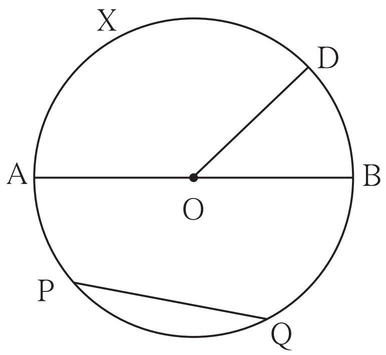
17 वर्तुळ – जीवा व कंस

जरा आठवूया.



शेजारील आकृतीत बिंदू O हे वर्तुळकेंद्र आहे.

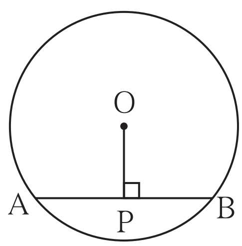
आकृतीच्या संदर्भाने खालील विधानांतील रिकाम्या जागा भरा.

- रेख OD ही वर्तुळाची .... आहे.
- रेख AB हा वर्तुळाचा .... आहे.
- रेख PQ ही वर्तुळाची .... आहे.
- .... हा केंद्रीय कोन आहे.
- लघुकंस : कंस AXD, कंस BD, ..., ..., ...
- विशालकंस : कंस PAB, कंस PDQ, ...
- अर्धवर्तुळकंस : कंस ADB, ...
- m(कंस DB) = m∠.......
- m(कंस DAB) = 360° - m∠.......

जाणून घेऊया.

वर्तुळाच्या जीवेचे गुणधर्म (Properties of chord of a circle)

कृती I :



केंद्र O असलेल्या वर्तुळाची रेख AB ही जीवा काढा.

केंद्र O मधून जीवा AB वर रेख OP लंब काढा.

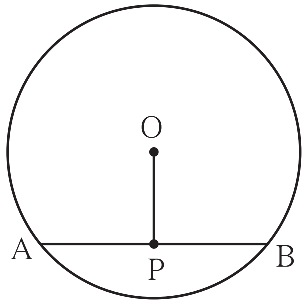
रेख AP व रेख PB ची लांबी मोजा.

याप्रमाणे वेगवेगळ्या त्रिज्येची पाच वर्तुळे कागदावर काढा. प्रत्येक वर्तुळात एक जीवा काढून त्या जीवेवर केंद्रातून लंब काढा. जीवेचे झालेले दोन भाग समान आहेत का हे कर्कटकाच्या साहाय्याने तपासून पाहा.

तुम्हांला खालील गुणधर्म मिळेल. अनुभव घ्या.

वर्तुळ केंद्रातून जीवेवर टाकलेला लंब जीवेला दुभागतो.

कृती II :



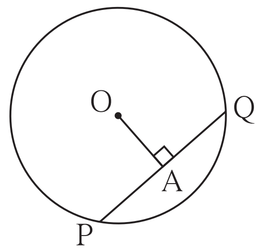
एका कागदावर वेगवेगळ्या त्रिज्यांची 5 वर्तुळे काढा. प्रत्येक वर्तुळात एक जीवा काढा. त्या जीवेचा मध्यबिंदू मिळवा. वर्तुळकेंद्र O व जीवेचा मध्य जोडा. शेजारील आकृतीत दाखवल्याप्रमाणे प्रत्येक जीवेला AB आणि जीवेच्या मध्यबिंदूला P हे नाव द्या. $\angle$ APO व $\angle$ BPO काटकोन आहेत हे गुण्याने किंवा कोनमापकाने तपासून पाहा.

प्रत्येक वर्तुळातील जीवेच्या संदर्भात हाच अनुभव येतो हे पाहा.

यावरून तुम्हांला खालील गुणधर्म मिळेल.

वर्तुळाचे केंद्र व त्या वर्तुळातील जीवेचा मध्यबिंदू जोडणारा रेषाखंड हा त्या जीवेला लंब असतो.

सोडवलेली उदाहरणे



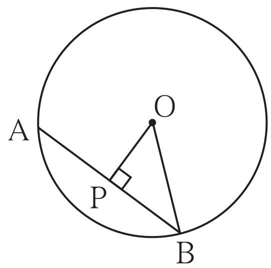
उदा. (1) O केंद्र असलेल्या वर्तुळात जीवा PQ ची लांबी 7 सेमी आहे.
रेख OA $\perp$ जीवा PQ, तर l(AP) काढा.

उकल : रेख OA $\perp$ जीवा PQ, $\therefore$ बिंदू A हा जीवा PQ चा मध्यबिंदू आहे.

$\therefore\ l(\text{PA}) = \frac{1}{2}\ l(\text{PQ}) = \frac{1}{2} \times 7 = 3.5$ सेमी

उदा. (2) केंद्र O असलेल्या एका वर्तुळाची त्रिज्या 10 सेमी आहे. त्या वर्तुळाची एक जीवा केंद्रापासून 6 सेमी अंतरावर आहे, तर त्या जीवेची लांबी काढा.

उकल : वर्तुळाच्या जीवेचे केंद्रापासूनचे अंतर म्हणजे केंद्रापासून त्या जीवेवर काढलेल्या लंबरेषाखंडाची लांबी होय.



O केंद्र असलेल्या वर्तुळाची रेख AB ही जीवा आहे.

रेख OP $\perp$ जीवा AB.

वर्तुळाची त्रिज्या = l(OB) = 10 सेमी.

l(OP) = 6 सेमी. येथे Δ OPB हा काटकोन त्रिकोण तयार झाला.

पायथागोरसच्या प्रमेयानुसार,

$[l(\text{OP})]^2 + [l(\text{PB})]^2 = [l(\text{OB})]^2$

$\therefore\ 6^2 + [l(\text{PB})]^2 = 10^2$

$\therefore\ [l(\text{PB})]^2 = 10^2 - 6^2$

$\therefore\ [l(\text{PB})]^2 = (10 + 6)\ (10 - 6) = 16 \times 4 = 64$

$\therefore \quad l(PB) = 8$ सेमी

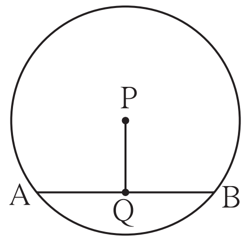
आपल्याला माहीत आहे की, वर्तुळ केंद्रातून जीवेवर टाकलेला लंब जीवेला दुभागतो.

$\therefore \; l(AB) = 2l(PB) = 2 \times 8 = 16$

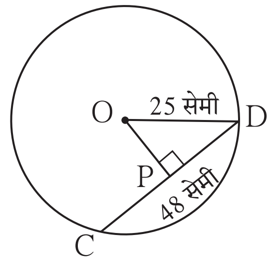
$\therefore$ जीवा AB ची लांबी 16 सेमी आहे.

सरावसंच 17.1

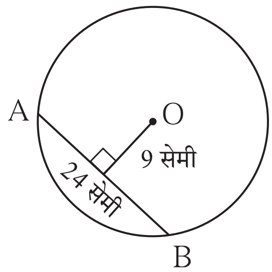
1. केंद्र P असलेल्या वर्तुळाच्या जीवा AB ची लांबी 13 सेमी आहे. रेख PQ $\perp$ जीवा AB, तर $l(QB)$ काढा.



2. केंद्र O असलेल्या वर्तुळाची त्रिज्या 25 सेमी आहे. या वर्तुळात 48 सेमी लांबीची एक जीवा काढली, तर वर्तुळ केंद्रापासून ती किती अंतरावर असेल ?



3. O केंद्र असलेल्या वर्तुळाची एक जीवा 24 सेमी लांबीची असून ती वर्तुळ केंद्रापासून 9 सेमी अंतरावर आहे, तर त्या वर्तुळाची त्रिज्या काढा.

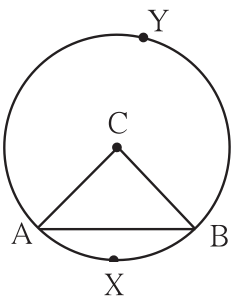


4. एका वर्तुळाचे केंद्र C असून त्याची त्रिज्या 10 सेमी आहे. त्या वर्तुळाच्या एका जीवेची लांबी 12 सेमी असेल तर ती जीवा केंद्रापासून किती अंतरावर असेल ?

जाणून घेऊया.

वर्तुळाच्या जीवेचे संगत कंस (Arcs corresponding to chord of a circle)

सोबतच्या आकृतीत, रेख AB ही केंद्र O असलेल्या वर्तुळाची जीवा आहे. कंस AXB हा लघुकंस असून कंस AYB हा विशालकंस आहे. या दोन्ही कंसांना जीवा AB चे संगत कंस म्हणतात. याउलट जीवा AB ही कंस AXB आणि कंस AYB यांची संगत जीवा आहे.



एकरूप कंस (Congruent arcs)

जर एकाच वर्तुळाच्या दोन कंसांची मापे समान असतील तर ते दोन कंस एकरूप असतात.

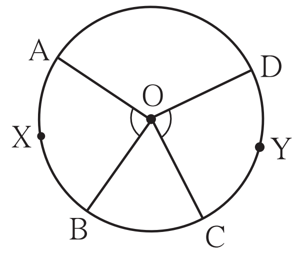
O केंद्र असलेल्या वर्तुळात

$\therefore$ $m\angle AOB = m\angle COD$

$\therefore$ m(कंस AXB) = m(कंस CYD)

$\therefore$ कंस AXB $\cong$ कंस CYD

हे ट्रेसिंग पेपरच्या सहाय्याने पडताळून पाहा.

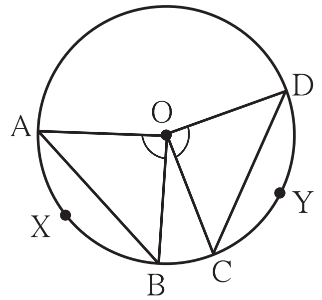


वर्तुळाची जीवा आणि संगत कंस यांचे गुणधर्म पुढील कृतींतून शोधा आणि लक्षात ठेवा.

कृती I :

(1) O केंद्र असलेले एक वर्तुळ काढा.

(2) वर्तुळात $\angle COD$ व $\angle AOB$ हे समान मापाचे कोन काढा. त्यावरून कंस AXB आणि AYB हे एकरूप कंस मिळतील.



(3) जीवा AB व जीवा CD काढा.

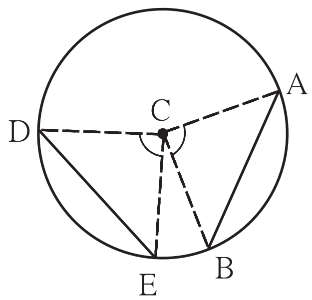
(4) कर्कटकाच्या साहाय्याने जीवा AB व जीवा CD यांची लांबी समान आहे याचा अनुभव घ्या.

कृती II :

(1) केंद्र C असलेले एक वर्तुळ काढा.

(2) या वर्तुळाच्या रेख AB आणि रेख DE या एकरूप जीवा काढा. रेख CA, रेख CB, रेख CD, रेख CE या त्रिज्या काढा.

(3) $\angle$ ACB व $\angle$ DCE एकरूप आहेत, हे दाखवा.



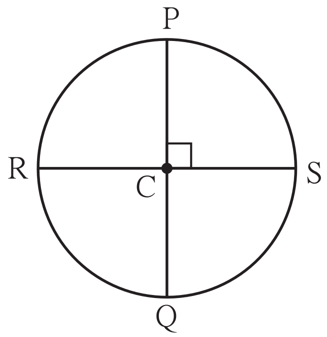
(4) त्यावरून कंस AB आणि कंस DE यांची मापे समान आहेत, म्हणजेच हे कंस एकरूप आहेत, हे दाखवा.

हे मला समजले.

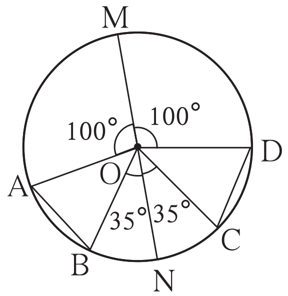
एका वर्तुळाच्या एकरूप कंसांशी निगडित असलेल्या जीवा एकरूप असतात. एका वर्तुळात दोन जीवा एकरूप असतील तर त्यांच्या संबंधित संगत लघुकंस व संगत विशालकंस एकरूप असतात.

सरावसंच 17.2

1. केंद्र C असलेल्या वर्तुळाचे रेख PQ व रेख RS हे व्यास काटकोनात छेदतात. तर (1) कंस PS आणि कंस SQ एकरूप का आहेत, हे सांगा. (2) कंस PS शी एकरूप असलेल्या इतर कंसांची नावे लिहा.



2. आकृतीत केंद्र O असलेल्या वर्तुळाचा रेख MN हा व्यास आहे. काही केंद्रीय कोनांची मापे दिली आहेत.
त्यावरून (1) $\angle$ AOB आणि $\angle$ COD यांची मापे काढा.
(2) कंस AB $\cong$ कंस CD हे दाखवा.
(3) जीवा AB $\cong$ जीवा CD हे दाखवा.



२२२

उत्तरसूची

सरावसंच 17.1

1. 6.5 सेमी 2. 7 सेमी 3. 15 सेमी 4. 8 सेमी

सरावसंच 17.2

1. (1) कारण कंसाशी संगत केंद्रीय कोन समान मापाचे म्हणजे प्रत्येकी 90° आहेत.
(2) कंस PS $\cong$ कंस PR $\cong$ कंस RQ

2. (1) $m\angle AOB = m\angle COD = 45°$
(2) कंस AB $\cong$ कंस CD कारण कंसांशी संगत केंद्रीय कोन समान मापाचे म्हणजे प्रत्येकी 45° आहेत.
(3) जीवा AB $\cong$ जीवा CD कारण एकरुप कंसाशी संगत जीवा एकरुप असतात.

संकीर्ण प्रश्नसंग्रह 2

1. पुढील प्रश्नांसाठी पर्यायी उत्तरे दिली आहे. त्यांपैकी योग्य पर्याय निवडा.

(1) एका वर्तुळाचे क्षेत्रफळ 1386 चौसेमी असेल तर त्याचा परीघ किती असेल ?

(A) 132 चौसेमी (B) 132 सेमी (C) 42 सेमी (D) 21 चौसेमी

(2) एका घनाची बाजू 4 मी आहे. ती दुप्पट केली तर त्याचे घनफळ किती पटीने वाढेल?

(A)दोन पटीने (B) तीन पटीने (C) चार पटीने (D)आठ पटीने

2. प्रणाली 100 मीटर धावण्याच्या शर्यतीचा सराव करत होती. त्यासाठी ती 100 मीटर अंतर 20 वेळा धावली. प्रत्येक वेळी त्यासाठी लागलेला वेळ सेकंदांत खालील प्रमाणे होता.

18 , 17 , 17 , 16 , 15 , 16 , 15 , 14 , 16 , 15 ,

15 , 17 , 15 , 16 , 15 , 17 , 16 , 15 , 14 , 15 धावण्यासाठी तिला लागलेल्या वेळांचा मध्य काढा.

3. Δ DEF आणि Δ LMN हे त्रिकोण EDF $\leftrightarrow$ LMN या एकास एक संगतीत एकरुप आहेत. तर या संगतीनुसार होणाऱ्या एकरुप बाजूंच्या आणि एकरुप कोनांच्या जोड्या लिहा.

4. एका यंत्राची किंमत 2,50,000 रुपये आहे. ती दरसाल 4% दराने घटते. तर यंत्र घेतल्यापासून तीन वर्षांनी त्या यंत्राची किंमत किती असेल ?

5. $\square$ ABCD मध्ये बाजू AB || बाजू DC, रेख AE $\perp$ बाजू DC जर l (AB) = 9 सेमी, l (AE) = 10 सेमी, A($\square$ ABCD) = 115 सेमी^{2}, तर l (DC) काढा.

6. वृत्तचिती आकाराच्या एका टाकीच्या तळाचा व्यास 1.75 मी आणि उंची 3.2 मी आहे. तर त्या टाकीची क्षमता किती लीटर आहे ? ($\pi = \frac{22}{7}$)

7. त्रिज्या 9.1 सेमी असलेल्या वर्तुळाच्या एका जीवेची लांबी 16.8 सेमी आहे. तर ती जीवा केंद्रापासून किती अंतरावर आहे ?

8. रोजगार हमी योजनेखाली A, B, C, D या गावांत सुरु असलेल्या कामांवरील पुरुष व स्त्री कामगारांची संख्या खालील सारणीत दिली आहे.

गाव	A	B	C	D
स्त्रिया	150	240	90	140
पुरुष	225	160	210	110

(1) ही माहिती विभाजित स्तंभालेखाने दाखवा.

(2) ही माहिती शतमान स्तंभालेखाने दाखवा.

9. पुढील समीकरणे सोडवा.

(1) $17(x+4) + 8(x+6) = 11(x+5) + 15(x+3)$

(2) $\frac{3y}{2} + \frac{y+4}{4} = 5 - \frac{y-2}{4}$ (3) $5(1-2x) = 9(1-x)$

10. पुढील कृती दिलेल्या पायऱ्यांनुसार करा.

(1) समभुज □ ABCD आणि त्याचा कर्ण AC काढा.

(2) एकरुप घटक समान चिन्हाने दाखवा.

(3) Δ ADC व Δ ABC कोणत्या संगतीत व कोणत्या कसोटीने एकरुप होतात ते लिहा.

(4) $\angle DCA \cong \angle BCA$, तसेच $\angle DAC \cong \angle BAC$ दाखवण्यासाठी कारण लिहा.

(5) वरील पायऱ्यांवरून लक्षात येणारा समभुज चौकोनाचा गुणधर्म लिहा.

11. एका शेतजमिनीचा आकार चौकोनी आहे. त्याच्या चार कोपऱ्यांना P, Q, R, S ही नावे देऊन घेतलेली मोजमापे पुढीलप्रमाणे आली.

l(PQ) = 170 मी, l(QR) = 250 मी, l(RS) = 100 मी,

l(PS) = 240 मी, l(PR) = 260 मी

या शेतजमिनीचे क्षेत्रफळ हेक्टरमध्ये काढा. (1 हेक्टर =10,000 चौमी)

12. एका ग्रंथालयातील एकूण पुस्तकांच्या 50% पुस्तके मराठीची आहेत. मराठीच्या पुस्तकांच्या $\frac{1}{3}$ पुस्तके इंग्रजीची आणि, इंग्रजीच्या पुस्तकांच्या 25% पुस्तके गणिताची आहेत. उरलेली 560 पुस्तके इतर विषयांची आहेत. तर त्या ग्रंथालयात एकूण किती पुस्तके आहेत?

13. $(2x+1)$ या द्विपदीने $(6x^3+11x^2-10x-7)$ या बहुपदीला भागा. भागाकार व बाकी लिहा.

उत्तरसूची

1. (1) B (2) D **2.** 15.7 सेकंद

3. बाजू ED ≅ बाजू LM, बाजू DF ≅ बाजू MN, बाजू EF ≅ बाजू LN,

$\angle E \cong \angle L$, $\angle D \cong \angle M$, $\angle F \cong \angle N$

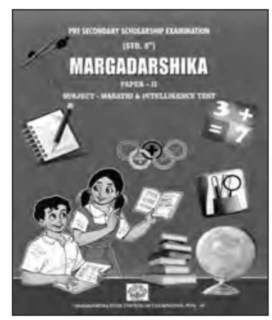
4. ₹ 2,21,184 **5.** 14 सेमी

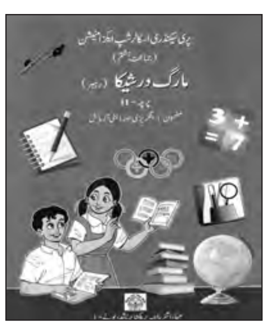
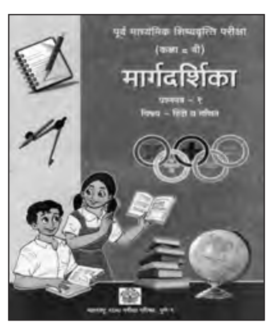
6. 7700 **7.** 3.5 सेमी

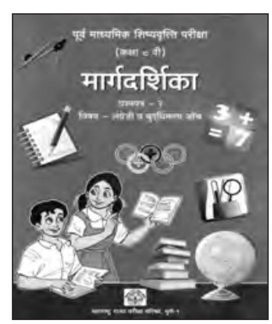
9. (1) $x = 16$, (2) $y = \frac{9}{4}$ (3) $x = -4$ **11.** 3.24 हेक्टर

12. 1920 **13.** भागाकार $3x^2 + 4x - 7$; बाकी 0

इयत्ता ५ वी, ८ वी शिष्यवृत्ती परीक्षा मार्गदर्शिका





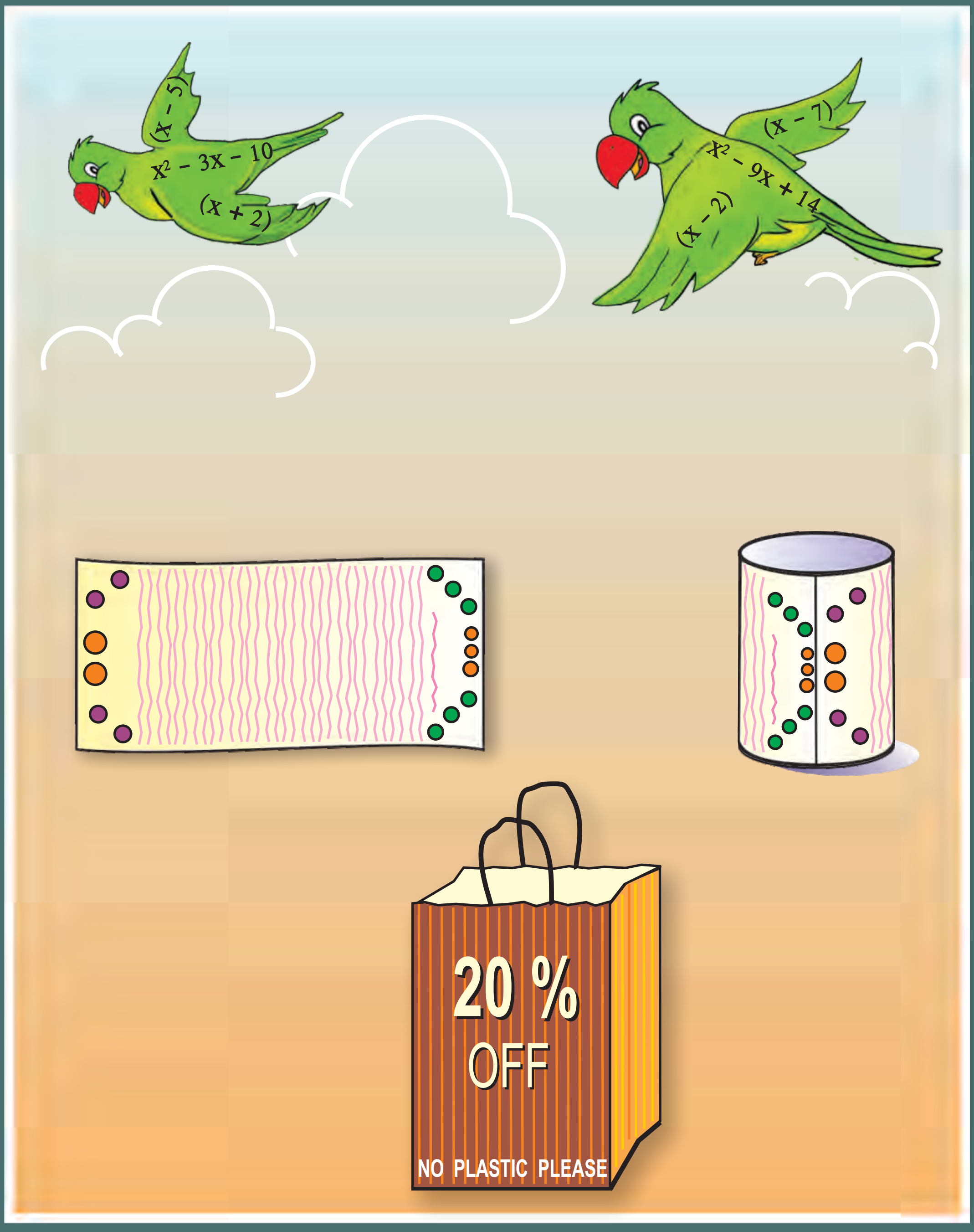
- मराठी, इंग्रजी, उर्दू, हिंदी माध्यमामध्ये उपलब्ध
- सरावासाठी विविध प्रश्न प्रकारांचा समावेश
- घटकनिहाय प्रश्नांचा समावेश
- नमुन्यादाखल उदाहरणांचे स्पष्टीकरण

पुस्तक मागणीसाठी www.ebalbharati.in, www.balbharati.in संकेत स्थळावर भेट द्या.

साहित्य पाठ्यपुस्तक मंडळाच्या विभागीय भांडारांमध्ये विक्रीसाठी उपलब्ध आहे.

ebalbharati

विभागीय भांडारे संपर्क क्रमांक : पुणे - ☎ २५६५९४६५, कोल्हापूर- ☎ २४६८५७६, मुंबई (गोरेगाव) - ☎ २८७७१८४२, पनवेल - ☎ २७४६२६४६५, नाशिक - ☎ २३९१५११, औरंगाबाद - ☎ २३३२१७१, नागपूर - ☎ २५४७७१६/२५२३०७८, लातूर - ☎ २२०९३०, अमरावती - ☎ २५३०९६५



महाराष्ट्र राज्य पाठ्यपुस्तक निर्मिती व अभ्यासक्रम संशोधन मंडळ,
पुणे–४११००४.

₹ ४८.००