

کشیر کنیوں کی تقسیم

آئیے ذرا یاد کریں

گذشتہ سال الجبری عبارتوں کی جمع، تفریق اور ضرب کے اعمال کا ہم نے مطالعہ کیا ہے۔
درج ذیل مثالوں میں خالی چوکوں مکمل کیجیے۔

$$(1) 2a + 3a = \boxed{}$$

$$(2) 7b - 4b = \boxed{}$$

$$(3) 3p \times p^2 = \boxed{}$$

$$(4) 5m^2 \times 3m^2 = \boxed{}$$

$$(5) (2x + 5y) \times \frac{3}{x} = \boxed{}$$

$$(6) (3x^2 + 4y) \times (2x + 3y) = \boxed{}$$

آئیے سمجھیں

کشیر کنیوں کا تعارف (Introduction to polynomials)

یک متغیری الجبری عبارتوں کے ہر کن کے متغیر کی قوت نامکمل عدد ہوتا، وہ عبارت ایک متغیری کشیر کنی ہوتی ہے۔

مثلاً 3 ، $x^2 + 2x + 3$ ، $x^2 + 2y^2 + y + 5$ یا ایک متغیری کشیر کنی ہیں۔

کشیر کنیاں بخصوص الجبری عبارت ہوتی ہیں، اس لیے کشیر کنیوں کی جمع، تفریق اور ضرب جیسے اعمال الجبری عبارت کے مطابق کیے جاتے ہیں۔

$$\begin{aligned} & (4x - 5) - (3x^2 - 7x + 8) \\ &= 4x - 5 - 3x^2 + 7x - 8 \\ &= -3x^2 + 11x - 13 \end{aligned}$$

مثال (2)

$$\begin{aligned} & (3x^2 - 2x) \times (4x^3 - 3x^2) \\ &= 3x^2(4x^3 - 3x^2) - 2x(4x^3 - 3x^2) \\ &= 12x^5 - 9x^4 - 8x^4 + 6x^3 \\ &= 12x^5 - 17x^4 + 6x^3 \end{aligned}$$

کشیر کنیوں کا درجہ (Degree of polynomials)

درج ذیل مثالوں کی کشیر کنیوں کے متغروں کا سب سے بڑا قوت نامہ چوکون میں لکھیے۔

مثال (1) کشیر کنی $3x^2 + 4x$ کے متغیر کا سب سے بڑا قوت نما $\boxed{2}$ ہے۔

مثال (2) کشیر کنی $7x^3 + 5x + 4x^5 + 2x^2$ کے متغیر کا سب سے بڑا قوت نما $\boxed{}$ ہے۔

دی ہوئی کشیر کنی کے متغیر کا سب سے بڑا قوت نما، اس کشیر کنی کا درجہ کہلاتا ہے۔

سے یہ میری سمجھ میں آگیا

- یک متغیری الجبری عبارت کے ہر کن کے متغیر کا قوت نامکمل عدد ہو تو وہ عبارت کثیر کرنی ہوتی ہے۔
- کثیر کرنی میں متغیر کا سب سے بڑا قوت نہ اس کثیر کرنی کا درجہ ہوتا ہے۔

درست - آئیے سمجھ لیں

یک رکنی کو یک رکنی سے تقسیم کرنا (To Divide a Monomial by Monomial)

مثال (1) تقسیم کیجیے۔ $15p^3 \div 3p$

حل : تقسیم، ضرب کا معکوس عمل ہوتا ہے۔

$$\begin{array}{r} 5p^2 \\ 3p \overline{) 15p^3} \\ \underline{-15p^3} \\ 0 \end{array}$$

اس لیے تقسیم $15p^3 \div 3p$ کے لیے $3p$ یک رکنی کو کس یک رکنی سے ضرب کرنے پر $15p^3$ آئے گا۔
اس بات پر غور کرنا ہوگا۔

$$3p \times 5p^2 = 15p^3, \quad \therefore 15p^3 \div 3p = 5p^2$$

اس مثال کی ترتیب بازو میں دکھائے ہوئے کے مطابق کر سکتے ہیں۔

مثال (2) تقسیم کیجیے اور خالی چوکون میں مناسب ارکان لکھیے۔

(i) $(-36x^4) \div (-9x)$

$$\begin{array}{r} \boxed{} \\ -9x \overline{) -36x^4} \\ \underline{-\boxed{}} \\ \boxed{} \end{array}$$

(ii) $(5m^2) \div (-m)$

$$\begin{array}{r} \boxed{} \\ -m \overline{) 5m^2} \\ \underline{-\boxed{}} \\ \boxed{} \end{array}$$

(iii) $(-20y^5) \div (2y^3)$

$$\begin{array}{r} \boxed{} \\ 2y^3 \overline{) -20y^5} \\ \underline{-\boxed{}} \\ \boxed{} \end{array}$$

کثیر رکنی کو یک رکنی سے تقسیم کرنا (To divide a polynomial by a monomial)

درج ذیل مثال کا مطالعہ کیجیے اور کثیر رکنی کو یک رکنی سے تقسیم کرنے کا طریقہ سمجھ لیں۔

مثال (1) $(6x^3 + 8x^2) \div 2x$

حل :

$$\begin{array}{r} 3x^2 + 4x \\ 2x \overline{) 6x^3 + 8x^2} \\ \underline{-6x^3} \\ 0 + 8x^2 \\ \underline{-8x^2} \\ 0 \end{array}$$

وضاحت

(i) $2x \times \boxed{3x^2} = 6x^3$

(ii) $2x \times \boxed{4x} = 8x^2$

∴ خارج قسمت = $3x^2 + 4x$
باقي = 0

مثال (2) $(15y^4 + 10y^3 - 3y^2) \div 5y^2$

حل :

$$\begin{array}{r} 3y^2 + 2y - \frac{3}{5} \\ 5y^2 \overline{)15y^4 + 10y^3 - 3y^2} \\ \underline{-15y^4} \\ 0 + 10y^3 - 3y^2 \\ \underline{-10y^3} \\ 0 - 3y^2 \\ \underline{+ 3y^2} \\ 0 \end{array}$$

$$\therefore \text{خارج قسمت} = 3y^2 + 2y - \frac{3}{5}, \quad \text{باقي} = 0$$

وضاحت -

- (i) $5y^2 \times \boxed{3y^2} = 15y^4$
- (ii) $5y^2 \times \boxed{2y} = 10y^3$
- (iii) $5y^2 \times \boxed{\frac{-3}{5}} = -3y^2$

مثال (3) $(12p^3 - 6p^2 + 4p) \div 3p^2$

حل :

$$\begin{array}{r} 4p - 2 \\ 3p^2 \overline{)12p^3 - 6p^2 + 4p} \\ \underline{-12p^3} \\ 0 - 6p^2 + 4p \\ \underline{+ 6p^2} \\ 0 + 4p \end{array}$$

$$\therefore \text{خارج قسمت} = 4p - 2, \quad \text{باقي} = 4p$$

وضاحت -

- (i) $3p^2 \times \boxed{4p} = 12p^3$
- (ii) $3p^2 \times \boxed{-2} = -6p^2$

مثال (4) $(5x^4 - 3x^3 + 4x^2 + 2x - 6) \div x^2$

حل :

$$\begin{array}{r} 5x^2 - 3x + 4 \\ x^2 \overline{)5x^4 - 3x^3 + 4x^2 + 2x - 6} \\ \underline{-5x^4} \\ 0 - 3x^3 + 4x^2 + 2x - 6 \\ \underline{+ 3x^3} \\ 0 + 4x^2 + 2x - 6 \\ \underline{- 4x^2} \\ 0 + 2x - 6 \end{array}$$

$$\therefore \text{خارج قسمت} = 5x^2 - 3x + 4, \quad \text{باقي} = 2x - 6$$

وضاحت -

- (i) $x^2 \times \boxed{5x^2} = 5x^4$
- (ii) $x^2 \times \boxed{-3x} = -3x^3$
- (iii) $x^2 \times \boxed{4} = 4x^2$

کثیر رکنیوں کی تقسیم کرتے وقت جب باتی صفر آتا ہو، یا باقی رکن کا درجہ، مقسوم الیہ کثیر رکنی کے درجے سے چھوٹا ہوتا تھا۔ اسی طرح مثال (4) میں باقی $2x - 6$ کا درجہ مقسوم الیہ x^2 کے درجے سے چھوٹا ہے۔ اسے دھیان میں رکھیے۔

مشتقی سیٹ 10.1

تقسیم کیجیے : خارج قسمت اور باقی لکھیے۔ 1

- (1) $21m^2 \div 7m$
- (2) $40a^3 \div (-10a)$
- (3) $(-48p^4) \div (-9p^2)$
- (4) $40m^5 \div 30m^3$
- (5) $(5x^3 - 3x^2) \div x^2$
- (6) $(8p^3 - 4p^2) \div 2p^2$
- (7) $(2y^3 + 4y^2 + 3) \div 2y^2$
- (8) $(21x^4 - 14x^2 + 7x) \div 7x^3$
- (9) $(6x^5 - 4x^4 + 8x^3 + 2x^2) \div 2x^2$
- (10) $(25m^4 - 15m^3 + 10m + 8) \div 5m^3$



کثیر رکنی کو دو رکنی سے تقسیم کرنا

کثیر رکنیوں کو دو رکنی سے تقسیم کرنے کا طریقہ، کثیر رکنیوں کو یک رکنی سے تقسیم کرنے کے طریقے کے جیسا ہی ہوتا ہے۔

مثال (1) $(x^2 + 4x + 4) \div (x + 2)$

حل :

$$\begin{array}{r} x + 2 \\ \overline{x^2 + 4x + 4} \\ -x^2 - 2x \\ \hline 0 + 2x + 4 \\ + 2x + 4 \\ \hline 0 \end{array}$$

وضاحت :

- (i) پہلے مقسوم اور مقسوم الیہ کو قوت نمائی ارتقی ترتیب میں لکھیے۔
مقسوم الیہ کے پہلے رکن کو x سے ضرب کرنے پر مقسوم کا پہلا رکن حاصل ہوتا ہے۔
 \therefore مقسوم الیہ کو x سے ضرب کریں۔

$$(ii) (x + 2) \times \boxed{2} = 2x + 4$$

\therefore خارج قسمت $= x + 2$

\therefore باقی $= 0$

مثال (2) $(y^4 + 24y - 10y^2) \div (y + 4)$

حل : یہاں مقسوم کشیر کرنی کا درجہ 4 ہے۔ اس کے متغیروں کے قوت نما اترتی ترتیب میں نہیں ہیں۔ اسی طرح قوت نما 3 کا رکن بھی نہیں ہے۔ اسے 0 y^3 مان کر اور مقسوم کشیر کرنی کو قوت نما کی اترتی ترتیب میں لکھ کر تقسیم کریں۔

$$\begin{array}{r} y^3 - 4y^2 + 6y \\ y + 4) y^4 + 0y^3 - 10y^2 + 24y \\ \underline{-} y^4 - 4y^3 \\ 0 - 4y^3 - 10y^2 + 24y \\ \underline{+} 4y^3 + 16y^2 \\ 0 + 6y^2 + 24y \\ \underline{-} 6y^2 - 24y \\ 0 \end{array}$$

$$\therefore \text{خارج قسمت} = y^3 - 4y^2 + 6y , \text{ باقی} = 0$$

مثال (3) $(6x^4 + 3x^2 - 9 + 5x + 5x^3) \div (x^2 - 1)$

حل :

$$\begin{array}{r} 6x^2 + 5x + 9 \\ x^2 - 1) 6x^4 + 5x^3 + 3x^2 + 5x - 9 \\ \underline{-} 6x^4 \quad \underline{+} 6x^2 \\ 0 + 5x^3 + 9x^2 + 5x - 9 \\ \underline{+} 5x^3 \quad \underline{-} 5x \\ 0 + 9x^2 + 10x - 9 \\ \underline{-} 9x^2 \quad \underline{+} 9 \\ 0 + 10x + 0 \end{array}$$

$$\therefore \text{خارج قسمت} = 6x^2 + 5x + 9 , \text{ باقی} = 10x$$

وضاحت

- (i) $(y + 4) \times y^3 = y^4 + 4y^3$
- (ii) $(y + 4) \times -4y^2 = -4y^3 - 16y^2$
- (iii) $(y + 4) \times 6y = 6y^2 + 24y$

وضاحت

- (i) $(x^2 - 1) \times 6x^2 = 6x^4 - 6x^2$
- (ii) $(x^2 - 1) \times 5x = 5x^3 - 5x$
- (iii) $(x^2 - 1) \times 9 = 9x^2 - 9$

کشیر کنی کو تقسیم کرتے وقت جب باقی صفر پڑتا ہے یا باقی کا درجہ، مقوم الیہ کشیر کنی کے درجے سے چھوٹا ہوتا ہے تو تقسیم کا عمل مکمل ہو جاتا ہے۔

مقوم کشیر کنی کے ارکان قوت نما کی اترتی ترتیب میں نہیں ہوں تو کشیر کنی کو قوت نما کی اترتی ترتیب میں لکھیے۔ اگر کسی قوت نما کا کرن نہیں ہو تو اس کا

ضریب 0 مان کر قوت نما کی اترتی ترتیب مکمل کیجیے۔

مشقی سیٹ 10.2

تقسیم کیجیے۔ خارج قسمت اور باقی لکھیے۔ 1.

$$(1) (y^2 + 10y + 24) \div (y + 4) \quad (2) (p^2 + 7p - 5) \div (p + 3)$$

$$(3) (3x + 2x^2 + 4x^3) \div (x - 4) \quad (4) (2m^3 + m^2 + m + 9) \div (2m - 1)$$

$$(5) (3x - 3x^2 - 12 + x^4 + x^3) \div (2 + x^2)$$

$$(6^\star) (a^4 - a^3 + a^2 - a + 1) \div (a^3 - 2)$$

$$(7^\star) (4x^4 - 5x^3 - 7x + 1) \div (4x - 1)$$

جوابات کی فہرست

مشقی سیٹ 10.1

$$1. 3m, 0 \quad 2. -4a^2, 0 \quad 3. \frac{-16}{3}p^2, 0 \quad 4. \frac{4}{3}m^2, 0$$

$$5. 5x - 3, 0 \quad 6. 4p - 2, 0 \quad 7. y + 2, 3 \quad 8. 3x, -14x^2 + 7x$$

$$9. 3x^3 - 2x^2 + 4x + 1, 0 \quad 10. 5m - 3, 10m + 8$$

مشقی سیٹ 10.2

$$1. y + 6, 0 \quad 2. p + 4, -17 \quad 3. 4x^2 + 18x + 75, 300$$

$$4. m^2 + m + 1, 10 \quad 5. x^2 + x - 5, x - 2$$

$$6. a - 1, a^2 + a - 1 \quad 7. x^3 - x^2 - \frac{x}{4} - \frac{29}{16}, \frac{-13}{16}$$

