنی $x^2 + (a + b)x + ab$ سے کرنے پر $a + b = 5$ اور $ab = 6$ آتا ہے۔ لہٰذا 6 کے ایسے دو جزو ضربی کریں گے کہ ان کی جمع 5 آئے اور سہ رکنی کو $x^2 + (a + b)x + ab$ کی صورت میں لکھ کر اس کا اجزائے ضربی معلوم کریں گے۔

$x^2 + 5x + 6 = x^2 + (3 + 2)x + 3 \times 2$ ... $[\because x^2 + (a + b)x + ab]$

[(3 + 2) کو x سے ضرب کرنے پر حاصل ہونے والے 4 ارکان کے دو گروہ بتائیں گے اور اجزائے ضربی حاصل کریں گے]

$= \underline{x^2 + 3x} + \underline{2x + 2 \times 3}$

$= x(x + 3) + 2(x + 3) \qquad = (x + 3)(x + 2)$

(دی ہوئی مربعی سہ رکنی کے اجزائے ضربی کرنے کے طریقے کو سمجھنے کے لیے ذیل کی مثالوں کا مطالعہ کیجیے)

مثال 1 : $2x^2 - 9x + 9$ کے اجزائے ضربی کیجیے۔

حل : مربعی رکن کے ضریب اور مستقل رکن کا ضرب کریں گے۔ ان کا حاصل ضرب $2 \times 9 = 18$ ہے۔

اب 18 کے دو جزو ضربی معلوم کریں گے کہ ان کی جمع درمیانی رکن کے ضریب کے برابر یعنی -9 آئے۔

$18 = (-6) \times (-3)\ ;\ (-6) + (-3) = -9$

رکن $-9x$ کو $-6x - 3x$ لکھیں گے۔

$(x - 3)$ مشترک جزو نکالیں گے۔

$2x^2 - 9x + 9$

$= \underline{2x^2 - 6x} - \underline{3x + 9}$

$= 2x\underline{(x - 3)} - 3\underline{(x - 3)}$

$= (x - 3)(2x - 3)$

$\therefore 2x^2 - 9x + 9 = (x - 3)(2x - 3)$

مثال 2 : $2x^2 + 5x - 18$ کے اجزائے ضربی معلوم کیجیے۔

حل : $2x^2 + 5x - 18$

$= \underline{2x^2 + 9x} \; \underline{-4x - 18}$

$= x(2x + 9) - 2(2x + 9)$

$= (2x + 9)(x - 2)$

مثال 3 : $x^2 - 10x + 21$ کے اجزائے ضربی معلوم کیجیے۔

حل : $x^2 - 10x + 21$

$= \underline{x^2 - 7x} - \underline{3x + 21}$

$= x(x - 7) - 3(x - 7)$

$= (x - 7)(x - 3)$

مثال 4 : $2y^2 - 4y - 30$ کے اجزائے ضربی کیجیے۔

حل : $2y^2 - 4y - 30$

$= 2(y^2 - 2y - 15)$ ... (تمام ارکان سے 2 مشترک جزو ضربی نکال کر)

$= 2(\underline{y^2 - 5y} + \underline{3y - 15})$ ...

$= 2[y(y - 5) + 3(y - 5)]$

$= 2(y - 5)(y + 3)$

مشقی سیٹ 6.1

.1 اجزائے ضربی کیجیے۔

(1) $x^2 + 9x + 18$ (2) $x^2 - 10x + 9$ (3) $y^2 + 24y + 144$

(4) $5y^2 + 5y - 10$ (5) $p^2 - 2p - 35$ (6) $p^2 - 7p - 44$

(7) $m^2 - 23m + 120$ (8) $m^2 - 25m + 100$ (9) $3x^2 + 14x + 15$

(10) $2x^2 + x - 45$ (11) $20x^2 - 26x + 8$ (12) $44x^2 - x - 3$

آیئے سمجھ لیں

$a^3 + b^3$ کے اجزائے ضربی (Factors of $a^3 + b^3$) :

ہم جانتے ہیں کہ، $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

دائیں جانب کی عبارت سے $3ab$ مشترک نکال کر اس توسیعی ضابطے کی ترتیب ذیل کے مطابق کر سکتے ہیں۔

$$(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$$

اب، $a^3 + b^3 + 3ab(a + b) = (a + b)^3$ ... (طرفین کی ادل بدل کر کے)

$\therefore a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b) = [(a + b)(a + b)^2] - 3ab(a + b)$

$= (a + b)[(a + b)^2 - 3ab] = (a + b)(a^2 + 2ab + b^2 - 3ab)$

$= (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

$\therefore \boxed{a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)}$

دو مکعبوں کی جمع کے اجزائے ضربیوں کے مذکورہ بالا ضابطے کا استعمال کر کے کچھ مثالیں حل کریں گے۔

مثال (1) $x^3 + 27y^3 = x^3 + (3y)^3$

$$= (x + 3y)\,[x^2 - x(3y) + (3y)^2]$$

$$= (x + 3y)\,[x^2 - 3xy + 9y^2]$$

مثال (2) $8p^3 + 125q^3 = (2p)^3 + (5q)^3 = (2p + 5q)\,[(2p)^2 - 2p \times 5q + (5q)^2]$

$$= (2p + 5q)\,(4p^2 - 10pq + 25q^2)$$

مثال (3) $m^3 + \frac{1}{64m^3} = m^3 + \left(\frac{1}{4m}\right)^3 = \left(m + \frac{1}{4m}\right)\left[m^2 - m \times \frac{1}{4m} + \left(\frac{1}{4m}\right)^2\right]$

$$= \left(m + \frac{1}{4m}\right)\left(m^2 - \frac{1}{4} + \frac{1}{16m^2}\right)$$

مثال (4) $250p^3 + 432q^3 = 2(125p^3 + 216q^3)$

$$= 2\,[(5p)^3 + (6q)^3] = 2(5p + 6q)\,(25p^2 - 30pq + 36q^2)$$

مشقی سیٹ 6.2

1. اجزائے ضربی کیجیے۔

(1) $x^3 + 64y^3$ (2) $125p^3 + q^3$ (3) $125k^3 + 27m^3$ (4) $2l^3 + 432m^3$

(5) $24a^3 + 81b^3$ (6) $y^3 + \frac{1}{8y^3}$ (7) $a^3 + \frac{8}{a^3}$ (8) $1 + \frac{q^3}{125}$

آیئے سمجھ لیں

$a^3 - b^3$ کے اجزائے ضربی (Factors of $a^3 - b^3$) :

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a - b)$$

اب، $a^3 - b^3 - 3ab\,(a - b) = (a - b)^3$

$$\therefore \quad a^3 - b^3 = (a - b)^3 + 3ab\,(a - b)$$

$$= [(a - b)(a - b)^2 + 3ab\,(a - b)]$$

$$= (a - b)\,[(a - b)^2 + 3ab]$$

$$= (a - b)\,(a^2 - 2ab + b^2 + 3ab)$$

$$= (a - b)\,(a^2 + ab + b^2)$$

$$\therefore \quad \boxed{a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)}$$

دو مکعبوں کی تفریق کے اجزائے ضربی کے ضابطے کا استعمال کر کے کچھ عبارتوں کے اجزائے ضربی کریں گے۔

مثال (1) $x^3 - 8y^3 = x^3 - (2y)^3$

$\therefore x^3 - 8y^3 = x^3 - (2y)^3$

$= (x - 2y)(x^2 + 2xy + 4y^2)$

مثال (2) $27p^3 - 125q^3 = (3p)^3 - (5q)^3 = (3p - 5q)(9p^2 + 15pq + 25q^2)$

مثال (3) $54p^3 - 250q^3 = 2[27p^3 - 125q^3] = 2[(3p)^3 - (5q)^3]$

$= 2(3p - 5q)(9p^2 + 15pq + 25q^2)$

مثال (4) $a^3 - \frac{1}{a^3} = \left(a - \frac{1}{a}\right)\left(a^2 + 1 + \frac{1}{a^2}\right)$

مثال (5) مختصر کیجیے۔ $(a - b)^3 - (a^3 - b^3)$

حل : $(a - b)^3 - (a^3 - b^3) = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 - a^3 + b^3 = -3a^2b + 3ab^2$

مثال (6) مختصر کیجیے۔ $(2x + 3y)^3 - (2x - 3y)^3$

حل : فرض کیجیے $2x + 3y = a$ اور $2x - 3y = b$

$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

$\therefore (2x + 3y)^3 - (2x - 3y)^3$

$= [(2x + 3y) - (2x - 3y)][(2x + 3y)^2 + (2x + 3y)(2x - 3y) + (2x - 3y)^2]$

$= [2x + 3y - 2x + 3y][4x^2 + 12xy + 9y^2 + 4x^2 - 9y^2 + 4x^2 - 12xy + 9y^2]$

$= 6y(12x^2 + 9y^2) = 72x^2y + 54y^3$

یہ میری سمجھ میں آ گیا 

(i) $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ (ii) $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

مشقی سیٹ 6.3

.1 اجزائے ضربی کیجیے۔

(1) $y^3 - 27$ (2) $x^3 - 64y^3$ (3) $27m^3 - 216n^3$ (4) $125y^3 - 1$

(5) $8p^3 - \frac{27}{p^3}$ (6) $343a^3 - 512b^3$ (7) $64x^3 - 729y^3$ (8) $16a^3 - \frac{128}{b^3}$

.2 مختصر کیجیے۔

(1) $(x + y)^3 - (x - y)^3$ (2) $(3a + 5b)^3 - (3a - 5b)^3$

(3) $(a + b)^3 - a^3 - b^3$ (4) $p^3 - (p + 1)^3$

(5) $(3xy - 2ab)^3 - (3xy + 2ab)^3$

آیئے سمجھ لیں

ناطق الجبری عبارتیں یا الجبری عبارتوں کی نسبت (Rational Algebraic Expressions) :

A اور B دو عبارتیں ہوں تو $\frac{A}{B}$ کو الجبری عبارتوں کی نسبت کہتے ہیں۔ الجبری عبارتوں کی نسبت کو مختصر کرتے وقت استعمال میں آنے والے جمع، تفریق، ضرب، تقسیم وغیرہ اعمال ناطق اعداد پر ہونے والے اعمال کی طرح ہوتے ہیں۔

الجبری عبارتوں کی تقسیم کرنے کے دوران نسب نما یا مقسوم الیہ غیر صفر ہونا چاہیے۔

مثال (1) مختصر کیجیے۔ $\frac{a^2+5a+6}{a^2-a-12} \times \frac{a-4}{a^2-4}$

حل : $\frac{a^2+5a+6}{a^2-a-12} \times \frac{a-4}{a^2-4}$

$= \frac{(a+3)(a+2)}{(a-4)(a+3)} \times \frac{(a-4)}{(a+2)(a-2)}$

$= \frac{1}{a-2}$

مثال (2) $\frac{7x^2+18x+8}{49x^2-16} \times \frac{14x-8}{x+2}$

حل : $\frac{7x^2+18x+8}{49x^2-16} \times \frac{14x-8}{x+2}$

$= \frac{(7x+4)(x+2)}{(7x-4)(7x+4)} \times \frac{2(7x-4)}{(x+2)}$

$= 2$

مثال (3) مختصر کیجیے : $\frac{x^2-9y^2}{x^3-27y^3}$ ، $x \neq 3y$

حل : $\frac{x^2-9y^2}{x^3-27y^3} = \frac{(x-3y)(x+3y)}{(x-3y)(x^2+3xy+9y^2)}$

$= \frac{x+3y}{x^2+3xy+9y^2}$

مشقی سیٹ 6.4

.1 مختصر کیجیے۔

(1) $\frac{m^2-n^2}{(m+n)^2} \times \frac{m^2+mn+n^2}{m^3-n^3}$ (2) $\frac{a^2+10a+21}{a^2+6a-7} \times \frac{a^2-1}{a+3}$ (3) $\frac{8x^3-27y^3}{4x^2-9y^2}$

(4) $\frac{x^2-5x-24}{(x+3)(x+8)} \times \frac{x^2-64}{(x-8)^2}$ (5) $\frac{3x^2-x-2}{x^2-7x+12} \div \frac{3x^2-7x-6}{x^2-4}$ (6) $\frac{4x^2-11x+6}{16x^2-9}$

(7) $\frac{a^3-27}{5a^2-16a+3} \div \frac{a^2+3a+9}{25a^2-1}$ (8) $\frac{1-2x+x^2}{1-x^3} \times \frac{1+x+x^2}{1+x}$

جوابات کی فہرست

مشقی سیٹ 6.1

1. (1) $(x+6)(x+3)$ (2) $(x-9)(x-1)$ (3) $(y+12)(y+12)$

(4) $5(y+2)(y-1)$ (5) $(p-7)(p+5)$ (6) $(p+4)(p-11)$

(7) $(m-15)(m-8)$ (8) $(m-20)(m-5)$ (9) $(x+3)(3x+5)$

(10) $(x+5)(2x-9)$ (11) $2(5x-4)(2x-1)$ (12) $(11x-3)(4x+1)$

مشقی سیٹ 6.2

1. (1) $(x+4y)(x^2-4xy+16y^2)$ (2) $(5p+q)(25p^2-5pq+q^2)$

(3) $(5k+3m)(25k^2-15km+9m^2)$ (4) $2(l+6m)(l^2-6lm+36m^2)$

(5) $3(2a+3b)(4a^2-6ab+9b^2)$ (6) $\left(y-\frac{1}{2y}\right)\left(y^2+\frac{1}{2}+\frac{1}{4y^2}\right)$

(7) $\left(a+\frac{2}{a}\right)\left(a^2-2+\frac{4}{a^2}\right)$ (8) $\left(1+\frac{q}{5}\right)\left(1-\frac{q}{5}+\frac{q^2}{25}\right)$

مشقی سیٹ 6.3

1. (1) $(y-3)(y^2+3y+9)$ (2) $(x-4y)(x^2+4xy+16y^2)$

(3) $(3m-6n)(9m^2+18mn+36n^2)$ (4) $(5y-1)(25y^2+5y+1)$

(5) $\left(2p-\frac{3}{p}\right)\left(4p^2+6+\frac{9}{p^2}\right)$ (6) $(7a-8b)(49a^2+56ab+64b^2)$

(7) $(4x-9y)(16x^2+36xy+81y^2)$ (8) $16\left(a-\frac{2}{b}\right)\left(a^2-\frac{2a}{b}+\frac{4}{b^2}\right)$

2. (1) $6x^2y+2y^3$ (2) $270a^2b+250b^3$ (3) $3a^2b+3ab^2$

(4) $-3p^2-3p-1$ (5) $-108x^2y^2ab-16a^3b^3$

مشقی سیٹ 6.4

1. (1) $\frac{1}{m-n}$ (2) $a+1$ (3) $\frac{4x^2+6xy+9y^2}{2x+3y}$

(4) 1 (5) $\frac{4x^3-18x^2+28x-21}{(x-3)^2(x-4)}$

(6) $\frac{x-2}{4x-3}$ (7) $5a+1$ (8) $\frac{1-x}{1+x}$

7 تغیّر

آیئے ذرا یاد کریں

ایک درجن بیاضوں کی قیمت 240 روپے ہوتو 3 بیاضوں کی قیمت کتنی ہوگی؟ 9 بیاضوں کی قیمت کتنی ہوگی؟ 24 بیاضوں کی قیمت کتنی ہوگی؟ 50 بیاضوں کی قیمت کتنی ہوگی؟ اسے معلوم کرنے کے لیے ذیل کی جدول مکمل کیجیے۔

بیاضوں کی تعداد (x)	12	3	9	24	50	1
قیمت (روپے میں) (y)	240	$\boxed{}$	$\boxed{}$	$\boxed{}$	$\boxed{}$	$\boxed{20}$

مذکورہ بالا جدول سے ایسا سمجھ میں آتا ہے کہ ہر جوڑی میں بیاضوں کی تعداد (x) اوران کی قیمت (y) کے درمیان $\frac{1}{20}$ کی نسبت ہے۔ یہ مستقل ہے۔ بیاضوں کی تعداد اوران کی قیمت مستقیم تناسب میں ہے۔ ایسی مثالوں میں دو میں سے ایک کی تعداد بڑھتی ہے تو دوسری بھی اسی تناسب سے بڑھتی ہے۔

آیئے سمجھ لیں

مستقیم تغیر (Direct Variation) :

x اور y مستقیم تناسب میں ہیں۔ اسی بیان کو x اور y مستقیم تغیر میں ہیں یا x اور y کے درمیان مستقیم تغیر ہے، لکھتے ہیں۔ اس بیان کو علامت کا استعمال کر کے $x \propto y$ بھی لکھتے ہیں۔

[$\propto$ (الفا) تغیر کے معنی میں استعمال کیا جانے والا لاطینی حرف ہے]

$x \propto y$ اسے مساوات کی صورت میں $x = ky$ لکھتے ہیں؛ یہاں k مستقل رکن ہے۔

$x = ky$ یا $k = \frac{x}{y}$ تغیر کی مساوات ہے۔ k تغیر کا مستقل عدد ہے۔

درج ذیل بیان تغیر کی علامت استعمال کر کے کس طرح لکھا گیا ہے، اسے دیکھیے۔

(i) دائرے کا رقبہ اس کے نصف قطر کے مربع کے مستقیم تناسب میں ہے۔

دائرے کا رقبہ = A، نصف قطر = r، ان متغیروں کو لے کر مذکورہ بالا بیان کو $A \propto r^2$ لکھ سکتے ہیں۔

(ii) مائع کا دباؤ (p)، مائع کی گہرائی (d) کے ساتھ مستقیم تغیر میں ہوتا ہے۔ اس بیان کو $p \propto d$ لکھتے ہیں۔

مستقیم تغیر کی علامتی ترتیب کے تصور کو سمجھنے کے لیے ذیل کی مثالوں کا مطالعہ کیجیے۔

مثال (1) x، y کے ساتھ مستقیم تغیر میں ہے، جب $x = 5$ ہوتا ہے تب $y = 30$ تو تغیر کا مستقل معلوم کیجیے اور تغیر کی مساوات لکھیے۔

حل : x، y کے ساتھ مستقیم تغیر میں ہے۔ یعنی $x \propto y$

$\therefore \quad x = ky$ ... (k تغیر کا مستقل عدد ہے)

$x = 5$ تب $y = 30$ دیا ہوا ہے۔

$\therefore\ 5 = k \times 30$. $\therefore\ k = \frac{1}{6}$ ... (تغیر کا مستقل عدد)

اس کی مدد سے $x = ky$ یعنی $x = \frac{1}{6}$ یا $y = 6x$ مساوات حاصل ہوتی ہے۔

مثال (2) مونگ پھلی کے دانے کی قیمت اس کے وزن کے ساتھ مستقیم تغیر میں ہے۔ 5 کلوگرام مونگ پھلی کے دانے کی قیمت ₹450 ہو تو 1 کوئنٹل مونگ پھلی کے دانے کی قیمت معلوم کیجیے۔ (1 کوئنٹل = 100 کلوگرام)

حل : فرض کیجیے مونگ پھلی کے دانے کی قیمت x ₹ اور مونگ پھلی کے دانے کا وزن y ہے۔

x اور y مستقیم تغیر میں ہیں۔ ... (دیا ہوا ہے) لہٰذا $x \propto y$ یا $x = ky$

جب $x = 450$ تب $y = 5$ ہوتا ہے۔ ... (دیا ہوا ہے) اس کی مدد سے k معلوم کریں گے۔

$x = ky$, $\quad \therefore\ 450 = 5k$, $\quad \therefore\ k = 90$ ... (تغیر کا مستقل)

اب، $y = 100$ ہو تو x معلوم کریں گے۔ $\qquad \therefore$ تغیر کی مساوات $x = 90\,y$

$x = 90 \times 100 = 9000$

$\therefore$ 1 کوئنٹل مونگ پھلی کے دانوں کی قیمت 9000 روپے ہوگی۔

مشقی سیٹ 7.1

.1 تغیر کی علامت استعمال کر کے لکھیے۔

(1) دائرے کا محیط (c) اس کے نصف قطر (r) کے ساتھ مستقیم تناسب میں ہوتا ہے۔

(2) موٹر گاڑی میں بھرے ہوئے پٹرول (l) اور اس کے ذریعے طے کردہ فاصلہ (d) مستقل تغیر میں ہوتے ہیں۔

.2 سیبوں کی قیمت اور سیبوں کی تعداد کے درمیان مستقیم تغیر ہے۔ اس کی مدد سے درج ذیل جدول مکمل کیجیے۔

سیبوں کی تعداد (x)	1	4	...	12	...
سیبوں کی قیمت (y)	8	32	56	...	160

.3 اگر $m \propto n$ اور جب $m = 154$ ہو تب $n = 7$۔ اس لیے اگر $n = 14$ ہو تب m کی قیمت معلوم کیجیے۔

.4 n، m کے ساتھ مستقیم تغیر میں ہے، تو ذیل کی جدول مکمل کیجیے۔

m	3	5	6.5	...	1.25
n	12	20	...	28	...

.5 y، x کے جذر المربع کے ساتھ مستقیم تغیر میں بدلتا ہے اور جب $x = 16$ ہوتا ہے تب $y = 24$ تو تغیر کا مستقل عدد معلوم کیجیے اور تغیر کی مساوات لکھیے۔

6. سویابین کی فصل نکالنے کے لیے 4 مزدوروں کو 1000 ₹ مزدوری دینا پڑتی ہے۔ اگر مزدوری کی رقم اور مزدوروں کی تعداد مستقیم تغیر میں ہو تو 17 مزدوروں کو کتنی مزدوری دینا ہوگی؟

آیئے ذرا یاد کریں

ڈرل کے لیے بچوں کی قطاریں بنائی گئیں۔ ہر قطار میں بچوں کی تعداد اور قطاروں کی تعداد ذیل کے مطابق ہے۔

ہر قطار میں بچوں کی تعداد	40	10	24	12	8
قطاروں کی تعداد	6	24	10	20	30

مذکورہ بالا جدول کی مدد سے ایسا سمجھ میں آتا ہے کہ ہر جوڑی کی ہر قطار میں بچوں کی تعداد اور کل قطاروں کی تعداد کا حاصل ضرب 120 ہے۔

یعنی ان کا حاصل ضرب مستقل ہے۔ (یا) ہر قطار میں بچوں کی تعداد اور قطاروں کی تعداد معکوس تناسب میں ہے۔

جب دو تعداد میں سے ایک تعداد میں اضافہ ہوتا ہے تو دوسری تعداد میں اسی تناسب سے کمی واقع ہوتی ہے۔ تب یہ دونوں تعداد معکوس تناسب میں ہوتی ہیں۔ مثلاً ایک تعداد دگنا ہوتی ہے تو دوسری تعداد نصف ہو جاتی ہے۔

آیئے سمجھ لیں

معکوس تغیر (Inverse Variation) :

x اور y اعداد معکوس تناسب میں ہیں۔ اس بیان کو x اور y معکوس تغیر میں ہیں، لکھتے ہیں۔ x اور y معکوس تغیر میں ہوں تب $x \times y$ مستقل ہوتا ہے۔ اسے k فرض کرکے مثالیں حل کرنا آسان ہو جاتا ہے۔

x اور y معکوس تغیر میں ہیں، یعنی اسے $x \propto \frac{1}{y}$ سے ظاہر کرتے ہیں۔

$x \propto \frac{1}{y}$ یعنی $x = \frac{k}{y}$ یا $x \times y = k$ یہ سب تغیر کی مساواتیں ہیں۔ k تغیر کا مستقل عدد ہے۔

حل کردہ مثالیں

مثال (1) اگر a، b کے ساتھ معکوس تغیر میں ہو تو درج ذیل جدول مکمل کیجیے۔

a	6	12	15	
b	20			4
$a \times b$	120	120		

حل : (i) $a \propto \frac{1}{b}$ یعنی $a \times b = k$

(تغیر کا مستقل) ... $k = 6 \times 20 = 120$ $\therefore$, $b = 20$ تب $a = 6$

(ii) $a = 12$ تب $b = ?$

$a \times b = 120$

$\therefore 12 \times b = 120$

$\therefore \quad b = 10$

(iii) $a = 15$ تب $b = ?$

$a \times b = 120$

$\therefore 15 \times b = 120$

$\therefore \quad b = 8$

(iv) $b = 4$ تب $a = ?$

$a \times b = 120$

$\therefore a \times 4 = 120$

$\therefore \quad a = 30$

مثال (2) : $f \propto \frac{1}{d^2}$ ، $d = 5$ تب $f = 18$

تو (i) $d = 10$ ہوتو f کی قیمت معلوم کیجیے۔ (ii) $f = 50$ ہوتو d کی قیمت معلوم کیجیے۔

حل : $f \propto \frac{1}{d^2}$ ، $\therefore f \times d^2 = k$

$d = 5$ تب $f = 18$ ہوتو k کی قیمت معلوم کریں گے۔

$\therefore 18 \times 5^2 = k$ ، $\therefore k = 18 \times 25 = 450$ ... (تغیر کا مستقل)

(i) $d = 10$ ہوتو $f = ?$

$f \times d^2 = 450$

$\therefore f \times 10^2 = 450$

$\therefore f \times 100 = 450$

$\therefore \quad f = 4.5$

(ii) $f = 50$ ہوتو $d = ?$

$f \times d^2 = 450$

$\therefore 50 \times d^2 = 450$

$\therefore \quad d^2 = 9$

$\therefore d = 3$ یا $d = -3$

مشقی سیٹ 7.2

.1 ایک کام پورا کرنے کے لیے لگائے گئے مزدوروں کی تعداد اور کام پورا ہونے کے لیے درکار دنوں کی معلومات ذیل کی جدول میں دی ہوئی ہے۔ جدول مکمل کیجیے۔

مزدوروں کی تعداد	30	20		10	
دن	6	9	12		36

.2 ہر مثال میں تغیر کا مستقل معلوم کیجیے اور تغیر کی مساوات لکھیے۔

(1) $p \propto \frac{1}{q}$ ، جب $p = 15$ تب $q = 4$ (2) $z \propto \frac{1}{w}$ جب $z = 2.5$ تب $w = 24$

(3) $s \propto \frac{1}{t^2}$ ، جب $s = 4$ تب $t = 5$ (4) $x \propto \frac{1}{\sqrt{y}}$ جب $x = 15$ تب $y = 9$

.3 سیبوں کے ذخیرے سے تمام سیب پیٹیوں میں بھرنا ہے۔ ہر پیٹی میں 24 سیب رکھیں تو اسے بھرنے کے لیے 27 پیٹیاں درکار ہوتی ہیں۔ اگر ہر پیٹی میں 36 سیب رکھیں تو کتنی پیٹیاں درکار رہوں گی؟

.4 درج ذیل بیانات کو تغیر کی علامت استعمال کر کے لکھیے۔

(1) آواز کی طولی لہروں کی لمبائی (l) اور تعدد (f) کے درمیان معکوس تغیر ہے۔

(2) بلب کی روشنی کی شدت (I) اور بلب اور پردے کے درمیان فاصلہ (d) کے مربع کے درمیان معکوس تغیر ہے۔

.5 $y \propto \frac{1}{x}$ اور $x = 40$ ہوتا ہے تب $y = 16$ ہوتا ہے۔ اگر $x = 10$ ہو تو y کتنا ہوگا؟

.6 x اور y کے درمیان معکوس تغیر ہے۔ $x = 15$ تب $y = 10$ ہوتا ہے۔ $x = 20$ ہو تو $y = ?$

آیئے سمجھ لیں

وقت، کام، رفتار (Time, Work, Speed) :

کسی تعمیراتی کام کو پورا کرنے کے لیے لگائے گئے مزدوروں کی تعداد اور اس کام کو پورا کرنے لیے لگنے والا وقت، جیسی مثالیں معکوس تغیر کی ہوتی ہیں۔ اسی طرح معکوس تغیر کی بعض مثالیں سواریوں کی رفتار اور اُن کے ذریعے متعین کردہ فاصلہ طے کرنے کے لیے درکار وقت سے متعلق ہوتی ہیں۔

ایسی مثالوں کو وقت - کام - رفتار سے متعلق مثالیں کہتے ہیں۔

آیئے دیکھتے ہیں کہ تغیر کی علامت کا استعمال کر کے اس قسم کی مثالیں کس طرح حل کرتے ہیں؟

مثال (1) ایک کھیت میں مونگ پھلی نکالنے کا کام 15 عورتیں 8 دن میں پورا کرتی ہیں۔ وہی کام 6 دنوں میں پورا کرنا ہو تو کتنی عورتیں کام پر ہونا چاہیے؟

حل : کام پورا ہونے کے لیے درکار وقت اور کام کرنے والی عورتوں کی تعداد کے درمیان معکوس تغیر ہوتا ہے۔

فرض کیجیے کہ دنوں کی تعداد (d) اور عورتوں کی تعداد n ہے۔

$d \propto \frac{1}{n}$ ، $\therefore d \times n = k$ ... (k تغیر کا مستقل عدد ہے)

جب $n = 15$ تب $d = 8$

$\therefore k = d \times n = 15 \times 8 = 120$ ... (تغیر کا مستقل)

اب $d = 6$ ہو تو $n = ?$، معلوم کریں گے۔

$d \times n = 120$

$\therefore 6 \times n = 120, \quad \therefore n = 20$

$\therefore$ 6 دن میں کام پورا کرنے کے لیے 20 عورتیں کام پر ہونا چاہیے۔

مثال (2) ایک سواری کی اوسط رفتار 48 کلومیٹر فی گھنٹہ ہو تب کچھ فاصلہ طے کرنے کے لیے اسے 6 گھنٹے لگتے ہیں۔ اگر رفتار 72 کلومیٹر فی گھنٹہ ہو جاتی ہے تب اتنا ہی فاصلہ طے کرنے کے لیے اسے کتنا وقت لگے گا؟

حل : فرض کیجیے سواری کی رفتار s ہے اور درکار وقت t ہے۔ رفتار اور وقت کے درمیان معکوس تغیر ہے۔

$s \propto \frac{1}{t}$ ، $\therefore s \times t = k$ ... (k تغیر کا مستقل عدد ہے)

$k = s \times t = 48 \times 6 = 288$ ... (تغیر کا مستقل)

اب $s = 72$ ہو تو t معلوم کریں گے۔

$s \times t = 288$ ، $\therefore 72 \times t = 288$ ، $\therefore t = \frac{288}{72} = 4$

$\therefore$ سواری کی رفتار 72 کلومیٹر فی گھنٹہ ہو تو اتنا ہی فاصلہ طے کرنے کے لیے 4 گھنٹے درکار ہوں گے۔

مشقی سیٹ 7.3

.1 درج ذیل میں سے کون سے بیانات معکوس تغیر کے ہیں؟

(1) مزدوروں کی تعداد اور ان کے کام پورا کرنے کے لیے لگنے والا وقت۔

(2) حوض بھرنے کے لیے ایک جیسے نلوں کی تعداد اور حوض بھرنے کے لیے درکار وقت۔

(3) سواری میں بھرا ہوا پٹرول اور اس کی قیمت۔

(4) دائرے کا رقبہ اور اس دائرے کا نصف قطر۔

.2 اگر 15 مزدوروں کو ایک دیوار تعمیر کرنے کے لیے 48 گھنٹے لگتے ہیں تو 30 گھنٹوں میں وہ کام پورا کرنے کے لیے کتنے مزدور لگیں گے؟

.3 تھیلی میں دودھ بھرنے والی مشین کے ذریعے 3 منٹ میں آدھے لٹر کی 120 تھیلیاں بھری جاتی ہیں تو 1800 تھیلیاں بھرنے کے لیے کتنا وقت درکار ہوگا؟

.4 ایک کار کو 60 کلومیٹر فی گھنٹہ کی اوسط رفتار سے کچھ فاصلہ طے کرنے کے لیے 8 گھنٹے لگتے ہیں۔ وہی فاصلہ ساڑھے سات گھنٹے میں طے کرنے کے لیے کار کی اوسط رفتار میں کتنا اضافہ کرنا ہوگا؟

جوابات کی فہرست

مشقی سیٹ 7.1

1. (1) $c \propto r$ (2) $l \propto d$ **2.** $y = 96$ اور x بالترتیب 7 اور 20

3. 308 **4.** $m = 7$ اور n بالترتیب 26 اور 5 **5.** $k = 6$, $y = 6\sqrt{x}$ **6.** ₹4250

مشقی سیٹ 7.2

1. 18 دن اور مزدوروں کی تعداد بالترتیب 15 اور 5 **2.** (1) $k = 60$, $pq = 60$

(2) $k = 60$, $zw = 60$ (3) $k = 100$, $st^2 = 100$ (4) $k = 45$, $x\sqrt{y} = 45$

3. 18 پیٹیاں **4.** (1) $f \propto \frac{1}{l}$ (2) $I \propto \frac{1}{d}$ **5.** $x = 256$ **6.** $y = 7.5$

مشقی سیٹ 7.3

1. (1), (2) معکوس تغیر **2.** 24 مزدور **3.** 45 منٹ **4.** 4 کلومیٹر فی گھنٹہ

DF5H8I

8 ذواربعۃ الاضلاع بنانا اور ذواربعۃ الاضلاع کی قسمیں

آیئے ذرا یاد کریں

- دی ہوئی پیمائشوں کے مطابق مثلث بنایئے۔

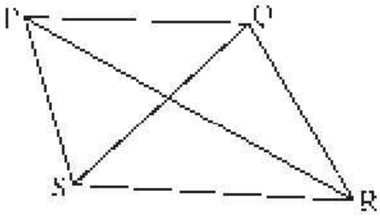
(1) $\triangle ABC$ میں $l(AC) = 6$ سم ، $l(BC) = 5.5$ سم ، $l(AB) = 5$ سم

(2) $\triangle DEF$ میں $l(DF) = 4.8$ سم ، $m\angle F = 100^\circ$ ، $m\angle D = 35^\circ$

(3) $\triangle MNP$ میں $m\angle P = 75^\circ$ ، $l(NP) = 4.5$ سم ، $l(MP) = 6.2$ سم

(4) $\triangle XYZ$ میں $l(XZ) = 7$ سم ، $l(XY) = 4.2$ سم ، $m\angle Y = 90^\circ$

- کسی بھی ذواربعۃ الاضلاع کے چار زاویے، چار ضلعے اور دو وتر اس طرح کل دس اجزا ہوتے ہیں۔



آیئے سمجھ لیں

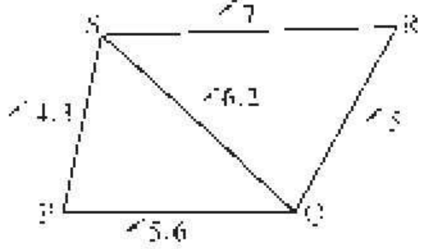
ذواربعۃ الاضلاع بنانا (Construction of a quadrilateral) :

ذواربعۃ الاضلاع کے کل دس اجزا میں سے مخصوص 5 اجزا کی پیمائش معلوم ہو تو اس ذواربعۃ الاضلاع کو ہم بنا سکتے ہیں۔ اس عمل کی بنیاد مثلث بنانے کے عمل کے جیسی ہے۔ اسے ہم ذیل کی مثال سے سمجھ لیں گے۔

(I) ذواربعۃ الاضلاع کے چار اضلاع اور ایک وتر دیا جائے تو ذواربعۃ الاضلاع بنانا :

مثال : $\square PQRS$ ، اس طرح بنایئے کہ $l(PQ) = 5.6$ سم ، $l(QR) = 5$ سم ، $l(PS) = 4.3$ سم ، $l(RS) = 7$ سم
$l(QS) = 6.2$ سم

حل : ہم پہلے کچی شکل بنائیں گے۔

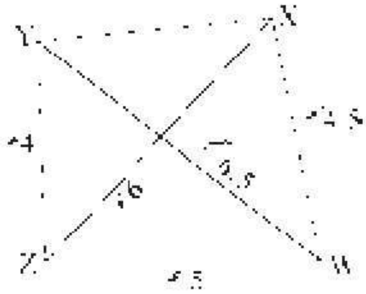


شکل میں ذواربعۃ الاضلاع کے دیے ہوئے اجزا کی معلومات دکھایئے۔
شکل کو دیکھنے پر واضح ہوتا ہے کہ $\triangle SPQ$ اور $\triangle SRQ$ کے تمام اضلاع کی لمبائی ہمیں معلوم ہیں۔ اس بنا پر $\triangle SPQ$ اور $\triangle SRQ$ بنانے پر، دی ہوئی معلومات کے مطابق $\square PQRS$ حاصل ہوگا۔
اس ذواربعۃ الاضلاع کو آپ خود بنایئے۔

(II) ذواربعۃ الاضلاع کے تین اضلاع اور دو وتر دیے جائیں تو ذواربعۃ الاضلاع بنانا :

مثال : □WXYZ ، اس طرح بنائیے کہ l(YZ) = 4 سم ، l(ZX) = 6 سم ، l(WX) = 4.5 سم ،

l(ZW) = 5 سم ، l(YW) = 6.5 سم



حل : کچی شکل بنائیے۔ دی ہوئی معلومات شکل میں دکھائیے۔

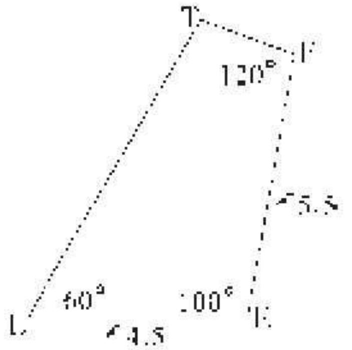
شکل کو دیکھنے پر واضح ہوتا ہے کہ △WXZ اور △WZY کے تمام اضلاع کی لمبائی ہمیں دی ہوئی ہے۔ اس بنا پر △WXZ اور △WZY بنائیے۔ اس کے بعد قطعہ XY کھینچنے پر ہمیں دی ہوئی پیمائش کا □WXYZ حاصل ہوگا۔

اب اس طرح ذواربعۃ الاضلاع آپ خود بنائیے۔

(III) ذواربعۃ الاضلاع کے دو متواتر اضلاع اور کوئی بھی تین زاویے دیے جائیں تو ذواربعۃ الاضلاع بنانا :

مثال : □LEFT ، اس طرح بنائیے کہ $m\angle$L = 60° ، l(EF) = 5.5 سم ، l(EL) = 4.5 سم ، $m\angle$F = 120° ، $m\angle$E = 100°

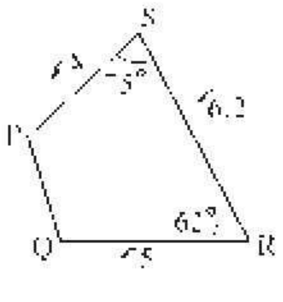
حل : کچی شکل بنا کر اس میں دی ہوئی معلومات دکھائیے۔



شکل کی مدد سے واضح ہوتا ہے کہ 4.5 سم لمبائی کا قطعہ LE کھینچا اور نقطہ E پر 100° پیمائش کا زاویہ بناتے ہوئے قطعہ EF کھینچنے پر ذواربعۃ الاضلاع کے تین نقاط L ، E اور F حاصل ہوتے ہیں۔ نقطہ L پر 60° پیمائش کا زاویہ بنانے والی اور نقطہ F پر 120° پیمائش کا زاویہ بنانے والی شعاعیں کھینچیے۔ ان کا نقطۂ تقاطع ، نقطہ T ہوگا۔ اب آپ یہ ذواربعۃ الاضلاع بنائیے۔

(IV) ذواربعۃ الاضلاع کے تین اضلاع اور ان میں شامل کیے ہوئے زاویے دیے ہوں تو ذواربعۃ الاضلاع بنانا :

مثال : □PQRS ، اس طرح بنائیے کہ l(SP) = 4 سم ، l(RS) = 6.2 سم ، l(QR) = 5 سم ، $m\angle$S = 75° ، $m\angle$R = 62°



حل : پہلے ذواربعۃ الاضلاع کی کچی شکل بنائیے اور اس میں دی ہوئی معلومات دکھائیے۔

اس بنا پر ہمیں سمجھ میں آتا ہے کہ دی ہوئی لمبائی کا قطعہ QR کھینچ کر نقطہ R پر 62° کا زاویہ بنانے والا قطعہ RS کھینچنے کی بنا پر ذواربعۃ الاضلاع کے نقاط Q ، R اور S حاصل ہوتے ہیں۔

قطعہ RS کے نقطہ S پر 75° پیمائش کا زاویہ بنانے والا قطعہ SP اس طرح کھینچیے کہ $SP = 4$ سم قطعہ، قطعہ PQ کھینچنے پر دی ہوئی پیمائش کا $\square$PQRS حاصل ہوگا۔ اب آپ اس طرح کا عمل کرتے ہوئے شکل بنائیے۔

مشقی سیٹ 8.1

.1 ذیل کی پیمائشوں کے مطابق ذواربعۃ الاضلاع بنائیے۔

(1) $\square$MORE میں $m\angle O = 105^\circ$، $m\angle M = 58^\circ$، $l(OR) = 4.4$ سم، $l(MO) = 5.8$ سم، $m\angle R = 90^\circ$

(2) $\square$DEFG اس طرح بنائیے کہ $l(DG) = 5.5$ سم، $l(EF) = 6.5$ سم، $l(DE) = 4.5$ سم، $l(EG) = 7.8$ سم، $l(DF) = 7.2$ سم

(3) $\square$ABCD میں، $l(AB) = 6.4$ سم، $l(BC) = 4.8$ سم، $m\angle A = 70^\circ$، $m\angle C = 140^\circ$، $m\angle B = 50^\circ$

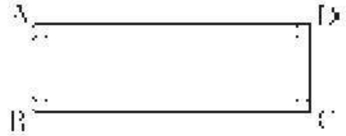
(4) $\square$LMNO اس طرح بنائیے کہ $l(ON) = l(NM) = 4.5$ سم، $l(LM) = l(LO) = 6$ سم، $l(OM) = 7.5$ سم

آیئے ذرا یاد کریں

ذواربعۃ الاضلاع کے اضلاع اور زاویوں پر مختلف قسم کی شرائط لگانے پر ذواربعۃ الاضلاع کی مختلف قسمیں حاصل ہوتی ہیں۔ قائمۃ الزاویہ ذواربعۃ الاضلاع یا مستطیل اور مربع ان ذواربعۃ الاضلاع کی اقسام کا تعارف آپ کر چکے ہیں۔ ذواربعۃ الاضلاع کی مزید قسموں کا مطالعہ ہم عملی کام کے ذریعے کریں گے۔

قائمۃ الزاویہ ذواربعۃ الاضلاع یا مستطیل (Rectangle) :

جس ذواربعۃ الاضلاع کے چاروں زاویے قائمہ ہوتے ہیں اس ذواربعۃ الاضلاع کو قائمۃ الزاویہ ذواربعۃ الاضلاع یا مستطیل کہتے ہیں۔

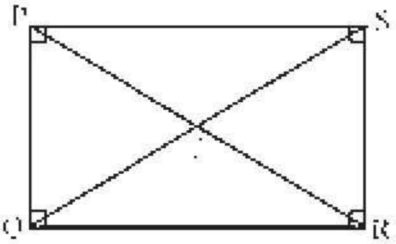


ذواربعۃ الاضلاع بنانے کے لیے دیے گئے پانچ اجزا میں سے دو اضلاع متواتر رہنا ہی چاہیے۔ متواتر دو اضلاع اور تین زاویے معلوم ہوں تو آپ ذواربعۃ الاضلاع بنا سکتے ہیں۔

تعریف کے مطابق مستطیل کے تمام زاویے قائمہ ہوتے ہیں۔ اس لیے مستطیل کے متواتر دو ضلعے معلوم ہوں تو ہی آپ مستطیل بنا سکتے ہیں۔

عملی کام (I) : آپ مناسب متواتر اضلاع (لمبائی اور چوڑائی) کا ایک مستطیل PQRS بنائیے۔ ان کے وتروں کے نقطۂ تقاطع کو T نام دیجیے۔

اب تقسیم کار اور ناپ پٹی کی مدد سے



(1) ضلع QR اور ضلع PS، (مقابل کے ضلعوں) کی لمبائی ناپیے۔

(2) ضلع PQ اور ضلع SR کی لمبائی ناپیے۔

(3) وتر PR اور وتر QS کی لمبائی ناپیے۔

(4) وتر PR کے حصوں قطعہ PT اور قطعہ TR کی لمبائی ناپیے۔

(5) وتر QS کے حصوں قطعہ QT اور قطعہ TS کی لمبائی ناپیے۔

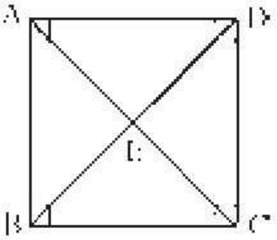
حاصل ہونے والی تمام پیائشوں کا مشاہدہ کیجیے۔ کلاس روم میں دیگر طلبہ کی پیائشوں سے موازنہ کرتے ہوئے بحث کیجیے۔ بحث کے ذریعے مستطیل کی ذیل کی خصوصیات آپ کو سمجھ میں آئیں گی۔

- مستطیل کے مقابل کے اضلاع ایک دوسرے کے متماثل ہوتے ہیں۔
- مستطیل کے وتر متماثل ہوتے ہیں۔
- مستطیل کے وتر ایک دوسرے کی تنصیف کرتے ہیں۔

مربع Square :

جس ذو اربعۃ الاضلاع کے تمام اضلاع متماثل ہوتے ہیں اور تمام زاویے قائمہ ہوتے ہیں۔ اس ذو اربعۃ الاضلاع کو مربع کہتے ہیں۔

عملی کام II : آپ ایک مناسب لمبائی کے ضلع کا مربع ABCD□ بنائیے۔ اس کے وتروں کے نقطۂ تقاطع کو E نام دیجیے۔ اب جیومیٹری باکس کے آلات کا استعمال کرکے



(1) وتر AC اور وتر BD کی لمبائی ناپیے۔

(2) نقطہ E کی وجہ سے بنے ہر وتر کے دونوں حصوں کی لمبائی ناپیے۔

(3) نقطہ E پر بنے ہر زاویے کی پیائش معلوم کیجیے۔

(4) وتر کی وجہ سے مربع کے ہر زاویے کے بننے والے حصوں کی پیائش ناپیے۔

(مثلاً ∠ADB اور ∠CDB)

آپ اور آپ کی کلاس کے دیگر طلبہ کے ذریعے حاصل ہونے والی پیائشوں کا مشاہدہ کیجیے۔ بحث کیجیے۔

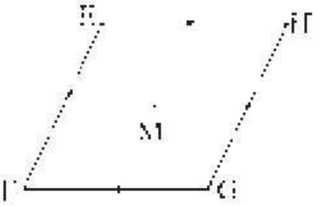
آپ کو مربع کی درج ذیل خصوصیات حاصل ہوتی ہیں۔

- وتر مساوی لمبائی کے یعنی متماثل ہوتے ہیں۔
- وتر ایک دوسرے کی تنصیف کرتے ہیں۔
- وتر ایک دوسرے پر عمود ہوتے ہیں۔
- وتر، مربع کے مقابل کے زاویوں کی تنصیف کرتے ہیں۔

معین (Rhombus) :

جس ذوار بعۃ الاضلاع کے تمام اضلاع کی لمبائی مساوی (متماثل) ہو، اس ذوار بعۃ الاضلاع کو معین کہتے ہیں۔

عملی کام III : مناسب لمبائی کا ضلع اور ایک مناسب پیائش کا زاویہ لے کر ایک معین EFGH بنائیے۔اس کے وتر کھینچ کر ان کے نقطۂ تقاطع کو M نام دیجیے۔



(1) ذوار بعۃ الاضلاع کے مقابل کے زاویے، اسی طرح نقطہ M پر بننے والے تمام زاویے ناپیے۔

(2) وتر کے ذریعے ذوار بعۃ الاضلاع کے ہر زاویے کے بننے والے دونوں زاویے ناپیے۔

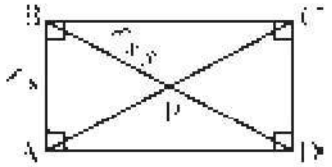
(3) دونوں وتروں کی لمبائی ناپیے۔نقطہ M سے وتروں کے بننے والے حصوں کو ناپیے۔

تمام پیمائشوں کی مدد سے معین کی درج ذیل خصوصیات آپ کو حاصل ہوں گی۔

- مقابل کے زاویے متماثل ہوتے ہیں۔
- وتر، معین کے مقابل کے زاویوں کی تنصیف کرتے ہیں۔
- وتر ایک دوسرے کی تنصیف کرتے ہیں، اسی طرح ایک دوسرے پر عمود ہوتے ہیں۔

ایسا دکھائی دے گا کہ آپ کی جماعت کے دیگر طلبہ کو بھی یہی خصوصیات حاصل ہوئی ہیں۔

حل کردہ مثالیں



مثال (1) مستطیل ABCD کے وتروں کا نقطۂ تقاطع P ہے۔

(i) اگر $l(AB) = 8$ سم ہوتو $l(DC) = ?$

(ii) $l(BP) = 8.5$ سم ہوتو $l(BD)$ اور $l(BC)$ معلوم کیجیے۔

حل : ایک کچی شکل بنا کر اس میں دی ہوئی معلومات ظاہر کیجیے۔

(i) مستطیل کے مقابل کے ضلع متماثل ہوتے ہیں۔

$\therefore\ l(DC) = l(AB) = 8$ سم

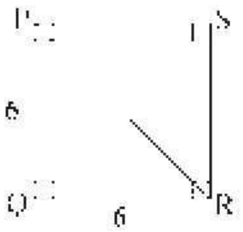
(ii) مستطیل کے وتر ایک دوسرے کی تنصیف کرتے ہیں۔

$\therefore\ l(BD) = 2 \times l(BP) = 2 \times 8.5 = 17$ سم

$\triangle BCD$، ایک قائمۃ الزاویہ مثلث ہے۔فیثا غورث کے مسئلہ کی رو سے

$l(BC)^2 = l(BD)^2 - l(CD)^2 = 17^2 - 8^2 = 289 - 64 = 225$

$\therefore\ l(BC) = \sqrt{225} = 15$ سم



مثال (2) 6 سم ضلع کے مربع کے وتر کی لمبائی معلوم کیجیے۔

حل : فرض کیجیے۔شکل کے مطابق $\square PQRS$، 6 سم ضلع والا ایک مربع ہے۔قطعہ PR وتر ہے۔

$\triangle PQR$ میں فیثا غورث کے مسئلہ کی رو سے $l(PR)^2 = l(PQ)^2 + l(QR)^2$

$= (6)^2 + (6)^2 = 36 + 36 = 72$

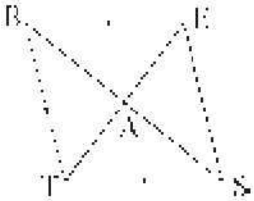
$\therefore\ l(PR) = \sqrt{72}$

اس لیے وتر کی لمبائی $\sqrt{72}$ سم ہے۔

مثال (3) $\square$BEST ، ایک معین ہے جس کے وتر ایک دوسرے کو نقطہ A پر قطع کرتے ہیں۔

(i) اگر $m\angle BTS = 110°$ ہوتو $m\angle TBS$ معلوم کیجیے۔

(ii) اگر $l(TE) = 24$ ، $l(BS) = 70$ ہوتو $l(TS)$ معلوم کیجیے۔



حل : $\square$BEST کی کچی شکل بنا کر وتروں کا نقطہ تقاطع A دکھائیے۔

(i) معین کے مقابل کے زاویے متماثل ہوتے ہیں۔

$\therefore\ m\angle BES = m\angle BTS = 110°$

اب $m\angle BTS + m\angle BES + m\angle TBE + m\angle TSE = 360°$

$\therefore\ 110° + 110° + m\angle TBE + m\angle TSE = 360°$

$\therefore\ m\angle TBE + m\angle TSE = 360° - 220° = 140°$

$\therefore\ 2\, m\angle TBE = 140°$ ... ($\because$ معین کے مقابل کے زاویے متماثل ہوتے ہیں)

$\therefore\ m\angle TBE = 70°$

$\therefore\ m\angle TBS = \frac{1}{2} \times 70° = 35°$ ... (معین کے وتر مقابل کے زاویوں کی تنصیف کرتے ہیں)

(ii) معین کے وتر ایک دوسرے کے عمودی ناصف ہوتے ہیں۔

اس لیے $\triangle TAS$ میں ، $m\angle TAS = 90°$

$l(TA) = \frac{1}{2}\ l(TE) = \frac{1}{2} \times 24 = 12,\ l(AS) = \frac{1}{2}\ l(BS) = \frac{1}{2} \times 70 = 35$

فیثا غورث کے مسئلہ کی رو سے

$l(TS)^2 = l(TA)^2 + l(AS)^2 = (12)^2 + (35)^2 = 144 + 1225 = 1369$

$\therefore\ l(TS) = \sqrt{1369} = 37$

مشقی سیٹ 8.2

1. $l(AB) = 6.0$ سم اور $l(BC) = 4.5$ سم کا مستطیل ABCD بنائیے۔

2. 5.2 سم کے ضلعے کا ایک مربع WXYZ بنائیے۔

3. 4 سم ضلعے اور $m\angle K = 75°$ کا ایک معین $\square$KLMN بنائیے۔

4. ایک مستطیل کا وتر 26 سم اور ایک ضلعے کی لمبائی 24 سم ہو تو اس کا دوسرا ضلع معلوم کیجیے۔

5. معین ABCD کے وتروں کی لمبائی 16 سم اور 12 سم ہے۔اس معین کے ضلع کی لمبائی اوراحاطہ معلوم کیجیے۔

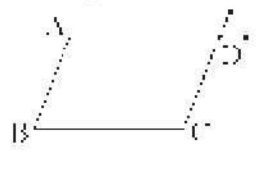
6. 8 سم ضلع کے مربع کا وتر معلوم کیجیے۔

7. ایک معین کے ایک زاویے کی پیائش $50°$ ہے۔اس کے دیگر تین زاویوں کی پیائشیں معلوم کیجیے۔

متوازی الاضلاع (Parallelogram) :

ذواربعۃ الاضلاع کے اس نام سے ہی آپ اس کی تعریف آسانی سے کرسکتے ہیں۔

جس ذواربعۃ الاضلاع کے مقابل کے اضلاع ایک دوسرے کے متوازی ہوتے ہیں، اس ذواربعۃ الاضلاع کو متوازی الاضلاع کہتے ہیں۔



متوازی الاضلاع کس طرح بنائیں گے؟

مقابل کی شکل کے مطابق ضلع AB اور ضلع BC ایک دوسرے سے کسی بھی پیائش کا زاویہ بنانے والے قطعات کھینچیے۔ ''خط کے باہر واقع نقطے سے، اس خط کے متوازی خط کھینچنا'' یہ عمل آپ نے کیا ہے۔اس کا استعمال کرکے نقطہ C سے ضلع AB کے متوازی خط کھینچیے۔اسی طرح نقطہ A سے قطعہ BC کے متوازی خط کھینچیے اوران کے نقطۂ تقاطع کو D نام دیجیے۔ □ABCD متوازی الاضلاع ہے۔

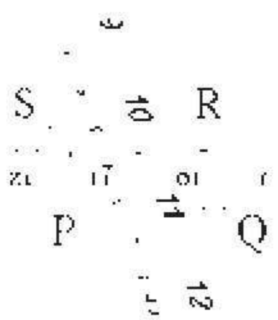
دھیان رکھیے کہ متوازی خطوط کے تقاطع سے بننے والے داخلہ زاویے متمم ہوتے ہیں۔اس لیے اوپر کی شکل میں

$m\angle A + m\angle B = 180°$ ، $m\angle B + m\angle C = 180°$ ، $m\angle C + m\angle D = 180°$ اور $m\angle D + m\angle A = 180°$

یعنی متوازی الاضلاع کے زاویوں کی ایک خصوصیت ذیل کے مطابق ہے۔

- متوازی الاضلاع کے متواتر زاویوں کی ہر جوڑی کے زاویے ایک دوسرے کے متمم ہوتے ہیں۔

متوازی الاضلاع کی مزید خصوصیات معلوم کرنے کے لیے □PQRS ایک متوازی الاضلاع ذیل کا عملی کام کرتے ہوئے بنائیے۔کم زیادہ چوڑائی کی دو ناپ پٹیاں لیجیے۔ان میں سے ایک پٹی پر کاغذ رکھ کر اس کے کناروں سے لکیریں کھینچیے۔دوسری ناپ پٹی اس پر ترچھی رکھ کر اس کے کناروں سے لکیریں کھینچیے۔اس کی وجہ سے آپ ایک متوازی الاضلاع حاصل ہوگا۔اس کے وتر کھینچیے اوران کے نقطۂ تقاطع کو T نام دیجیے۔



(1) ذواربعۃ الاضلاع کے مقابل کے زاویے کی پیائشیں ناپ کر لکھیے۔

(2) مقابل کے ضلعوں کی جوڑیوں کی لمبائیاں ناپ کر لکھیے۔

(3) وتروں کی لمبائیاں ناپ کر لکھیے۔

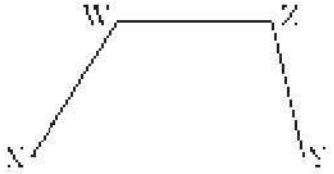
(4) نقطہ T کی وجہ سے بنے ہر وتر کے حصے کی لمبائی ناپ کر لکھیے۔

ان پیائشوں کی مدد سے آپ کو متوازی الاضلاع کی درج ذیل خصوصیات حاصل ہوں گی۔

- مقابل کے زاویوں کی پیائشیں مساوی ہوتی ہیں۔یعنی مقابل کے زاویے متماثل ہوتے ہیں۔
- مقابل کے ضلعوں کی لمبائیاں مساوی ہوتی ہیں یعنی متماثل ہوتے ہیں۔
- وتر ایک دوسرے کی تنصیف کرتے ہیں۔مختلف متوازی الاضلاع بنا کر ان خصوصیات کی تصدیق کیجیے۔

ذوزنقہ (Trapzium) :

جس ذواربعۃ الاضلاع کے مقابل کے ضلعوں کی ایک جوڑی متوازی ہو، اس ذواربعۃ الاضلاع کو ذوزنقہ کہتے ہیں۔



متصلہ شکل میں WXYZ□ میں ضلع WZ اور ضلع XY مقابل کے اضلاع کی صرف ایک جوڑی متوازی ہے۔ تعریف کے مطابق WXYZ□ ایک ذوزنقہ ہے۔

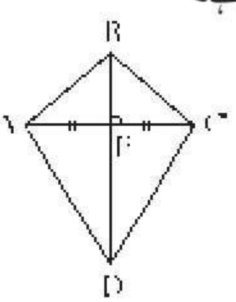
متوازی ضلعوں اور ان کے تقاطع کی وجہ سے بننے والے داخلہ زاویوں کی خصوصیت کی بنا پر

ذوزنقہ میں $m\angle W + m\angle X = 180°$ اور $m\angle Y + m\angle Z = 180°$

متواتر زاویوں کی چار جوڑیوں میں سے دو جوڑیوں کے زاویے ایک دوسرے کے متمم ہوتے ہیں۔

پتنگ (Kite) :

شکل میں ABCD□ دیکھیے۔ اس ذواربعۃ الاضلاع میں وتر BD، وتر AC کا عمودی ناصف ہے۔



جس ذواربعۃ الاضلاع کا ایک وتر، دوسرے وتر کا عمودی ناصف ہوتا ہے ایسے ذواربعۃ الاضلاع کو پتنگ کہتے ہیں۔ اس شکل میں،

قطعہ CD ≅ قطعہ AD اور قطعہ BC ≅ قطعہ AB

اس کی تقسیم کار کی مدد سے تصدیق کیجیے۔

اسی طرح ∠BAD اور ∠BCD ناپیے اور وہ متماثل ہیں اس کی بھی تصدیق کیجیے۔

یعنی پتنگ ذواربعۃ الاضلاع کی ایک قسم ہے جس میں دو خصوصیات ہوتی ہیں۔

- متواتر ضلعوں کی دو جوڑیاں متماثل ہوتی ہیں۔
- مقابل کے زاویوں کی ایک جوڑی کے زاویے متماثل ہوتے ہیں۔

حل کردہ مثالیں

مثال (1) ایک متوازی الاضلاع کے متواتر زاویوں کی پیمائشیں $(5x - 7)°$ اور $(4x + 25)°$ ہیں۔ ان زاویوں کی پیمائش معلوم کیجیے۔

حل : متوازی الاضلاع کے متواتر زاویے متمم ہوتے ہیں۔

$\therefore (5x - 7) + (4x + 25) = 180$

$\therefore 9x + 18 = 180$

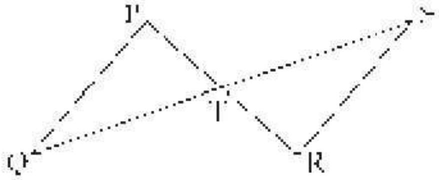
$\therefore 9x = 180 - 18 = 162$

$\therefore x = 18$

ایک زاویے کی پیمائش $= (5x - 7)° = 5 \times 18 - 7 = 90 - 7 = 83°$

دوسرے زاویے کی پیمائش $= (4x + 25)° = 4 \times 18 + 25 = 72 + 25 = 97°$

مثال (2) مقابل کی شکل میں PQRS□ متوازی الاضلاع ہے۔اس کے وتروں کا نقطہ تقاطع T ہے۔شکل کی بنیاد پر ذیل کے سوالوں کے جواب لکھیے۔



(i) اگر $l(PS) = 5.4$ سم ہو تو $l(QR) = ?$

(ii) اگر $l(TS) = 2.5$ سم ہو تو $l(QS) = ?$

(iii) اگر $m\angle QRS = 118°$ ہو تو $m\angle QPS = ?$

(iv) اگر $m\angle SRP = 72°$ ہو تو $m\angle RPQ = ?$

حل : متوازی الاضلاع PQRS میں

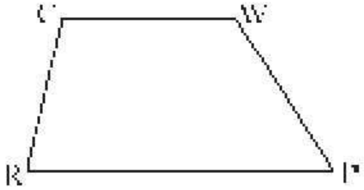
(i) $l(QR) = l(PS) = 5.4$ سم ... (مقابل کے ضلعے متماثل)

(ii) $l(QS) = 2 \times l(TS) = 2 \times 3.5 = 7$ سم ... (وتر ایک دوسرے کی تنصیف کرتے ہیں)

(iii) $m\angle QPS = m\angle QRS = 118°$ ... (مقابل کے زاویے متماثل)

(iv) $m\angle RPQ = m\angle SRP = 72°$ ... (متبادلہ زاویے متماثل)

مثال (3) CWPR□ کے متواتر زاویوں کی پیمائشوں کا تناسب 7 : 9 : 3 : 5 کی نسبت میں ہے۔تب اس ذو اربعۃ الاضلاع کے زاویوں کی پیمائشیں معلوم کیجیے اور ذو اربعۃ الاضلاع کی قسم پہچانیے۔



حل : فرض کیجیے $m\angle C : m\angle W : m\angle P : m\angle R = 7:9:3:5$

اس لیے فرض کیجیے $\angle C$، $\angle W$، $\angle P$، اور $\angle R$ کی پیمائشیں بالترتیب

$7x, 9x, 3x, 5x$

$\therefore 7x + 9x + 3x + 5x = 360°$

$\therefore 24x = 360°, \quad \therefore x = 15$

$\therefore m\angle C = 7 \times 15 = 105°, m\angle W = 9 \times 15 = 135°$

$m\angle P = 3 \times 15 = 45°$ اور $m\angle R = 5 \times 15 = 75°$

$\therefore m\angle C + m\angle R = 105° + 75° = 180°$, $\therefore$ ضلع $CW \parallel$ ضلع RP

$m\angle C + m\angle W = 105° + 135° = 240° \neq 180°$

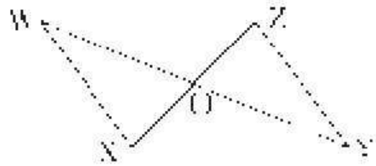
اس لیے ضلع CR، ضلع WP کے متوازی نہیں ہے۔

$\therefore$ CWPR□ کے مقابل کے ضلعوں کی ایک ہی جوڑی متوازی ہے۔

اس لیے CWPR□ ذوزنقہ ہے۔

مشقی سیٹ 8.3

.1 ایک متوازی الاضلاع کے مقابل کے زاویوں کی پیمائشیں $(3x - 2)°$ اور $(50 - x)°$ ہیں۔تب ذو اربعۃ الاضلاع کے تمام زاویوں کی پیمائشیں معلوم کیجیے۔



2. مقابل کے متوازی الاضلاع کی شکل کے تعلق سے درج ذیل سوالات کے جوابات لکھیے۔

(1) اگر $l(WZ) = 4.5$ سم ہوتو $l(XY) = ?$

(2) اگر $l(YZ) = 8.2$ سم ہوتو $l(XW) = ?$

(3) اگر $l(OX) = 2.5$ سم ہوتو $l(OZ) = ?$

(4) اگر $l(WO) = 3.3$ سم ہوتو $l(WY) = ?$

(5) اگر $m\angle WZY = 120°$ ہوتو $m\angle WXY = ?$ اور $m\angle XWZ = ?$

3. $\square$ABCD، ایک متوازی الاضلاع بنایئے۔جس میں $l(BC) = 7$ سم، $\angle ABC = 40°$، $l(AB) = 3$ سم

4. ایک ذواربعۃ الاضلاع کے چار متواتر زاویے $1 : 2 : 3 : 4$ کے تناسب میں ہیں۔وہ کس قسم کا ذواربعۃ الاضلاع ہوگا؟اس ذواربعۃ الاضلاع کے ہر زاویے کی پیمائش معلوم کیجیے۔وجہ لکھیے۔

5. $\square$BARC اس طرح بنایئے کہ $l(BA) = l(BC) = 4.2$ سم، $l(AC) = 6.0$ سم، $l(AR) = l(CR) = 5.6$ سم۔

*6. ذواربعۃ الاضلاع $\square$PQRS اس طرح بنایئے کہ $l(PQ) = 3.5$ سم، $l(QR) = 5.6$ سم، $l(RS) = 3.5$ سم، $m\angle Q = 110°$، $m\angle R = 70°$، اگر $\square$PQRS متوازی الاضلاع دیا ہوا ہوتو اوپر دی ہوئی کون سی معلومات دینا ضروری نہیں ہے۔

جوابات کی فہرست

مشقی سیٹ 8.2

4. 10 سم **5.** ضلع 10 سم اوراحاطہ 40 سم **6.** $\sqrt{128}$ سم **7.** 130°, 50°, 130°

مشقی سیٹ 8.3

1. 37°, 143°, 37°, 143°

2. (1) 4.5 سم (2) 8.2 سم (3) 2.5 سم (4) 6.6 سم (5) 120°, 60°

4. 36°, 72°, 108°, 144°, ذوزنقہ

DFEDA6

9 چھوٹ اور کمیشن

آیئے ذرا یاد کریں

درج ذیل خالی چوکون کو مناسب عدد لکھ کر مکمل کیجیے۔

1. $\frac{12}{100}$ = فی صدی $\square$ = $\square$ %

2. فی صدی 47 = $\frac{\square}{\square}$

3. 86% = $\frac{\square}{\square}$

4. 300 کا 4 فی صدی = 300 × $\frac{\square}{\square}$ = $\square$

5. 1700 کا 15% = 1700 × $\frac{\square}{\square}$ = $\square$

آیئے بحث کریں

اس قسم کے اشتہارات آپ نے دیکھے ہوں گے۔ سیل میں کئی چیزوں کی قیمتوں پر چھوٹ یا تخفیف دی جاتی ہے۔ اپنے یہاں عام طور پر جولائی کے مہینے میں، خاص طور پر کپڑوں کے سیل شروع ہوتے ہیں۔ اس کی وجہ دریافت کیجیے اور بحث کیجیے۔

آیئے سمجھ لیں

چھوٹ (رعایت) (Discount) :

شری سریش نے جون اور جولائی مہینے میں فروخت کی گئی ساڑیوں کی تعداد اور نفع کا جدول ذیل میں دیا گیا ہے۔

مہینہ	ساڑی کی اصل قیمت روپے میں	ساڑی کی فروخت قیمت روپے میں	ایک ساڑی پر حاصل ہونے والا نفع (روپے میں)	فروخت کی گئی ساڑیوں کی تعداد	کل نفع
جون	200	250	50	40	$50 \times 40 = 2000$
جولائی (سیل)	200	230	30	100	$30 \times 100 = 3000$

اوپر کے جدول سے آپ کی سمجھ میں آیا ہوگا کہ جولائی میں ساڑیوں کے سیل کا اعلان کر کے ہر ساڑی پر چھوٹ دی گئی ہے۔ اس لیے ان کا ایک ساڑی پر نفع جون مہینے کی بہ نسبت جولائی مہینے میں کم ہوا۔ پھر بھی جولائی مہینے میں زیادہ ساڑیوں کی فروخت ہوئی اس لیے کل نفع میں اضافہ ہوا۔

فروخت کی جانے والی چیزوں پر ان کی قیمت چھپی ہوئی ہوتی ہے۔ اسے اس چیز کی چھپی ہوئی قیمت (Marked Price) کہتے ہیں۔ دکان دار چھپی ہوئی قیمت پر چھوٹ (رعایت) دیتا ہے۔

اشیا فروخت کرتے وقت، دکاندار چھپی ہوئی قیمت سے جتنی رقم کم لیتا ہے، اس رقم کو ''چھوٹ'' کہتے ہیں۔ چھوٹ دینے کے بعد باقی ماندہ قیمت کو فروخت قیمت کہتے ہیں۔

$$\text{فروخت قیمت} = \text{چھپی ہوئی قیمت} - \text{چھوٹ}$$

چھوٹ کی شرح عام طور پر فی صدی میں دی جاتی ہے۔ 20 فی صدی چھوٹ کا مطلب، اشیا کی چھپی ہوئی قیمت سے 20% کم قیمت لے کر چیز بیچنا۔

یعنی اشیا کی چھپی ہوئی قیمت 100 روپے ہو تو اس پر 20% چھوٹ دینے سے اس کی فروخت قیمت $= 100 - 20 = 80$ روپے ہوجائے گی۔

ایسے کاروبار میں اگر x % چھوٹ ہو تو $\dfrac{\text{اشیا کی قیمت پر چھوٹ}}{\text{چھپی ہوئی قیمت}} = \dfrac{x}{100}$ تعلق ہوتا ہے۔

$$\therefore \quad \text{اشیا کی قیمت پر چھوٹ} = \frac{\text{چھپی ہوئی قیمت} \times x}{100}$$

مزید معلومات کے لیے : آج کل دکان میں جا کر خریدنے کی بجائے کتابیں، کپڑے، موبائیل وغیرہ کئی چیزیں آن لائن خرید و فروخت کی جاتی ہیں۔ جو کمپنی آن لائن اشیا خرید و فروخت کرتی ہیں اسے دکان کی سجاوٹ اور وہاں کے انتظامات کا خرچ بہت کم ہوتا ہے۔ اس لیے آن لائن خرید و فروخت پر چھوٹ ملتی ہے اور اشیا گھر پہنچ ملتی ہیں۔

حل کردہ مثالیں

مثال (1) ایک کتاب کی چھپی ہوئی قیمت 360 روپے ہے۔ دکاندار نے وہ کتاب 306 روپے میں فروخت کی۔ تب اس نے فی صدی چھوٹ کتنی دی؟

حل : چھپی ہوئی قیمت = ₹360 ، فروخت قیمت = ₹306

$$\text{چھوٹ} = 360 - 306 = ₹\ 54$$

اشیا کی چھپی ہوئی قیمت 360 روپے، تب چھوٹ 54 روپے۔

اس لیے فرض کیجیے اشیا کی چھپی ہوئی قیمت 100 روپے، تب چھوٹ x روپے

$$\frac{\text{چھوٹ}}{\text{چھپی ہوئی قیمت}} = \frac{x}{100}$$

$$\therefore \frac{54}{360} = \frac{x}{100} \qquad \therefore x = \frac{54 \times 100}{360} = 15$$

اس لیے کتاب کی چھپی ہوئی قیمت پر 15% چھوٹ دی گئی۔

مثال (2) کرسی کی چھپی ہوئی قیمت 1200 روپے ہے۔اس پر 10% چھوٹ ہوتو کل چھوٹ کتنی؟ اور کرسی کی فروخت قیمت کتنی ہوگی؟

حل :

طریقہ (I)

10% = چھوٹ، روپے 1200 = چھپی ہوئی قیمت

$\frac{\text{چھوٹ}}{\text{چھپی ہوئی قیمت}}$ کا تناسب معلوم کریں۔

فرض کیجیے کرسی کی قیمت پر x روپے چھوٹ ملتی ہے۔

$$\therefore \frac{x}{1200} = \frac{10}{100}$$

$$x = \frac{10}{100} \times 1200$$

$$x = 120$$

$\therefore$ کل چھوٹ = 120 ₹

چھوٹ – چھپی ہوئی قیمت = فروخت قیمت

$$= 1200 - 120$$

$$= 1080$$

اس لیے کرسی کی فروخت قیمت 1080 روپے۔

طریقہ (II)

چھپی ہوئی قیمت پر 10% چھوٹ، یعنی اگر چھپی ہوئی قیمت 100 روپے ہوتو فروخت قیمت 90 روپے۔

اس لیے چھپی ہوئی قیمت 1200 ہوتو

فرض کیجیے فروخت قیمت x روپے

$$\therefore \frac{x}{1200} = \frac{90}{100}$$

$$\therefore x = \frac{90}{100} \times \frac{1200}{1}$$

$$\therefore x = 1080$$

اس لیے کرسی کی فروخت قیمت 1080 روپے۔

روپے 120 = 1200 – 1080 = کل چھوٹ

مثال (3) چھپی ہوئی قیمت پر 20% چھوٹ دے کر ایک ساڑی 1120 روپوں میں فروخت کی گئی تو اس ساڑی کی چھپی ہوئی قیمت کتنی ہوگی؟

حل : فرض کیجیے۔ساڑی کی چھپی ہوئی قیمت 100 روپے ہے۔

اس پر 20% چھوٹ دی گئی۔یعنی گاہک کو وہ ساڑی روپے 80 = 20 – 100 میں فروخت کی گئی۔

یعنی جب فروخت قیمت 80 روپے، تب چھپی ہوئی قیمت 100 روپے۔

فرض کیجیے فروخت قیمت 1120 روپے، تب چھپی ہوئی قیمت x روپے۔

$$\therefore \frac{80}{100} = \frac{1120}{x}$$

$$\therefore x = \frac{1120 \times 100}{80}$$

$$= 1400$$

اس لیے ساڑی کی چھپی ہوئی قیمت 1400 روپے ہوگی۔

مثال (4) ایک دکاندار ایک چیز کی کچھ قیمت طے کرکے فروخت کرنا چاہتا ہے اور چیز کی قیمت اس نے طے کی ہوئی قیمت سے 30% بڑھا کر چھاپتا ہے۔ چیز فروخت کرتے وقت گاہک کو 20% چھوٹ دیتا ہے تو دکاندار کو اس کی طے کردہ قیمت سے کتنے فی صدی زیادہ قیمت حاصل ہوگی؟ معلوم کیجیے۔

حل : قیمت میں اضافے اور اسی طرح نفع میں اضافے کا فی صد طے کی ہوئی قیمت پر ہوتا ہے۔ اس لیے طے کی گئی قیمت 100 روپے فرض کریں تو مثال حل کرنا آسان ہوگا۔

فرض کیجیے طے کی ہوئی قیمت 100 روپے ہے۔ اس قیمت کو وہ 30% سے بڑھا کر بتاتا ہے۔

$\therefore$ چھپی ہوئی قیمت = 130 روپے

چھوٹ = 130 کا 20 فی صد = $130 \times \frac{20}{100} = 26$

$\therefore$ فروخت قیمت = $130 - 26 = 104$ روپے

اگر طے کی ہوئی قیمت 100 روپے ہو تو اسے 104 روپے حاصل ہوتے ہیں۔

یعنی دکاندار کو اس کی طے کی ہوئی قیمت سے 4% زیادہ قیمت ملتی ہے۔

مثال (5) ایک چیز پر دکاندار، گاہک کو 8% چھوٹ دیتا ہے۔ پھر بھی اسے 15% نفع حاصل ہوتا ہے۔ اگر اس چیز کی چھپی قیمت 1750 روپے ہو تو وہ چیز دکاندار نے کتنی قیمت پر خریدی ہوگی؟

حل : چیز کی چھپی قیمت = 1750 روپے، 8 فی صدی چھوٹ

$\therefore$ چھوٹ = $1750 \times \frac{8}{100} = 140$ روپے

چیز کی فروخت قیمت = $1750 - 140 = 1610$ روپے

15% نفع یعنی چیز کی خرید قیمت 100 روپے ہو تو، فروخت قیمت 115 روپے

یعنی، فروخت قیمت 115 روپے ہو تو، خرید قیمت 100 روپے

فرض کیجیے، فروخت قیمت 1610 روپے ہو تو، خرید قیمت x روپے ہے۔

$\therefore \frac{x}{100} = \frac{1610}{115}$ ، $\therefore x = \frac{1610 \times 100}{115} = 1400$

$\therefore$ چیز کی خرید قیمت = 1400 روپے

یہ میری سمجھ میں آ گیا

- فروخت قیمت − چھپی ہوئی قیمت = چھوٹ →
- اگر چھوٹ $x\%$ ہو تب،

$$\frac{x}{100} = \frac{\text{اشیا کی قیمت پر چھوٹ}}{\text{چھپی ہوئی قیمت}}$$

مشقی سیٹ 9.1

1. اگر چھپی ہوئی قیمت = 1700 روپے، فروخت قیمت = 1540 روپے ہوتو چھوٹ معلوم کیجیے۔

2. اگر ₹ 990 = چھپی ہوئی قیمت اور چھوٹ 10 فی صدی ہوتو فروخت قیمت معلوم کیجیے۔

3. اگر ₹990 = فروخت قیمت اور چھوٹ 20 فی صدی ہوتو چھپی ہوئی قیمت معلوم کیجیے۔

4. ایک پنکھے کی چھپی ہوئی قیمت 3000 روپے ہے۔ دکاندار 12% چھوٹ دے تو پنکھے پر دی گئی چھوٹ اور پنکھے کی فروخت قیمت معلوم کیجیے۔

5. 2300 روپے چھپی ہوئی قیمت کا مکسر، گاہک کو 1955 روپے میں ملتا ہے تو گاہک کو ملنے والی فی صدی چھوٹ معلوم کیجیے۔

6. دکاندار ایک ٹی-وی سیٹ پر 11 فی صد چھوٹ دیتا ہے۔ اس لیے گاہک کو وہ سیٹ 22250 روپے میں ملتا ہے تو اس .T.V سیٹ کی چھپی ہوئی قیمت معلوم کیجیے۔

7. چھپی ہوئی قیمت پر 10% چھوٹ ہوتو گاہک کو کل 17 روپے چھوٹ ملتی ہے تو گاہک کو وہ چیز کتنے روپیوں میں حاصل ہوگی اسے معلوم کرنے کے لیے درج ذیل خالی چوکون میں مناسب عدد لکھ کر عملی کام مکمل کیجیے۔

عملی کام : فرض کیجیے، چیز کی چھپی ہوئی قیمت 100 روپے ہے۔

روپے 90 = $\boxed{}$ − $\boxed{}$ = گاہک کو وہ چیز ملے گی۔

یعنی جب $\boxed{}$ روپے چھوٹ، تب فروخت قیمت $\boxed{}$ روپے

فرض کیجیے جب $\boxed{}$ روپے چھوٹ ہو تب فروخت قیمت x روپے۔

$$\therefore \; \frac{x}{\boxed{}} = \frac{\boxed{}}{\boxed{}} \quad , \quad \therefore \; x = \frac{\boxed{} \times \boxed{}}{\boxed{}} = \boxed{}$$

اس لیے گاہک کو وہ چیز 153 روپے میں ملے گی۔

8. دکاندار ایک چیز ایک مخصوص قیمت پر فروخت کرنا طے کرتا ہے اور اس کی قیمت طے کردہ قیمت سے 25% اضافہ کر کے چھاپتا ہے۔ چیز فروخت کرتے وقت وہ گاہک کو 20% چھوٹ دیتا ہے تو دکاندار کو اس کی طے کردہ قیمت اور فروخت قیمت کے درمیان کتنے فی صدی فرق ہوا؟

آیئے سمجھ لیں

کمیشن (Commission) :

اشیا کی پیداوار کرنے والی کمپنی کو خود اپنا مال فروخت کرنا ممکن نہیں ہوتا تب وہ کمپنی کچھ افراد کو اپنا مال مثلاً کتابیں، کپڑے، صابن وغیرہ

فروخت کرنے کی ذمہ داری دیتی ہے۔ اس خدمت کے عوض اس فرد کو کچھ رقم دی جاتی ہے۔ اسے کمیشن کہتے ہیں اس لیے ایسا کام کرنے والے افراد کو کمیشن ایجنٹ کہتے ہیں۔ کمیشن فی صدی میں دیا جاتا ہے۔ اس کی شرح چیزوں کے مطابق مختلف ہوتی ہے۔

زمین (قطعہ اراضی)، گھر، مویشی ان کے مالکوں کو ان چیزوں کے فروخت کرتے وقت آسانی سے گاہک نہیں ملتے۔ اس لیے فروخت کرنے والے اور خریدنے والے ان دونوں کو ایک جگہ لانے کا کام جو شخص کرتا ہے اسے بیچولیا (دلال) یا کمیشن ایجنٹ کہا جاتا ہے۔

اناج، سبزی ترکاری، پھل، پھول وغیرہ زرعی اشیا کی فروخت جس بیچولیا کے ذریعے ہوتی ہے اس فرد کو دلال یا کمیشن ایجنٹ کہتے ہیں۔ اس کام پر دلال کو جو کمیشن ملتا ہے اسے دلالی کہتے ہیں۔ یہ دلالی یا کمیشن جس کا مال فروخت کرنا ہے اس کی طرف سے یا جو اشیا خریدتا ہے اس کی جانب سے، یا دونوں جانب سے مل سکتا ہے۔

حل کردہ مثالیں

مثال (1) ایک دلال کی مدد سے ریحان 2,50,000 روپے قیمت کا قطعہ اراضی فرحان کو فروخت کرتا ہے۔ دلال نے دونوں سے 2% دلالی لی تو دلال کو کل کتنی دلالی ملی؟

قطعہ اراضی کی قیمت = 2,50,000 روپے

$\therefore$ دلالی = $250000 \times \frac{2}{100}$ = 5000 روپے

دلالی دونوں جانب سے ملی۔

کل دلالی = 5000 + 5000 = 10,000 روپے

مثال (2) احمد نے دلال کی معرفت 10 کوئنٹل گیہوں، فی کوئنٹل 4,050 روپے کے حساب سے فروخت کیا۔ اس نے دلال کو 1% دلالی دی۔ تو گیہوں فروخت کرنے پر احمد کو کتنی رقم ملی؟ اسے معلوم کیجیے۔

گیہوں کی کل فروخت قیمت = 10 × 4050 = 40500 روپے، دلالی = 1 فی صد

$\therefore$ دلالی = $40500 \times \frac{1}{100}$ = 405

گیہوں فروخت کرنے پر ملنے والی رقم = گیہوں کی فروخت − دلالی

= 40500 − 405 = 40,095

گیہوں فروخت کرنے پر احمد کو ملنے والی رقم = 40,095 روپے

تخفیف (Rebate) :

کھادی گرام ادھیوگ، بھنڈار، ہاتھ ماگھ، دست کاری کی اشیا فروخت کرنے والا مرکز، مہیلا بچت گٹ وغیرہ انجمنیں کچھ مخصوص مواقع پر گاہک کو چھوٹ دیتی ہیں۔ مثلاً گاندھی جینتی کے موقع پر کھادی کپڑوں پر چھوٹ دی جاتی ہے۔

ایسے وقت دکاندار کو چھپی قیمت سے جتنی رقم کم ملتی ہے اس کی تلافی حکومت کرتی ہے۔ اس اسکیم کے تحت گاہک کو جو چھوٹ ملتی ہے اسے تخفیف Rebate کہتے ہیں۔

انکم ٹیکس ادا کرنے والے شخص کی آمدنی طے شدہ حد تک ہوتی ہے تو انھیں انکم ٹیکس میں چھوٹ ملتی ہے۔ اس چھوٹ کو بھی تخفیف (Rebate) کہتے ہیں۔

مختصراً تخفیف یعنی ایک قسم کی چھوٹ ہی ہوتی ہے۔ وہ مخصوص شرط کے مطابق منظور شدہ اداروں یا حکومت کی جانب سے دی جاتی ہے۔

حل کردہ مثالیں

مثال : ہاتھ ماگھ منڈل کے ایک دکان سے عبداللہ نے درج ذیل اشیا خریدیں۔

(i) 2 چادر ؛ 375 روپے فی چادر

(ii) 525 روپے فی شطرنجی کے حساب سے 2 شطرنجی

اس خرید پر فی صدی 15 روپے تخفیف ملی تو تخفیف کی کل رقم کتنی؟ عبداللہ دکاندار کو کتنی رقم دے گا؟

حل : 2 چادر کی قیمت $= 2 \times 375 =$ ₹750 ؛ 2 شطرنجی کی قیمت $= 2 \times 525 =$ ₹1050

خریدی گئی چیزوں کی کل قیمت $= 750 + 1050 = 1800$ روپے

ملنے والی کل تخفیف $= 1800 \times \frac{15}{100} = 270$ روپے

$\therefore$ عبداللہ کے ذریعے دکاندار کو ادا کی جانے والی رقم $= 1800 - 270 = 1530$ روپے

مشقی سیٹ 9.2

1. جان نے ایک پبلشر کی 4500 روپے قیمت کی کتابیں فروخت کیں۔ اس پر اسے 15% کمیشن ملا۔ تو جان کو کل کتنا کمیشن ملا؟ اسے معلوم کرنے کے لیے خالی چوکون مکمل کیجیے۔

کمیشن کی شرح $= \boxed{}$ ، کتابوں کی فروخت قیمت $= \boxed{}$

حاصل ہونے والا کمیشن $= \frac{\boxed{}}{\boxed{}} \times \boxed{}$ ، $\therefore$ کمیشن $= \boxed{}$ روپے

2. رفیق 4 فی صدی دلالی دے کر دلال کے ذریعے 15000 روپے کے پھول فروخت کرتا ہے۔ دلالی معلوم کیجیے۔ رفیق کو حاصل ہونے والی رقم معلوم کیجیے۔

3. ایک کسان 9200 روپے کا مال ایک دلال کے معرفت فروخت کرتا ہے۔ اسے %2 دلالی دینی پڑی، تو دلال کو کتنی رقم ملے گی؟

4. کھادی بھنڈار سے اُما تائی درج ذیل چیزیں خریدتی ہے :

(i) 3 ساڑیاں، ہرایک کی قیمت 560 روپے۔

(ii) شہد کی 6 بوتلیں، ہرایک کی قیمت 90 روپے۔

اس خرید پر %12 کے حساب سے تخفیف (Rebate) ملی تو اُما تائی کو وہ چیزیں کتنے روپے میں ملیں؟

5. دی ہوئی معلومات کی مدد سے درج ذیل خالی چوکونوں کو مناسب عدد سے پُر کیجیے۔

ایک دلال کے معرفت شریمتی دیپانجلی نے 7,50,000 روپے قیمت کا ایک گھر شریمتی لیلا بین سے خریدا۔ دلال نے ہرایک سے %2 دلالی لی تو

(1) شریمتی دیپانجلی نے گھر خریدنے کے لیے $\boxed{} = \dfrac{\boxed{}}{\boxed{}} \times \boxed{}$ روپے دلالی دی۔

(2) شریمتی لیلا بین نے گھر فروخت کرنے کے لیے $\boxed{}$ روپے دلالی دی۔

(3) دلال کو اس کاروبار میں کل $\boxed{}$ روپے دلالی ملی۔

(4) شریمتی دیپانجلی کو وہ گھر $\boxed{}$ روپے میں ملا۔

(5) شریمتی لیلا بین کو گھر فروخت کرنے پر $\boxed{}$ روپے ملے۔

جوابات کی فہرست

مشقی سیٹ 9.1

1. ₹160 **2.** ₹891 **3.** ₹1125 **4.** چھوٹ ₹360 اور فروخت قیمت ₹2640

5. 15% **6.** ₹25,000

مشقی سیٹ 9.2

1. دلالی ₹600 اور رقم ₹14400 **2.** ₹184 **3.** ₹1953.60

DFN9BT

متفرق مجموعہ سوالات 1

.1 ذیل کے سوالوں کے لیے متبادل جوابات دیے ہوئے ہیں۔ان میں سے مناسب متبادل منتخب کیجیے۔

(1) $\square PQRS$ میں $m\angle P = m\angle R = 108°$ اور $m\angle Q = m\angle S = 72°$ ہوتو ذیل میں سے کون سے اضلاع متوازی ہیں؟

(A) ضلع PQ اور ضلع QR (B) ضلع PQ اور ضلع SR

(C) ضلع SR اور ضلع SP (D) ضلع PS اور ضلع PQ

(2) ذیل کے بیانات پڑھیے، اس کے نیچے دیے ہوئے متبادلات سے مناسب متبادل منتخب کیجیے۔

(i) مستطیل کے وتر ایک دوسرے کے عمودی ناصف ہوتے ہیں۔

(ii) معین کے وتر ایک دوسرے کے عمودی ناصف ہوتے ہیں۔

(iii) متوازی الاضلاع کے وتر ایک دوسرے کے عمودی ناصف ہوتے ہیں۔

(iv) پتنگ کے وتر ایک دوسرے کے عمودی ناصف ہوتے ہیں۔

(A) بیان (ii) اور (iii) صحیح ہیں۔ (B) صرف بیان (ii) صحیح ہے۔

(C) بیان (ii) اور (iv) صحیح ہیں۔ (D) بیان (i)، (iii)، (iv) صحیح ہیں۔

(3) $19^3 = 6859$ ہوتو $\sqrt[3]{0.006859} = ?$

(A) 1.9 (B) 19 (C) 0.019 (D) 0.19

.2 ذیل کے اعداد کے جذرالمکعب معلوم کیجیے۔

(1) 5832 (2) 4096

.3 $m \propto n$ جب $m = 25$ تب $n = 15$ اس کی مدد سے

(1) $n = 87$ ہوتو m کتنا؟ (2) $m = 155$ ہوتو $n = ?$

.4 x اور y کے درمیان معکوس تغیر ہے۔جب $x = 12$ تب $y = 30$ ہوتو

(1) اگر $x = 15$ ہوتو $y = ?$ (2) اگر $y = 18$ ہوتو $x = ?$

.5 ایک خط l کھینچیے۔اس خط سے 3.5 سم کے فاصلے پر ایک متوازی خط کھینچیے۔

.6 (256)^[illegible] یہ عدد کس عدد کے کس جذر کی کون سی قوت کا ہے؟ لکھیے۔

.7 ضابطے کا استعمال کر کے توسیع کیجیے۔

(1) $(5x-7)(5x-9)$ (2) $(2x-3y)^2$ (3) $\left(a+\frac{1}{2}\right)^2$

.8 ایک منفرجۃ الزاویہ مثلث بنائیے۔اس مثلث کے تمام وسطانیے کھینچ کر ان کا نقطہ تراکز دکھائیے۔

.9 $\triangle ABC$ اس طرح بنائیے کہ $l(BC) = 5.5$ سم، $m\angle ABC = 90°$، $l(AB) = 4$ سم اس مثلث کے ارتفاعوں کا نقطۂ تراکز دکھائیے۔

.10 ایک بس کو 48 کلومیٹر فی گھنٹہ کی رفتار سے ایک گاؤں سے دوسرے گاؤں جانے کے لیے 5 گھنٹے لگتے ہیں۔ بس کی رفتار 8 کلومیٹر فی گھنٹہ کم کی جائے تو اتنا ہی فاصلہ طے کرنے کے لیے کتنا وقت لگے گا؟ معلوم کیجیے۔ تغیر کی قسم کی شناخت کر کے مثال حل کیجیے۔

.11 $\triangle ABC$ کی قطعہ AD اور قطعہ BE وسطانیے ہیں۔ G ان کا نقطہ تراکز ہے۔
اگر $l(AG) = 5$ سم ہو تو $l(GD) = ?$ اور $l(GE) = 2$ سم ہو تو $l(BE) = ?$

.12 ذیل کے ناطق اعداد کو اعشاریہ کی صورت میں لکھیے۔

(1) $\frac{8}{13}$ (2) $\frac{11}{7}$ (3) $\frac{5}{16}$ (4) $\frac{7}{9}$

.13 اجزائے ضربی کیجیے۔

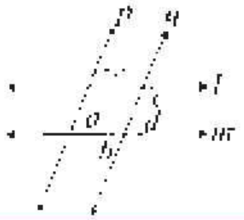
(1) $2y^2-11y+5$ (2) $x^2-2x-80$ (3) $3x^2-4x+1$

.14 ایک T.V. سیٹ کی قیمت 50,000 روپے ہے۔ اس سیٹ کو دکاندار 15% رعایت دے کر فروخت کرتا ہے تو گاہک کو وہ T.V. سیٹ کتنے روپے میں ملے گا؟

.15 راجا بھاؤ نے اپنا پلاٹ (قطعۂ زمین) ایک دلال کی معرفت وسنت راؤ کو 88,00,000 روپے میں فروخت کیا۔ دلال نے دونوں سے 2% شرح سے دلالی لی۔ تو دلال کو کل کتنے روپے دلالی ملی؟

.16 $\square ABCD$ ایک متوازی الاضلاع بنائیے اس طرح کہ $l(DC) = 5.5$ سم، $m\angle D = 45°$ اور $l(AD) = 4$ سم

.17 متصلہ شکل میں خط m || خط l، اسی طرح خط q || خط p ہے۔ اس کی مدد سے $\angle a$، $\angle b$، $\angle c$، $\angle d$ کی پیمائشیں معلوم کیجیے۔



جوابات کی فہرست

1. (i) B (ii) B (iii) D **2.** (1) 18 (2) 16 **3.** (1) 145 (2) 93

4. (1) 24 (2) 20 **6.** 256 کے ساتویں جذر کی پانچویں قوت

7. (1) $25x^2-80x+63$ (2) $8x^3-36x^2y+54xy^2-27y^3$ (3) $a^3+\frac{3a^2}{2}+\frac{3a}{4}+\frac{1}{8}$

10. 6 گھنٹے, معکوس تغیر **11.** $l(GD) = 2.5$ سم , $l(BE) = 6$ سم

12. (1) $0.\overline{615384}$ (2) $1.\overline{571428}$ (3) 0.3125 (4) $0.\dot{7}$

13. (1) $(y-5)(2y-1)$ (2) $(x-10)(x+8)$ (3) $(x-1)(3x-1)$

14. ₹42,500 **14.** ₹3,52,000 **17.** 78°, 78°, 102°, 78°

حصّہ 2

10 کثیر رکنیوں کی تقسیم

آیئے ذرا یاد کریں

گذشتہ سال الجبری عبارتوں کی جمع، تفریق اور ضرب کے اعمال کا ہم نے مطالعہ کیا ہے۔

درج ذیل مثالوں میں خالی چوکون مکمل کیجیے۔

(1) $2a + 3a = \boxed{}$ (2) $7b - 4b = \boxed{}$

(3) $3p \times p^2 = \boxed{}$ (4) $5m^2 \times 3m^2 = \boxed{}$

(5) $(2x + 5y) \times \frac{3}{x} = \boxed{}$ (6) $(3x^2 + 4y) \times (2x + 3y) = \boxed{}$

آیئے سمجھ لیں

کثیر رکنیوں کا تعارف (Introduction to polynomials)

یک متغیری الجبری عبارتوں کے ہر رکن کے متغیر کی قوت نما مکمل عدد ہو تو، وہ عبارت ایک متغیری کثیر رکنی ہوتی ہے۔

مثلاً $x^2 + 2x + 3$ ، $3y^3 + 2y^2 + y + 5$ یہ ایک متغیری کثیر رکنی ہیں۔

کثیر رکنیاں، مخصوص الجبری عبارت ہوتی ہیں، اس لیے کثیر رکنیوں کی جمع، تفریق اور ضرب جیسے اعمال الجبری عبارت کے مطابق کیے جاتے ہیں۔

مثال (1) $(3x^2 - 2x) \times (4x^3 - 3x^2)$

$= 3x^2(4x^3 - 3x^2) - 2x(4x^3 - 3x^2)$

$= 12x^5 - 9x^4 - 8x^4 + 6x^3$

$= 12x^5 - 17x^4 + 6x^3$

مثال (2) $(4x - 5) - (3x^2 - 7x + 8)$

$= 4x - 5 - 3x^2 + 7x - 8$

$= -3x^2 + 11x - 13$

کثیر رکنیوں کا درجہ (Degree of polynomials)

درج ذیل مثالوں کی کثیر رکنیوں کے متغیروں کا سب سے بڑا قوت نما چوکون میں لکھیے۔

مثال (1) کثیر رکنی $3x^2 + 4x$ کے متغیر کا سب سے بڑا قوت نما $\boxed{2}$ ہے۔

مثال (2) کثیر رکنی $7x^4 + 5x + 4x^2 + 2x^3$ کے متغیر کا سب سے بڑا قوت نما $\boxed{}$ ہے۔

دی ہوئی کثیر رکنی کے متغیر کا سب سے بڑا قوت نما، اس کثیر رکنی کا درجہ کہلاتا ہے۔

یہ میری سمجھ میں آگیا

- یک متغیری الجبری عبارت کے ہر رکن کے متغیر کا قوت نما مکمل عدد ہو تو وہ عبارت کثیر رکنی ہوتی ہے۔
- کثیر رکنی میں متغیر کا سب سے بڑا قوت نما اس کثیر رکنی کا درجہ ہوتا ہے۔

آیئے سمجھ لیں

یک رکنی کو یک رکنی سے تقسیم کرنا(To Divide a Mononomial by Mononomial) :

مثال (1) تقسیم کیجیے۔ $15p^3 \div 3p$

حل : تقسیم، ضرب کا معکوس عمل ہوتا ہے۔

اس لیے تقسیم $15p^3 \div 3p$ کے لیے $3p$ یک رکنی کو کس یک رکنی سے ضرب کرنے پر $15p^3$ آئے گا۔

اس بات پر غور کرنا ہوگا۔

$$3p \times 5p^2 = 15p^3 \quad . \quad \therefore 15p^3 \div 3p = 5p^2$$

$$\begin{array}{r|l} & 5p^2 \\ \hline 3p & 15p^3 \\ - & 15p^3 \\ \hline & 0 \end{array}$$

اس مثال کی ترتیب بازو میں دکھائے ہوئے کے مطابق کر سکتے ہیں۔

مثال (2) تقسیم کیجیے اور خالی چوکون میں مناسب ارکان لکھیے۔

(i) $(-36x^2) \div (-9x)$

$$\begin{array}{r|l} & \boxed{} \\ \hline -9x & -36x^2 \\ - & \boxed{} \\ \hline & \boxed{} \end{array}$$

(ii) $(5m^2) \div (-m)$

$$\begin{array}{r|l} & \boxed{} \\ \hline -m & 5m^2 \\ - & \boxed{} \\ \hline & \boxed{} \end{array}$$

(iii) $(-20y^5) \div (2y^3)$

$$\begin{array}{r|l} & \boxed{} \\ \hline 2y^3 & -20y^5 \\ - & \boxed{} \\ \hline & \boxed{} \end{array}$$

کثیر رکنی کو یک رکنی سے تقسیم کرنا(To divide a polynomial by a mononomial) :

درج ذیل مثال کا مطالعہ کیجیے اور کثیر رکنی کو یک رکنی سے تقسیم کرنے کا طریقہ سمجھ لیں۔

مثال (1) $(6x^3 + 8x^2) \div 2x$

حل :

$$\begin{array}{r|l} & 3x^2 + 4x \\ \hline 2x & 6x^3 + 8x^2 \\ - & 6x^3 \\ \hline & 0 + 8x^2 \\ - & \quad - 8x^2 \\ \hline & 0 \end{array}$$

وضاحت

(i) $2x \times \boxed{3x^2} = 6x^3$

(ii) $2x \times \boxed{4x} = 8x^2$

$\therefore$ خارج قسمت $= 3x^2 + 4x$

باقی $= 0$

مثال (2) $(15y^4 + 10y^3 - 3y^2) \div 5y^2$

حل :

$$
\begin{array}{r|l}
 & 3y^2 + 2y - \frac{3}{5} \\
\hline
5y^2 & 15y^4 + 10y^3 - 3y^2 \\
 & \underline{-15y^4} \\
 & 0 + 10y^3 - 3y^2 \\
 & \underline{-10y^3} \\
 & 0 - 3y^2 \\
 & \underline{\mp 3y^2} \\
 & 0
\end{array}
$$

وضاحت –

(i) $5y^2 \times \boxed{3y^2} = 15y^4$

(ii) $5y^2 \times \boxed{2y} = 10y^3$

(iii) $5y^2 \times \boxed{-\frac{3}{5}} = -3y^2$

$\therefore$ خارج قسمت $= 3y^2 + 2y - \frac{3}{5}$ ، باقی $= 0$

مثال (3) $(12p^3 - 6p^2 + 4p) \div 3p^2$

حل :

$$
\begin{array}{r|l}
 & 4p - 2 \\
\hline
3p^2 & 12p^3 - 6p^2 + 4p \\
 & \underline{-12p^3} \\
 & 0 - 6p^2 + 4p \\
 & \underline{\mp 6p^2} \\
 & 0 + 4p
\end{array}
$$

وضاحت –

(i) $3p^2 \times \boxed{4p} = 12p^3$

(ii) $3p^2 \times \boxed{-2} = -6p^2$

$\therefore$ خارج قسمت $= 4p - 2,$ باقی $= 0$

مثال (4) $(5x^4 - 3x^3 + 4x^2 + 2x - 6) \div x^2$

حل :

$$
\begin{array}{r|l}
 & 5x^2 - 3x + 4 \\
\hline
x^2 & 5x^4 - 3x^3 + 4x^2 + 2x - 6 \\
 & \underline{-5x^4} \\
 & 0 - 3x^3 + 4x^2 + 2x - 6 \\
 & \underline{\mp 3x^3} \\
 & 0 + 4x^2 + 2x - 6 \\
 & \underline{-4x^2} \\
 & 0 + 2x - 6
\end{array}
$$

وضاحت –

(i) $x^2 \times \boxed{5x^2} = 5x^4$

(ii) $x^2 \times \boxed{-3x} = -3x^3$

(iii) $x^2 \times \boxed{4} = 4x^2$

$\therefore$ خارج قسمت $= 5x^2 - 3x + 4,$ باقی $= 0$

کثیر رکنیوں کی تقسیم کرتے وقت جب باقی صفر آتا ہو، یا باقی رکن کا درجہ، مقسوم الیہ کثیر رکنی کے درجے سے چھوٹا ہوتب تقسیم کا عمل مکمل ہوتا ہے۔

اوپر کی مثال (3) میں باقی $4p$ کا درجہ مقسوم الیہ $3p^2$ کے درجے سے چھوٹا ہے۔اسی طرح مثال (4) میں باقی $2x - 6$ کا درجہ مقسوم الیہ x^2 کے درجے سے چھوٹا ہے۔اسے دھیان میں رکھیے۔

مشقی سیٹ 10.1

.1 تقسیم کیجیے : خارج قسمت اور باقی لکھیے۔

(1) $21m^2 \div 7m$ (2) $40a^3 \div (-10a)$

(3) $(-48p^4) \div (-9p^2)$ (4) $40m^5 \div 30m^3$

(5) $(5x^3 - 3x^2) \div x^2$ (6) $(8p^3 - 4p^2) \div 2p^2$

(7) $(2y^3 + 4y^2 + 3) \div 2y^2$ (8) $(21x^4 - 14x^2 + 7x) \div 7x^3$

(9) $(6x^5 - 4x^4 + 8x^3 + 2x^2) \div 2x^2$ (10) $(25m^4 - 15m^3 + 10m + 8) \div 5m^3$

آیئے سمجھ لیں

کثیر رکنی کو دو رکنی سے تقسیم کرنا : (To Divide a Polynomial by a Binomial)

کثیر رکنیوں کو دو رکنی سے تقسیم کرنے کا طریقہ، کثیر رکنیوں کو یک رکنی سے تقسیم کرنے کے طریقے کے جیسا ہی ہوتا ہے۔

مثال (1) $(x^2 + 4x + 4) \div (x + 2)$

حل :

$$\begin{array}{r|l} & x + 2 \\ \hline x + 2 & x^2 + 4x + 4 \\ & \underset{-}{}x^2 \underset{-}{+} 2x \\ \hline & 0 + 2x + 4 \\ & \underset{-}{+} 2x \underset{-}{+} 4 \\ \hline & 0 \end{array}$$

وضاحت :

(i) پہلے مقسوم اور مقسوم الیہ کو قوت نما کی اترتی ترتیب میں لکھیے۔

مقسوم الیہ کے پہلے رکن کو x سے ضرب کرنے پر مقسوم کا پہلا رکن حاصل ہوتا ہے۔

$\therefore$ مقسوم الیہ کو x سے ضرب کریں۔

(ii) $(x + 2) \times \boxed{2} = 2x + 4$

$\therefore$ خارج قسمت $= x + 2$

باقی $= 0$

مثال (2) $(y^4 + 24y - 10y^2) \div (y + 4)$

حل : یہاں مقسوم کثیر رکنی کا درجہ 4 ہے۔اس کے متغیروں کے قوت نما اترتی ترتیب میں نہیں ہیں۔اسی طرح قوت نما 3 کا رکن بھی نہیں ہے۔اسے $0y^3$ مان کر اور مقسوم کثیر رکنی کو قوت نما کی اترتی ترتیب میں لکھ کر تقسیم کریں۔

$$
\begin{array}{r|l}
 & y^3 - 4y^2 + 6y \\
\hline
y + 4 & y^4 + 0y^3 - 10y^2 + 24y \\
 & \underline{-\,y^4 \pm 4y^3} \\
 & 0 - 4y^3 - 10y^2 + 24y \\
 & \underline{\mp 4y^3 \mp 16y^2} \\
 & 0 + 6y^2 + 24y \\
 & \underline{-\,6y^2 \pm 24y} \\
 & 0
\end{array}
$$

وضاحت

(i) $(y + 4) \times y^3 = y^4 + 4y^3$

(ii) $(y + 4) \times -4y^2 = -4y^3 - 16y^2$

(iii) $(y + 4) \times 6y = 6y^2 + 24y$

$\therefore$ خارج قسمت $= y^3 - 4y^2 + 6y$, باقی $= 0$

مثال (3) $(6x^4 + 3x^2 - 9 + 5x + 5x^3) \div (x^2 - 1)$

حل :

$$
\begin{array}{r|l}
 & 6x^2 + 5x + 9 \\
\hline
x^2 - 1 & 6x^4 + 5x^3 + 3x^2 + 5x - 9 \\
 & \underline{-\,6x^4 \qquad \mp 6x^2} \\
 & 0 + 5x^3 + 9x^2 + 5x - 9 \\
 & \underline{\pm 5x^3 \qquad \mp 5x} \\
 & 0 + 9x^2 + 10x - 9 \\
 & \underline{-\,9x^2 \qquad \mp 9} \\
 & 0 + 10x + 0
\end{array}
$$

وضاحت

(i) $(x^2 - 1) \times 6x^2 = 6x^4 - 6x^2$

(ii) $(x^2 - 1) \times 5x = 5x^3 - 5x$

(iii) $(x^2 - 1) \times 9 = 9x^2 - 9$

$\therefore$ خارج قسمت $= 6x^2 + 5x + 9$, باقی $= 10x$

یہ میری سمجھ میں آ گیا

- کثیر رکنی کو تقسیم کرتے وقت جب باقی صفر بچتا ہے یا باقی کا درجہ، مقسوم الیہ کثیر رکنی کے درجے سے چھوٹا ہوتا ہے تب تقسیم کا عمل مکمل ہو جاتا ہے۔
- مقسوم کثیر رکنی کے ارکان قوت نما کی اترتی ترتیب میں نہیں ہوں تو کثیر رکنی کو قوت نما کی اُترتی ترتیب میں لکھیے۔ اگر کسی قوت نما کا رکن نہیں ہو تو اس کا ضریب 0 مان کر قوت نما کی اترتی ترتیب مکمل کیجیے۔

مشقی سیٹ 10.2

1. تقسیم کیجیے۔ خارج قسمت اور باقی لکھیے۔

(1) $(y^2 + 10y + 24) \div (y + 4)$ (2) $(p^2 + 7p - 5) \div (p + 3)$

(3) $(3x + 2x^2 + 4x^3) \div (x - 4)$ (4) $(2m^3 + m^2 + m + 9) \div (2m - 1)$

(5) $(3x - 3x^2 - 12 + x^4 + x^3) \div (2 + x^2)$

(6*) $(a^4 - a^3 + a^2 - a + 1) \div (a^3 - 2)$

(7*) $(4x^4 - 5x^3 - 7x + 1) \div (4x - 1)$

جوابات کی فہرست

مشقی سیٹ 10.1

1. $3m$, 0 2. $-4a^2$, 0 3. $\frac{-16}{3}p^2$, 0 4. $\frac{4}{3}m^2$, 0

5. $5x - 3$, 0 6. $4p - 2$, 0 7. $y + 2$, 3 8. $3x$, $-14x^2 + 7x$

9. $3x^3 - 2x^2 + 4x + 1$, 0 10. $5m - 3$, $10m + 8$

مشقی سیٹ 10.2

1. $y + 6$, 0 2. $p + 4$, -17 3. $4x^2 + 18x + 75$, 300

4. $m^2 + m + 1$, 10 5. $x^2 + x - 5$, $x - 2$

6. $a - 1$, $a^2 + a - 1$ 7. $x^3 - x^2 - \frac{x}{4} - \frac{29}{16}$, $-\frac{13}{16}$

DFX5DG

11 شماریات

آیئے ذرا یاد کریں

مثال : نادرہ کے ذریعے ایک کتاب کے روزانہ مطالعہ کیے ہوئے صفحات کی تعداد 60، 50، 54، 46، 50 ہیں ۔ اس بنا پر روزانہ پڑھے ہوئے صفحات کا اوسط معلوم کیجیے۔

حل :

$$\text{اوسط} = \frac{\text{تمام شماروں کا مجموعہ}}{\text{شماروں کی کل تعداد}}$$

$$= \frac{60 + \square + \square + \square + 50}{\square} = \frac{\square}{\square} = \square$$

اس لیے روزانہ مطالعہ کیے ہوئے صفحات کا اوسط $\square$ ہے۔

اس اوسط کو میانیہ کہتے ہیں ۔

آیئے سمجھ لیں

مندرجہ بالا مثال میں روزانہ پڑھے ہوئے صفحات کی تعداد کو شماریاتی معلومات کہتے ہیں ۔ اس بنا پر نادرہ روزانہ تقریباً 52 صفحات پڑھتی ہے۔ یہ نتیجہ اخذ کیا گیا ہے۔

کسی واقعہ کے تعلق سے یا مسئلے کے متعلق شماریاتی معلومات جمع کرنا، اس معلومات کا مطالعہ کر کے کچھ نتیجہ حاصل کرنا، یہ ایک آزاد علم کی شاخ ہے۔ اس شاخ کو شماریات نام دیا گیا ہے۔

میانیہ (Mean)

ہم نے دیکھا کہ 60، 50، 54، 46 اور 50 اعداد کا اوسط 52 ہے۔ اس اوسط کو شماریات کی زبان میں میانیہ کہتے ہیں ۔

عددی معطیات کا میانیہ معلوم کرنے کے لیے معطیات کا مجموعہ کیا جاتا ہے۔ اس مجموعے کو معطیات کی تعداد سے تقسیم کیا جاتا ہے۔

میانیہ معلوم کرنے کے اس طریقے کا ہم مزید مطالعہ کریں گے۔ اس لیے ذیل کی مثال دیکھیے ۔

مثال : شاہین ہائی اسکول کراڈ میں جماعت آٹھویں کے 37 طلبہ کے ذریعے ریاضی میں 10 مارکس کی ایک آزمائش میں حاصل کردہ مارکس ذیل کے مطابق ہیں ۔ ان کا میانیہ معلوم کیجیے۔

2, 4, 4, 8, 6, 7, 3, 8, 9, 10, 10, 8, 9, 7, 6, 5, 4, 6, 7, 8, 4, 8, 9, 7, 6,
5, 10, 9, 7, 9, 10, 9, 6, 9, 9, 4, 7.

حل : ہم جانتے ہیں کہ اس مثال میں معطیات کے اعداد کا مجموعہ کرنے میں زیادہ وقت درکار ہوگا۔

$35 = 7 \times 5 = 7 + 7 + 7 + 7 + 7$ اس بنا پر ایک عدد میں وہی عدد جمع کرنے پر عمل آسان ہوجاتا ہے۔ اس بات کو یاد رکھیے۔ اس بات کا استعمال کرکے اوپر کے اعداد کا مجموعہ کرنا سہولت بخش ہوگا۔ اس لیے معطیات کے اعداد کی درجہ بندی کرکے اعداد کا مجموعہ کریں گے۔

مارکس (شمارہ) x_i	شماریاتی نشانات	طلبہ کی تعداد f_i	$f_i \times x_i$
2	𝍷	1	$1 \times 2 = 2$
3	𝍷	1	$1 \times 3 = 3$
4	𝍸	5	$5 \times 4 = 20$
5	𝍷𝍷	2	$2 \times 5 = 10$
6	𝍸	5	$5 \times 6 = 30$
7	𝍸 𝍷	6	$6 \times 7 = 42$
8	𝍸	5	$5 \times 8 = 40$
9	𝍸 𝍷𝍷𝍷	8	$8 \times 9 = 72$
10	𝍷𝍷𝍷𝍷	4	$4 \times 10 = 40$
		$N = 37$	$\Sigma f_i \times x_i = 259$

میانیہ $= \dfrac{\Sigma f_i \times x_i}{N}$

$= \dfrac{259}{37}$

$= 7$

مندرجہ بالا طریقے کے مطابق جدول بنا کر معطیات کا میانیہ معلوم کرنے کے لیے ذیل کے مرحلے دھیان میں رکھیے۔

- پہلے ستون میں ... $x_1 < x_2 < x_3$، اس طرح چڑھتی ترتیب میں شمارے لکھیے، اسے x_i سے ظاہر کیا گیا ہے۔
- دوسرے ستون میں شماریاتی نشانات لگائیے۔
- تیسرے ستون میں ہر شمارے کے تعلق سے شماریاتی نشانات گن کر لکھیے۔ اسے تعدد f_i سے ظاہر کیا گیا ہے۔ اس کے نیچے تمام تعدد کا مجموعہ لکھیے۔ کل تعدد N سے ظاہر کیا گیا ہے۔
- آخری ستون میں $f_i \times x_i$ حاصل ضرب لکھیے۔ اس کے نیچے تمام حاصل ضرب کا مجموعہ کیجیے۔ تمام $f_i \times x_i$ کے مجموعے کو $\Sigma f_i x_i$ سے ظاہر کرتے ہیں۔ 'Σ' (سگما) علامت ''مجموعہ'' کے لیے استعمال کی جاتی ہے۔

میانیہ، $\bar{x}$ (ایکس بار) سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$\therefore \text{ میانیہ } \bar{x} = \frac{\Sigma f_i \times x_i}{N}$$

مثال : راجا پور گاؤں کے 30 کسانوں کے سویابین کی فی ایکڑ پیداوار کوئنٹل میں ذیل کے مطابق ہے۔

9, 7, 5, 8, 6, 5.5, 7.5, 5, 8, 5, 6.5, 5, 5.5, 4, 4, 8, 6, 8, 7.5, 6, 9, 5.5, 7.5, 8, 5, 6.5, 5, 5.5, 4, 8.

اس بنا پر تعددی تقسیمی جدول بنائیے اور سویابین کی فی ایکڑ پیداوار کا میانیہ معلوم کیجیے۔

حل :

<table>
<tr><th>فی ایکڑ پیداوار (کوئنٹل میں)
(شمارہ) x_i</th><th>شماریاتی نشانات</th><th>کسانوں کی تعداد
(تعدد) f_i</th><th>$f_i \times x_i$</th></tr>
<tr><td>4</td><td>𝍷𝍷𝍷</td><td>3</td><td>12</td></tr>
<tr><td>5</td><td>𝍸</td><td>5</td><td>25</td></tr>
<tr><td>5.5</td><td>𝍷𝍷𝍷𝍷</td><td>4</td><td>22</td></tr>
<tr><td>6</td><td>𝍷𝍷𝍷</td><td>3</td><td>18</td></tr>
<tr><td>6.5</td><td>𝍷𝍷</td><td>2</td><td>13</td></tr>
<tr><td>7.5</td><td>𝍷𝍷𝍷𝍷</td><td>4</td><td>30</td></tr>
<tr><td>8</td><td>𝍸𝍷</td><td>6</td><td>48</td></tr>
<tr><td>9</td><td>𝍷𝍷𝍷</td><td>3</td><td>27</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>$N = 30$</td><td>$\Sigma f_i \times x_i = 195$</td></tr>
</table>

میانیہ $\bar{x} = \dfrac{\Sigma f_i \times x_i}{N} = \dfrac{195}{30} = 6.5$

فی ایکڑ سویابین کی پیداوار کا میانیہ 6.5 کوئنٹل ہے۔

مشقی سیٹ 11.1

1. جماعت آٹھویں کے 30 طلبہ میں سے ہر ایک کے لگائے ہوئے پودوں کی تعداد ذیل کے تعددی تقسیمی جدول میں دی ہوئی ہے۔

اس بنا پر ہر ایک کے ذریعے لگائے ہوئے پودوں کا میانیہ معلوم کرنے کے لیے ذیل کا جدول مکمل کیجیے۔

پودوں کی تعداد (شمارہ) x_i	طلبہ کی تعداد (تعدد) f_i	$f_i \times x_i$
1	4	4
2	6	...
3	12	...
4	8	...
	$N = \square$	$\Sigma f_i \times x_i = \square$

میانیہ $\bar{x} = \dfrac{\square}{N}$

$= \dfrac{\square}{\square}$

$= \square$

$\therefore$ ہر طالب علم کے ذریعے لگائے ہوئے پودوں کا میانیہ $\square$ ہے۔

2. ایک گاؤں کے 25 خاندانوں کے ذریعے مئی مہینے میں استعمال کردہ بجلی کا یونٹ ذیل کے جدول میں دیا ہوا ہے۔ جدول مکمل کرکے ذیل کے سوالات کے جوابات لکھیے۔

بجلی کا استعمال (یونٹ) (شمارہ) x_i	خاندان کی تعداد (تعدد) f_i	$f_i \times x_i$
30	7	....
45	2	....
60	8	....
75	5	....
90	3	....
	N = ...	$\Sigma f_i \times x_i$ = ...

(1) 45 یونٹ استعمال کرنے والے کل کتنے خاندان ہیں؟

(2) جس شمارے کا تعدد 5 ہے وہ شمارہ کون سا ہے؟

(3) $N = ?\ ,\ \Sigma f_i \times x_i = ?$

(4) اس بنا پر مئی مہینے میں ہر خاندان کے ذریعے استعمال کی گئی بجلی کا میانیہ معلوم کیجیے۔

3. بھلار کے 40 خاندان کے افراد کی تعداد دی گئی ہے۔

1, 6, 5, 4, 3, 2, 7, 2, 3, 4, 5, 6, 4, 6, 2, 3, 2, 1, 4, 5, 6, 7, 3, 4, 5, 2, 4, 3, 2, 3, 5, 5, 4, 6, 2, 3, 5, 6, 4, 2

اس بنا پر 40 خاندانوں کے افراد کی تعداد کا میانیہ تعددی جدول بنا کر معلوم کیجیے۔

4. ماڈل ہائی اسکول ناندیڑ کے ذریعے ریاستی سطح پر سائنس نمائش میں گذشتہ 20 سال میں پیش کردہ ریاضی اور سائنس کے پروجیکٹ کی تعداد ذیل کے مطابق ہے۔ اس بنا پر تعددی جدول بنا کر معطیات کا میانیہ معلوم کیجیے۔

2, 3, 4, 1, 2, 3, 1, 5, 4, 2, 3, 1, 3, 5, 4, 3, 2, 2, 3, 2.

آیئے سمجھ لیں

گذشتہ جماعت میں ہم نے سادہ ستونی ترسیم اور متصل ستونی ترسیم کا مطالعہ کیا ہے۔ اب ہم ستونی ترسیم کی دوسری قسموں کا مطالعہ کریں گے۔

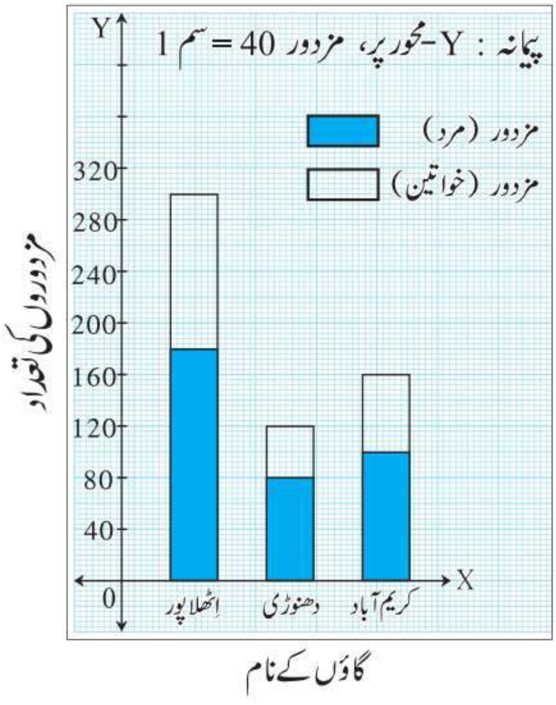
تقسیمی ستونی ترسیم **(Subdivided bar diagram)**

معطیات کا تجزیاتی موازنہ متصل ستونی ترسیم کی طرح تقسیمی ستونی ترسیم سے بھی کیا جاتا ہے۔ اس میں دو یا مزید اجزا کی معطیات ایک ہی ستون میں ظاہر کی جاتی ہے۔ تقسیمی ترسیم کے مراحل کا مطالعہ کریں گے۔

گاؤں	اٹھلا	دھنوڑی	کریم آباد
مرد (مزدور)	180	80	100
خواتین (مزدور)	120	40	60
کل مزدور	300	$\square$	$\square$

پہلے آپ ستون میں دی ہوئی معطیات کے مطابق مذکورہ بالا جدول مکمل کیجیے۔

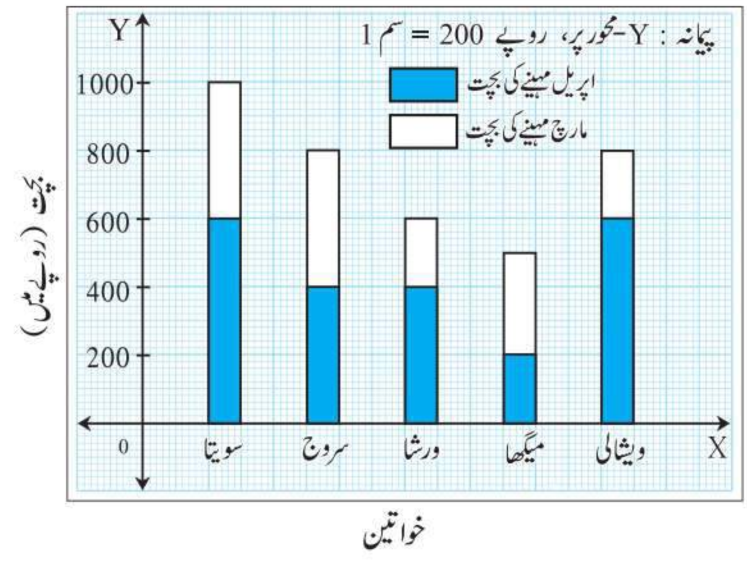
- ترسیم کاغذ پر X- محور اور Y- محور کھینچیے۔
- مساوی فاصلہ رکھتے ہوئے X- محور پر گاؤں کے نام لکھیے۔
- Y- محور پر مزدوروں کی تعداد لکھیے۔ 1 سم = 40 مزدور پیمانہ لیجیے۔
- اِٹھلا پور کے کل 300 مزدور ہیں۔ مزدوروں کی تعداد ایک ستون کے ذریعے دکھایئے۔
- اس میں کل مزدوروں کے ستون کا ایک حصہ مرد مزدور ہے۔ اسے الگ نشان سے ظاہر کیا گیا ہے۔
- ستون کا بقیہ حصہ خواتین مزدوروں کی تعداد کو ظاہر کرتا ہے۔ اسے مختلف نشان سے ظاہر کیا گیا ہے۔
- اس طرح دھنوڑی اور کریم آباد کے لیے تقسیمی ستون کھینچیے۔



اوپر کے مرحلوں کے مطابق تقسیمی ستونی ترسیم بازو کی شکل میں بنا کر دکھایا گیا ہے۔ اس کا معائنہ کیجیے۔

مشقی سیٹ 11.2

1. ذیل کی شکل کا معائنہ کیجیے اور سوالات کے جوابات لکھیے۔



(1) یہ کس قسم کا ستونی ترسیم ہے؟

(2) ویشالی کی اپریل مہینے کی بچت کتنی ہے؟

(3) سروج کی مارچ اور اپریل دونوں مہینوں کی کل بچت کتنی ہے؟

(4) سویتا کی کل بچت میگھا کی کل بچت سے کتنی زیادہ ہے؟

(5) اپریل مہینے میں کس کی بچت سب سے کم ہے؟

2. ایک ضلع پریشد اسکول میں جماعت پانچویں سے آٹھویں کے لڑکے اور لڑکیوں کی تعداد ذیل کے جدول میں دی گئی ہے۔ اس بنا پر تقسیمی ستونی ترسیم کھینچیے۔ (پیمانہ : Y-محور پر 1 سم = 10 طلبہ لیجیے)

جماعت	پانچویں	چھٹی	ساتویں	آٹھویں
لڑکے	34	26	21	25
لڑکیاں	17	14	14	20

3. ذیل کے جدول میں چار گاؤں میں سال 2016 اور 2017 میں لگائے گئے درختوں کی تعداد دی گئی ہے۔ جدول کی معلومات کو تقسیم ستونی ترسیم کے ذریعے دکھایئے۔

گاؤں / سال	کرجت	وڑگاؤں	شیواپور	کھنڈالا
2016	150	250	200	100
2017	200	300	250	150

4. درج ذیل جدول میں تین شہروں میں جماعت آٹھویں کے طلبہ کے ذریعے اسکول جانے کے لیے استعمال کی جانے والی سواریوں اور پیدل جانے والوں کی معلومات دی گئی ہے۔ اس معلومات کو ظاہر کرنے کے لیے تقسیمی ستونی ترسیم بنایئے۔ (پیمانہ : Y-محور پر 1 سم =500 طلبہ لیجیے)

شہر / سواری	پیٹھن	ایولہ	شاہ پور
سائیکل	3250	1500	1250
بس اور آٹو رکشا	750	500	500
پیدل	1000	1000	500

آیئے سمجھ لیں

فی صدی ستونی ترسیم (Percentage bar diagram)

اروی گاؤں میں لگائے گئے 60 درختوں میں سے 42 درخت نمو پائے اور مورشی گاؤں میں لگائے گئے 75 درختوں میں سے 45 درخت نمو پائے۔ بارشی گاؤں میں لگائے گئے 90 درختوں میں سے 45 درخت نمو پائے۔ کس گاؤں میں شجرکاری زیادہ کامیاب ہوئی اسے سمجھنے کے لیے صرف اعداد کافی نہیں ہیں۔ اس کے لیے نمو پائے درختوں کا فی صد معلوم کرنا ضروری ہے۔

اروی میں نمو پائے درختوں کا فی صد = $\frac{42}{60} \times 100 = 70$

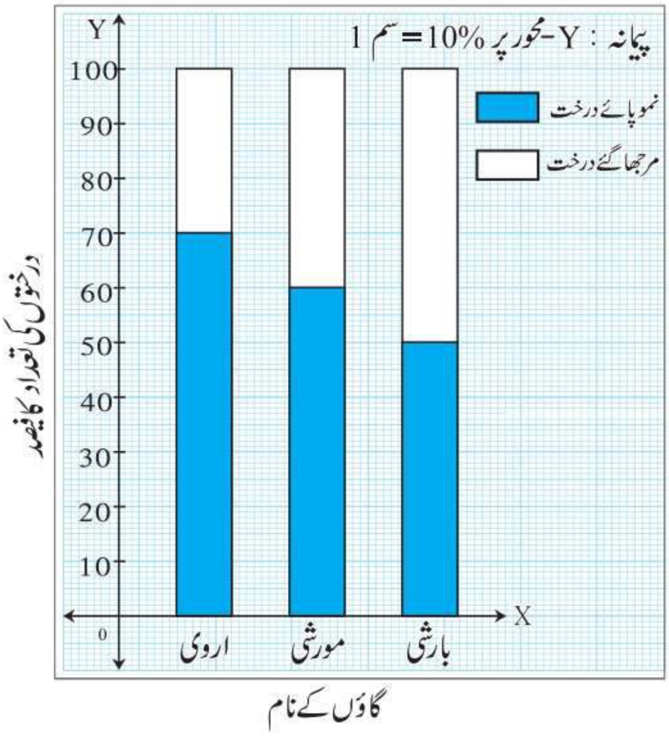
مورشی میں نمو پائے درختوں کا فی صد = $\frac{45}{75} \times 100 = 60$

اس فی صد سے ہمیں یہ سمجھ میں آتا ہے کہ اروی گاؤں میں نمو پائے درختوں کی تعداد کم ہے لیکن فی صد زیادہ ہے۔ یعنی فی صد سے کچھ الگ قسم کی معلومات حاصل ہوتی ہے۔ دی گئی معلومات فی صدی میں تبدیل کر کے جو تقسیمی ستون بناتے ہیں۔ اسے فی صدی ستونی ترسیم کہتے ہیں۔

فی صدی ستونی ترسیم، تقسیمی ستونی ترسیم کی ایک خاص صورت ہوتی ہے۔ فی صدی ستونی ترسیم ذیل کے مرحلوں کی مدد سے بناتے ہیں۔

- پہلے ہم ذیل کے مطابق جدول بنائیں گے۔

گاؤں	اروی	موشی	بارشی
لگائے گئے درختوں کی تعداد	60	75	90
نمو پائے درختوں کی تعداد	42	45	45
نمو پائے درختوں کا فی صد	$\frac{42}{60} \times 100 = \boxed{70}$	$\frac{45}{75} \times 100 = \boxed{60}$	$\frac{45}{90} \times 100 = \boxed{50}$



- فی صدی ستونی ترسیم میں تمام ستون 100 اکائی اونچائی کے لیے جاتے ہیں۔
- ہر ستون میں نمو پائے درختوں کا فی صد دکھائیں گے۔ بقیہ فی صد مرجھا جانے والے درختوں کا ہوگا۔
- فی صدی ستونی ترسیم ایک قسم کی تقسیمی ستونی ترسیم ہوتی ہے۔اس لیے دیگر تمام عمل تقسیمی ستونی ترسیم کے جیسے ہی ہوتے ہیں۔

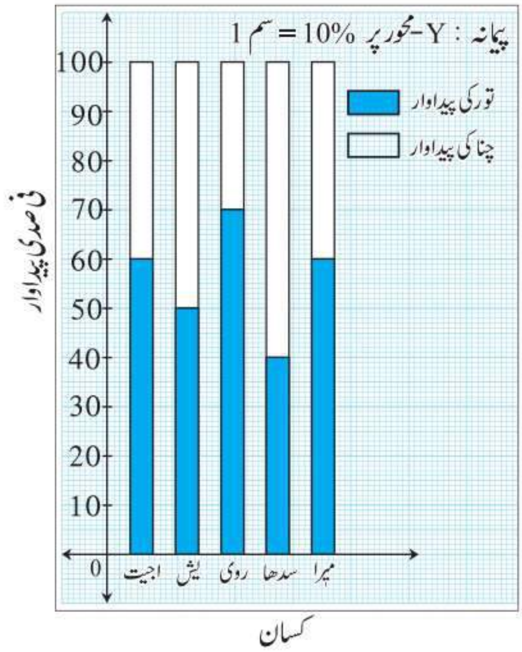
اوپر کے مرحلوں کے مطابق بازو میں فیصدی ستونی ترسیم بنائی گئی ہے اس کا مشاہدہ کیجیے۔

مشقی سیٹ 11.3

1. ذیل کے جدول کے مطابق فی صدی ستونی ترسیم بنائیے۔

جماعت آٹھویں کی فریق	A	B	C	D
ریاضی میں 'A' گریڈ پانے والے طلبہ	45	33	10	15
کل طلبہ	60	55	40	75

2. مقابل میں دیے ہوئے ستونی ترسیم کا مشاہدہ کیجیے اور سوالات کے جوابات لکھیے۔



(1) مقابل میں دیا ہوا ستونی ترسیم کس قسم کی ہے؟

(2) اجیت کے کھیت میں تور کی پیداوار، کل پیداوار کا کتنے فی صد ہے؟

(3) لیش اور روی، ان میں سے کس کے کھیت کی چنے کی پیداوار کا فی صد کتنا زیادہ ہے؟

(4) سب سے کم تور کی پیداوار کا فی صدی کس کا ہے؟

(5) سدھا کے تور اور چنے کی پیداوار کا فی صد معلوم کیجیے؟

3. کچھ اسکول میں 10 ویں جماعت کے طالب علموں کا سروے کیا گیا۔ حاصل ہوئی معلومات ذیل کے جدول میں دی گئی ہے۔ اس معلومات کو فی صدی ستونی ترسیم کے ذریعے دکھایئے۔

اسکول	پہلی	دوسری	تیسری	چوتھی
سائنس شاخ کی جانب رجحان	90	60	25	16
کامرس شاخ کی جانب رجحان	60	20	25	24

پروجیکٹ : فی صدی ستونی ترسیم اور تقسیمی ستونی ترسیم کا موازنہ کرتے ہوئے بحث کیجیے۔ اس کا استعمال کر کے سائنس، جغرافیہ جیسے مضامین میں ایسی ترسیم کی معلومات حاصل کیجیے۔

جوابات کی فہرست

مشقی سیٹ 11.1 : **2.** (1) 2 (2) 75 (3) $N = 25$, $\Sigma f_i \times x_i = 1425$ (4) 57 **3.** 3.9 **4.** 2.75

مشقی سیٹ 11.2 : **1.** (1) تقسیمی ستونی ترسیم (2) ₹600 (3) ₹800 (4) ₹500 (5) میگھا

مشقی سیٹ 11.3 : **2.** (1) فی صدی ستونی ترسیم (2) 60% (3) لیش کی پیداوار 20% زیادہ (4) سدھا
(5) 60% اور 40%

DG71F4

12 یک متغیری مساواتیں

آیئے ذرایاد کریں

گذشتہ جماعتوں میں ہم نے یک متغیری مساوات کا مطالعہ کیا ہے۔

- مساوات میں دیے گئے متغیر کی قیمت رکھنے پر مساوات کے دونوں طرفین مساوی ہوجاتے ہیں وہ قیمت اُس مساوات کا حل ہوتی ہے۔
- مساوات حل کرنا یعنی اس کا حل معلوم کرنا۔
- مساوات کے طرفین پر یکساں عمل کرنے سے حاصل ہونے والی مساوات میں کوئی تبدیلی نہیں ہوتی۔ اس خصوصیت کا استعمال کرکے ہم نئی آسان مساوات بنا کر دی ہوئی مساوات کو حل کرتے ہیں۔

مساوات کے طرفین پر کیے جانے والے اعمال :

(i) طرفین میں مساوی عدد جمع کرنا۔ (ii) طرفین میں مساوی عدد تفریق کرنا۔

(iii) طرفین کو مساوی عدد سے ضرب کرنا۔ (iv) طرفین کو غیر صفر مساوی عدد سے تقسیم کرنا۔

درج ذیل مساوات حل کرنے کے لیے خالی چوکون مکمل کیجیے :

مثال (1) $x + 4 = 9$

$x + 4 - \square = 9 - \square$

$\therefore\ x = \square$

مثال (2) $x - 2 = 7$

$x - 2 + \square = 7 + \square$

$\therefore\ x = \square$

مثال (3) $\frac{x}{3} = 4$

$\frac{x}{3} \times \square = 4 \times \square$

$\therefore\ x = \square$

مثال (4) $4x = 24$

$\frac{4x}{\square} = \frac{24}{\square}$

$\therefore\ x = \square$

آیئے سمجھ لیں

یک متغیری مساواتوں کا حل (Solution of equation s in one vaireable)

کبھی کبھی مساوات حل کرنے کے لیے اس پر ایک سے زیادہ اعمال کرنا ہوتا ہے۔ ایسی مساوات کے دونوں جانب عمل کرکے حل معلوم کرنے کی کچھ مثالیں دیکھیں گے۔

مثال (1) مساوات حل کیجیے۔

(i) $2(x-3) = \frac{3}{5}(x+4)$

حل : طرفین کو 5 سے ضرب کرنے پر

$10(x-3) = 3(x+4)$

$\therefore 10x - 30 = 3x + 12$

طرفین میں 30 جمع کرنے پر

$\therefore 10x - 30 + 30 = 3x + 12 + 30$

$10x = 3x + 42$

طرفین میں $3x$ تفریق کرنے پر

$\therefore 10x - 3x = 3x + 42 - 3x$

$\therefore 7x = 42$

طرفین کو 7 سے تقسیم کرنے پر

$\frac{7x}{7} = \frac{42}{7}$

$\therefore x = 6$

(ii) $9x - 4 = 6x + 29$

حل : طرفین میں 4 جمع کرنے پر

$9x - 4 + 4 = 6x + 29 + 4$

$\therefore 9x = 6x + 33$

طرفین میں $6x$ تفریق کرنے پر

$\therefore 9x - 6x = 6x + 33 - 6x$

$\therefore 3x = 33$

طرفین کو 3 سے تقسیم کرنے پر

$\therefore \frac{3x}{3} = \frac{33}{3}$

$\therefore x = 11$

(iii) $\frac{2}{3} + 5a = 4$

حل : طریقہ (I)

$\frac{2}{3} + 5a = 4$

طرفین کے ہر رکن کو 3 سے ضرب کرنے پر

$3 \times \frac{2}{3} + 3 \times 5a = 4 \times 3$

$\therefore 2 + 15a = 12$

$\therefore 15a = 12 - 2$

$\therefore 15a = 10$

$\therefore a = \frac{10}{15}$

$\therefore a = \frac{2}{3}$

طریقہ (II)

طرفین سے $\frac{2}{3}$ تفریق کرنے پر

$\frac{2}{3} + 5a - \frac{2}{3} = 4 - \frac{2}{3}$

$\therefore 5a = \frac{12-2}{3}$

$\therefore 5a = \frac{10}{3}$

طرفین کو 5 سے تقسیم کرنے پر

$\frac{5a}{5} = \frac{10}{3} \times \frac{1}{5}$

$\therefore a = \frac{2}{3}$

الجبری عبارت $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ میں اگر A، B، C، D غیر صفر اعداد ہوں تو طرفین کو $B \times D$ سے ضرب کرنے پر $AD = BC$ مساوات حاصل ہوتی ہے۔ اس کا استعمال کر کے مثالیں حل کریں گے۔

(v) $\dfrac{8m-1}{2m+3} = 2$

حل : $\dfrac{8m-1}{2m+3} = \dfrac{2}{1}$

$1(8m - 1) = 2(2m + 3)$

$\therefore\ 8m - 1 = 4m + 6$

$\therefore\ 8m - 4m = 6 + 1$

$\therefore\ 4m = 7\ ,\ \therefore\ m = \dfrac{7}{4}$

(iv) $\dfrac{(x-7)}{(x-2)} = \dfrac{5}{4}$

حل : $\dfrac{(x-7)}{(x-2)} = \dfrac{5}{4}$

$\therefore\ 4(x - 7) = 5(x - 2)$

$\therefore\ 4x - 28 = 5x - 10$

$\therefore\ 4x - 5x = -10 + 28$

$\therefore\ -x = 18\ ,\ \therefore\ x = -18$

مشقی سیٹ 12.1

.1 ہر مساوات کے بعد متغیر کے لیے دی گئی قیمت، اس مساوات کا حل ہیں یا نہیں معلوم کیجیے۔

(1) $x - 4 = 3$, $x = -1, 7, -7$ (2) $9m = 81$, $m = 3, 9, -3$

(3) $2a + 4 = 0$, $a = 2, -2, 1$ (4) $3 - y = 4$, $y = -1, 1, 2$

.2 درج ذیل مساوات حل کیجیے۔

(1) $17p - 2 = 49$ (2) $2m + 7 = 9$ (3) $3x + 12 = 2x - 4$

(4) $5(x - 3) = 3(x + 2)$ (5) $\dfrac{9x}{8} + 1 = 10$ (6) $\dfrac{y}{7} + \dfrac{y-4}{3} = 2$

(7) $13x - 5 = \dfrac{3}{2}$ (8) $3(y + 8) = 10(y - 4) + 8$ (9) $\dfrac{x-9}{x-5} = \dfrac{5}{7}$

(10) $\dfrac{y-4}{3} + 3y = 4$ (11) $\dfrac{b+(b+1)+(b+2)}{4} = 21$

آیئے سمجھ لیں

عبارتی سوالات (Word Problems)

عبارتی سوالات میں دی ہوئی معلومات کے لیے متغیر کا استعمال کر کے الجبری عبارت کس طرح لکھتے ہیں اس کا مطالعہ کریں گے۔

میری عمر x سال ہے

میرے والد صاحب کی عمر، میری عمر سے 32 سال زیادہ ہے۔
$\therefore$ والد کی عمر = $\square$ سال

میری دادی جان کی عمر، میری عمر کے 4 گنا سے 10 سال زیادہ ہے۔
دادی کی عمر = $(4x + 10)$ سال

میری بہن کی عمر، میری عمر سے 4 سال کم ہے۔
$\therefore$ بہن کی عمر = $\square$ سال

میرے دوست کی عمر، میری عمر کے نصف سے 5 سال زیادہ ہے۔
$\therefore$ دوست کی عمر = $\square$ سال

میری والدہ کی عمر میری عمر کا تین گنا ہے
$\therefore$ والدہ کی عمر = $\square$ سال

مندرجہ بالا دی ہوئی معلومات کے مطابق میرے دوست کی عمر اگر 12 سال ہو تو میری عمر کتنی؟

میری عمر = x سال ، $\therefore$ دوست کی عمر = $\frac{x}{2} + 5$

$\frac{x}{2} + 5 = 12$ ... (دیا ہوا ہے)

$\therefore\ x + 10 = 24$ ... (ہر رکن کو 2 سے ضرب کرنے پر)

$\therefore\ x = 24 - 10$

$\therefore\ x = 14$

اس لیے میری عمر 14 سال ہے۔ اس طریقے سے مندرجہ بالا معلومات کی مدد سے دیگر افراد کی عمریں معلوم کیجیے۔

عملی کام : خالی چوکون میں مناسب عدد لکھیے۔

چوڑائی کے تین گنا لمبائی

میں مستطیل ہوں
میرا احاطہ 40 سم ہے

چوڑائی
x

مستطیل کا احاطہ = 40

$2(\square\, x + \square\, x) = 40$

$2 \times \square\, x = 40$

$\square\, x = 40$

$\therefore\ x = \square$

سم $\square$ = مستطیل کی لمبائی اور سم $\square$ = مستطیل کی چوڑائی

حل کردہ مثالیں

مثال (1) جوزف کا وزن اس کے چھوٹے بھائی کے وزن کا دگنا ہے۔ دونوں کا کل وزن 63 کلوگرام ہے۔ تو جوزف کا وزن معلوم کیجیے۔

حل : فرض کیجیے جوزف کے چھوٹے بھائی کا وزن = x کلوگرام

اس لیے جوزف کا وزن بھائی کے وزن کا دگنا = $2x$ کلوگرام

شرط کے مطابق، $x + 2x = 63$

$\therefore\ 3x = 63$ ، $\therefore\ x = 21$

$\therefore$ جوزف کا وزن = $2x = 2 \times 21 = 42$ کلوگرام

مثال (2) ایک کسر کا شمار کنندہ، اس کے نسب نما سے 5 بڑا ہے۔ شمار کنندہ اور نسب نما ہر ایک میں 4 جمع کرنے پر وہ کسر $\frac{6}{5}$ ہو جاتی ہے، وہ کسر معلوم کیجیے۔

حل : فرض کیجیے کسر کا نسب نما x ہے۔

اس کسر کا شمار کنندہ، نسب نما سے 5 زیادہ ہے یعنی $(x + 5)$ ہے۔

$\therefore$ وہ کسر $\frac{x+5}{x}$

اس کے شمار کنندہ اور نسب نما میں 4 جمع کرنے پر وہ کسر $\frac{6}{5}$ ہوگی۔

$$\therefore \quad \frac{x+5+4}{x+4} = \frac{6}{5}$$

$$\therefore \quad \frac{x+9}{x+4} = \frac{6}{5}$$

$$\therefore \quad 5(x+9) = 6(x+4)$$

$$\therefore \quad 5x + 45 = 6x + 24$$

$$\therefore \quad 45 - 24 = 6x - 5x$$

$$21 = x$$

$\therefore$ کسر کا نسب نما $= 21$

شمار کنندہ $= 21 + 5 = 26$

$\therefore$ وہ کسر $= \frac{26}{21}$

مثال (3) رتنا کے پاس رقم، رفیق کے پاس کی رقم کا تین گنا سے 200 روپے زیادہ ہے۔ اگر رتنا کے 300 روپے رفیق کو دیے جائیں تو رتنا کے پاس رقم، رفیق کے پاس کی رقم کا $\frac{7}{4}$ گنا ہو جاتی ہے۔ تو رفیق کے پاس ابتدا میں کتنی رقم تھی؟ اصل قیمت معلوم کرنے کے لیے ذیل کا عمل مکمل کیجیے۔

حل : رتنا کے پاس رقم، رفیق کے پاس کی رقم کے تین گنا سے 200 روپے زیادہ ہے۔ فرض کیجیے رفیق کے پاس x روپے ہیں۔

$\therefore$ رتنا کے پاس کی رقم $\boxed{}$ روپے ہیں۔

$\therefore$ رتنا سے 300 روپے لے کر رفیق کو دیے، لہٰذا رتنا کے پاس $\boxed{}$ روپے باقی رہے۔

اس لیے رفیق کے پاس کی رقم $= x + 300$ روپے

رتنا کے پاس باقی ماندہ رقم، رفیق کی رقم کا $\frac{7}{4}$ گنا ہوگئی۔

$$\frac{\text{رتنا کی رقم}}{\text{رفیق کی رقم}} = \frac{\boxed{}}{\boxed{}}$$

$$\frac{3x-100}{x+300} = \frac{\boxed{}}{\boxed{}}$$

$$4\boxed{} = 7\boxed{}$$

$$12x - 400 = 7x + 2100$$

$$12x - 7x = \boxed{}$$

$$5x = \boxed{}$$

$$x = \boxed{}$$

$\therefore$ رفیق کے پاس $\boxed{}$ روپے تھے۔

مشقی سیٹ 12.2

1. ماں کی عمر بیٹے کی عمر سے 25 سال زیادہ ہے۔ 8 سال بعد، بیٹے کی عمر اور ماں کی عمر کے درمیان نسبت $\frac{4}{9}$ ہو جائے گی تو بیٹے کی عمر معلوم کیجیے۔

2. ایک کسر کا نسب نما، شمار کنندہ سے 12 زیادہ ہے۔ اس کے نسب نما سے 2 تفریق کریں اور شمار کنندہ میں 7 جمع کرنے پر حاصل ہونے والی کسر $\frac{1}{2}$ کے مساوی ہوتی ہے۔ وہ کسر معلوم کیجیے۔

.3 پیتل میں تانبہ اور جست کا تناسب $13 : 7$ ہے۔ 700 گرام پیتل کے برتن میں جست کتنا ہوگا؟

*.4 تین متواتر مکمل اعداد کا مجموعہ 45 سے زیادہ لیکن 54 سے کم ہے۔ وہ اعداد معلوم کیجیے۔

.5 دو ہندسی عدد کے دہائی کا ہندسہ، اکائی کے ہندسے کا دگنا ہے۔ ہندسوں کا مقام آپس میں تبدیل کرنے پر حاصل ہونے والا عدد اور اصل عدد کا مجموعہ 66 ہے۔ تو اصل عدد معلوم کیجیے۔

*.6 ایک تھیٹر پر ڈراما کے 200 روپے اور 100 روپے والے کچھ ٹکٹ فروخت ہوئے۔ 200 روپے والے ٹکٹوں کی تعداد، 100 روپے والے ٹکٹوں کی تعداد سے 20 زیادہ ہے۔ دونوں قسم کے ٹکٹ فروخت کرنے پر تھیٹر کو $37,000$ روپے حاصل ہوئے۔ تو 100 روپے کے کل کتنے ٹکٹ فروخت ہوئے؟

.7 تین متواتر طبعی اعداد میں سب سے چھوٹے عدد کا پانچ گنا، سب سے بڑے عدد کے چار گنا سے 9 زیادہ ہے۔ وہ اعداد معلوم کیجیے۔

.8 راجو نے ایک سائیکل 8% نفع پر امیت کو فروخت کی۔ امیت نے 54 روپے خرچ کر کے اسے درست کیا۔ وہ سائیکل اس نے نکھل کو 1134 روپے میں فروخت کیا۔ تب امیت کو نہ نفع ہوا نہ نقصان۔ تو راجو نے سائیکل کتنے روپے میں خریدی تھی؟

.9 ایک کرکٹ کھلاڑی نے ایک مقابلے میں 180 رن بنائے۔ دوسرے مقابلے میں 256 رن بنائے۔ تیسرے مقابلے میں اسے کتنے رن بنانے ہوں گے کہ مقابلوں میں بنائے ہوئے رنوں کا اوسط 230 ہوجائے؟

.10 سدھیر کی عمر، ویرو کی عمر کا تین گنا سے 5 زیادہ ہے۔ انیل کی عمر سدھیر کی عمر کا نصف ہے۔ سدھیر کی عمر اور ویرو کی عمر کا مجموعہ اور انیل کی عمر کا تین گنا کی نسبت $5 : 6$ ہے۔ تو ویرو کی عمر معلوم کیجیے۔

جوابات کی فہرست

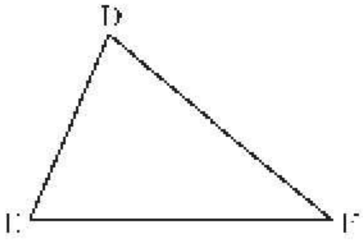
مشقی سیٹ 12.1 : **1.** مساوات کے حل کی قیمت (1) $x = 7$ (2) $m = 9$ (3) $a = -2$ (4) $y = -1$ **2.** (1) $p = 5$ (2) $m = 1$ (3) $x = -16$ (4) $x = \frac{21}{2}$ (5) $x = 8$ (6) $y = 7$ (7) $x = \frac{1}{2}$ (8) $y = 8$ (9) $x = 19$ (10) $y = \frac{8}{5}$ (11) $b = 27$

مشقی سیٹ 12.2 : **1.** 12 سال **2.** $\frac{23}{35}$ **3.** 245 گرام **4.** 15, 16, 17 یا 16, 17, 18 **5.** 42 **6.** 110 **7.** 17, 18, 19 **8.** ₹1000 **9.** 253 **10.** 5 سال

DGFHGR

13 مثلثوں کی متماثلت

آیئے ذرا یاد کریں



متصلہ شکل کی مدد سے درج ذیل سوالات کے جوابات معلوم کیجیے۔

(i) ضلع DE کے مقابل کا زاویہ کون سا ہے؟

(ii) $\angle E$ ، کس ضلعے کے مقابل کا زاویہ ہے؟

(iii) ضلع DE اور ضلع DF کو شامل کرنے والا زاویہ کون سا ہے؟

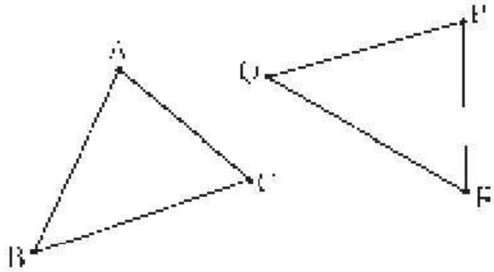
(iv) $\angle E$ اور $\angle F$ کو شامل کرنے والا ضلع کون سے ہیں؟

(v) ضلع DE سے متصل کون سے زاویے ہیں؟

- جو اشکال ایک دوسرے پر پوری طرح منطبق ہو جاتی ہیں انھیں متماثل اشکال کہتے ہیں۔
- جن قطعات خط کی لمبائیاں مساوی ہوں انھیں متماثل قطعات خط کہتے ہیں۔
- جن زاویوں کی پیائشیں مساوی ہوتی ہیں انھیں متماثل زاویے کہتے ہیں۔

آیئے سمجھ لیں

مثلثوں کی متماثلت (Congruence of triangles)



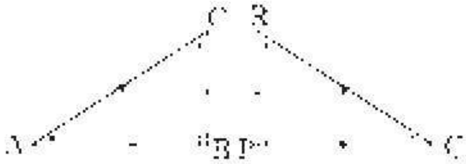
عملی کام : متصلہ شکل کا مشاہدہ کیجیے۔

شفاف ٹریسنگ کاغذ پر $\triangle ABC$ بنایئے اور کاغذ کو $\triangle PQR$ پر رکھ کر مشاہدہ کیجیے۔نقطہ A ، نقطہ P پر، نقطہ B ، نقطہ Q پر اور نقطہ C، نقطہ R پر آتا ہے تو دونوں ہی مثلث ایک دوسرے پر مکمل طور پر منطبق ہوجاتے ہیں ۔یعنی ایسا معلوم ہوتا ہے کہ یہ دونوں متماثل مثلث ہیں۔

عملی کام میں $\triangle ABC$ کو $\triangle PQR$ پر رکھنے کا ایک طریقہ دیا گیا ہے۔لیکن نقطہ A، نقطہ Q پر، نقطہ B، نقطہ R پر اور نقطہ C، نقطہ P پر رکھیں تو دونوں مثلث ایک دوسرے پر منطبق نہیں ہوتے ،یعنی مخصوص طریقے پر رکھنے سے ہی ایک دوسرے پر منطبق ہوتے ہیں ۔اس طریقے سے منطبق ہونے کو ایک سے ایک مطابقت کے ذریعے ظاہر کیا جاتا ہے۔نقطہ A کا نظیری نقطہ P ہے۔اسے $A \leftrightarrow P$ اس طرح لکھا جاتا ہے۔نقطہ A کی مطابقت نقطہ P سے ہے۔اسے $A \leftrightarrow P$ لکھتے ہیں۔ یہاں $A \leftrightarrow P$ ، $B \leftrightarrow Q$ ، $C \leftrightarrow R$ مطابقت سے دونوں مثلث متماثل ہیں ۔اس طریقے سے جب مثلث متماثل ہوں تو $\angle A \cong \angle P$ ، $\angle B \cong \angle Q$ ، $\angle C \cong \angle R$ اسی طرح قطعہ PQ $\cong$ قطعہ AB ، قطعہ QR $\cong$ قطعہ BC ، قطعہ RP $\cong$ قطعہ CA اس طرح کل چھے متماثلت حاصل ہوتی ہیں۔اس لیے

ایسا کہتے ہیں $\triangle ABC$ اور $\triangle PQR$ مطابقت $ABC \leftrightarrow PQR$ کے ذریعے متماثل ہیں۔ اور اسے $\triangle ABC \cong \triangle PQR$ لکھتے ہیں۔ اس طرح $A \leftrightarrow P$ ، $B \leftrightarrow Q$ ، $C \leftrightarrow R$ نقاط راس کی ایک سے ایک کی مطابقت لکھتے ہیں۔ اس سے حاصل ہونے والی چھ متماثلتیں ان میں شامل ہوتی ہیں۔ اسے دھیان میں رکھیے کہ دو مثلث متماثل ہوں تو انھیں لکھنے کے لیے نقاط راس کی ترتیب اور متماثلث کی ایک سے ایک کی مطابقت پوری ہونی چاہیے۔

آیئے بحث کریں



$\triangle ABC$ اور $\triangle PQR$ متماثل مثلثوں کے متماثل اجزاء یکساں نشانات سے ظاہر کیے گئے ہیں۔

انیل، ریحانہ اور سرجیت نے مندرجہ ذیل طریقے سے مثلثوں کی متماثلث لکھا۔

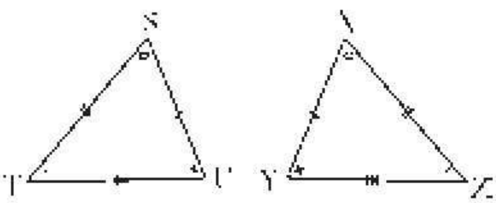
انیل کے لکھنے کا طریقہ : $\triangle ABC \cong \triangle QPR$

ریحانہ کے لکھنے کا طریقہ : $\triangle BAC \cong \triangle PQR$

سرجیت کے لکھنے کا طریقہ : $\triangle ABC \cong \triangle PQR$

ان میں سے کون سا لکھا ہوا طریقہ صحیح ہے اور کون سا غلط ہے؟ بحث کریں

حل کردہ مثالیں



مثال (1) متصلہ شکل میں مثلثوں کے یکساں نشانات سے ظاہر کیے گئے اجزا متماثل ہیں۔

(i) نقاط راس کی جس ایک سے ایک کی مطابقت کے ذریعے دونوں مثلث متماثل ہوتے ہیں اس مطابقت سے مثلثوں کی متماثلت دو طریقوں سے لکھیے۔

(ii) $\triangle XYZ \cong \triangle STU$ یہ صحیح لکھا گیا ہے یا غلط وجہ کے ساتھ لکھیے۔

حل : مشاہدہ کی مدد سے دیے ہوئے مثلثوں میں $STU \leftrightarrow XZY$ ایک سے ایک کی مطابقت سے متماثل ہیں۔

(i) پہلا طریقہ : $\triangle STU \cong \triangle XZY$

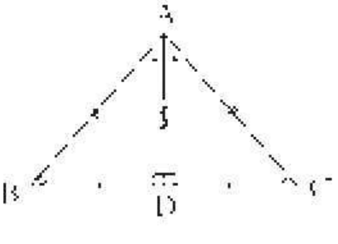
(ii) دوسرا طریقہ : $\triangle UST \cong \triangle YXZ$ اس متماثلت کو دوسرے طریقے سے لکھنے کی کوشش کریں۔

(iii) اگر ان مثلثوں کی متماثلت کو $\triangle XYZ \cong \triangle STU$ لکھیں تو ضلع $XY \cong$ ضلع ST مطلب ہوتا ہے جو غلط ہے۔

$\therefore$ $\triangle XYZ \cong \triangle STU$ لکھنا غلط ہے۔

($\triangle XYZ \cong \triangle STU$ لکھنے میں اور کون سی غلطی ہوتی ہے یہ طلبہ خود معلوم کریں۔ لیکن جواب کیوں غلط ہے یہ بتانے کے لیے کوئی بھی ایک غلطی دکھانا کافی ہوتا ہے۔)

مثال (2) درج ذیل میں دکھائی گئی شکل میں مثلثوں کی جوڑی میں یکساں نشانات سے ظاہر کیے گئے اجزاء متماثل ہیں۔ ان مثلثوں کے نقاط راس میں ایک سے ایک کی کس مطابقت کی بناء پر وہ مثلث متماثل ہیں بتایئے اور مثلثوں کی متماثلت علامت کے ذریعے ظاہر کیجیے۔



حل : $\triangle ABD$ اور $\triangle ACD$ میں ضلع AD مشترک قطعہ خط ہے۔

ہر قطعہ خط خود کا متماثل ہوتا ہے۔

مطابقت $A \leftrightarrow A$، $B \leftrightarrow C$، $D \leftrightarrow D$، $\triangle ABD \cong \triangle ACD$

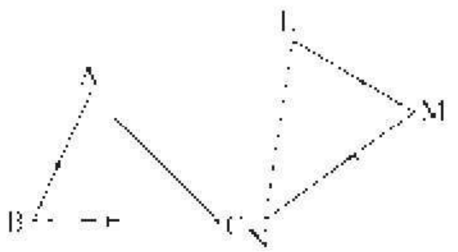
نوٹ : مشترک ضلع پر ' $\S$ ' اس قسم کا نشان لگانے کا طریقہ رائج ہے۔

آیئے سمجھ لیں

بعض مرتبہ دیے گئے دو مثلث متماثل ہیں اسے دکھانے کے لیے تمام چھے اجزا کی متماثلت بتانے کی ضرورت نہیں ہوتی۔ ایک مثلث کے تین مخصوص اجزاء دوسرے مثلث کے تین نظیری اجزاء کے متماثل ہوں تو بقیہ تین اجزاء کی جوڑیاں بھی ایک دوسرے کے متماثل ہوتی ہیں یعنی تین مخصوص اجزاء متماثلت کی آزمائش کا تعین کرتے ہیں۔

ہم نے مثلث بنانے کے کچھ عمل کا مطالعہ کیا ہے۔ جن دیے ہوئے تین اجزاء سے مثلث کی ایک اور صرف ایک شکل بنا سکتے ہیں وہی اجزاء متماثلت کی آزمائش متعین کرتے ہیں ہم اس کی جانچ کریں گے۔

(1) دو اضلاع اور ان کو شامل کرنے والا زاویہ : ضل زا ضل آزمائش



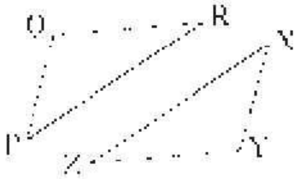
اضلاع کی دو جوڑیاں متماثل ہوں اور ان کو شامل کرنے والے زاویے بھی متماثل ہوں ایسے $\triangle ABD$ اور $\triangle LMN$ بنایئے۔

$\triangle ABD$ اور $\triangle LMN$ میں $l(AB) = l(LM)$

$l(BC) = l(MN)$ ، $m\angle ABC = m\angle LMN$

$\triangle ABD$، ٹریسنگ کاغذ پر بنایئے اور ٹریسنگ کاغذ $\triangle LMN$ پر اس طرح رکھیے کہ نقطہ A نقطہ L پر، ضلع AB ضلع LM پر، $\angle B$، $\angle M$ پر اور ضلع BC، ضلع MN پر ہو تو $\triangle ABC \cong \triangle LMN$ دکھائی دیتا ہے۔

(2) تین نظیری اضلاع : ضل ضل ضل آزمائش

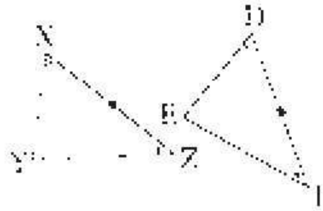


$l(PQ) = l(XY)$ ، $l(QR) = l(YZ)$ ، $l(RP) = l(ZX)$

اس طرح سے $\triangle PQR$ اور $\triangle XYZ$ بنائیے۔

ٹریسنگ کاغذ پر $\triangle PQR$ بنائیے اور اسے $\triangle XYZ$ پر اس طرح رکھیے کہ ایک سے ایک کی مطابقت $P \leftrightarrow X$ ، $Q \leftrightarrow Y$ ، $R \leftrightarrow Z$ ہوجائے۔ ہم مشاہدہ کرتے ہیں کہ $\triangle PQR \cong \triangle XYZ$

(3) دو زاویے اور ان کو شامل کرنے والا ضلع : زاضل زا آزمائش



$\triangle XYZ$ اور $\triangle DEF$ اس طرح بنائیے کہ،

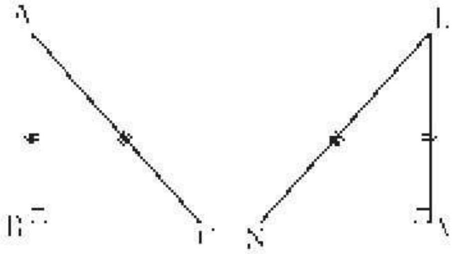
$l(XZ) = l(DF)$ ، $\angle X \cong \angle D$ اور $\angle Z \cong \angle F$

ٹریسنگ کاغذ پر $\triangle XYZ$ بنائیے اور اس کاغذ کو $\triangle DEF$ پر اس طرح رکھیے کہ $X \leftrightarrow D$ ، FD قطعہ $\leftrightarrow$ XZ قطعہ اور اس مطابقت کی بناء پر $\triangle XYZ \cong \triangle DEF$ دکھائی دیتا ہے۔

(4) زازاضل (یا ضل زازا) آزمائش :

دو مثلثوں میں نظیری زاویوں کی دو جوڑیاں متماثل ہوں تو باقی زاویے بھی متماثل ہوتے ہیں کیونکہ ہر مثلث کے تینوں زاویوں کی پیمائشوں کا مجموعہ $180°$ ہوتا ہے۔ یعنی کوئی بھی دو زاویے اور ایک زاویے کا متصلہ ضلع، دوسرے مثلث کے دو زاویے اور نظیری ضلع کے متماثل ہو تو زاضل زا آزمائش کی شرط پوری ہوجاتی ہے اور وہ دونوں مثلث متماثل ہوتے ہیں۔

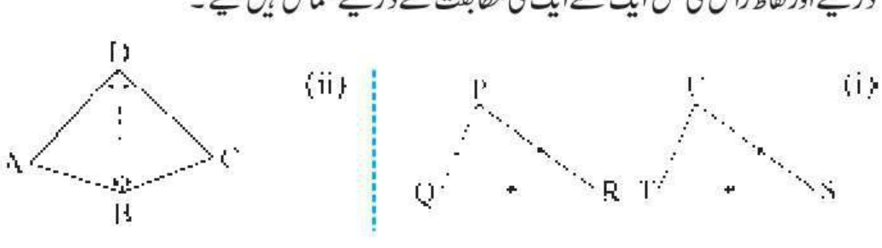
(5) قائمۃ الزاویہ مثلثوں کی وتر ضلع آزمائش :



قائمۃ الزاویہ مثلث کا وتر اور ایک ضلع دیا گیا ہو تو ایک اور صرف ایک مثلث بنا سکتے ہیں۔ ایک قائمۃ الزاویہ مثلث کا وتر اور ایک ضلع دوسرے قائمۃ الزاویہ مثلث کے نظیری متماثل اجزاء والے دو قائمۃ الزاویہ مثلث بنائیے۔ درج بالا طریقے کے مطابق وہ متماثل ہیں یا نہیں اس کی جانچ کیجیے۔

حل کردہ مثالیں

مثال (1) درج ذیل اشکال میں مثلثوں کی ہر جوڑی میں یکساں نشانات سے ظاہر کیے گئے اجزاء متماثل ہیں۔ ہر جوڑی میں مثلث کس آزمائش کے ذریعے اور نقاط راس کی کس ایک سے ایک کی مطابقت کے ذریعے متماثل ہیں لکھیے۔

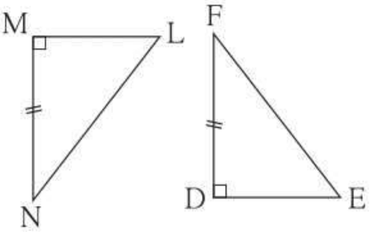


حل : (i) ضل ضل ضل آزمائش کے ذریعے $PQR \leftrightarrow UTS$ کی مطابقت کے ذریعے

(ii) زاضل زا آزمائش کے ذریعے $DBA \leftrightarrow DBC$ کی مطابقت کے ذریعے

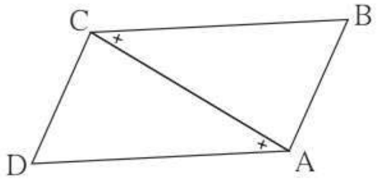
مثال (2) درج ذیل شکل میں مثلثوں کی جوڑی میں یکساں نشانات سے ظاہر کیے گئے اجزاء متماثل ہیں۔ ہر شکل کے نیچے مثلثوں کی متماثلت کی آزمائش لکھی گئی ہے۔ اس آزمائش کے ذریعے مثلثوں کو متماثل ہونے کے لیے اور کون سی معلومات دینا ضروری ہے اور وہ معلومات دینے کے بعد مثلث کے راسوں کی کس ایک سے ایک کی مطابقت سے متماثل ہوں گے لکھیے۔

(i)



وترضلع آزمائش

(ii)



زا-ضل-زا آزمائش

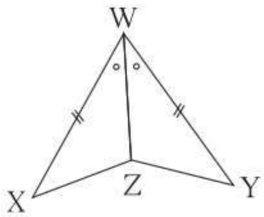
حل : **(i)** دیے گئے مثلث قائمۃ الزاویہ مثلث ہیں۔ ان میں صرف ایک ضلع متماثل ہیں لہٰذا ان کے وتر قطعہ LN اور قطعہ EF متماثل ہوں یہ معلومات دینا ضروری ہے۔ یہ معلومات دینے پر $LMN \leftrightarrow EDF$ مطابقت کی بناء پر مثلث متماثل ہوتے ہیں۔

(ii) شکل میں قطعہ CA مشترک ضلع ہے یعنی $\angle DCA \cong \angle BAC$ یہ معلومات دینا ضروری ہے، یہ معلومات دینے پر $DCA \leftrightarrow BAC$ مطابقت کی بنا پر مثلث متماثل ہوں گے۔

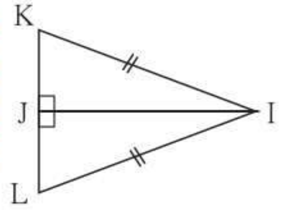
مشقی سیٹ 13.1

.1 درج ذیل اشکال میں مثلثوں کی ہر جوڑی میں یکساں نشانات سے ظاہر کیے گئے اجزاء متماثل ہیں۔ ہر جوڑی میں مثلث کس آزمائش کے ذریعے اور نقاط راس کی ایک سے ایک کی کس مطابقت کے ذریعے متماثل ہیں لکھیے۔

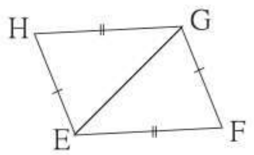
(i)



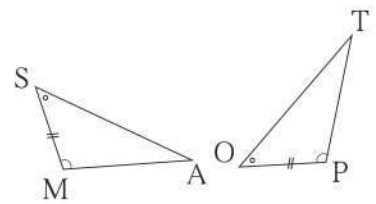
(ii)



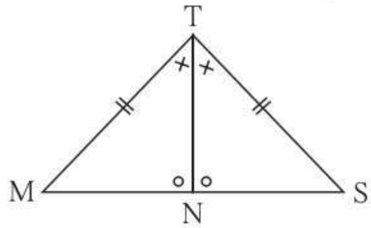
(iii)



(iv)



(v)



یہ میری سمجھ میں آ گیا

(1) ضل زاضل آزمائش : اگر ایک مثلث کے دو اضلاع اور ان کو شامل کرنے والا زاویہ دوسرے مثلث کے دو نظیری اضلاع اور ان کو شامل کرنے والے زاویے کے متماثل ہوں تو وہ مثلث ایک دوسرے کے متماثل ہوں گے۔

(2) ضل ضل ضل آزمائش : اگر ایک مثلث کے تین اضلاع دوسرے مثلث کے تین نظیری اضلاع کے متماثل ہوں تو دونوں مثلث ایک دوسرے کے متماثل ہوتے ہیں ۔

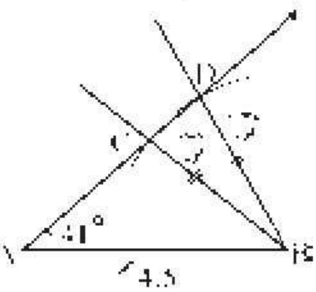
(3) زاضل زا آزمائش : اگر ایک مثلث کے دو زاویے اور ان کو شامل کرنے والا ایک ضلع دوسرے مثلث کے دو نظیری زاویے اور ان کو شامل کرنے والے ضلع کے متماثل ہو تو دونوں مثلث ایک دوسرے کے متماثل ہوں گے۔

(4) زا زاضل آزمائش : ایک مثلث کے دو زاویے اور ان کو شامل نہ کرنے والا ضلع دوسرے مثلث کے دو نظیری زاویے اور ان کو شامل نہ کرنے والے نظیری ضلع کے متماثل ہو تو دونوں مثلث ایک دوسرے کے متماثل ہوتے ہیں ۔

(5) وتر ضلع آزمائش : اگر ایک قائمۃ الزاویہ مثلث کا وتر اور ایک ضلع ، دوسرے قائمۃ الزاویہ مثلث کے وتر اور نظیری ضلع کے متماثل ہو تو دونوں مثلث ایک دوسرے کے متماثل ہوتے ہیں ۔

مزید معلومات کے لیے :

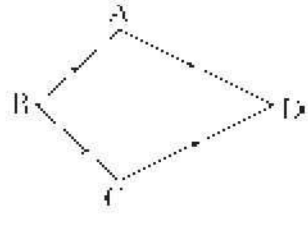
ایک مثلث کے دو اضلاع اور ان کو شامل نہ کرنے والا زاویہ دوسرے مثلث کے نظیری اجزاء کے متماثل ہوں تو دونوں مثلث ایک دوسرے کے متماثل ہوتے ہیں یا نہیں؟



متصلہ شکل کا مشاہدہ کیجیے $\triangle ABC$ اور $\triangle ABD$ میں AB مشترک ضلع ہے۔ ضلع BD $\cong$ ضلع BC اور $\angle A$ مشترک زاویہ ہے لیکن وہ ضلعوں کو شامل کرنے والا زاویہ نہیں ہے۔ یعنی ایک مثلث کے تین اجزاء دوسرے مثلث کے نظیری اجزاء کے متماثل ہیں ۔ لیکن وہ مثلث متماثل نہیں ہیں ۔

اس کی مدد سے ہم کہہ سکتے ہیں کہ ایک مثلث کے دو اضلاع اور ان کو شامل نہ کرنے والے زاویے دوسرے مثلث کے نظیری اجزاء کے متماثل ہوں دونوں مثلث متماثل ہوں گے ایسا نہیں بھی ہوسکتا ہے۔

حل کردہ مثالیں



مثال (1) شکل میں $\square ABCD$ میں مساوی اضلاع کو یکساں نشانات سے ظاہر کیا گیا ہے۔
اس شکل میں متماثل زاویوں کی جوڑیاں ہیں یا نہیں معلوم کیجیے۔

حل : $\triangle ABD$ اور $\triangle CBD$ میں،

ضلع AB $\cong$ ضلع CB ... (دیا ہوا ہے)

ضلع DA $\cong$ ضلع DC ... (دیا ہوا ہے)

ضلع BD مشترک ہے۔

(ضل ضل ضل آزمائش کے ذریعے) ... $\therefore \triangle ABD \cong \triangle CBD$

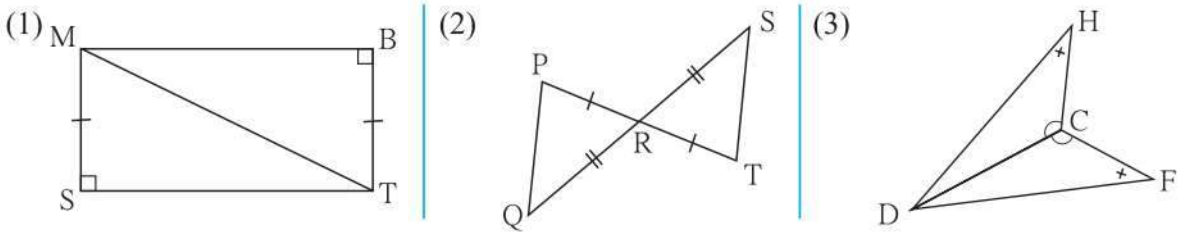
$\therefore \angle BAD \cong \angle BCD$

(متماثل مثلثوں کے نظیری زاویے) ... $\therefore \angle ABD \cong \angle CBD$

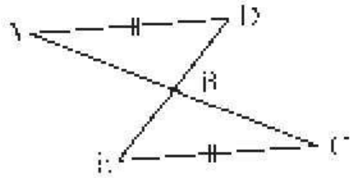
$\angle ADB \cong \angle CDB$

مشقی سیٹ 13.2

1. مندرجہ ذیل میں مثلثوں کی ہر جوڑی میں یکساں نشانات سے ظاہر کیے گئے اجزاء متماثل ہیں۔ ہر جوڑی کے مثلث، نقاط راس کی کس مطابقت کے ذریعے اور کس آزمائش کے ذریعے متماثل ہیں لکھیے۔ ہر جوڑی میں مثلثوں کے باقی ماندہ نظیری متماثل اجزاء لکھیے۔



2*. متصلہ شکل میں قطعہ EC $\cong$ قطعہ AD اور مزید کون سی معلومات دی جائے کہ $\triangle ABD$ اور $\triangle EBC$ ضل زا زا آزمائش کے ذریعے ایک دوسرے کے متماثل ہو جائیں۔



جوابات کی فہرست

مشقی سیٹ 13.1 : **1.** (i) ضل زا ضل , XWZ $\leftrightarrow$ YWZ (ii) وتر ضلع , KJI $\leftrightarrow$ LJI (iii) ضل ضل ضل , HEG $\leftrightarrow$ FGE (iv) زا ضل زا , SMA $\leftrightarrow$ OPT (v) ضل زا زا یا زا ضل زا , MTN $\leftrightarrow$ STN

مشقی سیٹ 13.2 : **1.** (1) $\triangle MST \cong \triangle TBM$, وتر ضلع, ضلع ST $\cong$ ضلع MB, $\angle SMT \cong \angle BTM$ $\angle STM \cong \angle BMT$ (2) $\triangle PRQ \cong \triangle TRS$, ضل زا زا, ضلع PQ $\cong$ ضلع TS, $\angle RPQ \cong \angle RTS$, $\angle PQR \cong \angle TSR$ (3) $\triangle DCH \cong \triangle DCF$, ضل زا زا, $\angle DHC \cong \angle DFC$, ضلع HC $\cong$ ضلع FC

2. (1) $\angle ADB \cong \angle ECB$ اور $\angle ABD \cong \angle EBC$ یا $\angle DAB \cong \angle CEB$

DGPSIE

14 مرکب سود

کوئی شخص، بینک، امداد باہمی انجمن وغیرہ اداروں سے کچھ رقم متعین شرح سود سے قرض کے طور پر لیتا ہے اور کچھ عرصے کے بعد قرض لی گئی رقم واپس کرتا ہے۔ اس رقم کو استعمال کرنے کے عوض میں کچھ زیادہ رقم ہر سال دیتا ہے اسے سود کہتے ہیں۔

مفرد سود معلوم کرنے کے لیے $I = \frac{PNR}{100}$ ضابطے کا استعمال ہم کر چکے ہیں۔

اس ضابطے میں سود = I، اصل زر = P، مدت سال میں = N، شرح فی صدی فی سال = R ہوتا ہے۔

آیئے سمجھ لیں

مرکب سود (Compound interest) : امانت (بینک میں جمع کی گئی رقم) یا قرض پر بینک سود تحسیب (محسوب) کرتی ہے۔ یہ کیوں اور کس طرح معلوم کرتے ہیں اس کا ہم مطالعہ کریں گے۔

استانی : سجن راؤ نے ایک بینک سے 10 فی صدی فی سال شرح سے ایک سال میں واپس کرنے کی شرط پر 10,000 روپے قرض لیا تو سال کے آخر میں اسے سود سمیت کتنی رقم دینا ہوگی؟

طالب علم : یہاں، روپے $P = 10,000$، $R = 10$، سال $N = 1$

$$I = \frac{PNR}{100} = \frac{10000 \times 10 \times 1}{100} = 1000 \text{ روپے}$$

سجن راؤ کو سال کے آخر میں سود سمیت $10,000 + 1000 = 11,000$ روپے واپس کرنے ہوں گے۔

طالب علم : لیکن اگر سال کے آخر میں کسی قرض دار نے سود کی رقم ادا نہیں کی تو کیا ہوگا؟

استانی : بینک ہر سال کے آخر میں سود محسوب کرتا ہے اور ہر سال قرض دار کو وہ سود کی رقم ادا کرنا چاہیے ایسی توقع کرتا ہے۔ قرض دار نے پہلے سال کے آخر میں سود ادا نہیں کیا تو دوسرے سال کے لیے بینک اصل زر اور پہلے سال کا سود ملا کر حاصل ہونے والی رقم کو قرض مان لیتا ہے اصل زر اور پہلے سال کا سود ملا کر جو رقم بنتی ہے وہ دوسرے سال کا اصل زر مان کر آگے سود محسوب کرتے ہیں۔ یعنی دوسرے سال سود معلوم کرنے کے لیے اصل زر کی رقم پہلے سال کے کل زر کے مساوی ہوگی۔ اس طریقے سے سود محسوب کرنا، مرکب سود کہلاتا ہے۔

طالب علم : سجن راؤ نے قرض واپس کرنے کی مدت ایک سال اور بڑھا لی تو کیا ہوگا؟

استانی : دوسرے سال کے لیے 11000 روپے اصل زر مان کر اس پر سود اور کل زر معلوم کرنا ہوگا۔

طالب علم : کیا اس کے لیے گذشتہ جماعت میں مطالعہ کیے گئے $\frac{\text{کل زر}}{\text{اصل زر}} = \frac{110}{100}$ نسبت کا استعمال کر سکتے ہیں؟

استانی : یقیناً! ہر سال کے لیے $\frac{\text{کل زر}}{\text{اصل زر}}$ نسبت مستقل ہے۔ مرکب سود معلوم کرنے کے لیے ہر سال گذشتہ سال کا کل زر ہی اگلے سال کا اصل زر ہوتا ہے۔ یعنی سود معلوم کرنے کی بجائے کل زر معلوم کرنا آسان ہوتا ہے۔ پہلے سال کے بعد کل زر A_1 ، دوسرے سال کے بعد کل زر A_2، تیسرے سال کے بعد کل زر A_3 سے ظاہر کریں تو پہلا اصل زر P ہوتا ہے۔

$$\therefore \frac{A_1}{P} = \frac{110}{100}, \qquad \therefore A_1 = P \times \frac{110}{100}$$

دوسرے سال کا کل زر معلوم کرنے کے لیے

$$\therefore \frac{A_2}{A_1} = \frac{110}{100}, \qquad \therefore A_2 = A_1 \times \frac{110}{100} = P \times \frac{110}{100} \times \frac{110}{100}$$

طالب علم : پھر تیسرے سال کا کل زر A_3 معلوم کرنے کے لیے

$$\therefore \frac{A_3}{A_2} = \frac{110}{100}, \qquad \therefore A_3 = A_2 \times \frac{110}{100} = P \times \frac{110}{100} \times \frac{110}{100} \times \frac{110}{100}$$

استانی : شاباش! یہ مرکب سود معلوم کرنے کا ضابطہ ہے۔ یہاں $\frac{110}{100}$ سال کے آخر میں ایک روپے پر حاصل ہونے والا کل زر ہے۔ اسے دھیان میں رکھیں۔ جتنے سال کا کل زر معلوم کرنا ہو اتنی مرتبہ اصل زر کو اس نسبت سے ضرب کرتے ہیں۔

طالب علم : یعنی پہلے سال کے آخر میں $\frac{\text{کل زر}}{\text{اصل زر}}$ نسبت کو M اور اصل زر کو P مانیں تو سال کے آخر میں کل زر $P \times M$، دوسرے سال کے آخر میں کل زر $P \times M^2$ اور اسی طرح تیسرے سال کے آخر میں کل زر $P \times M^3$ ہوتا ہے۔ اس طریقے سے کتنے بھی سال کا کل زر معلوم کر سکتے ہیں۔

استانی : صحیح ہے! R فی صد فی سال شرح سود ہو تو

1 روپے کا 1 سال بعد کل زر $= 1 \times M = 1 \times \left(1 + \frac{R}{100}\right) = 1 \times \left(\frac{100 + R}{100}\right)$

$\therefore$ P روپے کا 1 سال کا کل زر $= P \times \left(1 + \frac{R}{100}\right) = P \times \frac{100 + R}{100}$

$\therefore$ اصل زر P، شرح سود R فی صدی فی سال اور مدت N ہو تو

N سال بعد کل زر $= A = P\left(1 + \frac{R}{100}\right)^N = P \times \left(\frac{100 + R}{100}\right)^N$

حل کردہ مثالیں

مثال (1) 4000 روپے کا 3 سال کا $12\frac{1}{2}$ فی صدی فی سال شرح سے مرکب سود معلوم کیجیے۔

حل : یہاں، $P = 4000$، $R = 12\frac{1}{2}\%$، $N = 3$ سال

$$A = P\left(1 + \frac{R}{100}\right)^{N} = P\left(1 + \frac{12.5}{100}\right)^{3}$$

$$= 4000\left(1 + \frac{125}{1000}\right)^{3}$$

$$A = 4000\left(\frac{1125}{1000}\right)^{3} = 4000\left(\frac{9}{8}\right)^{3}$$

$= 5695.31$ روپے

تین سال بعد مرکب سود = کل زر — اصل زر

$= 5695.31 - 4000 = 1695.31$ روپے

مشقی سیٹ 14.1

1. مرکب سود کے حساب سے کل زر اور مرکب سود معلوم کیجیے۔

نمبر شمار	اصل زر (روپے)	شرح (فی صدی فی سال)	مدت (سال)
1	2000	5	2
2	5000	8	3
3	4000	7.5	2

2. سمیر راؤ نے ایک امداد باہمی انجمن سے 12 فی صدی فی سال شرح سے 3 سال کے لیے 12500 روپے قرض لیے۔ تو اسے تیسرے سال کے آخر میں مرکب سود کے حساب سے کل کتنے روپے واپس کرنا ہوگا؟

3. شلاکا نے $10\frac{1}{2}$ فی صدی فی سال شرح سود سے 8000 روپے قرض لے کر ایک کاروبار شروع کیا 2 سال بعد قرض واپس کرتے وقت مرکب سود کے حساب سے اسے کتنا سود ادا کرنا ہوگا؟

مزید معلومات کے لیے :

(1) کچھ مالیاتی کاروبار میں شرح سود ششماہی محسوب کیا جاتا ہے۔ N سال کی مدت کے لیے شرح سود R ہو تو ششماہی سود محسوب کرنے کے لیے دیے گئے اصل زر کے لیے شرح $\frac{R}{2}$ لیتے ہیں۔ N سال کے لیے چھے ماہ کے 2N مرحلے ہوتے ہیں اسے دھیان میں رکھتے ہوئے سود محسوب کرتے ہیں۔

(2) بہت سے مالیاتی ادارے مرکب سود محسوب کرنے کے لیے ماہانہ شرح استعمال کرتے ہیں، اس وقت سود کی ماہانہ شرح $\frac{R}{12}$ لیتے ہیں اور مدت $12 \times N$ یعنی ایک سال کے کل مہینے لے کر سود محسوب کرتے ہیں۔

(3) آج کل بینک روزانہ سود کے حساب سے مرکب سود محسوب کرتا ہے۔

سرگرمی : آپ کے گھر کے قریب جو بینک ہو وہاں جا کر مختلف اسکیموں کے بارے میں جانکاری حاصل کریں۔ ان اسکیموں میں دیے ہوئے سود کی شرحوں کی جدول تیار کر کے کلاس میں لگائیں۔

آیئے سمجھ لیں

مرکب سود کے ضابطے کا اطلاق (Application of formula for compoundintrest)

مرکب سود کے طریقے سے کل زرمعلوم کرنے کے ضابطے کا استعمال روز مرہ کی زندگی میں اور دوسرے شعبوں میں مثالیں حل کرنے کے لیے استعمال ہوتا ہے، مثلاً آبادی میں اضافہ، کسی سواری کی قیمت میں ہر سال ہونے والی کمی وغیرہ۔

بعض اشیاء کچھ عرصہ استعمال کرنے کے بعد فروخت کرنے پر ان کی قیمت خرید سے کم قیمت میں فروخت ہوتی ہیں ۔ قیمت میں ہونے والی کمی کو نقصان یا خسارہ (depreciation) کہتے ہیں ۔

قیمتوں میں ہونے والا خسارہ متعین مدت میں متعین شرح سے ہوتا ہے۔ مثلاً مشینوں کی قیمت ہر سال متعین فیصدی کم ہوتی ہے۔ کچھ مدت بعد کم ہونے والی قیمت معلوم کرنے کے لیے مرکب سود کا ضابطہ استعمال کرتے ہیں ۔

یہ قیمت معلوم کرنے کے لیے خسارے کی شرح معلوم ہونا چاہیے۔ شئے کی قیمت کم ہونے پر خسارے کی شرح R منفی لی جاتی ہے۔

حل کردہ مثالیں

مثال (1) ایک شہر کی آبادی ہر سال 8% بڑھتی ہے سال 2010 میں اس شہر کی آبادی 250000 تھی تو سال 2012 میں اس شہر کی آبادی کتنی تھی؟

حل : یہاں،

P = سال 2010 میں آبادی = 2,50,000

A = سال 2012 میں آبادی = ?

R = آبادی میں اضافہ کی شرح = 8%

N = 2 سال

A = 2012 میں یعنی 2 سال بعد ہونے والی آبادی

$$A = P \times \left(1 + \frac{R}{100}\right)^N = 250000 \times \left(1 + \frac{8}{100}\right)^2$$

$$= 250000 \times \left(\frac{108}{100}\right)^2$$

$$= 250000 \times \left(\frac{108}{100}\right) \times \left(\frac{108}{100}\right)$$

$$= 2,91,600$$

∴ 2012 میں شہر کی آبادی 2,91,600 تھی۔

مثال **(2)** نازیہ نے ایک اسکوٹر 2015 میں 60,000 روپے کا خریدا۔ خسارے کی شرح 20 فی صدی فی سال ہو تو 2 سال بعد اس اسکوٹر کی قیمت کیا ہو جائے گی؟

حل : یہاں روپے $P = 60000$، 2 سال بعد ملنے والی رقم $= A$، خسارے کی شرح $= R = -20\%$ ، سال $N = 2$

2 سال بعد ملنے والی رقم $= A$

$$A = P \times \left(1 + \frac{R}{100}\right)^N$$

$$= 60000 \times \left(1 + \frac{-20}{100}\right)^2$$

$$= 60000 \times \left(1 - \frac{1}{5}\right)^2$$

$$= 60000 \times \left(\frac{4}{5}\right)^2$$

$$= 60000 \times \frac{4}{5} \times \frac{4}{5}$$

$A = 38400$ روپے

2 سال بعد نازیہ کے اس اسکوٹر کی قیمت 38,400 روپے ہو جائے گی۔

مرکب سود کے طریقے سے سود معلوم کرنے کے ضابطے میں A، P، N، R ان چاروں میں سے کوئی تین دیے جائیں تو چوتھا معلوم کیا جا سکتا ہے۔

مثال **(3)** ایک رقم کا 10 فی صدی فی سال شرح سے 3 سال میں مرکب سود کے حساب سے 6655 روپے کل زر ہوتا ہے۔ وہ رقم معلوم کیجیے۔

حل : یہاں روپے $A = 6655$، فی صدی فی سال شرح $R = 10$، سال $N = 3$

$$A = P \times \left(1 + \frac{R}{100}\right)^N$$

$$\therefore 6655 = P \times \left(1 + \frac{10}{100}\right)^3 = P \times \left(\frac{110}{100}\right)^3 = P \times \left(\frac{11}{10}\right)^3$$

$$\therefore P = \frac{6655 \times 10^3}{11 \times 11 \times 11} \quad \therefore P = 5 \times 10^3 = 5000$$

$\therefore$ وہ رقم 5000 روپے ہے۔

مثال **(4)** 10 فی صدی فی سال شرح سے 9000 روپے کا کتنے سال میں مرکب سود 1890 روپے ہو جائے گا۔

حل : یہاں، $R = 10$، روپے $P = 9000$، روپے $1890 =$ مرکب سود

پہلے مرکب سود کے حساب سے کل زر معلوم کریں گے۔ $A = P + I = 9000 + 1890 = 10890$

مرکب سود کے حساب سے کل زر معلوم کرنے کا ضابطہ لکھ کر اس میں قیمت رکھیں گے۔

$$A = 10890 = P \times \left(1 + \frac{R}{100}\right)^N = 9000 \times \left(1 + \frac{10}{100}\right)^N = 9000\left(\frac{11}{10}\right)^N$$

$$\therefore \left(\frac{11}{10}\right)^N = \frac{10890}{9000} = \frac{121}{100} \quad \therefore \left(\frac{11}{10}\right)^N = \frac{121}{100} = \left(\frac{11}{10}\right)^2 \quad \therefore N = 2$$

$\therefore$ 2 سال میں مرکب سود 1890 روپے ہو جائے گا۔

مشقی سیٹ 14.2

.1 ایک عبوری (فلائی اوور) پل کی تعمیر میں ابتداء میں 320 مزدور تھے۔ ہر سال مزدوروں کی تعداد میں 25% اضافہ ہوتا ہے تو 2 سال بعد اس کام پر کتنے مزدور ہوں گے؟

.2 ایک گڈریے کے پاس ابتداء میں 200 بکریاں تھیں۔ ہر سال ان کی تعداد میں 10% اضافہ ہوتا ہے تو 2 سال بعد گڈریے کے پاس کتنی بکریاں ہوں گی؟

.3 ایک تحفظ گاہ میں 40,000 درخت تھے۔ درختوں کی تعداد میں ہر سال 5% کی شرح سے اضافہ کرنے کا فیصلہ کیا گیا تو 3 سال بعد تحفظ گاہ میں درختوں کی تعداد کیا ہوجانا چاہیے؟

.4 آج ایک مشین 2,50,000 روپے میں خریدی گئی۔ خسارے کی شرح 10% فی سال ہے۔ اسے 2 سال بعد فروخت کردیا جائے تو فروخت قیمت، خرید قیمت سے کتنا کم ہوجائے گی؟

.5 ایک اصل زر کی 16 فی صدی فی سال شرح سے مرکب سود کے حساب سے 2 سال کا کل زر 4036.80 روپے ہے تو 2 سال میں ہونے والا سود کتنا ہوگا؟

.6 15000 روپے 12 فی صدی فی سال شرح مرکب سود کے حساب سے قرض لیا گیا تو 3 سال بعد کتنے روپے واپس کرنا ہوں گے؟

.7 18 فی صدی فی سال شرح مرکب سود کے حساب سے ایک اصل زر کا 2 سال کا کل زر 13924 روپے ہوتا ہے تو اصل زر کتنا تھا؟

.8 شہر کے ایک محلے کی آبادی متعین شرح سے بڑھتی ہے۔ اس محلے کی موجودہ اور 2 سال بعد آبادی بالترتیب 16000 اور 17640 ہے تو آبادی میں اضافہ کی شرح معلوم کیجیے؟

.9 700 روپے کا 10 فی صدی فی سال شرح سے کتنے سال میں کل زر 847 روپے ہوگا؟

.10 8 فی صدی فی سال شرح سود سے 20,000 روپے کا 2 سال میں ہونے والے مفرد سود اور مرکب سود کے درمیان فرق معلوم کیجیے۔

جوابات کی فہرست

مشقی سیٹ 14.1 : **1.** (1) ₹2205, ₹205 (2) ₹6298.56, ₹1298.56 (3) ₹4622.5, ₹622.5
2. ₹17561.60 **3.** ₹1768.2

مشقی سیٹ 14.2 : **1.** 500 مزدور **2.** 242 بکریاں **3.** 46,305 درخت **4.** ₹47,500 **5.** ₹1036.80
6. ₹21,073.92 **7.** ₹10,000 **8.** 5 فیصدی فی سال **9.** 2 سال میں **10.** ₹128

DGYNK2

15 رقبہ

آیئے ذرا یاد کریں

ہم جانتے ہیں کہ بند کثیر ضلعی کے اضلاع سینٹی میٹر، میٹر، کلومیٹر اکائیوں میں دیے جاتے ہیں اور ان کے رقبے بالترتیب مربع سینٹی میٹر، مربع میٹر، مربع کلومیٹر اکائیوں میں حاصل ہوتے ہیں کیونکہ رقبہ کی پیائش مربع کی صورت میں کرتے ہیں۔

(1) مربع کا رقبہ = ضلع^2

(2) مستطیل کا رقبہ = لمبائی × چوڑائی

(3) قائمۃ الزاویہ مثلث کا رقبہ = $\frac{1}{2}$ × قائمہ زاویہ بنانے والے ضلعوں کا حاصل ضرب

(4) مثلث کا رقبہ = $\frac{1}{2}$ × قاعدہ × اونچائی

آیئے سمجھ لیں

متوازی الاضلاع کا رقبہ (Area of parallelogram)

عملی کام :

شکل (I)

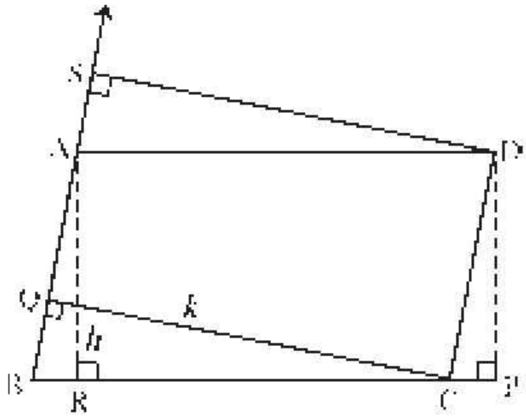
شکل (II)

- ایک کاغذ پر کافی بڑا متوازی الاضلاع ABCD بنایئے۔ نقطہ A سے ضلع BC پر عمود کھینچیے۔ △AEB قائمۃ الزاویہ مثلث کاٹ لیجیے۔ اسے سرکاتے ہوئے شکل (II) میں دکھائے ہوئے طریقے سے □ABCD کے باقی بچے ہوئے حصے سے جوڑتے ہیں۔ تیار ہونے والی شکل مستطیل ہے اسے دھیان میں رکھتے ہیں۔

- متوازی الاضلاع سے ہی یہ مستطیل تیار ہوا ہے یعنی دونوں کے رقبے مساوی ہیں۔
- متوازی الاضلاع کا قاعدہ یعنی مستطیل کے ایک ضلع کی لمبائی اور متوازی الاضلاع کی اونچائی یعنی مستطیل کے دوسرے ضلع یعنی مستطیل کی چوڑائی ہے۔

∴ متوازی الاضلاع کا رقبہ = قاعدہ × اونچائی

دھیان رکھیں کہ متوازی الاضلاع کے متوازی ضلعوں میں اگر ایک ضلع کو قاعدہ مانیں تو ان متوازی ضلعوں کا درمیانی فاصلہ ہی اس متوازی الاضلاع کی نظیری قاعدے پر اونچائی ہوتا ہے۔



$\square ABCD$ ایک متوازی الاضلاع ہے۔

BC ضلع $\perp$ DP قطعہ، BC ضلع $\perp$ AR قطعہ، ضلع BC کو قاعدہ مانیں تو

$l(AR) = l(DP) = h$ = اونچائی

اگر AB ضلع $\perp$ CQ قطعہ ہو اور اگر AB کو قاعدہ مانیں تو

اس قاعدہ کی نظیری اونچائی یعنی $l(QC) = k$ ہے۔

$\therefore A(\square ABCD) = l(BC) \times h = l(AB) \times k$

حل کردہ مثالیں

مثال (1) ایک متوازی الاضلاع کا قاعدہ 8 سم اور اونچائی 5 سم ہے۔ اس متوازی الاضلاع کا رقبہ معلوم کیجیے۔

حل : متوازی الاضلاع کا رقبہ = قاعدہ × اونچائی = 8×5

$= 40$

$\therefore$ متوازی الاضلاع کا رقبہ = 40 مربع سم

مثال (2) ایک متوازی الاضلاع کا رقبہ 112 مربع سم ہے۔ اس کا قاعدہ 10 سم ہے اس کی اونچائی معلوم کیجیے۔

حل : متوازی الاضلاع کا رقبہ = قاعدہ × اونچائی

$\therefore$ $112 = 10 \times$ اونچائی

$\therefore$ $\frac{112}{10}$ = اونچائی

متوازی الاضلاع کی اونچائی 11.2 سم ہے۔

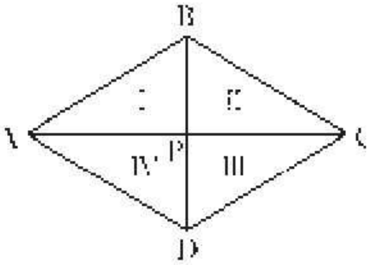
مشقی سیٹ 15.1

1. ایک متوازی الاضلاع کا قاعدہ 18 سم اور اونچائی 11 سم ہے تو اس متوازی الاضلاع کا رقبہ معلوم کیجیے۔

2. ایک متوازی الاضلاع کا رقبہ 29.6 مربع سم اور قاعدہ 8 سم ہے تو اس متوازی الاضلاع کی اونچائی معلوم کیجیے۔

3. متوازی الاضلاع کا رقبہ 83.2 مربع سم ہے۔ اس کی اونچائی 6.4 سم ہو تو اس کے قاعدے کی لمبائی کیا ہوگی؟

معین کا رقبہ (Area of a rhombus)



عملی کام : شکل میں دکھائے گئے طریقے کے مطابق ایک معین بنائیے۔

ہمیں معلوم ہے کہ معین کے وتر ایک دوسرے کے عمودی ناصف ہوتے ہیں۔

فرض کریں $l(\text{AC}) = d_1$ اور $l(\text{BD}) = d_2$

$\square$ABCD ایک معین ہے، اس کے وتر نقطہ P پر قطع کرتے ہیں۔

اس سے ہمیں چار متماثل قائمۃ الزاویہ مثلث حاصل ہوتے ہیں۔

ہر قائمۃ الزاویہ مثلث کا ضلع $l(\text{AC})\ \frac{1}{2}$ اور $l(\text{BD})\ \frac{1}{2}$ کے مساوی ہے۔

$$l(\text{AP}) = l(\text{PC}) = \frac{1}{2}\ l(\text{AC}) = \frac{d_1}{2}\ .$$

$$l(\text{BP}) = l(\text{PD}) = \frac{1}{2}\ l(\text{BD}) = \frac{d_2}{2}$$

چاروں قائمۃ الزاویہ مثلثوں کے رقبے مساوی ہیں۔

اسی طرح

معین کا رقبہ $\square\text{ABCD} = 4 \times A(\triangle\text{APB})$

$$= 4 \times \frac{1}{2} \times l(\text{AP}) \times l(\text{BP})$$

$$= 2 \times \frac{d_1}{2} \times \frac{d_2}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \times d_1 \times d_2$$

$\therefore$ معین کا رقبہ = $\frac{1}{2}$ × وتروں کی لمبائی کا حاصل ضرب

حل کردہ مثالیں

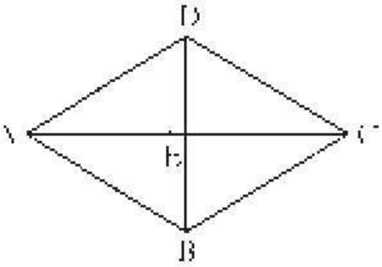
مثال (1) ایک معین کے دونوں وتروں کی لمبائیاں بالترتیب 11.2 سم اور 7.5 سم ہیں۔ اس معین کا رقبہ معلوم کیجیے۔

حل : معین کا رقبہ = $\frac{1}{2}$ × وتروں کی لمبائیوں کا حاصل ضرب

$$= \frac{1}{2} \times \frac{11.2}{1} \times \frac{7.5}{1} \qquad = 5.6 \times 7.5$$

= 42 مربع سم

مثال (2) ایک معین کا رقبہ 96 مربع سم ہے۔اس کے ایک وتر کی لمبائی 12 سم ہے۔تو معین کے ضلع کی لمبائی معلوم کیجیے۔



حل : فرض کریں ABCD□ ایک معین ہے۔

اس کے وتر BD کی لمبائی 12 سم ہے۔

معین کا رقبہ 96 مربع سم ہے۔

اس کی مدد سے پہلے وتر AC کی لمبائی معلوم کرتے ہیں۔

$\frac{1}{2} \times$ وتروں کی لمبائیوں کا حاصل ضرب = معین کا رقبہ

$$\therefore \quad 96 = \frac{1}{2} \times 12 \times l(AC) = 6 \times l(AC)$$

$$\therefore \; l(AC) = 16$$

فرض کریں وتروں کا نقطہ تقاطع E ہے۔معین کے وتر ایک دوسرے کے عمودی ناصف ہوتے ہیں۔

اس لیے $\triangle ADE$ میں $m\angle E = 90°$

$$l(DE) = \frac{1}{2}l(DB) = \frac{1}{2} \times 12 = 6; \quad l(AE) = \frac{1}{2}l(AC) = \frac{1}{2} \times 16 = 8$$

فیثاغورث کے مسئلے کے ذریعے

$$l(AD)^2 = l(AE)^2 + l(DE)^2 = 8^2 + 6^2$$
$$= 64 + 36 = 100$$

$$\therefore \quad l(AD) = 10$$

اس لیے معین کے ضلع کی لمبائی 10 سم ہے۔

مشقی سیٹ 15.2

1. ایک معین کے دونوں وتروں کی لمبائیاں 15 اور 24 سم ہیں۔اس کا رقبہ معلوم کیجیے۔

2. ایک معین کے دونوں وتروں کی لمبائیاں بالترتیب 16.5 سم اور 14.2 سم ہیں۔معین کا رقبہ معلوم کیجیے۔

3. ایک معین کا احاطہ 100 سم ہے۔اس کے ایک وتر کی لمبائی 48 سم ہے۔معین کا رقبہ کتنا ہوگا؟

*4. ایک معین کے ایک وتر کی لمبائی 30 سم ہے۔اس کا رقبہ 240 مربع سم ہے۔معین کا احاطہ معلوم کیجیے۔

ذوزنقہ کا رقبہ (Area of a trapezium)

عملی کام : قطعہ AB ∥ قطعہ DC والا ایک ذوزنقہ □ABCD ایک کاغذ پر بنائیے

قطعہ AP ⊥ ضلع DC اور

قطعہ BQ ⊥ ضلع DC قطعہ بنائیے

فرض کریں $l(AP) = l(BQ) = h$

ذوزنقہ کی اونچائی h، یعنی متوازی خطوط کا درمیانی فاصلہ، عمودین بنانے کی وجہ سے □ABCD کے 3 حصے ہو جاتے ہیں۔ ان میں سے △DPA اور △BQC قائمۃ الزاویہ مثلث ہیں۔

□ABQP ایک مستطیل ہے نقاط P اور Q قطعہ DC پر ہیں۔

ذوزنقہ ABCD کا رقبہ $= A(\triangle APD) + A(\square APQB) + A(\triangle BQC)$

$$= \frac{1}{2} \times l(DP) \times h + l(PQ) \times h + \frac{1}{2}\, l(QC) \times h$$

$$= h \left[\frac{1}{2} DP + PQ + \frac{1}{2} QC\right]$$

$$= \frac{1}{2} \times h \,[l(DP) + 2l(PQ) + l(QC)]$$

$$= \frac{1}{2} \times h \,[l(DP) + l(PQ) + l(AB) + l(QC)] \quad ...[\because l(PQ) = l(AB)]$$

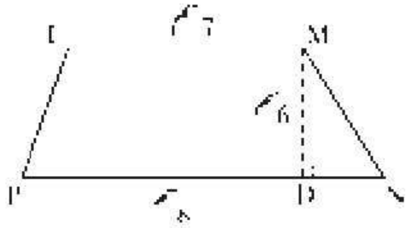
$$= \frac{1}{2} \times h \,[l(DP) + l(PQ) + l(QC) + l(AB)]$$

$$= \frac{1}{2} \times h \,[l(DC) + l(AB)]$$

$A(\square ABCD) = \frac{1}{2} \times$ (متوازی اضلاع کی لمبائی کا مجموعہ) $\times h$

ذوزنقہ کا رقبہ $= \frac{1}{2} \times$ متوازی اضلاع کی لمبائی کا مجموعہ $\times$ اونچائی

حل کردہ مثالیں



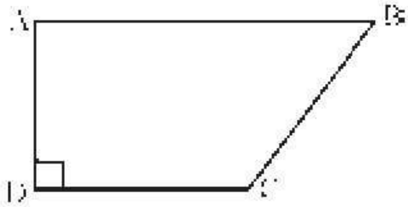
مثال (1) ایک ذوزنقہ کے مقابل کے اضلاع کی ایک جوڑی ایک دوسرے کے متوازی ہے۔ ان اضلاع کا درمیانی فاصلہ 6 سم ہے اور متوازی ضلعوں کی لمبائیاں بالترتیب 7 سم اور 8 سم ہیں۔ ذوزنقہ کا رقبہ معلوم کیجیے۔

حل : متوازی ضلعوں کا درمیانی فاصلہ = ذوزنقہ کی اونچائی = 6 سم

ذوزنقہ کا رقبہ = $\frac{1}{2}$ × (متوازی ضلعوں کی لمبائی کا مجموعہ) × اونچائی

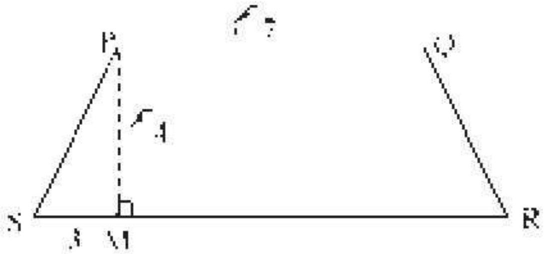
= $\frac{1}{2}(7 + 8) \times 6 = 45$ مربع سم

مشقی سیٹ 15.3



.1 ذواربعۃ الاضلاع ABCD□ میں $l(AB) = 13$ سم
$l(DC) = 9$ سم، $l(AD) = 8$ سم
تو ABCD□ کا رقبہ معلوم کیجیے۔

.2 ایک ذوزنقہ کے متوازی ضلعوں کی لمبائیاں بالترتیب 8.5 سم اور 11.5 سم ہیں۔ اس کی اونچائی 4.2 سم ہے۔ ذوزنقہ کا رقبہ معلوم کیجیے۔



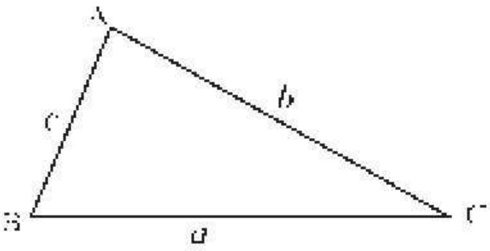
.3* PQRS□ ایک متساوی الساقین ذوزنقہ ہے۔
$l(PQ) = 7$ سم، ضلع SR ⊥ قطعہ PM
$l(SM) = 3$ سم، متوازی ضلعوں کا درمیانی فاصلہ 4 سم ہے۔
تو PQRS□ کا رقبہ معلوم کیجیے۔

آیئے غور کریں

مثلث کا رقبہ (Area of a Triangle)

ہم جانتے ہیں کہ مثلث کا رقبہ = $\frac{1}{2}$ × قاعدہ × ارتفاع

اب ہم دیکھتے ہیں کہ مثلث کی اونچائی نہیں دی گئی ہو تاہم مثلث کے تینوں اضلاع کی لمبائیاں دی گئی ہوں تو اس مثلث کا رقبہ کس طرح معلوم کرتے ہیں۔



△ABC کے اضلاع کی لمبائیاں a، b، c ہیں۔

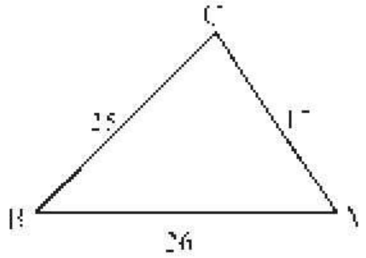
اس مثلث کا نصف احاطہ معلوم کرتے ہیں۔

نصف احاطہ = $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$

مثلث کا رقبہ = $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

اس ضابطے کو ہیرون کا ضابطہ (Heron's Formula) کہتے ہیں۔

مثال (1) ایک مثلث کے اضلاع 17 سم، 25 سم اور 26 سم ہیں۔ مثلث کا رقبہ معلوم کیجیے۔



حل : $a = 17$، $b = 25$، $c = 26$

نصف احاطہ $= s = \dfrac{a+b+c}{2} = \dfrac{17+25+26}{2} = \dfrac{68}{2} = 34$

مثلث کا رقبہ $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$= \sqrt{34(34-17)(34-25)(34-26)}$

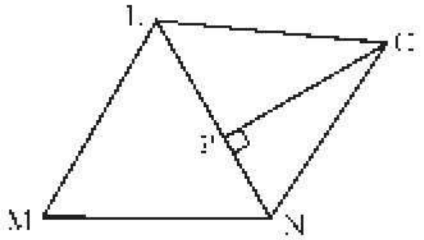
$= \sqrt{34 \times 17 \times 9 \times 8}$

$= \sqrt{17 \times 2 \times 17 \times 3 \times 3 \times 2 \times 2 \times 2}$

$= \sqrt{17^2 \times 2^2 \times 2^2 \times 3^2}$

$= 17 \times 2 \times 2 \times 3 = 204$ مربع سم

مثال (2) متصلہ شکل میں ایک قطعہ اراضی کا نقشہ دیا گیا ہے۔



$l(\text{LM}) = 60$ میٹر $l(\text{MN}) = 60$ میٹر

$l(\text{LN}) = 96$ میٹر $l(\text{OP}) = 70$ میٹر

اس قطعہ اراضی کا رقبہ معلوم کیجیے۔

حل : اس شکل میں $\triangle$LMN اور $\triangle$LON بننے والے مثلث نظر آتے ہیں۔

$\triangle$LMN کے تمام اضلاع کی لمبائیاں معلوم ہیں اس لیے ہیرون کے ضابطے کا استعمال کرکے اس کا رقبہ معلوم کریں گے۔

$\triangle$LON میں ضلع LN قاعدہ ہے اور l(OP) کو ارتفاع مان کر $\triangle$LON کا رقبہ معلوم کرتے ہیں۔

$\triangle$LMN کا نصف احاطہ $= s = \dfrac{60+60-96}{2} = \dfrac{216}{2} = 108$

$A(\triangle LMN) = \sqrt{108(108-60)(108-60)(108-96)}$

$= \sqrt{108 \times 48 \times 48 \times 12}$

$= \sqrt{12 \times 9 \times 48 \times 48 \times 12}$

$A(\triangle LMN) = 12 \times 3 \times 48 = 1728$ مربع میٹر

$A(\triangle LNO) = \dfrac{1}{2} \times$ قاعدہ $\times$ ارتفاع

$= \dfrac{1}{2} \times 96 \times 70$

$= 90 \times 35 = 3360$ مربع سم

قطعہ اراضی $\square$LMNO کا رقبہ $= A(\triangle LMN) + A(\triangle LNO)$

$= 1728 + 3360$

$= 5088$ مربع میٹر

یہ میری سمجھ میں آ گیا

متوازی الاضلاع کا رقبہ = قاعدہ × ارتفاع

معین کا رقبہ = $\frac{1}{2}$ × وتروں کی لمبائیوں کا حاصل ضرب

ذوزنقہ کا رقبہ = $\frac{1}{2}$ × متوازی اضلاع کی لمبائیوں کا مجموعہ × اونچائی

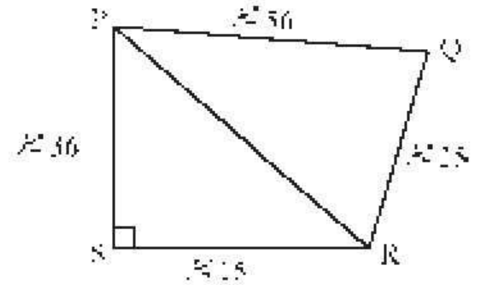
اگر $\triangle ABC$ کے اضلاع a، b، c ہوں تو ہیرون کے ضابطے کا استعمال کر کے مثلث کا رقبہ معلوم کرتے ہیں۔

$$A(\triangle ABC) = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

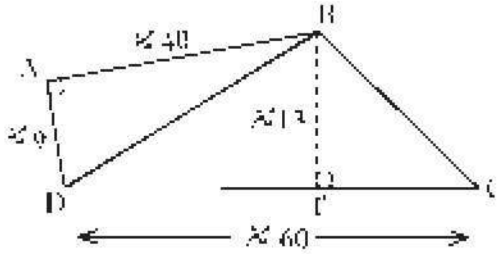
جس میں $s = \frac{a+b+c}{2}$

مشقی سیٹ 15.4

.1 ایک مثلث کے اضلاع کی لمبائیاں 45 سم، 39 سم اور 42 سم ہیں۔ مثلث کا رقبہ معلوم کیجیے۔



.2 شکل میں دکھائی گئی پیمائشوں کو دھیان میں رکھ کر $\square PQRS$ کا رقبہ معلوم کیجیے۔

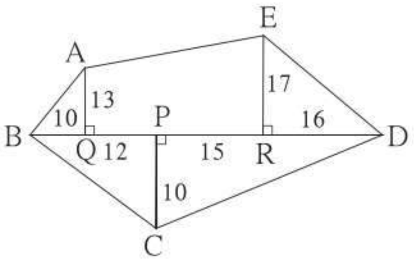


.3 متصلہ شکل میں کچھ پیمائشیں دکھائی گئیں ہیں ان کی مدد سے $\square ABCD$ کا رقبہ معلوم کیجیے۔

آیئے سمجھ لیں

غیر منتظم جگہ کا رقبہ :

قطعہ اراضی، کھیتی کی زمین وغیرہ کی شکل عام طور پر غیر منتظم کثیر الاضلاع کی ہوتی ہے۔ ان کی تقسیم مثلث یا مخصوص قسم کے ذوار بعۃ الاضلاع میں کرتے ہیں۔ اس طرح قطعہ اراضی کی تقسیم کر کے ان کا رقبہ کس طرح معلوم کرتے ہیں اسے ذیل کی مثالوں سے سمجھ لیجیے۔



مثال : متصلہ شکل میں ABCDE ایک کثیرضلعی دیا گیا ہے۔شکل میں تمام پیمائشیں میٹر میں دی گئی ہیں ۔اس شکل کا رقبہ معلوم کیجیے۔

حل : یہاں $\triangle AQB$ اور $\triangle ERD$ قائمۃ الزاویہ مثلث ہیں۔

$\square AQRE$ ذوزنقہ ہے۔

$\triangle BCD$ کا قاعدہ BD اور ارتفاع PC دیا ہوا ہے۔

اب ہم ہر شکل کا رقبہ معلوم کریں گے۔

$$A(\Delta\ AQB) = \frac{1}{2} \times l(BQ) \times l(AQ) = \frac{1}{2} \times 10 \times 13 = 65 \text{ مربع میٹر}$$

$$A(\Delta\ ERD) = \frac{1}{2} \times l(RD) \times l(ER) = \frac{1}{2} \times 16 \times 17 = 136 \text{ مربع میٹر}$$

$$A(\square\ AQRE) = \frac{1}{2}\ [l(AQ) + l(ER)] \times l(QR)$$

$$= \frac{1}{2}\ [13 + 17] \times (12 + 15)$$

$$= \frac{1}{2} \times 30 \times 27 = 15 \times 27 = 405 \text{ مربع میٹر}$$

$$l(BD) = l(BP) + l(PD) = 10 + 12 + 15 + 16 = 53 \text{ میٹر}$$

$$A(\Delta\ BCD) = \frac{1}{2} \times l(BD) \times l(PC) = \frac{1}{2} \times 53 \times 10 = 265 \text{ مربع میٹر}$$

$\therefore$ کثیرضلعی $\square ABCDE$ کا رقبہ

$$= A(\Delta\ AQB) + A(\square AQRE) + A(\Delta\ ERD) + A(\Delta\ BCD)$$

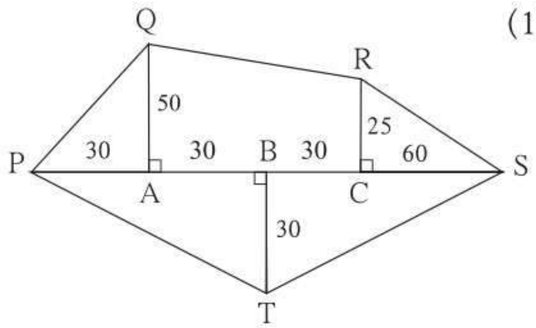
$$= 65 + 405 + 136 + 265$$

$$= 871 \text{ مربع میٹر}$$

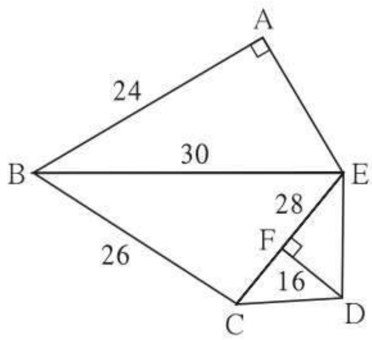
مشقی سیٹ 15.5

.1 درج ذیل قطعہ اراضی کا رقبہ معلوم کیجیے۔ (تمام پیمائشیں میٹر میں ہیں)

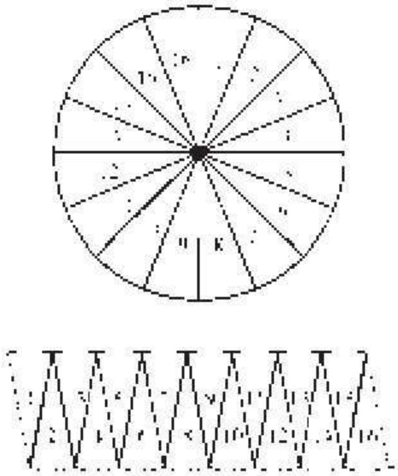
(1)



(2)



دائرے کا رقبہ (Area of a Circle) :



عملی کام : ایک کارڈ شیٹ پر ایک بڑا دائرہ بنائیے۔

دائرے میں شکل کے مطابق دائرے کے تراشے بنا کر انھیں کاٹ کر الگ الگ کیجیے۔ دائرے کو 16 یا 32 مساوی حصے میں تقسیم کیجیے۔ یا 360° کے مساوی حصے کرکے دائرے کے 18 یا 20 مساوی حصے کیجیے۔ اس کے بعد ان حصوں کو نصف قطروں پر کاٹ کر الگ الگ تراشے حاصل کیجیے۔ شکل میں دکھائے گئے طریقے کے مطابق انھیں جوڑیے۔ اس سے تقریباً ایک مستطیل جیسی شکل تیار ہوتی ہے۔

اگر دائرے کے مساوی حصوں کی تعداد جتنی زیادہ کی جائے گی اتنی ہی شکل مستطیل جیسی ہوتی جائے گی۔

دائرے کا احاطہ $= 2\pi r$

اس لیے مستطیل کی لمبائی πr یعنی نصف محیط کے مساوی اور چوڑائی r کے مساوی ہے۔

$\therefore$ دائرے کا رقبہ = مستطیل کا رقبہ = لمبائی × چوڑائی $= \pi r \times r$

$\therefore$ دائرے کا رقبہ $= \pi r^2$

حل کردہ مثالیں

مثال (1) ایک دائرے کا نصف قطر 21 سم ہے۔ دائرے کا رقبہ معلوم کیجیے۔

حل :

دائرے کا رقبہ $= \pi r^2$

$$= \frac{22}{7} \times 21^2$$

$$= \frac{22}{7} \times \frac{21}{1} \times \frac{21}{1} = 66 \times 21 = 1386 \text{ مربع سم}$$

$\therefore$ دائرے کا رقبہ 1386 مربع سم ہے۔

مثال (2) ایک دائروی میدان کا رقبہ 3850 مربع میٹر ہے۔ میدان کا نصف قطر معلوم کیجیے۔

حل :

دائرے کا رقبہ $= \pi r^2$

$$3850 = \frac{22}{7} \times r^2$$

$$r^2 = \frac{3850 \times 7}{22} \quad \therefore \quad r^2 = 1225 \quad \therefore \quad r = 35 \text{ میٹر}$$

اس لیے میدان کا نصف قطر 35 میٹر ہے۔

مشقی سیٹ 15.6

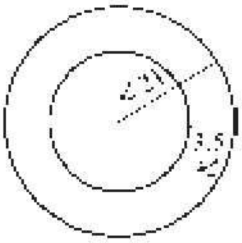
.1 ذیل میں دائرے کے نصف قطر دیے گئے ہیں۔ دائروں کے رقبے معلوم کیجیے۔

(1) 28 سم (2) 10.5 سم (3) 17.5 سم

.2 ذیل میں کچھ دائروں کے رقبے دیے گئے ہیں۔ ان دائروں کے قطر معلوم کیجیے۔

(1) 176 مربع سم (2) 394.24 مربع سم (3) 12474 مربع سم

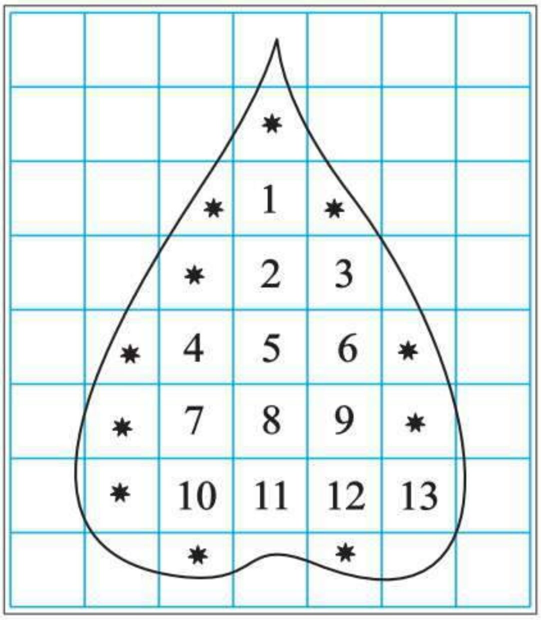
.3 ایک دائروی باغ کا قطر 42 میٹر ہے اس باغ کے گرد 3.5 میٹر چوڑائی کا راستہ ہے۔
راستے کا رقبہ معلوم کیجیے۔



.4 ایک دائرے کا محیط 88 سم ہے۔ دائرے کا رقبہ معلوم کیجیے۔

غیر منتظم شکل کا اندازاً رقبہ معلوم کرنا :

ترسیمی کاغذ کی مدد سے کسی بھی بند شکل کا رقبہ معلوم کر سکتے ہیں۔ دی گئی شکل یا شئے کو ترسیمی کاغذ پر رکھ کر اس کے کناروں پر پنسل چلاتے ہیں اور اس کا خاکہ ترسیمی کاغذ پر بنی ہوئی شکل کا رقبہ معلوم کرنے کے لیے استعمال کرتے ہیں۔ ترسیمی کاغذ پر مربعوں کی تعداد کس طرح معلوم کریں گے اسے درج ذیل عملی کام کے ذریعے سمجھ لیں۔



(1) شکل میں 1 مربع سم رقبے والے مربعوں کی تعداد = 13

∴ ان کا رقبہ = 13 مربع سم

(2) شکل میں $\frac{1}{2}$ مربع سم سے زیادہ لیکن 1 مربع سم سے کم رقبے والے مربعوں کی تعداد = 11

∴ ان کا رقبہ = تقریباً 11 مربع سم

(3) شکل میں $\frac{1}{2}$ مربع سم رقبے والے مربعوں کی تعداد = 0

∴ ان کا رقبہ = 0 مربع سم

(4) شکل میں $\frac{1}{2}$ مربع سم سے کم رقبے والے مربعوں کے رقبوں پر غور نہیں کریں گے۔

∴ ان کا رقبہ = 0 مربع سم

∴ دی ہوئی شکل کا اندازاً رقبہ = 13 + 11 + 0 + 0 = 24 مربع سم (تقریباً)

گننے کے لیے استعمال ہونے والے مربع جتنے چھوٹے ہوں گے اتنا ہی شکل کا رقبہ اندازاً صحیح ہوگا۔

عملی کام : ترسیمی کاغذ پر 28 ملی میٹر نصف قطر کا ایک دائرہ ، کوئی بھی ایک مثلث اور کوئی بھی ایک ذو زنقہ بنایئے ۔ان تینوں اشکال کا رقبہ ترسیمی کاغذ کی مدد سے چھوٹے مربعوں کی تعداد گن کر معلوم کیجیے۔ جانچ کیجیے کہ یہ رقبے ضابطے کے ذریعے معلوم کیے گئے رقبوں کے مساوی ہیں، تصدیق کیجیے۔

جوابات کی فہرست

مشقی سیٹ 15.1 : **1.** 198 مربع سم　**2.** 3.7 سم　**3.** 13 سم

مشقی سیٹ 15.2 : **1.** 180 مربع سم　**2.** 117.15 مربع سم　**3.** 336 مربع سم　**4.** 68 سم

مشقی سیٹ 15.3 : **1.** 88 مربع سم　**2.** 42　**3.** 40 مربع سم

مشقی سیٹ 15.4 : **1.** 756 مربع سم　**2.** 690 مربع سم　**3.** 570 مربع سم

مشقی سیٹ 15.5 : **1.** 6000 مربع میٹر　**2.** 776 مربع میٹر

مشقی سیٹ 15.6 : **1.** (1) 2464 مربع سم　(2) 346.5 مربع سم　(2) 962.5 مربع سم

2. (1) [illegible] سم　(2) 22.4 سم　(2) 126 سم

3. 500.50 مربع سم

4. 616 مربع سم

مزید معلومات کے لیے :

ہمارے ملک میں پیمائش کا عشری نظام رائج ہے۔

سرکاری دستاویز میں زمین کا رقبہ آر، ہیکٹر جیسی عشری اکائیوں میں درج کرتے ہیں۔

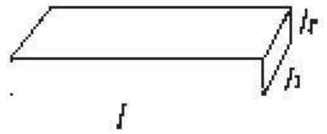
مربع میٹر 10,000 = ہیکٹر 1 = آر 100 ، آر 1 = مربع میٹر 100

کاروبار یا لین دین میں زمین کا رقبہ گنٹھا، ایکڑ جیسی اکائیوں میں پیمائش کرنے کا طریقہ آج بھی رائج ہے۔ رقبہ 1 گنٹھا تقریباً 1 آر کے مساوی ہے۔ یعنی تقریباً 100 مربع میٹر ہوتا ہے۔ 1 ایکڑ تقریباً 0.4 ہیکٹر ہوتا ہے۔

DH8JLP

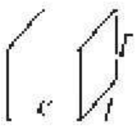
16 سطح کا رقبہ اور حجم

آیئے ذرا یاد کریں



مکعب نما یا مستطیلی منشور کی سطحوں کا کل رقبہ $= 2(l \times b + b \times h + l \times h)$

مکعب کی کل سطحوں کا رقبہ $= 6l^2$



1 میٹر $= 100$ سم، 1 مربع میٹر $= 100 \times 100$ مربع سم $= 10000$ مربع سم $= 10^4$ مربع سم

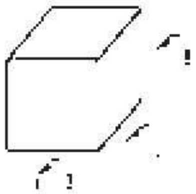
1 سم $= 10$ ملی میٹر، 1 مربع سم $= 10 \times 10$ مربع ملی میٹر $= 100$ مربع ملی میٹر $= 10^2$ مربع ملی میٹر

آیئے سمجھ لیں

مستطیلی منشور، مکعب اور مدور استوانہ وغیرہ اشیا سہ ابعادی یعنی مجسم ہوتی ہیں ۔ یہ مجسم اشکال مکانی جگہ گھیرتی ہیں ۔ کسی بھی مجسم شکل سے گھری ہوئی جگہ کو اس کا حجم کہتے ہیں ۔

حجم کی معیاری اکائی (Standard unit of volume)

متصلہ شکل میں مکعب کے ہر ضلع کی لمبائی 1 سم ہے۔ اس مکعب کے ذریعے گھری ہوئی جگہ، حجم ناپنے کی معیاری اکائی ہے۔ جو 1 مکعب سینٹی میٹر مختصراً 1 مکعب سم لکھتے ہیں ۔

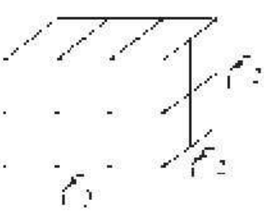


عملی کام I : 1 سم ضلع کی لمبائی والے کئی مکعب ملا کر رکھیے۔ شکل میں دکھائے گئے طریقے کے مطابق 6 مکعب ملا کر رکھے گئے ہیں ۔ جس سے ایک مستطیلی منشور بنتا ہے۔ اس مستطیلی منشور کی لمبائی 3 سم، چوڑائی 2 سم اور اونچائی 1 سم ہے۔

ایک سم لمبائی والے 6 مکعب ملا کر مستطیلی منشور بنایا گیا ہے۔

اس مستطیلی منشور کا حجم $= 3 \times 2 \times 1 = 6$ مکعب سم

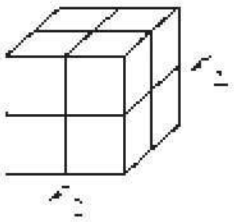
عملی کام II : متصلہ شکل میں مستطیلی منشور کی لمبائی 3 سم، چوڑائی 2 سم اور اونچائی 2 سم ہے اس مستطیلی منشور میں 1 مکعب سم حجم والے $12 = 2 \times 2 \times 3$ مکعب ہیں ۔ یعنی اس مستطیلی منشور کا حجم 12 مکعب سم ہے۔ اس بنا پر،



مستطیلی منشور کے حجم کا ضابطہ = لمبائی × چوڑائی × اونچائی

اگر لمبائی l، چوڑائی b اور اونچائی h ہو تو

مستطیلی منشور کا حجم $= l \times b \times h$



عملی کام III : متصلہ شکل میں 1 مکعب سم حجم والے 8 مکعب ایک دوسرے سے ملا کر رکھے گئے ہیں جس سے ایک مکعب تیار ہوتا ہے جس کے ضلع کی لمبائی 2 سم ہے۔

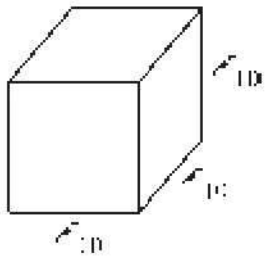
مکعبوں کا حجم $= 2 \times 2 \times 2 = 2^3$

اس بنا پر l ضلع والے مکعب کا حجم درج ذیل ہے۔

l ضلع والے مکعب کا حجم $= l \times l \times l = l^3$

مائع کا حجم : مائع کی جسامت یعنی مائع کا حجم ہوتا ہے۔

مائع کا حجم ناپنے کے لیے ملی لٹر اور لٹر اکائیاں استعمال ہوتی ہیں اسے ہم جانتے ہیں۔



شکل میں 10 سم ضلع والا ایک کھوکھلا مکعب ہے۔

اس کا حجم $= 10 \times 10 \times 10 = 1000$ مکعب سم ہے۔

اگر اس مکعب کو پانی سے بھرا جائے تو اس میں موجود پانی کا حجم 1000 مکعب سم ہوگا۔

اس جسامت کو 1 لٹر کہتے ہیں۔ ہم جانتے ہیں کہ ملی لٹر 1000 = 1 لٹر

اس لیے دھیان میں رکھیے کہ

ملی لٹر 1000 = مکعب سم 1000 = 1 لٹر اس بنا پر ملی لٹر 1 = مکعب سم 1 ہوتا ہے۔

یعنی 1 سم والے مکعب میں سمانے والے پانی کی جسامت 1 ملی لٹر ہوتی ہے۔

حل کردہ مثالیں

مثال (1) مستطیلی منشور نما شکل کے شیشے کے ایک مچھلی گھر کی لمبائی 1 میٹر، چوڑائی 40 سم اور اونچائی 50 سم ہے تو اس مچھلی گھر میں کتنا پانی سمائے گا؟ معلوم کیجیے۔

حل : مچھلی گھر میں سمانے والے پانی کا حجم اس مکعب نما مچھلی گھر کے مساوی ہوگا۔

مچھلی گھر کی لمبائی = 1 میٹر = 100 سم، چوڑائی 40 سم اور اونچائی 50 سم ہے۔

مچھلی گھر کا حجم $= l \times b \times h = 100 \times 40 \times 50 = 2,00,000$ مکعب سم

2,00,000 مکعب سم $= \frac{200000}{1000} = 200$ لٹر ... ($\because$ 1000 مکعب سم = 1 لٹر)

اس لیے مچھلی گھر میں 200 لٹر پانی سمائے گا۔

مثال (2) ایک مستطیلی منشور گودام کی لمبائی 6 میٹر، چوڑائی 4 میٹر اور اونچائی 4 میٹر ہے۔ اس گودام میں 40 سم ضلع والے مکعب زیادہ سے زیادہ کتنے رکھے جا سکتے ہیں۔

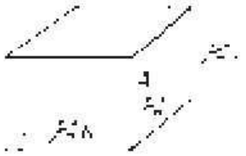
حل : گودام مکمل بھرنے پر تمام بکسوں (مکعب) کا کل حجم گودام کے حجم کے مساوی ہوگا۔

مثال حل کرنے کے لیے درج ذیل مرحلوں پر غور کریں۔

(1) گودام کا حجم معلوم کیجیے۔

(2) ایک بکس (مکعب) کا حجم معلوم کیجیے۔

(3) بکسوں کی تعداد معلوم کیجیے۔



مرحلہ (1) گودام کی لمبائی = 6 میٹر = 600 سم

اونچائی = چوڑائی = 40 میٹر = 400 سم

گودام کا حجم = لمبائی × چوڑائی × اونچائی = 600 × 400 × 400 مکعب سم

مرحلہ (2) ایک بکس کا حجم = $(\text{ضلع})^3 = (40)^3 = 40 \times 40 \times 40$ مکعب سم

مرحلہ (3) بکسوں کی تعداد = $\dfrac{\text{گودام کا حجم}}{\text{ایک بکس کا حجم}} = \dfrac{600 \times 400 \times 400}{40 \times 40 \times 40} = 1500$

$\therefore$ اس گودام میں زیادہ سے زیادہ 1500 بکس رکھے جاسکتے ہیں۔

مثال (3) برفی تیار کرنے کے لیے کھوا اور شکر کا پگھلا ہوا 5 لٹر آمیزہ ایک مکعب نما ٹرے میں انڈیلا گیا تو ٹرے مکمل طور پر بھر گئی۔ ٹرے کی چوڑائی 40 سم اور اونچائی 2.5 سم ہے۔ تو ٹرے کی لمبائی معلوم کیجیے۔

حل : مثال حل کرنے کے لیے درج ذیل مرحلوں میں خانہ پری کیجیے۔ خانوں میں مناسب عدد بھریے۔

مرحلہ (1) ٹرے کی گنجائش = 5 لٹر = $\boxed{}$ مکعب سم ... ($\because$ 1 لٹر = 1000 مکعب سم)

مرحلہ (2) آمیزے کا حجم = $\boxed{}$ مکعب سم

مرحلہ (3) مستطیلی ٹرے کا حجم = آمیزے کا حجم

لمبائی × چوڑائی × اونچائی = $\boxed{}$ مکعب سم

لمبائی × 40 × 2.5 = $\boxed{}$ مکعب سم ، $\therefore$ ٹرے کی لمبائی = $\dfrac{\boxed{}}{100}$ = 50 سم

یہ میری سمجھ میں آگیا

- مکعب کا حجم = $(\text{ضلع})^3 = l^3$
- مستطیلی منشور کا حجم = لمبائی × چوڑائی × اونچائی = $l \times b \times h$

مشقی سیٹ 16.1

1. ایک بکس کی لمبائی 20 سم، چوڑائی 10.5 سم اور اونچائی 8 سم ہے اس کا حجم معلوم کیجیے۔
2. ایک مستطیلی منشور شکل کے صابن کی ٹکیہ کا حجم 150 مکعب سم ہے۔ اس کی لمبائی 10 سم اور چوڑائی 5 سم ہو تو اس کی موٹائی کتنی ہوگی؟
3. 6 میٹر لمبائی، 2.5 میٹر اونچائی اور 0.5 میٹر چوڑائی کی ایک دیوار تیار کرنا ہے۔ اس کے لیے 25 سم لمبائی، 15 سم چوڑائی اور 10 سم اونچائی والی کتنی اینٹیں درکار ہوں گی؟

4. بارش کا پانی ذخیرہ کرنے کے لیے ایک بستی میں 10 میٹر لمبائی، 6 میٹر چوڑائی اور 3 میٹر گہرائی کا حوض تیار کیا گیا۔ اس حوض کی گنجائش کتنی ہے؟ حوض میں کتنے لٹر پانی سمائے گا؟

آیئے سمجھ لیں

مدور استوانے کی سطح کا رقبہ (Surface area of a cylinder)

ایک مدور استوانہ شکل کا ڈبا لیجیے۔ اس کی اونچائی کے مساوی چوڑائی والا ایک مستطیلی کاغذ لیجیے۔ اسے ڈبے کی خمدار سطح پر اچھی طرح لپیٹیے کہ سطح مکمل طور سے ڈھک جائے۔ کاغذ کا بچا ہوا حصہ کاٹ لیجیے۔

لمبائی = دائرے کا محیط　　　کاغذ لپٹا ہوا　　　مدور استوانہ

لپٹا ہوا کاغذ نکالیے جو مستطیل شکل کا ہے۔ اس مستطیل کا رقبہ یعنی مدور استوانے کی خمدار سطح کا رقبہ، مستطیل کی لمبائی یعنی دائروی تہہ کا محیط اور مستطیل کی چوڑائی یعنی مدور استوانے کی اونچائی

مدور استوانے کی خمدار سطح کا رقبہ = مستطیل کا رقبہ = لمبائی × چوڑائی

= مدور استوانے کے قاعدہ کا محیط × مدور استوانے کی اونچائی

مدور استوانے کی خمدار سطح کا رقبہ = $2\pi r \times h = 2\pi rh$

بند مدور استوانے میں قاعدے کی سطح اور اوپری حصے کی سطح دائروی ہوتی ہے۔

∴ بند دائروی استوانے کی کل سطح کا رقبہ = مدور استوانے کی خمدار سطح کا رقبہ + اوپری سطح کا رقبہ + قاعدے کا رقبہ

∴ بند دائروی استوانے کی کل سطحوں کا رقبہ = مدور استوانے کی خمدار سطح کا رقبہ + 2 × دائرہ کا رقبہ

$$= 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi r(h + r)$$

حل کردہ مثالیں

مثال (1) ایک مدور استوانہ نما پانی کی ٹانکی کا قطر 1 میٹر اور اونچائی 2 میٹر ہے۔ ٹانکی پر ڈھکن لگا ہے۔ ٹانکی کے اندر اور باہر ڈھکن سمیت رنگ و روغن کرنا ہے۔ رنگ و روغن کرنے کا خرچ 80 روپے فی مربع میٹر ہے تو ٹانکی کو رنگنے کا خرچ کتنا ہوگا؟ ($\pi = 3.14$)

حل : ٹانکی کے اندر اور باہر رنگ و روغن یعنی رنگے جانے والے حصوں کا رقبہ ٹانکی کی کل بیرونی سطحوں کے رقبے کا دگنا ہوگا۔

مدوراستوانے کے قاعدے کا قطر 1 میٹر ہے۔

اس لیے نصف قطر 0.5 میٹر اور مدوراستوانے کی اونچائی 2 میٹر ہے۔

$\therefore$ مدوراستوانے کی کل سطحوں کا رقبہ $= 2\pi r(h + r) = 2 \times 3.14 \times 0.5\,(2.0 + 0.5)$

$= 2 \times 3.14 \times 0.5 \times 2.5 = 7.85$ مربع میٹر

رنگ وروغن کیے جانے والے حصوں کا رقبہ $= 2 \times 7.85 = 15.70$ مربع میٹر

ٹانکی کو رنگنے کا کل خرچ $= 15.70 \times 80 = 1256$ روپے

مثال (2) ایک ایلومینیم کے مستطیلی پترے (ٹین) کی لمبائی 3.3 میٹر اور چوڑائی 3 میٹر ہے۔ اس پترے سے 3.5 سم نصف قطر اور 30 سم لمبائی کے زیادہ سے زیادہ کتنی نلیاں بنائی جاسکتی ہے؟

حل : مستطیلی پترے کا رقبہ = لمبائی × چوڑائی

$= 3.3 \times 3$ مربع میٹر $= 330 \times 300$ مربع سم

ایک نلی کی لمبائی یعنی مدوراستوانے کی اونچائی $= h = 30$ سم

نلی کا نصف قطر = مدوراستوانے کے قاعدے کا نصف قطر $= r = 3.5$ سم

ایک نلی تیار کرنے کے لیے درکار پترا = ایک نلی کی خمدار سطح کا رقبہ

$= 2\pi rh = 2 \times \frac{22}{7} \times \frac{35}{10} \times \frac{30}{1}$

$= 2 \times 22 \times 15 = 660$ مربع سم

پترے سے تیار ہونے والی نلیوں کی تعداد $= \dfrac{\text{پترے کا رقبہ}}{\text{ایک نلی کی خمدار سطح کا رقبہ}} = \dfrac{330 \times 300}{660} = 150$

مشقی سیٹ 16.2

.1 درج ذیل ہر مثال میں مدوراستوانے کے قاعدے کا نصف قطر r اور انچائی h دی گئی ہے۔ اس پر سے ہر ایک مدوراستوانے کی خمدار سطح کا رقبہ اور کل سطحوں کا رقبہ معلوم کیجیے۔

(1) $r = 7$ سم , $h = 10$ سم (2) $r = 1.4$ سم , $h = 2.1$ سم (3) $r = 2.5$ سم , $h = 7$ سم

(4) $r = 70$ سم , $h = 1.4$ سم (5) $r = 4.2$ سم , $h = 14$ سم

.2 50 سم قطر اور 45 سم اونچائی کے دونوں جانب سے بند ڈرم کی کل سطحوں کا رقبہ معلوم کیجیے۔ $(\pi = 3.14)$

3. ایک مدور استوانے کی خمدار سطح کا رقبہ 660 مربع سم اور اونچائی 21 سم ہے۔اس کا نصف قطر اور قاعدے کا رقبہ معلوم کیجیے۔

4. ایک مدور استوانے کی شکل کے پترے کے ڈبے کا قطر 28 سم ہے اور اونچائی 20 سم ہے۔ ڈبا ایک جانب سے کھلا ہے تو اسے تیار کرنے میں لگنے والے پترے کا رقبہ معلوم کیجیے۔اس ڈبے کا 2 سم اونچائی کا ڈھکنا تیار کرنے کے لیے اندازاً کتنے مربع سم پترا لگے گا معلوم کیجیے۔

آیئے سمجھ لیں

مدور استوانے کا حجم (Volume of a Cylinder)

مدور استوانہ نما پانی کی ٹانکی میں کتنا پانی سمائے گا یہ معلوم کرنے کے لیے ٹانکی کا حجم معلوم کرنا ہوتا ہے۔

کسی بھی منتظم قاعدے والے جسم کا حجم = قاعدے کا رقبہ × اونچائی ... (عام ضابطہ)

یہ ایک عام ضابطہ ہے۔

مدور استوانے کا قاعدہ، دائرہ کی شکل کا ہے۔

$\therefore$ مدور استوانے کا حجم $= \pi r^2 h$ $\therefore$

حل کردہ مثالیں

مثال (1) ایک مدور استوانے کے قاعدے کا نصف قطر 5 سم اور اونچائی 10 سم ہے۔اس مدور استوانے کا حجم معلوم کیجیے۔ $(\pi = 3.14)$

حل : مدور استوانے کے قاعدے کا نصف قطر $r = 5$ سم اور اونچائی $h = 10$ سم

مدور استوانے کا حجم $= \pi r^2 h = 3.14 \times 5^2 \times 10 = 3.14 \times 25 \times 10 = 785$ مکعب سم

مثال (2) ایک مدور استوانہ نما پانی کے ڈرم کی اونچائی 56 سم ہے اس ڈرم کی گنجائش 70.4 لٹر ہے۔ڈرم کا نصف قطر معلوم کیجیے۔ $(\pi = \frac{22}{7})$

فرض کریں r = مدور استوانہ شکل کے ڈرم کے قاعدہ کا نصف قطر

ڈرم کی گنجائش = ڈرم کا حجم $= 70.4 \times 1000$ مکعب سم $= 704 \times 100$ مکعب سم

1 لیٹر $= 1000$ ملی لیٹر , $\therefore$ 70.4 لیٹر $= 70400$ ملی لیٹر

ڈرم کا حجم $= \pi r^2 h = 70400$

$$\therefore r^2 = \frac{70400}{\pi h} = \frac{70400 \times 7}{22 \times 56} = \frac{70400}{22 \times 8} = \frac{8800}{22} = 400$$

$\therefore r = 20$

$\therefore$ ڈرم کا نصف قطر 20 سم ہے۔

مثال (3) تانبے کے ایک ٹھوس مدور استوانہ کے قاعدہ کا نصف قطر 4.2 سم اور اونچائی 16 سم ہے۔ اسے پگھلا کر 1.4 سم قطر اور 0.2 سم موٹائی کی کتنی ٹکیاں تیار کی جاسکیں گی؟

حل : مدور استوانے کے قاعدہ کا نصف قطر $= R = 4.2$ سم ، اونچائی $= H = 16$ سم

مدور استوانہ کا حجم $= \pi R^2 H = \pi \times 4.2 \times 4.2 \times 16.0$

ٹکیہ کے قاعدے کا نصف قطر $= 1.4 \div 2 = 0.7$ سم

ٹکیہ کی موٹائی $=$ مدور استوانے کی اونچائی $= 0.2$ سم

ٹکیہ کا حجم $= \pi r^2 h = \pi \times 0.7 \times 0.7 \times 0.2$

فرض کریں ٹھوس مدور استوانے کو پگھلانے پر n ٹکیہ بنتی ہے۔

$\therefore$ ٹھوس مدور استوانے کا حجم $=$ ایک ٹکیہ کا حجم $\times\ n$

$$n = \frac{\text{مدور استوانے کا حجم}}{\text{ایک ٹکیہ کا حجم}} = \frac{\pi R^2 H}{\pi r^2 h} = \frac{R^2 H}{r^2 h} = \frac{4.2 \times 4.2 \times 16}{0.7 \times 0.7 \times 0.2}$$

$$= \frac{42 \times 42 \times 160}{7 \times 7 \times 2} = 6 \times 6 \times 80 = 2880$$

$\therefore$ 2880 ٹکیاں تیار کی جاسکیں گی۔

یہ میری سمجھ میں آ گیا

مدور استوانے کی کل سطح کا رقبہ $= 2\pi r(h + r)$ ، مدور استوانے کی خمدار سطح کا رقبہ $= 2\pi rh$

مدور استوانے کا حجم $= \pi r^2 h$

مشقی سیٹ 16.3

1. درج ذیل میں مدور استوانے کے قاعدے کا نصف قطر (r) اور اونچائی (h) دی گئی ہے۔
اس پر سے مدور استوانے کا حجم معلوم کیجیے۔

(1) $r = 10.5$ سم ، $h = 8$ سم　　(2) $r = 2.5$ سم ، $h = 7$ سم

(3) $r = 4.2$ سم ، $h = 5$ سم　　(4) $r = 5.6$ سم ، $h = 5$ سم

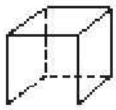
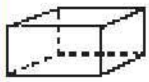
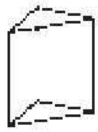
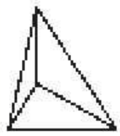
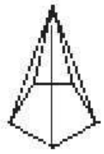
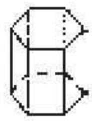
2. 90 سم لمبائی اور 1.4 سم قطر کی لوہے کی ایک سلاخ تیار کرنے کے لیے درکار لوہے کا حجم معلوم کیجیے۔

3. مدور استوانے کی شکل کے ایک حوض کا اندرونی قطر 1.6 میٹر ہے اس کی گہرائی 0.7 میٹر ہے تو اس حوض میں زیادہ سے زیادہ کتنے لٹر پانی سمائے گا؟

4. ایک مدور استوانے کے قاعدے کا احاطہ 132 سم ہے۔ اونچائی 25 سم ہے۔ مدور استوانے کا حجم کتنا ہوگا؟

آئیلر کا قانون :

سطح (F)، راس (V) اور کنارے (E) والی ٹھوس اجسام سے متعلق ایک دلچسپ قانون، بہت ہی کم عمر میں (بچپن میں) لیونارڈ آئیلر نامی مشہور ریاضی داں نے معلوم کیا۔ درج ذیل جدول میں ٹھوس اجسام کے کنارے، راس (کونے) اور سطحیں شمار کر کے جدول مکمل کیجیے اور آئیلر کے قانون $V + F = E + 2$ کی تصدیق کیجیے۔

نام	مکعب	مستطیلی منشور	منشور مثلثی	مثلثی ہرم	خمسی ہرم	مسدسی منشور
اجسام کی شکل						
سطحیں (F)	6					8
راس (V)	8					12
کنارے (E)		12			10	

جوابات کی فہرست

مشقی سیٹ 16.1 : **1.** 1680 مکعب سم **2.** 3 سم **3.** 2000 اینٹیں **4.** 1,80,000 لٹر

مشقی سیٹ 16.2 : **1.** (1) 440 مربع سم , 748 مربع سم (2) 18.48 مربع سم , 30.80 مربع سم

(3) 110 مربع سم , 149.29 مربع سم (4) 616 مربع سم , 31416 مربع سم

(5) 369.60 مربع سم , 480.48 مربع سم

2. 10,990 مربع سم **3.** 5 سم , 78.50 مربع سم

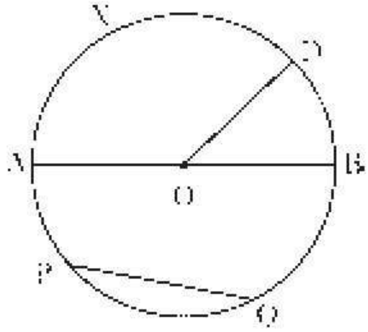
4. 2376 مربع سم , ڈھکن کے لیے اندازاً پترا 792 مربع سم درکار ہوگا

مشقی سیٹ 16.3 : **1.** (1) 2772 مربع سم (2) 137.5 مربع سم (3) 277.2 مربع سم (4) 492.8 مربع سم

2. 138.6 مربع سم **3.** 1408 لٹر **4.** 34650 مربع سم

17 دائرہ - وتر اور قوس

آیئے ذرا یاد کریں



متصلہ شکل میں O، دائرے کا مرکز ہے۔

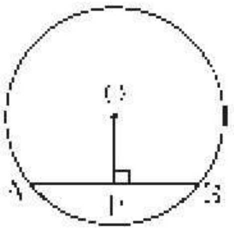
شکل کی مدد سے درج ذیل بیانات میں خالی جگہیں پر کیجیے۔

- قطعہ OD، دائرے کا .... ہے۔
- قطعہ AB، دائرے کا .... ہے۔
- قطعہ PQ، دائرے کا .... ہے۔
- .... مرکزی زاویہ ہے۔
- اصغر قوس : قوس AXD، قوس BD، ....، ....، ....
- اکبر قوس : قوس PAB، قوس PDQ، ....
- نصف دائرہ قوس : قوس ADB، ....
- m(قوس DB) = $m\angle$........................
- m(قوس DAB) = $360° - m\angle$........................

آیئے سمجھ لیں

دائرے کے وتر کی خصوصیات (Properties of chord of a Circle)

عملی کام I :



O، مرکز والے ایک دائرے کا قطعہ AB وتر بنائیے۔

مرکز O سے وتر AB پر عمودی قطعہ OP کھینچیے۔

قطعہ AP اور قطعہ PB کی لمبائیاں ناپیے۔

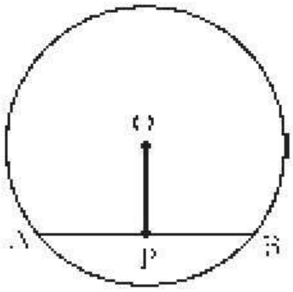
اسی طرح الگ الگ نصف قطر لے کر ایک کاغذ پر پانچ دائرے بنائیے۔ ہر دائرے میں ایک وتر بنا کر مرکز سے اس وتر پر عمود بنائیے۔

کیا وتروں پر بننے والے دونوں حصے مساوی ہیں؟ تقسیم کار (ڈیوائڈر) کے ذریعے اس کی جانچ کیجیے۔

مشاہدہ کیجیے کہ آپ کو درج ذیل خصوصیت حاصل ہوتی ہے۔

دائرے کے مرکز سے وتر پر کھینچا گیا عمود وتر کی تنصیف کرتا ہے۔

عملی کام II :

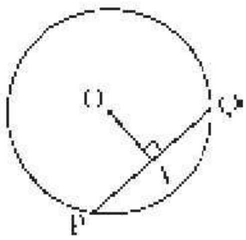


ایک کاغذ پر الگ الگ نصف قطر کے پانچ دائرے بنائیے۔ ہر دائرے میں ایک وتر بنائیے ۔ ان وتروں کا وسطی نقطہ حاصل کیجیے ۔مرکز O اور وتر کے وسطی نقطوں کو جوڑیے ۔متصلہ شکل کے مطابق ہر وتر کو AB اور وتر کے وسطی نقطہ کو P نام دیجیے۔ $\angle APO$ اور $\angle BPO$ قائمۃ الزاویہ ہیں اس کی جانچ گنیے کی مدد سے یا چاندے کی مدد سے کیجیے۔

ہر دائرے کے وتر کے لحاظ سے یہی مشاہدہ ہوتا ہے۔اس بنا پر آپ کو درج ذیل خصوصیت حاصل ہوگی۔

دائرے کے مرکز اور اس دائرے کے وتر کے وسطی نقطے کو ملانے والا قطعہ وتر پر عمود ہوتا ہے۔

حل کردہ مثالیں



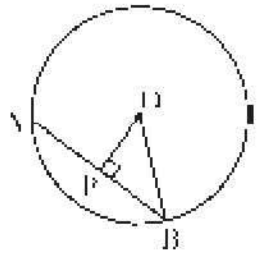
مثال (1) O مرکز والے دائرے میں وتر PQ کی لمبائی 7 سم ہے۔

قطعہ $OA \perp$ وتر PQ تو $l(AP)$ معلوم کیجیے۔

حل : قطعہ $OA \perp$ وتر PQ، اس لیے نقطہ A، وتر PQ کا وسطی نقطہ ہے۔

$$\therefore\ l(PA) = \frac{1}{2}\ l(PQ) = \frac{1}{2} \times 7 = 3.5 \text{ سم}$$

مثال (2) O مرکز والے ایک دائرے کا نصف قطر 10 سم ہے اس دائرے کا ایک وتر مرکز سے 6 سم فاصلے پر ہے اس وتر کی لمبائی معلوم کیجیے۔



حل : دائرے کے وتر کا مرکز سے فاصلہ یعنی مرکز سے اس وتر پر کھینچے گئے عمود کی لمبائی ہوتی ہے۔

دائرے کا مرکز O اور وتر AB ہے اس لیے قطعہ $OP \perp$ وتر AB

$l(OP) = 6$ سم، $l(OB) = 10$ سم = دائرے کا نصف قطر

یہاں $\triangle OPB$ قائمۃ الزاویہ مثلث ہے۔

فیثاغورث کے مسئلے کی رو سے،

$$[l(OP)]^2 + [l(PB)]^2 = [l(OB)]^2$$

$$\therefore\quad 6^2 + [l(PB)]^2 = 10^2$$

$$\therefore\quad [l(PB)]^2 = 10^2 - 6^2$$

$$\therefore\quad [l(PB)]^2 = (10 + 6)\,(10 - 6) = 16 \times 4 = 64$$

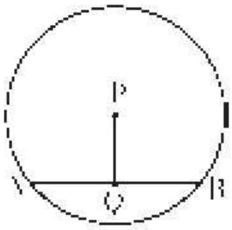
$\therefore\ l(AB) = 8$ سم

ہم جانتے ہیں کہ دائرے کے مرکز سے وتر پر کھینچا ہوا عمود وتر کی تنصیف کرتا ہے۔

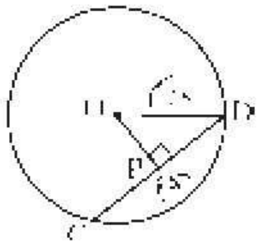
$\therefore\ l(AB) = 2\,l(PB) = 2 \times 8 = 16$

اس لیے وتر AB کی لمبائی 16 سم ہے۔

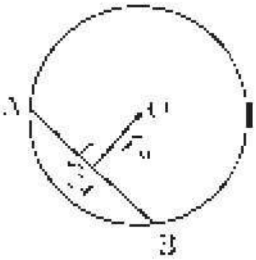
مشقی سیٹ 17.1



1. P مرکز والے دائرے کے وتر AB کی لمبائی 13 سم ہے۔
AB وتر $\perp$ PQ قطعہ تو $l(QB)$ معلوم کیجیے۔



2. O مرکز والے دائرے کا نصف قطر 25 سم ہے۔
اس دائرے میں 48 سم لمبائی کا ایک وتر کھینچا گیا ہے۔
تو دائرے کے مرکز سے وہ وتر کتنے فاصلے پر ہے۔

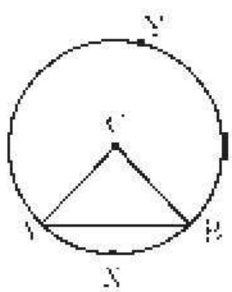


3. O مرکز والے دائرے کے ایک وتر کی لمبائی 24 سم ہے۔
مرکز سے وتر 9 سم فاصلے پر ہے تو دائرے کا نصف قطر معلوم کیجیے۔

4. ایک دائرے کا مرکز C ہے اس کا نصف قطر 10 سم ہے۔
اس دائرے کے ایک وتر کی لمبائی 12 سم ہے تو وہ وتر دائرے کے مرکز سے کتنے فاصلے پر ہے؟

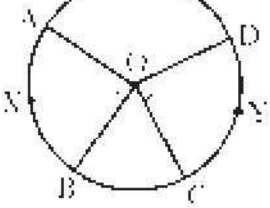
آیئے سمجھ لیں

دائرے کے وتر کا متعلقہ قوس (Arc corresponding to chord of a Circle)



متصلہ شکل میں O مرکز والے دائرے میں قطعہ AB وتر ہے۔قوس AXB اصغر قوس اور قوس AYB اکبر قوس ہے۔ان قوسین کو وتر AB کے متعلقہ قوسین کہتے ہیں ۔اس کے برعکس وتر AB، قوس AXB اور قوس AYB کا متعلقہ وتر ہے۔

متماثل قوسین (Congruent Arcs)



اگر کسی دائرے کے دو قوسین کی پیمائشیں مساوی ہو تو وہ متماثل قوسین ہوتے ہیں۔

O مرکز والے دائرے میں

$$m\angle AOB = m\angle COD$$

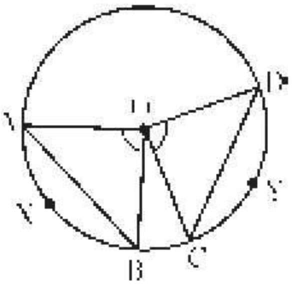
$\therefore$ $m($قوس $AXB) = m($قوس $CYD)$

$\therefore$ قوس $AXB \cong$ قوس CYD

اس کی جانچ ہم ٹریسنگ کاغذ کی مدد سے کر سکتے ہیں۔

دائرے کے وتر اور متعلقہ قوس کی خصوصیت درج ذیل عملی کام کے ذریعے جانچ کیجیے اور اسے دھیان میں رکھیے۔

عملی کام I :



(1) O مرکز والا ایک دائرہ کھینچیے۔

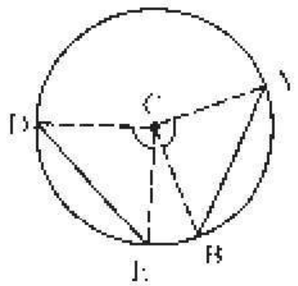
(2) دائرے میں $\angle COD$ اور $\angle AOB$ مساوی پیمائش کے دو زاویے بنائیے۔

اس کی مدد سے قوس AXB اور قوس CYD متماثل قوسین حاصل ہوتے ہیں۔

(3) وتر AB اور وتر CD بنائیے۔

(4) تقسیم کار (ڈیوائڈر) کی مدد سے وتر AB اور وتر CD کی لمبائیاں، مساوی ہیں اس کی جانچ کیجیے۔

عملی کام II :



(1) C مرکز والا ایک دائرہ بنائیے۔

(2) اس دائرے میں قطعہ AB اور قطعہ DE دو متماثل وتر بنائیے۔

قطعہ CA، قطعہ CB، قطعہ CD، قطعہ CE نصف قطر کھینچیے۔

(3) $\angle ACB$ اور $\angle DCE$ متماثل ہیں، دکھائیے۔

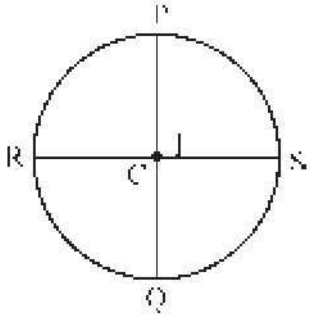
(4) اس بنا پر قوس AB اور قوس DE کی پیمائشیں مساوی ہوں گی یعنی یہ متماثل قوسین ہیں، اسے دکھائیے۔

یہ میری سمجھ میں آ گیا

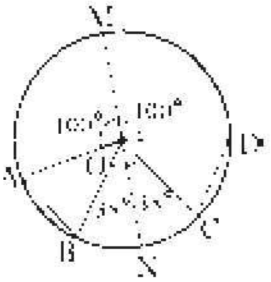
- کسی دائرے کے متماثل قوسین کے متعلقہ وتر متماثل ہوتے ہیں، کسی دائرے میں دو وتر متماثل ہوں تو ان کے متعلقہ اصغر قوسین اور متعلقہ اکبر قوسین متماثل ہوتے ہیں۔

مشقی سیٹ 17.2

.1 C مرکز والے دائرے میں قطعہ PQ اور قطعہ RS قطر ہیں۔
جو قائمہ زاویہ بناتے ہوئے ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں۔
تو بتائیے کہ قوس PS اور قوس SQ متماثل ہیں۔
قوس PS کے متماثل دیگر قوسوں کے نام لکھیے۔



.2 شکل میں O مرکز والے دائرے میں قطعہ MN قطر ہے۔
کچھ مرکزی زاویوں کی پیمائشیں دی گئی ہیں۔
اس بنا پر
(1) $\angle AOB$ اور $\angle COD$ کی پیمائش معلوم کیجیے۔
(2) دکھائیے کہ قوس CD $\cong$ قوس AB
(3) دکھائیے کہ وتر CD $\cong$ وتر AB



جوابات کی فہرست

مشقی سیٹ 17.1 : **1.** 6.5 سم **2.** 7 سم **3.** 15 سم **4.** 8 سم

مشقی سیٹ 17.2 : .1 (1) کیونکہ قوسین کے متعلقہ زاویوں کی پیمائشیں مساوی ہیں اور ہر ایک کی پیمائش 90° ہے۔

(2) قوس PS $\cong$ قوس PR $\cong$ قوس RQ

2. (1) $m\angle AOB = m\angle COD = 45^\circ$

(2) قوس CD $\cong$ قوس AB کیوں کہ قوسین کے متعلقہ مرکزی زاویے مساوی پیمائش کے ہیں ہر ایک کی پیمائش 45° ہے۔

(3) وتر CD $\cong$ وتر AB کیوں کہ متماثل قوسین کے متعلقہ وتر متماثل ہوتے ہیں۔

متفرق مجموعہ سوالات 2

.1 ذیل کے سوالوں کے لیے متبادل جوابات دیے ہوئے ہیں۔ ان میں سے مناسب متبادل منتخب کیجیے۔

(1) ایک دائرے کا رقبہ 1386 مربع سم ہو تو اس کا محیط کتنا ہوگا؟

(A) 132 مربع سم　　(B) 132 سم　　(C) 42 سم　　(D) 21 مربع سم

(2) ایک مکعب کا ضلع 4 میٹر ہے۔ اسے دگنا کریں تو اس کا حجم کتنے گنا بڑھ جائے گا؟

(A) دوگنا　　(B) تین گنا　　(C) چار گنا　　(D) آٹھ گنا

.2 پریا 100 میٹر دوڑ کی شرط کی مشق کر رہی تھی۔ اس کے لیے اس نے 100 میٹر فاصلے کی 20 مرتبہ دوڑ لگائی۔ ہر مرتبہ اس دوڑ کے لیے درکار وقت سیکنڈ میں درج ذیل کے مطابق تھا۔

18 , 17 , 17 , 16 , 15 , 16 , 15 , 14 , 16 , 15 ,

15 , 17 , 15 , 16 , 15 , 17 , 16 , 15 , 14 , 15

دوڑنے کے لیے اس کو لگنے والے وقت کا میانیہ معلوم کیجیے۔

.3 $\triangle DEF$ اور $\triangle LMN$ یہ دونوں مثلث $EDF \leftrightarrow LMN$ ایک سے ایک کی مطابقت کی رو سے متماثل ہیں تو اس مطابقت کے لحاظ سے ہونے والے متماثل اضلاع کی اور متماثل زاویوں کی جوڑیاں لکھیے۔

.4 ایک مشین کی قیمت 2,50,000 روپے ہے۔ اس کی قیمت ہر سال 4% شرح سے کم ہوتی ہے تو مشین خریدنے کے تین سال بعد اس کی قیمت کتنی ہو جائے گی؟

.5 $\square ABCD$ میں ضلع DC ‖ ضلع AB، ضلع DC ⊥ قطعہ AE، اگر $l(AB) = 9$ سم ، $l(AE) = 10$ سم، $A(\square ABCD) = 115$ مربع سم ہو تو $l(DC)$ معلوم کیجیے۔

.6 مدور استوانہ جسامت کی ایک ٹانکی کے تہہ کا قطر 1.75 میٹر اور اونچائی 3.2 میٹر ہے تو اس ٹانکی کی گنجائش کتنے لٹر ہے؟ $\left(\pi = \frac{22}{7}\right)$

.7 9.1 سم نصف قطر والے دائرے کے ایک وتر کی لمبائی 16.8 سم ہے تو اس وتر کا مرکز سے کتنا فاصلہ ہے؟

.8 روزگار ضمانت اسکیم کے تحت A، B، C اور D گاؤں میں جاری کاموں پر مرد اور عورت مزدوروں کی تعداد ذیل کے جدول میں دی ہوئی ہے۔

گاؤں	A	B	C	D
عورتیں	150	240	90	140
مرد	225	160	210	110

(1) یہ معلومات تقسیمی ستونی ترسیم کے ذریعے دکھائیے۔

(2) یہ معلومات فی صد ستونی ترسیم کے ذریعے دکھائیے۔

.9 ذیل کی مساواتیں حل کیجیے۔

(1) $17(x+4)+8(x+6)=11(x+5)+15(x+3)$

(2) $\frac{3y}{2}+\frac{y+4}{4}=5-\frac{y-2}{4}$ (3) $5(1-2x)=9(1-x)$

.10 ذیل کے عملی کام کو دیے ہوئے مرحلوں کے مطابق کیجیے۔

(1) $\square$ABCD ایک معین بنایئے اور اس کا وتر AC کھینچیے۔

(2) متماثل اجزاء کو یکساں نشانیوں سے ظاہر کیجیے۔

(3) $\triangle$ADC اور $\triangle$ABC کس مطابقت سے اور کس آزمائش سے متماثل ہوتے ہیں۔لکھیے۔

(4) $\angle DCA \cong \angle BCA$، اسی طرح $\angle DAC \cong \angle BAC$، بتانے کے لیے وجہ لکھیے۔

(5) مذکورہ بالا مراحل سے ذہن میں آنے والے معین کی خصوصیت لکھیے۔

.11 ایک کھیتی کی زمین کی شکل ذو اربعۃ الاضلاع کے جیسی ہے۔اس کے چاروں کونوں کو P، Q، R، S نام دے کر لیے گئے ناپ ذیل کے مطابق ہیں۔

l(PQ) = 170 میٹر، l(QR) = 250 میٹر، l(RS) = 100 میٹر، l(PS) = 240 میٹر، l(PR) = 260 میٹر،

تو اس کھیتی کی زمین کا رقبہ ہیکٹر میں معلوم کیجیے۔ (مربع میٹر 10,000 = ہیکٹر 1)

.12 ایک لائبریری میں کل کتابوں کا 50% کتابیں اردو کی ہیں۔اردو کی کتابوں کا $\frac{1}{3}$ کتابیں انگریزی کی اور انگریزی کی کتابوں کا 25% کتابیں ریاضی کی ہیں۔ باقی ماندہ 560 کتابیں دیگر مضامین کی ہیں تو بتایئے لائبریری میں کل کتنی کتابیں ہیں؟

.13 دو رکنی $(2x+1)$ سے کثیر رکنی $(6x^3+11x^2-10x-7)$ کو تقسیم دیجیے۔خارج قسمت اور باقی لکھیے۔

جوابات کی فہرست

1. (1) B (2) D **2.** 15.7 سیکنڈ

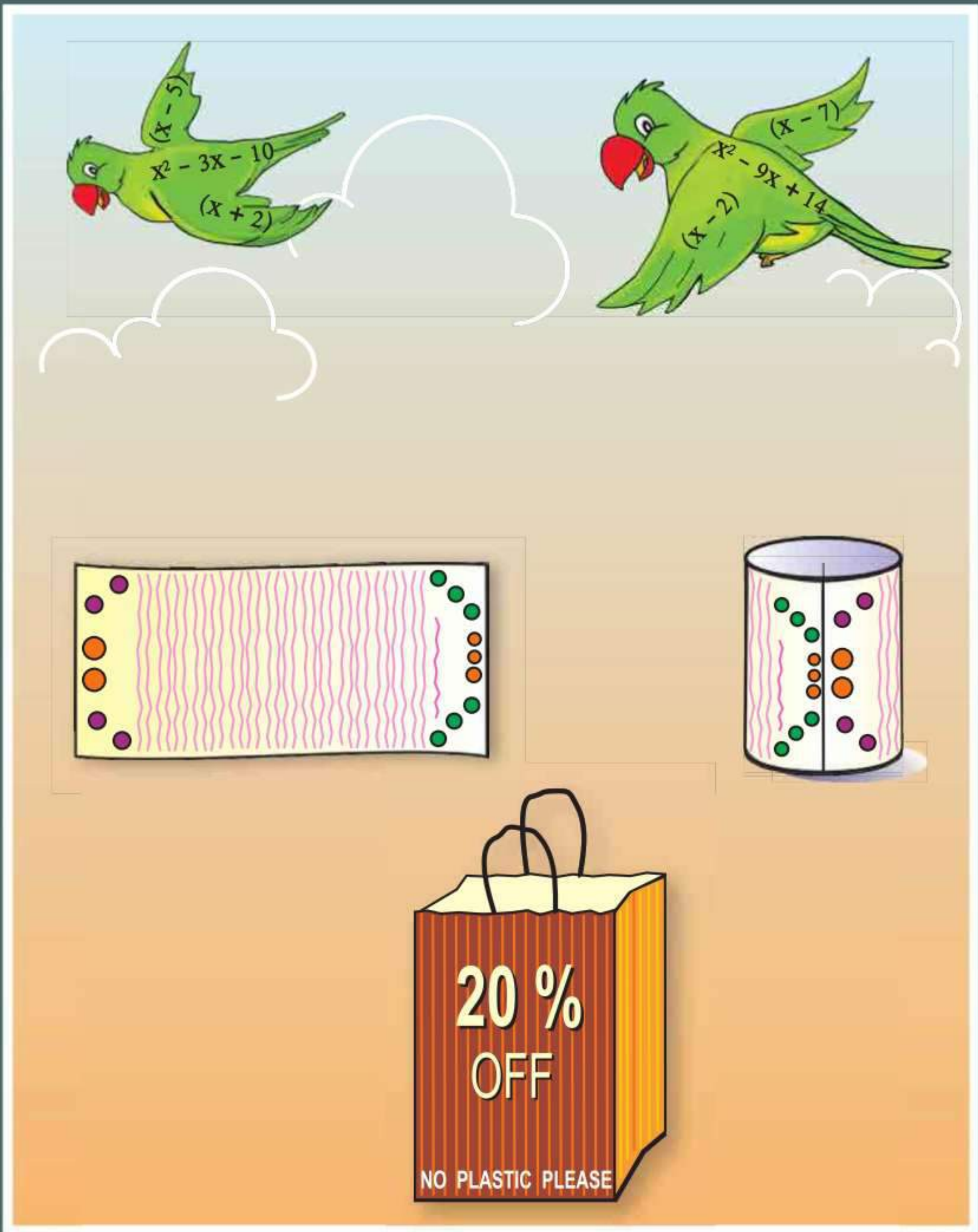
3. ضلع ED $\cong$ ضلع LM, ضلع DF $\cong$ ضلع MN, ضلع EF $\cong$ LN

$\angle E \cong \angle L$, $\angle D \cong \angle M$, $\angle F \cong \angle N$

4. ₹2,21,184 **5.** 14 سم **6.** 7700 **7.** 3.5 سم

9. (1) $x=16$ (2) $y=\frac{9}{4}$ (3) $x=-4$ (11) 3.24 ہیکٹر

12. 1920 **13.** خارج قسمت $=3x^2+4x-7$, باقی $=0$



مہاراشٹر راجیہ پاٹھیہ پستک نرمتی وابھیاس کرم سنشودھن منڈل، پونہ - ۴۱۱۰۰۴

उर्दू गणित इ. ८वी

₹ 48.00