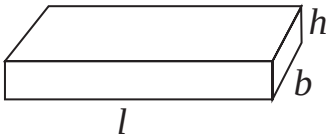
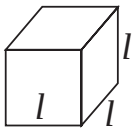
16 पृष्ठफळ व घनफळ

जरा आठवूया.

इष्टिकाचितीचे एकूण पृष्ठफळ = $2(l \times b + b \times h + l \times h)$



घनाचे एकूण पृष्ठफळ = $6l^2$



1 मी = 100 सेमी 1 चौमी = 100 × 100 चौसेमी = 10000 चौसेमी = 10^4 चौसेमी

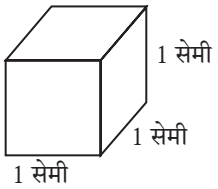
1 सेमी = 10 मिमी 1 चौसेमी= 10 × 10 चौमिमी = 100 चौमिमी = 10^2 चौमिमी

जाणून घेऊया.

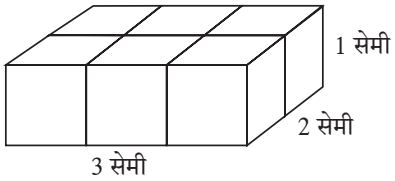
इष्टिकाचिती, घन आणि वृत्तचिती हे त्रिमितीय आकार म्हणजेच घनाकृती असतात. त्या घनाकृती अवकाशातील जागा व्यापतात. **घनाकृतीने अवकाशातील व्यापलेल्या जागेचे माप म्हणजे त्या घनाकृतीचे घनफळ होय.**

घनफळाचे प्रमाणित एकक (Standard unit of volume)

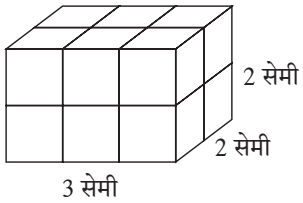
शेजारील आकृतीत. घनाची प्रत्येक बाजू 1 सेमी आहे. या घनाने व्यापलेली जागा हे, घनफळ मापनाचे एक प्रमाणित एकक आहे. ते 1 घनसेंटिमीटर, थोडक्यात 1 घसेमी किंवा 1 सेमी ^{3} असे लिहितात.



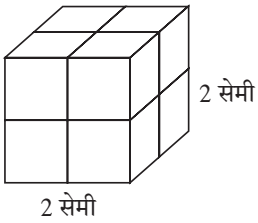
कृती I : प्रत्येक बाजू 1 सेमी असेल असे बरेच घन मिळवा. आकृतीत दाखवल्याप्रमाणे 6 घन एकमेकांना चिकटून ठेवा. एक इष्टिकाचिती तयार होईल. या इष्टिकाचितीची लांबी 3 सेमी, रुंदी 2 सेमी व उंची 1 सेमी आहे. 1 सेमी बाजू असलेले 6 घन मिळून ती इष्टिकाचिती तयार झाली आहे. या इष्टिकाचितीचे घनफळ 3 × 2 × 1 = 6 घसेमी आहे, हे लक्षात घ्या.



कृती II : शेजारील इष्टिकाचितीची लांबी 3 सेमी, रुंदी 2 सेमी व उंची 2 सेमी आहे. या इष्टिकाचितीमध्ये 1 घसेमी घनफळ असलेले 3 × 2 × 2 = 12 घन आहेत. म्हणून या इष्टिकाचितीचे घनफळ 12 घसेमी आहे. यावरून, इष्टिकाचितीचे घनफळ = लांबी × रुंदी × उंची हे सूत्र मिळते. लांबीसाठी l रुंदीसाठी b आणि उंचीसाठी h ही अक्षरे घेऊन. **इष्टिकाचितीचे घनफळ = $l \times b \times h$**



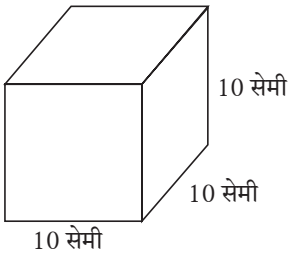
कृती III :



शेजारील आकृतीत 1 घसेमी घनफळ असलेले 8 घन एकमेकांना चिकटून ठेवले आहेत. त्यामुळे मिळणारी घनाकृती ही बाजू 2 सेमी असलेला घन आहे. या घनाचे घनफळ = $2 \times 2 \times 2 = 2^3$ हे लक्षात घ्या.

यावरून घनाची बाजू l असेल तर **घनाचे घनफळ = $l \times l \times l = l^3$ असते.**

द्रवाचे घनफळ : द्रवाचे आकारमान म्हणजेच द्रवाचे घनफळ होय. द्रवाचे आकारमान मोजण्यासाठी मिलिलीटर आणि लीटर ही एकके वापरतात हे आपल्याला माहीत आहे.



सोबतच्या आकृतीत 10 सेमी बाजू असलेला एक पोकळ घन आहे. याचे घनफळ $10 \times 10 \times 10 = 1000$ घसेमी आहे. हा घन पाण्याने भरला तर त्यातील पाण्याचे आकारमान म्हणजेच घनफळ 1000 घसेमी असेल. या आकारमानालाच 1 लीटर असे म्हणतात.

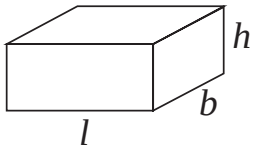
$\therefore$ 1 लीटर = 1000 मिली, हे आपल्याला माहीत आहे.

$\therefore$ 1 लीटर = 1000 घसेमी = 1000 मिली, यावरून 1 घसेमी = 1 मिली हेही लक्षात घ्या.

म्हणजेच 1 सेमी बाजू असलेल्या घनामध्ये मावणाऱ्या पाण्याचे आकारमान 1 मिली असते.

सोडवलेली उदाहरणे

उदा. (1) इष्टिकाचिती आकाराच्या, मासे ठेवण्याच्या काचेच्या पेटीची लांबी 1 मीटर, रुंदी 40 सेमी व उंची 50 सेमी आहे तर त्या पेटीत किती लीटर पाणी मावेल ते काढा.



उकल : पेटीमध्ये मावणाऱ्या पाण्याचे घनफळ त्या पेटीच्या घनफळाएवढे असेल.

पेटीची लांबी 1 मीटर = 100 सेमी, रुंदी 40 सेमी व उंची 50 सेमी आहे.

पेटीचे घनफळ = $l \times b \times h = 100 \times 40 \times 50$ = 200000 घसेमी,

200000 घसेमी = $\frac{200000}{1000}$ = 200 ली. ($\because$ 1000 घसेमी = 1 ली)

$\therefore$ पेटीमध्ये 200 लीटर पाणी मावेल.

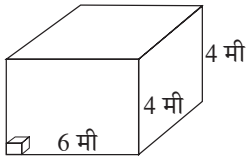
उदा. (2) एका इष्टिकाचिती आकाराच्या गोदामाची लांबी 6 मी, रुंदी 4 मी आणि उंची 4 मी आहे. या गोदामात 40 सेमी बाजू असलेली घनाकृती खोकी जास्तीत जास्त किती मावतील ?

उकल : रचलेल्या खोक्यांनी गोदाम पूर्ण भरेल तेव्हा सर्व खोक्यांचे एकूण घनफळ हे गोदामाच्या घनफळाएवढे असेल. उदाहरण सोडवण्यासाठी पुढील पायऱ्यांचा विचार करू.

(1) गोदामाचे घनफळ काढू.

(2) एका खोक्याचे घनफळ काढू .

(3) खोक्यांची संख्या काढू.



पायरी (1) : गोदामाची लांबी 6 मी = 600 सेमी, रुंदी = उंची = 4 मी = 400 सेमी

गोदामाचे घनफळ = लांबी × रुंदी × उंची = 600 × 400 × 400 घसेमी

पायरी (2) : एका खोक्याचे घनफळ = बाजू^{3} = $(40)^3$ = 40 × 40 × 40 घसेमी

पायरी (3) : खोक्यांची संख्या = $\dfrac{\text{गोदामाचे घनफळ}}{\text{एका खोक्याचे घनफळ}} = \dfrac{600 \times 400 \times 400}{40 \times 40 \times 40} = 1500$

∴ त्या गोदामात जास्तीत जास्त 1500 खोकी मावतील.

उदा. (3) बर्फी तयार करण्यासाठी खवा व साखर यांचे वितळलेले 5 लीटर मिश्रण इष्टिकाचिती आकाराच्या ट्रेमध्ये ओतल्यास तो काठोकाठ भरतो. ट्रेची रुंदी 40 सेमी व उंची 2.5 सेमी असल्यास त्याची लांबी काढा.

उकल: उदाहरण सोडवण्यासाठी पुढील चौकटींत योग्य संख्या भरा.

पायरी (1) : ट्रेची धारकता = 5 लीटर = ☐ घनसेमी (∵ 1 ली = 1000 घसेमी)

पायरी (2) : मिश्रणाचे घनफळ = ☐ घनसेमी

पायरी (3) : आयताकृती ट्रेचे घनफळ = मिश्रणाचे घनफळ

लांबी × रुंदी × उंची = ☐ घनसेमी

लांबी × 40 × 2.5 = ☐ घनसेमी, ∴ ट्रे ची लांबी = $\dfrac{\square}{100}$ = 50 सेमी

हे मला समजले.

- इष्टिकाचितीचे घनफळ = लांबी × रुंदी × उंची = $l \times b \times h$
- घनाचे घनफळ = बाजू^{3} = l^3

सरावसंच 16.1

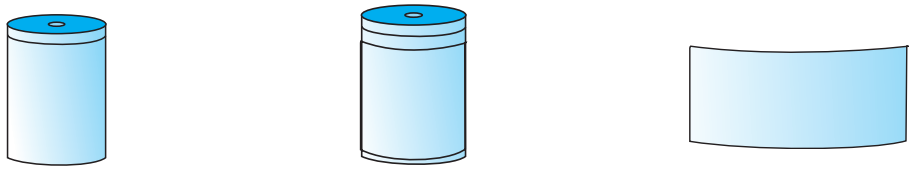
1. एका खोक्याची लांबी 20 सेमी, रुंदी 10.5 सेमी व उंची 8 सेमी असल्यास त्याचे घनफळ काढा.
2. एका इष्टिकाचिती आकाराच्या साबणाच्या वडीचे घनफळ 150 घसेमी आहे. तिची लांबी 10 सेमी व रुंदी 5 सेमी असेल तर तिची जाडी किती असेल?
3. 6 मीटर लांब, 2.5 मी उंच व 0.5 मी रुंद अशी भिंत बांधायची आहे यासाठी 25 सेमी लांबी, 15 सेमी रुंदी व 10 सेमी उंचीच्या किती विटा लागतील ?

4. पावसाचे पाणी साठवण्यासाठी एका वसाहतीत 10 मी लांब, 6 मी रुंद व 3 मी खोल अशा मापांची टाकी बांधून घेतली आहे. तर त्या टाकीची धारकता किती आहे? टाकीत किती लीटर पाणी मावेल ?

जाणून घेऊया.

वृत्तचितीचे पृष्ठफळ (Surface area of a cylinder)

वृत्तचिती आकाराचा डबा घ्या. त्याच्या उंचीएवढी रुंदी असलेला एक आयताकार कागद घ्या. तो डब्याभोवती वक्रपृष्ठभाग नेमका झाकला जाईल असा गुंडाळा. कागदाचा उरलेला भाग कापून वेगळा करा.



वृत्तचिती कागद गुंडाळला वर्तुळाचा परीघ = लांबी

गुंडाळलेला कागद उलगडा. तो आयताकार असल्याचे दिसेल. या आयताचे क्षेत्रफळ, म्हणजे वृत्तचितीच्या वक्राकार भागाचे क्षेत्रफळ म्हणजेच वृत्तचितीचे वक्रपृष्ठफळ.

आयताची लांबी म्हणजे वर्तुळाच्या तळाचा परीघ व आयताची रुंदी म्हणजे वृत्तचितीची उंची होय.

वृत्तचितीचे वक्रपृष्ठफळ = आयताचे क्षेत्रफळ = लांबी × रुंदी

= वृत्तचितीच्या तळाचा परीघ × वृत्तचितीची उंची

वृत्तचितीचे वक्रपृष्ठफळ $= 2\pi r \times h = 2\,\pi rh$

बंदिस्त वृत्तचितीच्या तळाचे पृष्ठ आणि वरचे पृष्ठ वर्तुळाकार असते.

∴ बंदिस्त वृत्तचितीचे एकूण पृष्ठफळ = व्रकपृष्ठफळ + वरच्या पृष्ठाचे क्षेत्रफळ + तळाचे क्षेत्रफळ

∴ वृत्तचितीचे एकूण पृष्ठफळ = वृत्तचितीचे वक्रपृष्ठफळ + 2 × वर्तुळाचे क्षेत्रफळ

$$= 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi r\,(h + r)$$

सोडवलेली उदाहरणे

उदा. (1) एका वृत्तचिती आकाराच्या पाण्याच्या टाकीचा व्यास 1 मीटर आणि उंची 2 मीटर आहे. टाकीला झाकण लावले आहे. झाकणासह टाकीला आतून व बाहेरून रंग लावायचा आहे. रंगाचा खर्च 80 रुपये प्रतिचौमी आहे. तर टाकी रंगवण्यासाठी किती खर्च येईल? ($\pi = 3.14$)

उकल : टाकीला आतून व बाहेरून रंग लावायचा आहे. म्हणजे रंग लावण्याच्या भागाचे क्षेत्रफळ हे टाकीच्या एकूण बाह्यपृष्ठफळाच्या दुप्पट आहे.

वृत्तचितीच्या तळाचा व्यास 1 मीटर

$\therefore$ त्रिज्या 0.5 मी आणि वृत्तचितीची उंची 2 मी आहे.

$\therefore$ वृत्तचितीचे एकूण पृष्ठफळ $= 2\pi r\,(h + r) = 2 \times 3.14 \times 0.5\,(2.0 + 0.5)$

$= 2 \times 3.14 \times 0.5 \times 2.5 = 7.85$ चौमी

$\therefore$ रंग देण्याच्या भागाचे क्षेत्रफळ $= 2 \times 7.85 = 15.70$ चौमी

$\therefore$ टाकीला रंग देण्याचा एकूण खर्च $= 15.70 \times 80 = 1256$ रुपये.

उदा. (2) जस्ताच्या एका आयताकार पत्र्याची लांबी 3.3 मी व रुंदी 3 मी आहे. या पत्र्यापासून 3.5 सेमी त्रिज्येच्या आणि 30 सेमी लांबीच्या जास्तीत जास्त किती नळ्या तयार करता येतील?

उकल: आयताकार पत्र्याचे क्षेत्रफळ = लांबी $\times$ रुंदी

$= 3.3 \times 3$ चौमी $= 330 \times 300$ चौसेमी

एका नळीची लांबी म्हणजेच वृत्तचितीची उंची $= h = 30$ सेमी

नळीची त्रिज्या = वृत्तचितीच्या तळाची त्रिज्या $= r = 3.5$ सेमी,

एक नळी तयार करण्यासाठी लागलेला पत्रा = एका नळीचे वक्रपृष्ठफळ

$$= 2\pi rh = 2 \times \frac{22}{7} \times \frac{35}{10} \times \frac{30}{1}$$

$$= 2 \times 22 \times 15 \quad = 660 \text{ चौसेमी.}$$

$$\text{पत्र्यापासून तयार झालेल्या नळ्या} = \frac{\text{पत्र्याचे क्षेत्रफळ}}{\text{एका नळीचे वक्रपृष्ठफळ}} = \frac{330 \times 300}{660} = 150$$

सरावसंच 16.2

1. खालील प्रत्येक उदाहरणात वृत्तचितीच्या पायाची त्रिज्या r व उंची h दिली आहे; त्यावरून प्रत्येक वृत्तचितीचे वक्रपृष्ठफळ व एकूण पृष्ठफळ काढा.

   (1) $r = 7$ सेमी, $h = 10$ सेमी (2) $r = 1.4$ सेमी, $h = 2.1$ सेमी (3) $r = 2.5$ सेमी, $h = 7$ सेमी

   (4) $r = 70$ सेमी, $h = 1.4$ सेमी (5) $r = 4.2$ सेमी, $h = 14$ सेमी

2. दोन्ही बाजू बंद असलेल्या, 50 सेमी व्यास व 45 सेमी उंचीच्या पिंपाचे एकूण पृष्ठफळ काढा. ($\pi = 3.14$)

3. एका वृत्तचितीचे वक्रपृष्ठफळ 660 चौसेमी व उंची 21 सेमी आहे, तर तिची त्रिज्या व तळाचे क्षेत्रफळ काढा.

4. एका वृत्तचिती आकाराच्या पत्र्याच्या डब्याचा व्यास 28 सेमी आहे व त्याची उंची 20 सेमी आहे. तो एका बाजूने उघडा आहे तर त्यासाठी लागलेल्या पत्र्याचे क्षेत्रफळ काढा. त्या डब्यास 2 सेमी उंचीचे झाकण तयार करण्यासाठी अंदाजे किती चौसेमी पत्रा लागेल ते काढा.

जाणून घेऊया.

वृत्तचितीचे घनफळ (Volume of a cylinder)

वृत्तचिती आकाराच्या पाण्याच्या टाकीत किती पाणी मावते हे काढण्यासाठी त्या टाकीचे घनफळ काढावे लागते.

कोणत्याही चितीचे घनफळ = तळाचे क्षेत्रफळ × उंची, हे सामान्य सूत्र आहे.

वृत्तचितीचा तळ हा वर्तुळाकार असतो. वृत्तचितीचे घनफळ = $\pi r^2 h$

सोडवलेली उदाहरणे

उदा (1) एका वृत्तचितीच्या तळाची त्रिज्या 5 सेमी असून तिची उंची 10 सेमी आहे. तर त्या वृत्तचितीचे घनफळ काढा. (π = 3.14)

उकल : वृत्तचितीच्या तळाची त्रिज्या r = 5 सेमी आणि उंची h = 10 सेमी

वृत्तचितीचे घनफळ = $\pi r^2 h = 3.14 \times 5^2 \times 10 = 3.14 \times 25 \times 10$ = 785 घसेमी.

उदा. (2) एका वृत्तचिती आकाराच्या पिंपाची उंची 56 सेमी आहे. त्या पिंपाची धारकता 70.4 लीटर आहे. तर त्या पिंपाची त्रिज्या काढा. ($\pi = \frac{22}{7}$)

उकल : वृत्तचिती आकाराच्या पिंपाच्या तळाची त्रिज्या = r मानू

पिंपाची धारकता = पिंपाचे घनफळ = 70.4 × 1000 घसेमी = 704 × 100 घसेमी

1 ली = 1000 मिली ∴ 70.4 ली = 70400 मिली

∴ पिंपाचे घनफळ = $\pi r^2 h$ = 70400

$$\therefore r^2 = \frac{70400}{\pi h} = \frac{70400 \times 7}{22 \times 56} = \frac{70400}{22 \times 8} = \frac{8800}{22} = 400$$

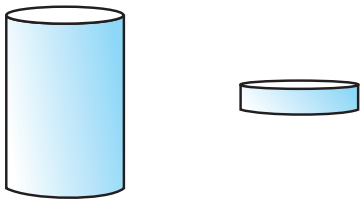
∴ r = 20,

∴ पिंपाची त्रिज्या 20 सेमी आहे.

उदा. (3) तांब्याच्या भरीव वृत्तचितीच्या तळाची त्रिज्या 4.2 सेमी असून तिची उंची 16 सेमी आहे. ती वितळवून 1.4 सेमी व्यास व 0.2 सेमी जाडी असलेल्या किती चकत्या तयार करता येतील?

उकल : वृत्तचितीच्या तळाची त्रिज्या = R = 4.2 सेमी उंची = H = 16 सेमी

वृत्तचितीचे घनफळ = $\pi R^2 H = \pi \times 4.2 \times 4.2 \times 16.0$



चकतीच्या तळाची त्रिज्या = $1.4 \div 2 = 0.7$ सेमी

चकतीची जाडी = वृत्तचितीची उंची = 0.2 सेमी

चकतीचे घनफळ = $\pi r^2 h = \pi \times 0.7 \times 0.7 \times 0.2$

वितळलेल्या वृत्तचितीपासून n चकत्या तयार होतील, असे मानू

$\therefore$ $n \times$ एका चकतीचे घनफळ = वृत्तचितीचे घनफळ

$$n = \frac{\text{वृत्तचितीचे घनफळ}}{\text{एका चकतीचे घनफळ}} = \frac{\pi R^2 H}{\pi r^2 h} = \frac{R^2 H}{r^2 h} = \frac{4.2 \times 4.2 \times 16}{0.7 \times 0.7 \times 0.2}$$

$$= \frac{42 \times 42 \times 160}{7 \times 7 \times 2} = 6 \times 6 \times 80 = 2880$$

$\therefore$ 2880 चकत्या तयार होतील.

हे मला समजले.

वृत्तचितीचे वक्रपृष्ठफळ = $2\pi rh$ वृत्तचितीचे एकूण पृष्ठफळ = $2\pi r(h + r)$

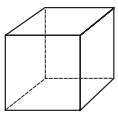
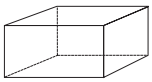
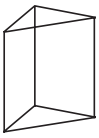
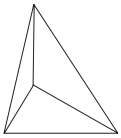
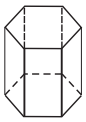
वृत्तचितीचे घनफळ = $\pi r^2 h$

सरावसंच 16.3

1. खाली वृत्तचितीच्या तळाची त्रिज्या (r) व उंची (h) दिली आहे त्यावरून वृत्तचितीचे घनफळ काढा.
   (1) r =10.5 सेमी, h = 8 सेमी (2) r = 2.5 मी, h = 7 मी
   (3) r = 4.2 सेमी, h = 5 सेमी (4) r = 5.6 सेमी, h = 5 सेमी
2. लांबी 90 सेमी व व्यास 1.4 सेमी असेल अशी लोखंडी सळई तयार करण्यासाठी लागणाऱ्या लोखंडाचे घनफळ काढा.
3. वृत्तचिती आकाराच्या एका हौदाचा आतील व्यास 1.6 मी असून त्याची खोली 0.7 मी आहे, तर त्या हौदात जास्तीत जास्त किती पाणी मावेल ?
4. एका वृत्तचितीच्या पायाचा परीघ 132 सेमी असून त्याची उंची 25 सेमी आहे, तर त्या वृत्तचितीचे घनफळ किती?

ऑयलरचे सूत्र

पृष्ठे (F), शिरोबिंदू (V) आणि कडा (E) असलेल्या घनाकृतींसंबंधी एक मनोरंजक सूत्र खूप लहान वयात लिओनार्ड ऑयलर या थोर गणितीने शोधले. खालील सारणीतील घनाकृतींच्या कडा, कोपरे व पृष्ठे मोजून सारणी पूर्ण करा आणि V + F = E + 2 हे ऑयलरचे सूत्र पडताळून पाहा.

नाव	घन	इष्टिकाचिती	त्रिकोणीचिती	त्रिकोणी सूची	पंचकोनी सूची	षटकोनी चिती
आकार						
पृष्ठे (F)	6					8
शिरोबिंदू (V)	8					12
कडा (E)		12			10	

उत्तरसूची

सरावसंच 16.1

1. 1680 घसेमी **2.** 3 सेमी **3.** 2000 विटा **4.** 1,80,000 ली.

सरावसंच 16.2

1. (1) 440 चौसेमी, 748 चौसेमी (2) 18.48 चौसेमी, 30.80 चौसेमी

(3) 110 चौसेमी, 149.29 चौसेमी (4) 616 चौसेमी, 31416 चौसेमी

(5) 369.60 चौसेमी, 480.48 चौसेमी

2. 10,990 चौसेमी **3.** 5 सेमी, 78.50 चौसेमी

4. 2376 चौसेमी, झाकणासाठी अंदाजे 792 चौसेमी पत्रा लागेल.

सरावसंच 16.3

1. (1) 2772 घसेमी (2) 137.5 घमी (3) 277.2 घसेमी (4) 492.8 घसेमी

2. 138.6 घसेमी **3.** 1408 ली **4.** 34650 घसेमी