11 شماریات

آیئے ذرا یاد کریں

مثال : نادرہ کے ذریعے ایک کتاب کے روزانہ مطالعہ کیے ہوئے صفحات کی تعداد 60، 50، 54، 46، 50 ہیں ۔ اس بنا پر روزانہ پڑھے ہوئے صفحات کا اوسط معلوم کیجیے۔

حل :

$$\text{اوسط} = \frac{\text{تمام شماروں کا مجموعہ}}{\text{شماروں کی کل تعداد}}$$

$$= \frac{60 + \square + \square + \square + 50}{\square} = \frac{\square}{\square} = \square$$

اس لیے روزانہ مطالعہ کیے ہوئے صفحات کا اوسط $\square$ ہے۔

اس اوسط کو میانیہ کہتے ہیں ۔

آیئے سمجھ لیں

مندرجہ بالا مثال میں روزانہ پڑھے ہوئے صفحات کی تعداد کو شماریاتی معلومات کہتے ہیں۔اس بنا پر نادرہ روزانہ تقریباً 52 صفحات پڑھتی ہے۔ یہ نتیجہ اخذ کیا گیا ہے۔

کسی واقعہ کے تعلق سے یا مسئلے کے متعلق شماریاتی معلومات جمع کرنا ، اس معلومات کا مطالعہ کرکے کچھ نتیجہ حاصل کرنا، یہ ایک آزاد علم کی شاخ ہے۔اس شاخ کو شماریات نام دیا گیا ہے۔

میانیہ (Mean)

ہم نے دیکھا کہ 60، 50، 54، 46 اور 50 اعداد کا اوسط 52 ہے۔اس اوسط کو شماریات کی زبان میں میانیہ کہتے ہیں ۔

عددی معطیات کا میانیہ معلوم کرنے کے لیے معطیات کا مجموعہ کیا جاتا ہے۔اس مجموعے کو معطیات کی تعداد سے تقسیم کیا جاتا ہے۔

میانیہ معلوم کرنے کے اس طریقے کا ہم مزید مطالعہ کریں گے۔اس لیے ذیل کی مثال دیکھیے ۔

مثال : شاہین ہائی اسکول کراڈ میں جماعت آٹھویں کے 37 طلبہ کے ذریعے ریاضی میں 10 مارکس کی ایک آزمائش میں حاصل کردہ مارکس ذیل کے مطابق ہیں ۔ان کا میانیہ معلوم کیجیے۔

2, 4, 4, 8, 6, 7, 3, 8, 9, 10, 10, 8, 9, 7, 6, 5, 4, 6, 7, 8, 4, 8, 9, 7, 6,

5, 10, 9, 7, 9, 10, 9, 6, 9, 9, 4, 7.

حل : ہم جانتے ہیں کہ اس مثال میں معطیات کے اعداد کا مجموعہ کرنے میں زیادہ وقت درکار ہوگا۔

$7 + 7 + 7 + 7 + 7 = 7 \times 5 = 35$ اس بنا پر ایک عدد میں وہی عدد جمع کرنے پر عمل آسان ہوجاتا ہے۔ اس بات کو یاد رکھیے۔ اس بات کا استعمال کرکے اوپر کے اعداد کا مجموعہ کرنا سہولت بخش ہوگا۔ اس لیے معطیات کے اعداد کی درجہ بندی کرکے اعداد کا مجموعہ کریں گے۔

مارکس (شمارہ) x_i	شماریاتی نشانات	طلبہ کی تعداد f_i	$f_i \times x_i$
2	|	1	$1 \times 2 = 2$
3	|	1	$1 \times 3 = 3$
4	||||/	5	$5 \times 4 = 20$
5	||	2	$2 \times 5 = 10$
6	||||/	5	$5 \times 6 = 30$
7	||||/ |	6	$6 \times 7 = 42$
8	||||/	5	$5 \times 8 = 40$
9	||||/ |||	8	$8 \times 9 = 72$
10	||||	4	$4 \times 10 = 40$
		N = 37	$\Sigma f_i \times x_i = 259$

$$\text{میانیہ} = \frac{\Sigma f_i \times x_i}{N} = \frac{259}{37} = 7$$

مندرجہ بالا طریقے کے مطابق جدول بنا کر معطیات کا میانیہ معلوم کرنے کے لیے ذیل کے مرحلے دھیان میں رکھیے۔

- پہلے ستون میں $x_1 < x_2 < x_3 \ldots$، اس طرح چڑھتی ترتیب میں شمارے لکھیے، اسے x_i سے ظاہر کیا گیا ہے۔
- دوسرے ستون میں شماریاتی نشانات لگائیے۔
- تیسرے ستون میں ہر شمارے کے تعلق سے شماریاتی نشانات گن کر لکھیے۔ اسے تعدد f_i سے ظاہر کیا گیا ہے۔ اس کے نیچے تمام تعدد کا مجموعہ لکھیے۔ کل تعدد N سے ظاہر کیا گیا ہے۔
- آخری ستون میں $f_i \times x_i$ حاصل ضرب لکھیے۔ اس کے نیچے تمام حاصل ضرب کا مجموعہ کیجیے۔ تمام $f_i \times x_i$ کے مجموعے کو $\Sigma f_i x_i$ سے ظاہر کرتے ہیں۔ 'Σ' (سگما) علامت ''مجموعے'' کے لیے استعمال کی جاتی ہے۔

میانیہ، $\overline{x}$ (ایکس بار) سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$\therefore \text{میانیہ } \overline{x} = \frac{\Sigma f_i \times x_i}{N}$$

مثال : راجاپور گاؤں کے 30 کسانوں کے سویابین کی فی ایکڑ پیداوار کوئنٹل میں ذیل کے مطابق ہے۔

9, 7, 5, 8, 6, 5.5, 7.5, 5, 8, 5, 6.5, 5, 5.5, 4, 4, 8, 6, 8, 7.5, 6, 9, 5.5, 7.5, 8, 5, 6.5, 5, 5.5, 4, 8.

اس بنا پر تعددی تقسیمی جدول بنائیے اور سویابین کی فی ایکڑ پیداوار کا میانیہ معلوم کیجیے۔

حل :

فی ایکڑ پیداوار (کوئنٹل میں) x_i (شمارہ)	شماریاتی نشانات	کسانوں کی تعداد f_i (تعدد)	$f_i \times x_i$
4	|||	3	12
5	~~||||~~	5	25
5.5	||||	4	22
6	|||	3	18
6.5	||	2	13
7.5	||||	4	30
8	~~||||~~ |	6	48
9	|||	3	27
		N = 30	$\Sigma f_i \times x_i = 195$

میانیہ $\bar{x} = \dfrac{\Sigma f_i \times x_i}{N} = \dfrac{195}{30} = 6.5$

فی ایکڑ سویابین کی پیداوار کا میانیہ 6.5 کوئنٹل ہے۔

مشقی سیٹ 11.1

.1 جماعت آٹھویں کے 30 طلبہ میں سے ہر ایک کے لگائے ہوئے پودوں کی تعداد ذیل کے تعددی تقسیمی جدول میں دی ہوئی ہے۔ اس بنا پر ہر ایک کے ذریعے لگائے ہوئے پودوں کا میانیہ معلوم کرنے کے لیے ذیل کا جدول مکمل کیجیے۔

پودوں کی تعداد x_i (شمارہ)	طلبہ کی تعداد f_i (تعدد)	$f_i \times x_i$
1	4	4
2	6	...
3	12	...
4	8	...
	N = ☐	$\Sigma f_i \times x_i =$ ☐

میانیہ $\bar{x} = \dfrac{☐}{N}$

$= \dfrac{☐}{☐}$

$=$ ☐

∴ ہر طالب علم کے ذریعے لگائے ہوئے پودوں کا میانیہ ☐ ہے۔

.2 ایک گاؤں کے 25 خاندانوں کے ذریعے مئی مہینے میں استعمال کردہ بجلی کا یونٹ ذیل کے جدول میں دیا ہوا ہے۔ جدول مکمل کرکے ذیل کے سوالات کے جوابات لکھیے۔

بجلی کا استعمال (یونٹ) (شمارہ) x_i	خاندان کی تعداد (تعدد) f_i	$f_i \times x_i$
30	7	....
45	2	....
60	8	....
75	5	....
90	3	....
	N = ...	$\Sigma f_i \times x_i =$ ....

(1) 45 یونٹ استعمال کرنے والے کل کتنے خاندان ہیں؟

(2) جس شمارے کا تعدد 5 ہے وہ شمارہ کون سا ہے؟

(3) $N = ?\ ,\ \Sigma f_i \times x_i = ?$

(4) اس بنا پر مئی مہینے میں ہر خاندان کے ذریعے استعمال کی گئی بجلی کا میانیہ معلوم کیجیے۔

.3 بھلار کے 40 خاندان کے افراد کی تعداد دی گئی ہے۔

1, 6, 5, 4, 3, 2, 7, 2, 3, 4, 5, 6, 4, 6, 2, 3, 2, 1, 4, 5, 6, 7, 3, 4, 5, 2, 4, 3, 2, 3, 5, 5, 4, 6, 2, 3, 5, 6, 4, 2

اس بنا پر 40 خاندانوں کے افراد کی تعداد کا میانیہ تعددی جدول بنا کر معلوم کیجیے۔

.4 ماڈل ہائی اسکول ناندپور کے ذریعے ریاستی سطح پر سائنس نمائش میں گذشتہ 20 سال میں پیش کردہ ریاضی اور سائنس کے پروجیکٹ کی تعداد ذیل کے مطابق ہے۔ اس بنا پر تعددی جدول بنا کر معطیات کا میانیہ معلوم کیجیے۔

2, 3, 4, 1, 2, 3, 1, 5, 4, 2, 3, 1, 3, 5, 4, 3, 2, 2, 3, 2.

آیئے سمجھ لیں

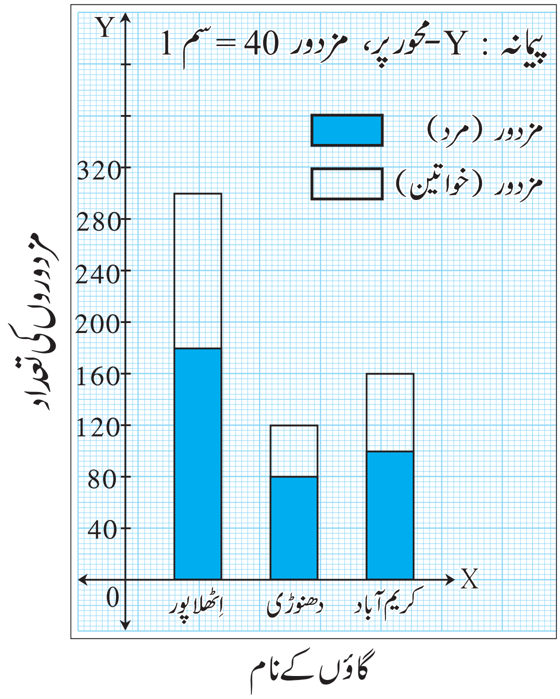
گذشتہ جماعت میں ہم نے سادہ ستونی ترسیم اور متصل ستونی ترسیم کا مطالعہ کیا ہے۔ اب ہم ستونی ترسیم کی دوسری قسموں کا مطالعہ کریں گے۔

تقسیمی ستونی ترسیم (Subdivided bar diagram)

معطیات کا تجزیاتی موازنہ متصل ستونی ترسیم کی طرح تقسیمی ستونی ترسیم سے بھی کیا جاتا ہے۔ اس میں دو یا مزید اجزا کی معطیات ایک ہی ستون میں ظاہر کی جاتی ہے۔ تقسیمی ترسیم کے مراحل کا مطالعہ کریں گے۔

گاؤں	اٹھلا	دھنوڑی	کریم آباد
مرد (مزدور)	180	80	100
خواتین (مزدور)	120	40	60
کل مزدور	300	☐	☐

پہلے آپ ستون میں دی ہوئی معطیات کے مطابق مذکورہ بالا جدول مکمل کیجیے۔

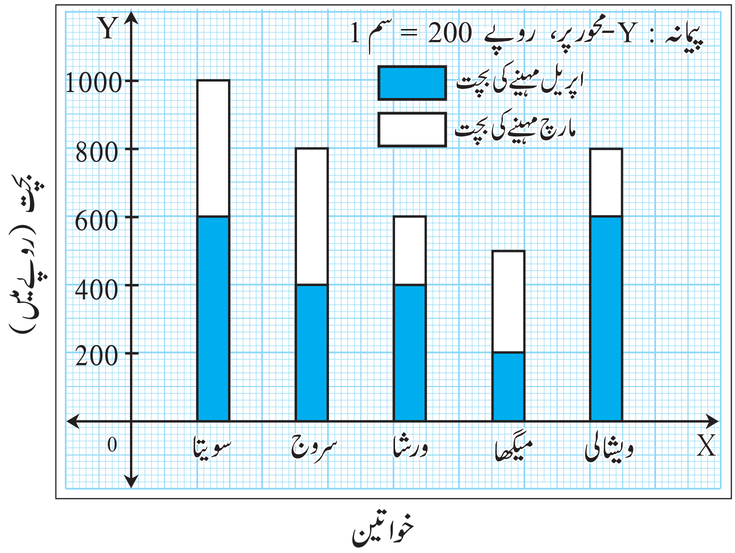


- ترسیم کاغذ پر X-محور اور Y-محور کھینچیے۔
- مساوی فاصلہ رکھتے ہوئے X-محور پر گاؤں کے نام لکھیے۔
- Y-محور پر مزدوروں کی تعداد لکھیے۔ 1 سم = 40 مزدور پیمانہ لیجیے۔
- اِٹھلا پور کے کل 300 مزدور ہیں۔ مزدوروں کی تعداد ایک ستون کے ذریعے دکھایئے۔
- اس میں کل مزدوروں کے ستون کا ایک حصہ مرد مزدور ہے۔ اسے الگ نشان سے ظاہر کیا گیا ہے۔
- ستون کا بقیہ حصہ خواتین مزدوروں کی تعداد کو ظاہر کرتا ہے۔ اسے مختلف نشان سے ظاہر کیا گیا ہے۔
- اس طرح دھنوڑی اور کریم آباد کے لیے تقسیمی ستون کھینچیے۔

اوپر کے مرحلوں کے مطابق تقسیمی ستونی ترسیم بازو کی شکل میں بنا کر دکھایا گیا ہے۔ اس کا معائنہ کیجیے۔

مشقی سیٹ 11.2

.1 ذیل کی شکل کا معائنہ کیجیے اور سوالات کے جوابات لکھیے۔



(1) یہ کس قسم کا ستونی ترسیم ہے؟

(2) ویشالی کی اپریل مہینے کی بچت کتنی ہے؟

(3) سروج کی مارچ اور اپریل دونوں مہینوں کی کل بچت کتنی ہے؟

(4) سویتا کی کل بچت میگھا کی کل بچت سے کتنی زیادہ ہے؟

(5) اپریل مہینے میں کس کی بچت سب سے کم ہے؟

.2 ایک ضلع پریشد اسکول میں جماعت پانچویں سے آٹھویں کے لڑکے اور لڑکیوں کی تعداد ذیل کے جدول میں دی گئی ہے۔ اس بنا پر تقسیمی ستونی ترسیم کھینچیے۔ (پیمانہ : Y-محور پر 1 سم = 10 طلبہ لیجیے)

جماعت	پانچویں	چھٹی	ساتویں	آٹھویں
لڑکے	34	26	21	25
لڑکیاں	17	14	14	20

.3 ذیل کے جدول میں چار گاؤں میں سال 2016 اور 2017 میں لگائے گئے درختوں کی تعداد دی گئی ہے۔ جدول کی معلومات کو تقسیم ستونی ترسیم کے ذریعے دکھایئے۔

سال \ گاؤں	کرجت	وڑگاؤں	شیواپور	کھنڈالا
2016	150	250	200	100
2017	200	300	250	150

.4 درج ذیل جدول میں تین شہروں میں جماعت آٹھویں کے طلبہ کے ذریعے اسکول جانے کے لیے استعمال کی جانے والی سواریوں اور پیدل جانے والوں کی معلومات دی گئی ہے۔ اس معلومات کو ظاہر کرنے کے لیے تقسیمی ستونی ترسیم بنایئے۔ (پیمانہ : Y-محور پر 1 سم = 500 طلبہ لیجیے)

سواری \ شہر	پیٹھن	ایولہ	شاہ پور
سائیکل	3250	1500	1250
بس اور آٹو رکشا	750	500	500
پیدل	1000	1000	500

آیئے سمجھ لیں

فی صدی ستونی ترسیم (Percentage bar diagram)

اروی گاؤں میں لگائے گئے 60 درختوں میں سے 42 درخت نمو پائے اور مورشی گاؤں میں لگائے گئے 75 درختوں میں سے 45 درخت نمو پائے۔ بارشی گاؤں میں لگائے گئے 90 درختوں میں سے 45 درخت نمو پائے۔ کس گاؤں میں شجرکاری زیادہ کامیاب ہوئی اسے سمجھنے کے لیے صرف اعداد کافی نہیں ہیں۔ اس کے لیے نمو پائے درختوں کا فی صد معلوم کرنا ضروری ہے۔

$$\text{اروی میں نمو پائے درختوں کا فی صد} = \frac{42}{60} \times 100 = 70$$

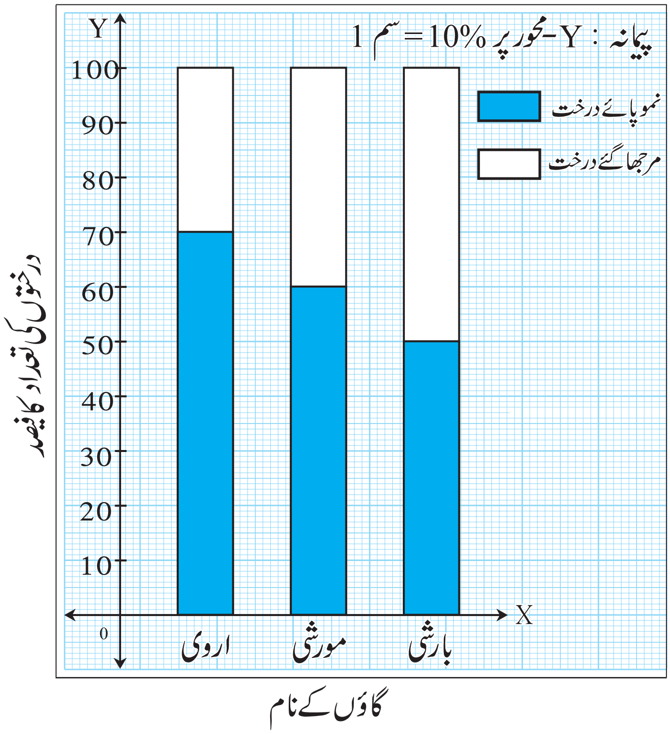
$$\text{مورشی میں نمو پائے درختوں کا فی صد} = \frac{45}{75} \times 100 = 60$$

اس فی صد سے ہمیں یہ سمجھ میں آتا ہے کہ اروی گاؤں میں نمو پائے درختوں کی تعداد کم ہے لیکن فی صد زیادہ ہے۔ یعنی فی صد سے کچھ الگ قسم کی معلومات حاصل ہوتی ہے۔ دی گئی معلومات فی صدی میں تبدیل کر کے جو تقسیمی ستون بناتے ہیں۔ اسے فی صدی ستونی ترسیم کہتے ہیں۔

فی صدی ستونی ترسیم، تقسیمی ستونی ترسیم کی ایک خاص صورت ہوتی ہے۔ فی صدی ستونی ترسیم ذیل کے مرحلوں کی مدد سے بناتے ہیں۔

- پہلے ہم ذیل کے مطابق جدول بنائیں گے۔

گاؤں	اروی	مورشی	بارشی
لگائے گئے درختوں کی تعداد	60	75	90
نموپائے درختوں کی تعداد	42	45	45
نموپائے درختوں کا فی صد	$\frac{42}{60} \times 100 = \boxed{70}$	$\frac{45}{75} \times 100 = \boxed{60}$	$\frac{45}{90} \times 100 = \boxed{50}$



- فی صدی ستونی ترسیم میں تمام ستون 100 اکائی اونچائی کے لیے جاتے ہیں۔
- ہر ستون میں نموپائے درختوں کا فی صد دکھائیں گے۔ بقیہ فی صد مرجھا جانے والے درختوں کا ہوگا۔
- فی صدی ستونی ترسیم ایک قسم کی تقسیمی ستونی ترسیم ہوتی ہے۔اس لیے دیگر تمام عمل تقسیمی ستونی ترسیم کے جیسے ہی ہوتے ہیں۔

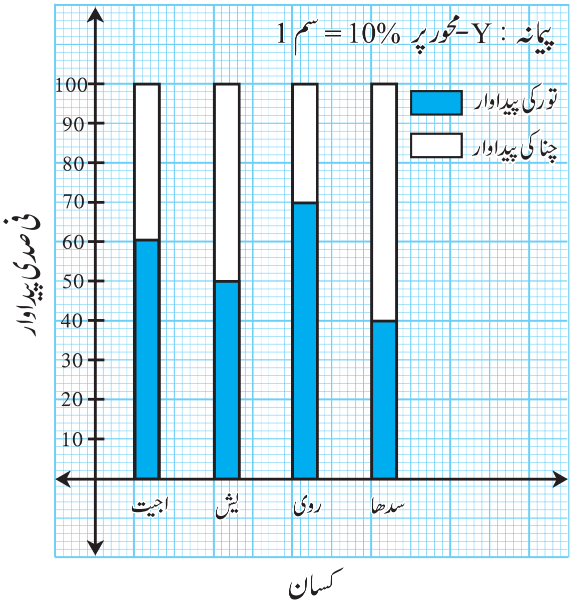
اوپر کے مرحلوں کے مطابق بازو میں فیصدی ستونی ترسیم بنائی گئی ہے اس کا مشاہدہ کیجیے۔

مشقی سیٹ 11.3

1. ذیل کے جدول کے مطابق فی صدی ستونی ترسیم بنائیے۔

جماعت آٹھویں کی فریق	A	B	C	D
ریاضی میں ‘A’ گریڈ پانے والے طلبہ	45	33	10	15
کل طلبہ	60	55	40	75

.2 مقابل میں دیے ہوئے ستونی ترسیم کا مشاہدہ کیجیے اور سوالات کے جوابات لکھیے۔



(1) مقابل میں دیا ہوا ستونی ترسیم کس قسم کی ہے؟

(2) اجیت کے کھیت میں تور کی پیداوار، کل پیداوار کا کتنے فی صد ہے؟

(3) لیش اور روی، ان میں سے کس کے کھیت کی چنے کی پیداوار کا فی صد کتنا زیادہ ہے؟

(4) سب سے کم تور کی پیداوار کا فی صدی کس کا ہے؟

(5) سدھا کے تور اور چنے کی پیداوار کا فی صد معلوم کیجیے؟

.3 کچھ اسکول میں 10 ویں جماعت کے طالب علموں کا سروے کیا گیا۔ حاصل ہوئی معلومات ذیل کے جدول میں دی گئی ہے۔ اس معلومات کو فی صدی ستونی ترسیم کے ذریعے دکھایئے۔

اسکول	پہلی	دوسری	تیسری	چوتھی
سائنس شاخ کی جانب رجحان	90	60	25	16
کامرس شاخ کی جانب رجحان	60	20	25	24

پروجیکٹ : فی صدی ستونی ترسیم اور تقسیمی ستونی ترسیم کا موازنہ کرتے ہوئے بحث کیجیے۔ اس کا استعمال کرکے سائنس، جغرافیہ جیسے مضامین میں ایسی ترسیم کی معلومات حاصل کیجیے۔

جوابات کی فہرست

مشقی سیٹ 11.1 : **2.** (1) 2 (2) 75 (3) N = 25, $\Sigma f_i \times x_i = 1425$ (4) 57 **3.** 3.9 **4.** 2.75

مشقی سیٹ 11.2 : **1.** (1) تقسیمی ستونی ترسیم (2) ₹600 (3) ₹800 (4) ₹500 (5) میگھا

مشقی سیٹ 11.3 : **2.** (1) فی صدی ستونی ترسیم (2) 60% (3) لیش کی پیداوار 20% زیادہ (4) سدھا

(5) 60% اور 40%

❑❑❑