

الجبری عبارتوں کے اجزاء کے ضربی

آئیے ذرا یاد کریں

گذشتہ جماعت میں ہم $a^2 - b^2$ اور $ax + ay$ کی نوعیت والی الجبری عبارتوں کے اجزاء کے ضربی کا مطالعہ کرچکے ہیں۔

$$(1) \quad 4xy + 8xy^2 = 4xy(1 + 2y)$$

$$(2) \quad p^2 - 9q^2 = (p)^2 - (3q)^2 = (p + 3q)(p - 3q)$$

آئیے سمجھیں

مربعی سرکنی کے اجزاء کے ضربی (Factors of Quadratic Trinomial)

$ax^2 + bx + c$ نوعیت کی الجبری عبارت کو مربعی سرکنی کہتے ہیں۔

ہم جانتے ہیں کہ $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$

اس لیے $x^2 + (a + b)x + ab$ کے جزو ضربی ہیں۔

سرکنی $x^2 + 5x + 6$ کے اجزاء کے ضربی معلوم کرنے کے لیے اس کا موازنہ سرکنی $x^2 + (a + b)x + ab$ سے کرنے پر اور $ab = 6$ آتا ہے۔ لہذا 6 کے ایسے دو جزو ضربی کریں گے کہ ان کی جمع 5 آئے اور سرکنی کو $x^2 + (a + b)x + ab$ کی صورت میں لکھ کر اس کا اجزاء کے ضربی معلوم کریں گے۔

$$x^2 + 5x + 6 = x^2 + (3 + 2)x + 3 \times 2 \quad \dots [\because x^2 + (a + b)x + ab]$$

x کو ضرب کرنے پر حاصل ہونے والے 4 ارکان کے دو گروہ بنا کیں گے اور اجزاء کے ضربی حاصل کریں گے

$$\begin{aligned} &= \underline{x^2 + 3x} + \underline{2x + 2 \times 3} \\ &= x(x + 3) + 2(x + 3) \quad = (x + 3)(x + 2) \end{aligned}$$

(دی ہوئی مربعی سرکنی کے اجزاء کے ضربی کرنے کے طریقے کو سمجھنے کے لیے ذیل کی مثالوں کا مطالعہ کیجیے)

مثال 1 : $2x^2 - 9x + 9$ کے اجزاء کے ضربی کیجیے۔

حل : مربعی رکن کے ضریب اور مستقل رکن کا ضرب کریں گے۔ ان کا حاصل ضرب $18 = 2 \times 9$ ہے۔

اب 18 کے دو جزو ضربی معلوم کریں گے کہ ان کی جمع درمیانی رکن کے ضریب کے برابر یعنی -9 ہے۔

$$\begin{aligned} &2x^2 - 9x + 9 \\ &= \underline{2x^2 - 6x} - \underline{3x + 9} \\ &= 2x \underline{(x - 3)} - 3 \underline{(x - 3)} \\ &= (x - 3)(2x - 3) \end{aligned}$$

$$18 = (-6) \times (-3); (-6) + (-3) = -9$$

رکن $-9x - 3x$ کو $-6x$ لکھیں گے۔

مشترک جزو کا لیں گے۔

$$\therefore 2x^2 - 9x + 9 = (x - 3)(2x - 3)$$

مثال 3 : $x^2 - 10x + 21$ کے اجزاء کے ضربی معلوم کیجیے۔

$$\begin{aligned} \text{حل: } & x^2 - 10x + 21 \\ &= \underline{x^2 - 7x} - \underline{3x + 21} \\ &= x(x - 7) - 3(x - 7) \\ &= (x - 7)(x - 3) \end{aligned}$$

مثال 2 : $2x^2 + 5x - 18$ کے اجزاء کے ضربی معلوم کیجیے۔

$$\begin{aligned} \text{حل: } & 2x^2 + 5x - 18 \\ &= \underline{2x^2 + 9x} - \underline{4x - 18} \\ &= x(2x + 9) - 2(2x + 9) \\ &= (2x + 9)(x - 2) \end{aligned}$$

مثال 4 : $2y^2 - 4y - 30$ کے اجزاء کے ضربی کیجیے۔

$$\begin{aligned} \text{حل: } & 2y^2 - 4y - 30 \\ &= 2(y^2 - 2y - 15) \\ &= 2(\underline{y^2 - 5y} + \underline{3y - 15}) \quad \dots \\ &= 2[y(y - 5) + 3(y - 5)] \quad \dots \quad \begin{array}{c} -15 \\ -5 \quad +3 \end{array} \\ &= 2(y - 5)(y + 3) \end{aligned}$$

مشقی سیٹ

اجزاء کے ضربی کیجیے۔ .1

- | | | |
|-----------------------|------------------------|-----------------------|
| (1) $x^2 + 9x + 18$ | (2) $x^2 - 10x + 9$ | (3) $y^2 + 24y + 144$ |
| (4) $5y^2 + 5y - 10$ | (5) $p^2 - 2p - 35$ | (6) $p^2 - 7p - 44$ |
| (7) $m^2 - 23m + 120$ | (8) $m^2 - 25m + 100$ | (9) $3x^2 + 14x + 15$ |
| (10) $2x^2 + x - 45$ | (11) $20x^2 - 26x + 8$ | (12) $44x^2 - x - 3$ |



: (Factors of $a^3 + b^3$) اجزاء کے ضربی $a^3 + b^3$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

ہم جانتے ہیں کہ، $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ دوسری جانب کی عبارت سے $3ab$ کا مشترک نکال کر اس تو سیعی خواہی کی ترتیب ذیل کے مطابق کر سکتے ہیں۔

$$(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$$

اب، $a^3 + b^3 + 3ab(a + b) = (a + b)^3$ (طرفین کی اول بدل کر کے)

$$\therefore a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b) = [(a + b)(a + b)^2] - 3ab(a + b)$$

$$= (a + b)[(a + b)^2 - 3ab] = (a + b)(a^2 + 2ab + b^2 - 3ab)$$

$$= (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$\therefore a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

وہ مکعبوں کی جمع کے اجزاء کے ضریبوں کے نکرہ بالا ضابطے کا استعمال کر کے کچھ مثالیں حل کریں گے۔

(1) مثال $x^3 + 27y^3 = x^3 + (3y)^3$

$$= (x + 3y) [x^2 - x(3y) + (3y)^2]$$

$$= (x + 3y) [x^2 - 3xy + 9y^2]$$

(2) مثال $8p^3 + 125q^3 = (2p)^3 + (5q)^3 = (2p + 5q) [(2p)^2 - 2p \times 5q + (5q)^2]$

$$= (2p + 5q) (4p^2 - 10pq + 25q^2)$$

(3) مثال $m^3 + \frac{1}{64m^3} = m^3 + \left(\frac{1}{4m}\right)^3 = \left(m + \frac{1}{4m}\right) \left[m^2 - m \times \frac{1}{4m} + \left(\frac{1}{4m}\right)^2\right]$
 $= \left(m + \frac{1}{4m}\right) \left(m^2 - \frac{1}{4} + \frac{1}{16m^2}\right)$

(4) مثال $250p^3 + 432q^3 = 2(125p^3 + 216q^3)$
 $= 2[(5p)^3 + (6q)^3] = 2(5p + 6q)(25p^2 - 30pq + 36q^2)$

مشقی سیٹ

اجزا کے ضربی کیجیے۔ .1

(1) $x^3 + 64y^3$ (2) $125p^3 + q^3$ (3) $125k^3 + 27m^3$ (4) $2l^3 + 432m^3$

(5) $24a^3 + 81b^3$ (6) $y^3 + \frac{1}{8y^3}$ (7) $a^3 + \frac{8}{a^3}$ (8) $1 + \frac{q^3}{125}$



: (Factors of $a^3 - b^3$) کے اجزاء کے ضربی $a^3 - b^3$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a - b)$$

پس، $a^3 - b^3 - 3ab(a - b) = (a - b)^3$

$$\therefore a^3 - b^3 = (a - b)^3 + 3ab(a - b)$$

$$= [(a - b)(a - b)^2 + 3ab(a - b)]$$

$$= (a - b) [(a - b)^2 + 3ab]$$

$$= (a - b) (a^2 - 2ab + b^2 + 3ab)$$

$$= (a - b) (a^2 + ab + b^2)$$

$\therefore a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

وہ مکعبوں کی تفریق کے اجزاء ضربی کے ضابطے کا استعمال کر کے کچھ عبارتوں کے اجزاء کے ضربی کریں گے۔

مثال (1) $x^3 - 8y^3 = x^3 - (2y)^3$

$$\therefore x^3 - 8y^3 = x^3 - (2y)^3 \\ = (x - 2y)(x^2 + 2xy + 4y^2)$$

مثال (2) $27p^3 - 125q^3 = (3p)^3 - (5q)^3 = (3p - 5q)(9p^2 + 15pq + 25q^2)$

مثال (3) $54p^3 - 250q^3 = 2[27p^3 - 125q^3] = 2[(3p)^3 - (5q)^3]$
 $= 2(3p - 5q)(9p^2 + 15pq + 25q^2)$

مثال (4) $a^3 - \frac{1}{a^3} = \left(a - \frac{1}{a}\right) \left(a^2 + 1 + \frac{1}{a^2}\right)$

مثال (5) مختصر کیجیے۔

$(a - b)^3 - (a^3 - b^3) = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 - a^3 + b^3 = -3a^2b + 3ab^2$ حل :

مثال (6) مختصر کیجیے۔

$2x - 3y = b$ اور $2x + 3y = a$ حل : فرض کیجیے

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$\therefore (2x + 3y)^3 - (2x - 3y)^3$$

$$= [(2x + 3y) - (2x - 3y)][(2x + 3y)^2 + (2x + 3y)(2x - 3y) + (2x - 3y)^2]$$

$$= [2x + 3y - 2x + 3y][4x^2 + 12xy + 9y^2 + 4x^2 - 9y^2 + 4x^2 - 12xy + 9y^2]$$

$$= 6y(12x^2 + 9y^2) = 72x^2y + 54y^3$$



(i) $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ (ii) $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

مشقی سیٹ 6.3

اجزاء کے ضربی کیجیے۔ .1

(1) $y^3 - 27$ (2) $x^3 - 64y^3$ (3) $27m^3 - 216n^3$ (4) $125y^3 - 1$

(5) $8p^3 - \frac{27}{p^3}$ (6) $343a^3 - 512b^3$ (7) $64x^3 - 729y^3$ (8) $16a^3 - \frac{128}{b^3}$

(1) $(x + y)^3 - (x - y)^3$ (2) $(3a + 5b)^3 - (3a - 5b)^3$.2 مختصر کیجیے۔

(3) $(a + b)^3 - a^3 - b^3$ (4) $p^3 - (p + 1)^3$

(5) $(3xy - 2ab)^3 - (3xy + 2ab)^3$

ناطق الجبری عبارتیں یا الجبری عبارتوں کی نسبت (Rational Algebraic Expressions)

A اور B دو عبارتیں ہوں تو $\frac{A}{B}$ کو الجبری عبارتوں کی نسبت کہتے ہیں۔ الجبری عبارتوں کی نسبت کو مختصر کرتے وقت استعمال میں آنے والے جمع، تفریق، ضرب، تقسیم وغیرہ اعمال ناطق اعداد پر ہونے والے اعمال کی طرح ہوتے ہیں۔ الجبری عبارتوں کی تقسیم کرنے کے دوران نسب نمایا مقسوم الیہ غیر صفر ہونا چاہیے۔

| | |
|--|---|
| $\frac{7x^2 + 18x + 8}{49x^2 - 16} \times \frac{14x - 8}{x + 2}$ $= \frac{(7x+4)(x+2)}{(7x+4)(7x-4)} \times \frac{2(7x-4)}{(x+2)}$ $= 2$ | مثال (2) مختصر کیجیے۔ حل : $\frac{a^2 + 5a + 6}{a^2 - a - 12} \times \frac{a - 4}{a^2 - 4}$ $= \frac{(a+3)(a+2)}{(a-4)(a+3)} \times \frac{(a-4)}{(a+2)(a-2)}$ $= \frac{1}{a-2}$ |
|--|---|

| | |
|--|---|
| $\frac{x^2 - 9y^2}{x^3 - 27y^3}$ $= \frac{(x+3y)(x-3y)}{(x-3y)(x^2 + 3xy + 9y^2)}$ $= \frac{x+3y}{x^2 + 3xy + 9y^2}$ | مثال (3) مختصر کیجیے۔ حل : |
|--|---|

مشتقی سیٹ 6.4

مختصر کیجیے .1

- (1) $\frac{m^2 - n^2}{(m+n)^2} \times \frac{m^2 + mn + n^2}{m^3 - n^3}$
- (2) $\frac{a^2 + 10a + 21}{a^2 + 6a - 7} \times \frac{a^2 - 1}{a + 3}$
- (3) $\frac{8x^3 - 27y^3}{4x^2 - 9y^2}$
- (4) $\frac{x^2 - 5x - 24}{(x+3)(x+8)} \times \frac{x^2 - 64}{(x-8)^2}$
- (5) $\frac{3x^2 - x - 2}{x^2 - 7x + 12} \div \frac{3x^2 - 7x - 6}{x^2 - 4}$
- (6) $\frac{4x^2 - 11x + 6}{16x^2 - 9}$
- (7) $\frac{a^3 - 27}{5a^2 - 16a + 3} \div \frac{a^2 + 3a + 9}{25a^2 - 1}$
- (8) $\frac{1 - 2x + x^2}{1 - x^3} \times \frac{1 + x + x^2}{1 + x}$

جوابات کی فہرست

مشقی سیٹ 6.1

- | | | |
|-------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1. (1) $(x + 6)(x + 3)$ | (2) $(x - 9)(x - 1)$ | (3) $(y + 12)(y + 12)$ |
| (4) $5(y + 2)(y - 1)$ | (5) $(p - 7)(p + 5)$ | (6) $(p + 4)(p - 11)$ |
| (7) $(m - 15)(m - 8)$ | (8) $(m - 20)(m - 5)$ | (9) $(x + 3)(3x + 5)$ |
| (10) $(x + 5)(2x - 9)$ | (11) $2(5x - 4)(2x - 1)$ | (12) $(11x - 3)(4x + 1)$ |

مشقی سیٹ 6.2

- | | |
|--|--|
| 1. (1) $(x + 4y)(x^2 - 4xy + 16y^2)$ | (2) $(5p + q)(25p^2 - 5pq + q^2)$ |
| (3) $(5k + 3m)(25k^2 - 15km + 9m^2)$ | (4) $2(l + 6m)(l^2 - 6lm + 36m^2)$ |
| (5) $3(2a + 3b)(4a^2 - 6ab + 9b^2)$ | (6) $\left(y + \frac{1}{2y}\right)\left(y^2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4y^2}\right)$ |
| (7) $\left(a + \frac{2}{a}\right)\left(a^2 - 2 + \frac{4}{a^2}\right)$ | (8) $\left(1 + \frac{q}{5}\right)\left(1 - \frac{q}{5} + \frac{q^2}{25}\right)$ |

مشقی سیٹ 6.3

- | | | |
|--|---|---------------------|
| 1. (1) $(y - 3)(y^2 + 3y + 9)$ | (2) $(x - 4y)(x^2 + 4xy + 16y^2)$ | |
| (3) $(3m - 6n)(9m^2 + 18mn + 36n^2)$ | (4) $(5y - 1)(25y^2 + 5y + 1)$ | |
| (5) $\left(2p - \frac{3}{p}\right)\left(4p^2 + 6 + \frac{9}{p^2}\right)$ | (6) $(7a - 8b)(49a^2 + 56ab + 64b^2)$ | |
| (7) $(4x - 9y)(16x^2 + 36xy + 81y^2)$ | (8) $16\left(a - \frac{2}{b}\right)\left(a^2 + \frac{2a}{b} + \frac{4}{b^2}\right)$ | |
| 2. (1) $6x^2y + 2y^3$ | (2) $270a^2b + 250b^3$ | (3) $3a^2b + 3ab^2$ |
| (4) $-3p^2 - 3p - 1$ | (5) $-108x^2y^2ab - 16a^3b^3$ | |

مشقی سیٹ 6.4

- | | | |
|------------------------|--|---|
| 1. (1) $\frac{1}{m+n}$ | (2) $a + 1$ | (3) $\frac{4x^2 + 6xy + 9y^2}{2x + 3y}$ |
| (4) 1 | (5) $\frac{(x-1)(x-2)(x+2)}{(x-3)^2(x-4)}$ | |
| (6) $\frac{x-2}{4x+3}$ | (7) $5a + 1$ | (8) $\frac{1-x}{1+x}$ |

