6 الجبری عبارتوں کے اجزائے ضربی

آیئے ذرا یاد کریں

گذشتہ جماعت میں ہم $ax + ay$ اور $a^2 - b^2$ کی نوعیت والی الجبری عبارتوں کے اجزائے ضربی کا مطالعہ کر چکے ہیں۔

مثلاً (1) $4xy + 8xy^2 = 4xy(1 + 2y)$

(2) $p^2 - 9q^2 = (p)^2 - (3q)^2 = (p + 3q)(p - 3q)$

آیئے سمجھ لیں

مربعی سہ رکنی کے اجزائے ضربی (Factors of Quadratic Trinomial) :

$ax^2 + bx + c$ نوعیت کی الجبری عبارت کو مربعی سہ رکنی کہتے ہیں۔

ہم جانتے ہیں کہ $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$

اس لیے $x^2 + (a + b)x + ab$ کے $(x + a)$ اور $(x + b)$ جزو ضربی ہیں۔

سہ رکنی $x^2 + 5x + 6$ کے اجزائے ضربی معلوم کرنے کے لیے اس کا موازنہ سہ رکنی $x^2 + (a + b)x + ab$ سے کرنے پر $a + b = 5$ اور $ab = 6$ آتا ہے۔لہٰذا 6 کے ایسے دو جزو ضربی کریں گے کہ ان کی جمع 5 آئے اور سہ رکنی کو $x^2 + (a + b)x + ab$ کی صورت میں لکھ کر اس کا اجزائے ضربی معلوم کریں گے۔

$x^2 + 5x + 6 = x^2 + (3 + 2)x + 3 \times 2$ ... $[\because\ x^2 + (a + b)x + ab]$

[$(3 + 2)$ کو x سے ضرب کرنے پر حاصل ہونے والے 4 ارکان کے دو گروہ بتائیں گے اور اجزائے ضربی حاصل کریں گے]

$= \underline{x^2 + 3x} + \underline{2x + 2 \times 3}$

$= x(x + 3) + 2(x + 3) \qquad = (x + 3)(x + 2)$

(دی ہوئی مربعی سہ رکنی کے اجزائے ضربی کرنے کے طریقے کو سمجھنے کے لیے ذیل کی مثالوں کا مطالعہ کیجیے)

مثال 1 : $2x^2 - 9x + 9$ کے اجزائے ضربی کیجیے۔

حل : مربعی رکن کے ضریب اور مستقل رکن کا ضرب کریں گے۔ان کا حاصل ضرب $2 \times 9 = 18$ ہے۔

اب 18 کے دو جزو ضربی معلوم کریں گے کہ ان کی جمع درمیانی رکن کے ضریب کے برابر یعنی -9 آئے۔

$18 = (-6) \times (-3)\ ;\ (-6) + (-3) = -9$

رکن $-9x$ کو $-6x - 3x$ لکھیں گے۔

$(x - 3)$ مشترک جزو نکالیں گے۔

$2x^2 - 9x + 9$

$= \underline{2x^2 - 6x} - \underline{3x + 9}$

$= 2x(x - 3) - 3\underline{(x - 3)}$

$= (x - 3)(2x - 3)$

$\therefore\ 2x^2 - 9x + 9 = (x - 3)(2x - 3)$

مثال 2 : $2x^2 + 5x - 18$ کے اجزائے ضربی معلوم کیجیے۔

حل : $2x^2 + 5x - 18$ (-36 → $+9$, -4)

$= \underline{2x^2 + 9x} \underline{-4x - 18}$

$= x(2x + 9) - 2(2x + 9)$

$= (2x + 9)(x - 2)$

مثال 3 : $x^2 - 10x + 21$ کے اجزائے ضربی معلوم کیجیے۔

حل : $x^2 - 10x + 21$ ($+21$ → -7, -3)

$= \underline{x^2 - 7x} \underline{- 3x + 21}$

$= x(x - 7) - 3(x - 7)$

$= (x - 7)(x - 3)$

مثال 4 : $2y^2 - 4y - 30$ کے اجزائے ضربی کیجیے۔

حل : $2y^2 - 4y - 30$

$= 2(y^2 - 2y - 15)$ ... (تمام ارکان سے 2 مشترک جز وضربی نکال کر)

$= 2(\underline{y^2 - 5y} + \underline{3y - 15})$ ... (-15 → -5, $+3$)

$= 2[y(y - 5) + 3(y - 5)]$

$= 2(y - 5)(y + 3)$

مشقی سیٹ 6.1

.1 اجزائے ضربی کیجیے۔

(1) $x^2 + 9x + 18$	(2) $x^2 - 10x + 9$	(3) $y^2 + 24y + 144$
(4) $5y^2 + 5y - 10$	(5) $p^2 - 2p - 35$	(6) $p^2 - 7p - 44$
(7) $m^2 - 23m + 120$	(8) $m^2 - 25m + 100$	(9) $3x^2 + 14x + 15$
(10) $2x^2 + x - 45$	(11) $20x^2 - 26x + 8$	(12) $44x^2 - x - 3$

آئیے سمجھ لیں

$a^3 + b^3$ کے اجزائے ضربی (Factors of $a^3 + b^3$) :

ہم جانتے ہیں کہ، $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

دائیں جانب کی عبارت سے $3ab$ مشترک نکال کر اس توسیعی ضابطے کی ترتیب ذیل کے مطابق کر سکتے ہیں۔

$$(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$$

اب، $a^3 + b^3 + 3ab(a + b) = (a + b)^3$ ... (طرفین کی ادل بدل کر کے)

$\therefore\ a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b) = [(a + b)(a + b)^2] - 3ab(a + b)$

$= (a + b)[(a + b)^2 - 3ab] = (a + b)(a^2 + 2ab + b^2 - 3ab)$

$= (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

$\therefore$ $\boxed{\mathbf{a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)}}$

دومکعبوں کی جمع کے اجزائے ضربیوں کے مذکورہ بالا ضابطے کا استعمال کرکے کچھ مثالیں حل کریں گے۔

مثال (1) $x^3 + 27y^3 = x^3 + (3y)^3$

$$= (x + 3y)\,[x^2 - x(3y) + (3y)^2]$$

$$= (x + 3y)\,[x^2 - 3xy + 9y^2]$$

مثال (2) $8p^3 + 125q^3 = (2p)^3 + (5q)^3 = (2p + 5q)\,[(2p)^2 - 2p \times 5q + (5q)^2]$

$$= (2p + 5q)\,(4p^2 - 10pq + 25q^2)$$

مثال (3) $m^3 + \dfrac{1}{64m^3} = m^3 + \left(\dfrac{1}{4m}\right)^3 = \left(m + \dfrac{1}{4m}\right)\left[m^2 - m \times \dfrac{1}{4m} + \left(\dfrac{1}{4m}\right)^2\right]$

$$= \left(m + \frac{1}{4m}\right)\left(m^2 - \frac{1}{4} + \frac{1}{16m^2}\right)$$

مثال (4) $250p^3 + 432q^3 = 2(125p^3 + 216q^3)$

$$= 2\,[(5p)^3 + (6q)^3] = 2(5p + 6q)\,(25p^2 - 30pq + 36q^2)$$

مشقی سیٹ 6.2

1. اجزائے ضربی کیجیے۔

(1) $x^3 + 64y^3$ (2) $125p^3 + q^3$ (3) $125k^3 + 27m^3$ (4) $2l^3 + 432m^3$

(5) $24a^3 + 81b^3$ (6) $y^3 + \dfrac{1}{8y^3}$ (7) $a^3 + \dfrac{8}{a^3}$ (8) $1 + \dfrac{q^3}{125}$

آیئے سمجھ لیں

$a^3 - b^3$ کے اجزائے ضربی (Factors of $a^3 - b^3$) :

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a - b)$$

اب، $a^3 - b^3 - 3ab\,(a - b) = (a - b)^3$

$$\therefore \quad a^3 - b^3 = (a - b)^3 + 3ab\,(a - b)$$

$$= [(a - b)(a - b)^2 + 3ab\,(a - b)]$$

$$= (a - b)\,[(a - b)^2 + 3ab]$$

$$= (a - b)\,(a^2 - 2ab + b^2 + 3ab)$$

$$= (a - b)\,(a^2 + ab + b^2)$$

$$\therefore \quad \boxed{a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)}$$

دو مکعبوں کی تفریق کے اجزائے ضربی کے ضابطے کا استعمال کر کے کچھ عبارتوں کے اجزائے ضربی کریں گے۔

مثال (1) $x^3 - 8y^3 = x^3 - (2y)^3$

$\therefore x^3 - 8y^3 = x^3 - (2y)^3$

$= (x - 2y)(x^2 + 2xy + 4y^2)$

مثال (2) $27p^3 - 125q^3 = (3p)^3 - (5q)^3 \quad = (3p - 5q)(9p^2 + 15pq + 25q^2)$

مثال (3) $54p^3 - 250q^3 = 2[27p^3 - 125q^3] = 2[(3p)^3 - (5q)^3]$

$= 2(3p - 5q)(9p^2 + 15pq + 25q^2)$

مثال (4) $a^3 - \frac{1}{a^3} = \left(a - \frac{1}{a}\right)\left(a^2 + 1 + \frac{1}{a^2}\right)$

مثال (5) مختصر کیجیے۔ $(a - b)^3 - (a^3 - b^3)$

حل : $(a - b)^3 - (a^3 - b^3) = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 - a^3 + b^3 = -3a^2b + 3ab^2$

مثال (6) مختصر کیجیے۔ $(2x + 3y)^3 - (2x - 3y)^3$

حل : فرض کیجیے $2x + 3y = a$ اور $2x - 3y = b$

$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

$\therefore (2x + 3y)^3 - (2x - 3y)^3$

$= [(2x+3y)-(2x-3y)][(2x+3y)^2+(2x+3y)(2x-3y)+(2x-3y)^2]$

$= [2x + 3y - 2x + 3y][4x^2+12xy+9y^2 + 4x^2-9y^2+4x^2-12xy+9y^2]$

$= 6y(12x^2 + 9y^2) = 72x^2y + 54y^3$

یہ میری سمجھ میں آگیا

(i) $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ (ii) $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

مشقی سیٹ 6.3

.1 اجزائے ضربی کیجیے۔

(1) $y^3 - 27$ (2) $x^3 - 64y^3$ (3) $27m^3 - 216n^3$ (4) $125y^3 - 1$

(5) $8p^3 - \frac{27}{p^3}$ (6) $343a^3 - 512b^3$ (7) $64x^3 - 729y^3$ (8) $16a^3 - \frac{128}{b^3}$

.2 مختصر کیجیے۔

(1) $(x + y)^3 - (x - y)^3$ (2) $(3a + 5b)^3 - (3a - 5b)^3$

(3) $(a + b)^3 - a^3 - b^3$ (4) $p^3 - (p + 1)^3$

(5) $(3xy - 2ab)^3 - (3xy + 2ab)^3$

آیئے سمجھ لیں

ناطق الجبری عبارتیں یا الجبری عبارتوں کی نسبت (Rational Algebraic Expressions) :

A اور B دو عبارتیں ہوں تو $\frac{A}{B}$ کو الجبری عبارتوں کی نسبت کہتے ہیں۔ الجبری عبارتوں کی نسبت کو مختصر کرتے وقت استعمال میں آنے والے جمع، تفریق، ضرب، تقسیم وغیرہ اعمال ناطق اعداد پر ہونے والے اعمال کی طرح ہوتے ہیں۔

الجبری عبارتوں کی تقسیم کرنے کے دوران نسب نما یا مقسوم الیہ غیر صفر ہونا چاہیے۔

مثال (1) مختصر کیجیے۔ $\frac{a^2+5a+6}{a^2-a-12}\times\frac{a-4}{a^2-4}$

حل :

$$\frac{a^2+5a+6}{a^2-a-12}\times\frac{a-4}{a^2-4}$$

$$=\frac{(a+3)(a+2)}{(a-4)(a+3)}\times\frac{(a-4)}{(a+2)(a-2)}$$

$$=\frac{1}{a-2}$$

مثال (2) $\frac{7x^2+18x+8}{49x^2-16}\times\frac{14x-8}{x+2}$

حل :

$$\frac{7x^2+18x+8}{49x^2-16}\times\frac{14x-8}{x+2}$$

$$=\frac{(7x+4)(x+2)}{(7x+4)(7x-4)}\times\frac{2(7x-4)}{(x+2)}$$

$$=2$$

مثال (3) مختصر کیجیے : $\frac{x^2-9y^2}{x^3-27y^3}$

حل :

$$\frac{x^2-9y^2}{x^3-27y^3}=\frac{(x+3y)(x-3y)}{(x-3y)(x^2+3xy+9y^2)}$$

$$=\frac{x+3y}{x^2+3xy+9y^2}$$

مشقی سیٹ 6.4

.1 مختصر کیجیے۔

(1) $\frac{m^2-n^2}{(m+n)^2}\times\frac{m^2+mn+n^2}{m^3-n^3}$ (2) $\frac{a^2+10a+21}{a^2+6a-7}\times\frac{a^2-1}{a+3}$ (3) $\frac{8x^3-27y^3}{4x^2-9y^2}$

(4) $\frac{x^2-5x-24}{(x+3)(x+8)}\times\frac{x^2-64}{(x-8)^2}$ (5) $\frac{3x^2-x-2}{x^2-7x+12}\div\frac{3x^2-7x-6}{x^2-4}$ (6) $\frac{4x^2-11x+6}{16x^2-9}$

(7) $\frac{a^3-27}{5a^2-16a+3}\div\frac{a^2+3a+9}{25a^2-1}$ (8) $\frac{1-2x+x^2}{1-x^3}\times\frac{1+x+x^2}{1+x}$

مشقی سیٹ 6.1

1. (1) $(x + 6)(x + 3)$ (2) $(x - 9)(x - 1)$ (3) $(y + 12)(y + 12)$

(4) $5(y + 2)(y - 1)$ (5) $(p - 7)(p + 5)$ (6) $(p + 4)(p - 11)$

(7) $(m - 15)(m - 8)$ (8) $(m - 20)(m - 5)$ (9) $(x + 3)(3x + 5)$

(10) $(x + 5)(2x - 9)$ (11) $2(5x - 4)(2x - 1)$ (12) $(11x - 3)(4x + 1)$

مشقی سیٹ 6.2

1. (1) $(x + 4y)(x^2 - 4xy + 16y^2)$ (2) $(5p + q)(25p^2 - 5pq + q^2)$

(3) $(5k + 3m)(25k^2 - 15km + 9m^2)$ (4) $2(l + 6m)(l^2 - 6lm + 36m^2)$

(5) $3(2a + 3b)(4a^2 - 6ab + 9b^2)$ (6) $\left(y+\frac{1}{2y}\right)\left(y^2-\frac{1}{2}+\frac{1}{4y^2}\right)$

(7) $\left(a+\frac{2}{a}\right)\left(a^2-2+\frac{4}{a^2}\right)$ (8) $\left(1+\frac{q}{5}\right)\left(1-\frac{q}{5}+\frac{q^2}{25}\right)$

مشقی سیٹ 6.3

1. (1) $(y - 3)(y^2 + 3y + 9)$ (2) $(x - 4y)(x^2 + 4xy + 16y^2)$

(3) $(3m - 6n)(9m^2 + 18mn + 36n^2)$ (4) $(5y - 1)(25y^2 + 5y + 1)$

(5) $\left(2p-\frac{3}{p}\right)\left(4p^2+6+\frac{9}{p^2}\right)$ (6) $(7a - 8b)(49a^2 + 56ab + 64b^2)$

(7) $(4x - 9y)(16x^2 + 36xy + 81y^2)$ (8) $16\left(a-\frac{2}{b}\right)\left(a^2+\frac{2a}{b}+\frac{4}{b^2}\right)$

2. (1) $6x^2y + 2y^3$ (2) $270a^2b + 250b^3$ (3) $3a^2b + 3ab^2$

(4) $-3p^2 - 3p - 1$ (5) $-108x^2y^2ab - 16a^3b^3$

مشقی سیٹ 6.4

1. (1) $\frac{1}{m+n}$ (2) $a + 1$ (3) $\frac{4x^2+6xy+9y^2}{2x+3y}$

(4) 1 (5) $\frac{(x-1)(x-2)(x+2)}{(x-3)^2(x-4)}$

(6) $\frac{x-2}{4x+3}$ (7) $5a + 1$ (8) $\frac{1-x}{1+x}$