12 एकचल समीकरणे

जरा आठवूया.

मागील इयत्तांमध्ये आपण एका चलातील समीकरणांचा अभ्यास केला आहे.

- समीकरणात दिलेल्या चलासाठी जी किंमत ठेवल्यामुळे समीकरणाच्या दोन्ही बाजू समान होतात ती किंमत म्हणजे त्या **समीकरणाची उकल** असते.
- समीकरण सोडवणे म्हणजे त्याची उकल शोधणे होय.
- समीकरणाच्या दोन्ही बाजूंवर समान क्रिया केली तर मिळणारे समीकरण सत्य असते. या गुणधर्माचा वापर करून आपण नवीन सोपी समीकरणे तयार करून दिलेले समीकरण सोडवतो.

समीकरणाच्या दोन्ही बाजूंवर करण्याच्या क्रिया.

(i) दोन्ही बाजूंमध्ये समान संख्या मिळवणे. (ii) दोन्ही बाजूंतून समान संख्या वजा करणे.

(iii) दोन्ही बाजूंना समान संख्येने गुणणे. (iv) दोन्ही बाजूंना शून्येतर समान संख्येने भागणे.

खालील समीकरणे सोडवण्यासाठी रिकाम्या जागा भरा.

उदा. (1) $x + 4 = 9$

$x + 4 - \square = 9 - \square$

$\therefore\ x = \square$

उदा. (2) $x - 2 = 7$

$x - 2 + \square = 7 + \square$

$\therefore\ x = \square$

उदा. (3) $\frac{x}{3} = 4$

$\frac{x}{3} \times \square = 4 \times \square$

$\therefore\ x = \square$

उदा. (4) $4x = 24$

$\frac{4x}{\square} = \frac{24}{\square}$

$\therefore\ x = \square$

जाणून घेऊया.

एकचल समीकरणांची उकल (Solution of equations in one variable)

कधी कधी समीकरण सोडवण्यासाठी त्यावर एकापेक्षा जास्त क्रिया कराव्या लागतात. अशा समीकरणाच्या दोन्ही बाजूंवर क्रिया करून उकल काढण्याचे काही प्रकार पाहू.

उदा. (1) पुढील समीकरणे सोडवा.

(i) $2(x - 3) = \frac{3}{5}(x + 4)$

उकल : दोन्ही बाजूंना 5 ने गुणून

$10(x - 3) = 3(x + 4)$

$\therefore\ 10x - 30 = 3x + 12$

दोन्ही बाजूंत 30 मिळवू.

$\therefore\ 10x - 30 + 30 = 3x + 12 + 30$

$10x = 3x + 42$

दोन्ही बाजूंतून $3x$ वजा करू

$\therefore\ 10x - 3x = 3x + 42 - 3x$

$\therefore\ 7x = 42$

दोन्ही बाजूंना 7 ने भागून

$\frac{7x}{7} = \frac{42}{7}$

$\therefore\ x = 6$

(ii) $9x - 4 = 6x + 29$

उकल : दोन्ही बाजूंत 4 मिळवू.

$9x - 4 + 4 = 6x + 29 + 4$

$\therefore\ 9x = 6x + 33$

दोन्ही बाजूंतून $6x$ वजा करू.

$\therefore 9x - 6x = 6x + 33 - 6x$

$\therefore\ 3x = 33$

दोन्ही बाजूंना 3 ने भागू.

$\therefore\ \frac{3x}{3} = \frac{33}{3}$

$\therefore\ x = 11$

(iii) $\frac{2}{3} + 5a = 4$

उकल : **रीत I**

$\frac{2}{3} + 5a = 4$

प्रत्येक पदाला 3 ने गुणू.

$3 \times \frac{2}{3} + 3 \times 5a = 4 \times 3$

$\therefore\ 2 + 15a = 12$

$\therefore\ 15a = 12 - 2$

$\therefore\ 15a = 10$

$\therefore\ a = \frac{10}{15}$

$\therefore\ a = \frac{2}{3}$

रीत II

दोन्ही बाजूंतून $\frac{2}{3}$ वजा करून,

$\frac{2}{3} + 5a - \frac{2}{3} = 4 - \frac{2}{3}$

$\therefore\ 5a = \frac{12-2}{3}$

$\therefore\ 5a = \frac{10}{3}$

दोन्ही बाजूंना 5 ने भागून,

$\frac{5a}{5} = \frac{10}{3} \times \frac{1}{5}$

$\therefore\ a = \frac{2}{3}$

जर A, B, C, D या शून्येतर राशींसाठी $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ तर दोन्ही बाजूंना B × D ने गुणून AD = BC हे समीकरण मिळते. याचा उपयोग करून उदाहरणे सोडवू.

(iv) $\frac{(x-7)}{(x-2)} = \frac{5}{4}$

उकल : $\frac{(x-7)}{(x-2)} = \frac{5}{4}$

$\therefore\ 4(x - 7) = 5(x - 2)$

$\therefore\ 4x - 28 = 5x - 10$

$\therefore\ 4x - 5x = -10 + 28$

$\therefore\ -x = 18 \qquad \therefore\ x = -18$

(v) $\frac{8m-1}{2m+3} = 2$

उकल : $\frac{8m-1}{2m+3} = \frac{2}{1}$

$1(8m - 1) = 2(2m + 3)$

$\therefore\ 8m - 1 = 4m + 6$

$\therefore\ 8m - 4m = 6 + 1$

$\therefore\ 4m = 7 \qquad \therefore\ m = \frac{7}{4}$

सरावसंच 12.1

1. प्रत्येक समीकरणानंतर चलासाठी दिलेल्या किमती, त्या समीकरणाच्या उकली आहेत का ते ठरवा.

(1) $x - 4 = 3$, $x = -1, 7, -7$ (2) $9m = 81$, $m = 3, 9, -3$

(3) $2a + 4 = 0$, $a = 2, -2, 1$ (4) $3 - y = 4$, $y = -1, 1, 2$

2. खालील समीकरणे सोडवा.

(1) $17p - 2 = 49$ (2) $2m + 7 = 9$ (3) $3x + 12 = 2x - 4$

(4) $5(x - 3) = 3(x + 2)$ (5) $\frac{9x}{8} + 1 = 10$ (6) $\frac{y}{7} + \frac{y-4}{3} = 2$

(7) $13x - 5 = \frac{3}{2}$ (8) $3(y + 8) = 10(y - 4) + 8$ (9) $\frac{x-9}{x-5} = \frac{5}{7}$

(10) $\frac{y-4}{3} + 3y = 4$ (11) $\frac{b+(b+1)+(b+2)}{4} = 21$

जाणून घेऊया.

शाब्दिक उदाहरणे (Word Problems)

शाब्दिक उदाहरणातील दिलेल्या माहितीसाठी चल वापरून ती माहिती बैजिक राशींत कशी लिहितात ते पाहू.

माझे वय x वर्षे आहे.

- माझ्या बाबांचे वय माझ्या वयापेक्षा 32 वर्षे जास्त आहे. ∴ बाबांचे वय ☐ वर्षे
- माझ्या आजीचे वय माझ्या वयाच्या चौपटीपेक्षा 10 वर्षे जास्त आहे. ∴ आजीचे वय $(4x + 10)$ वर्षे
- माझ्या बहिणीचे वय माझ्यापेक्षा 4 वर्षांनी कमी आहे. ∴ बहिणीचे वय ☐ वर्षे
- माझ्या मित्राचे वय माझ्या वयाच्या निम्म्यापेक्षा 5 वर्षे जास्त आहे. ∴ मित्राचे वय ☐ वर्षे
- माझ्या आईचे वय माझ्या वयाच्या तीनपट आहे. ∴ आईचे वय ☐ वर्षे

आधी दिलेल्या माहितीनुसार माझ्या मित्राचे वय जर 12 वर्षे असेल तर माझे वय किती ?

माझे वय = x वर्षे $\quad \therefore$ मित्राचे वय = $\frac{x}{2} + 5$

$\frac{x}{2} + 5 = 12$ ..... (दिले आहे)

$\therefore x + 10 = 24$ ..... (प्रत्येक पदाला 2 ने गुणून)

$\therefore x = 24 - 10$

$\therefore x = 14$

$\therefore$ माझे वय 14 वर्षे आहे. यावरून वरील माहितीतील इतर व्यक्तींची वये काढा.

कृती : चौकटींत योग्य संख्या लिहा.

रुंदीच्या तिप्पट लांबी

मी आयत आहे. माझी परिमिती 40 सेमी

रुंदी x

आयताची परिमिती = 40

$2(\square\, x + \square\, x) = 40$

$2 \times \square\, x = 40$

$\square\, x = 40$

$x = \square$

$\therefore$ आयताची रुंदी = $\square$ सेमी व आयताची लांबी = $\square$ सेमी

सोडवलेली उदाहरणे

उदा. (1) जोसेफचे वजन त्याच्या लहान भावाच्या वजनाच्या दुप्पट आहे. दोघांचे मिळून वजन 63 किग्रॅ आहे, तर जोसेफचे वजन काढा.

उकल : जोसेफच्या लहान भावाचे वजन x किग्रॅ मानू.

$\therefore$ जोसेफचे वजन त्याच्या भावाच्या वजनाच्या दुप्पट = $2x$

$\therefore$ दिलेल्या माहितीवरून $x + 2x = 63$

$\therefore 3x = 63 \qquad \therefore x = 21$

$\therefore$ जोसेफचे वजन = $2x = 2 \times 21 = 42$ किग्रॅ.

उदा. (2) एका अपूर्णांकाचा अंश त्याच्या छेदापेक्षा 5 ने मोठा आहे. अंश व छेद यांमध्ये प्रत्येकी 4 मिळवल्यास $\frac{6}{5}$ हा अपूर्णांक मिळतो, तर तो अपूर्णांक काढा.

उकल : अपूर्णांकाचा छेद x मानू.

$\therefore$ त्या अपूर्णांकाचा अंश, छेदापेक्षा 5 ने जास्त म्हणजे $x + 5$ आहे.

$\therefore$ तो अपूर्णांक $\frac{x+5}{x}$ आहे.

त्याच्या अंशात व छेदात 4 मिळवल्यास नवीन अपूर्णांक $\frac{6}{5}$ होईल.

$\therefore \quad \frac{x+5+4}{x+4} = \frac{6}{5}$

$\therefore \quad \frac{x+9}{x+4} = \frac{6}{5}$

$\therefore \; 5(x + 9) = 6(x + 4)$

$\therefore \; 5x + 45 = 6x + 24$

$\therefore \; 45 - 24 = 6x - 5x$

$\therefore \quad 21 = x$

$\therefore$ अपूर्णांकाचा छेद 21, अंश = 21 + 5 = 26

$\therefore$ तो अपूर्णांक = $\frac{26}{21}$

उदा. (3) रत्नाजवळची रक्कम रफिकजवळच्या रकमेच्या तिपटीपेक्षा 200 रुपयांनी जास्त आहे. रत्नाजवळचे 300 रुपये घेऊन रफिकला दिले, तर रत्नाजवळची रक्कम रफिकजवळच्या रकमेच्या $\frac{7}{4}$ पट होते; तर रफिकजवळची मूळ रक्कम किती होती ? मूळ रक्कम काढण्यासाठी खालील कृती पूर्ण करा.

उकल : रत्नाजवळची रक्कम, रफिकजवळ असलेल्या रकमेच्या तिपटीपेक्षा 200 रुपये जास्त आहे.

रफिकजवळची रक्कम x रुपये मानू. $\therefore$ रत्नाजवळची रक्कम $\square$ रुपये

$\therefore$ रत्नाकडचे 300 रुपये घेऊन रफिकला दिले, म्हणून रत्नाजवळ उरले $\square$ रुपये

$\therefore$ रफिकजवळ झाले x + 300 रु.

रत्नाजवळची नवीन रक्कम ही रफिकजवळच्या रकमेच्या $\frac{7}{4}$ पट झाली.

$\frac{\text{रत्नाजवळची रक्कम}}{\text{रफिकजवळची रक्कम}} = \frac{\square}{\square}$

$\frac{3x-100}{x+300} = \frac{\square}{\square}$

$4\,\square = 7\,\square$

$12x - 400 = 7x + 2100$

$12x - 7x = \square$

$5x = \square$

$x = \square$

$\therefore$ रफिकजवळ $\square$ रुपये होते.

सरावसंच 12.2

1. आईचे वय मुलाच्या वयापेक्षा 25 वर्षांनी जास्त आहे. 8 वर्षांनंतर मुलाच्या वयाचे आईच्या वयाशी गुणोत्तर $\frac{4}{9}$ होईल तर मुलाचे वय काढा.

2. एका अपूर्णांकाचा छेद अंशापेक्षा 12 ने मोठा आहे. त्याच्या अंशातून 2 वजा करून व छेदात 7 मिळवून तयार झालेला अपूर्णांक $\frac{1}{2}$ शी सममूल्य होतो तर तो अपूर्णांक कोणता ?

3. पितळ या संमिश्रामध्ये तांबे व जस्त यांचे प्रमाण 13:7 असते तर 700 ग्रॅम वजनाच्या पितळेच्या भांड्यात जस्त किती असेल ?

4★. तीन क्रमागत पूर्ण संख्यांची बेरीज 45 पेक्षा जास्त पण 54 पेक्षा कमी आहे तर त्या संख्या काढा.

5. दोन अंकी संख्येतील दशक स्थानचा अंक हा एकक स्थानच्या अंकाच्या दुप्पट आहे. अंकांची अदलाबदल करून येणारी संख्या व मूळ दिलेली संख्या यांची बेरीज 66 आहे, तर दिलेली संख्या कोणती ?

6★. एका नाट्यगृहावर नाटकाची 200 रुपये दराची व 100 रुपये दराची काही तिकिटे विकली गेली. 200 रुपये दराच्या तिकिटांची संख्या 100 रुपयांच्या तिकिटांच्या संख्येपेक्षा 20 तिकिटे जास्त खपली होती. दोन्ही प्रकारच्या तिकिट विक्रीतून नाट्यगृहाला 37000 रुपये मिळाले तर 100 रुपयांची किती तिकिटे विकली गेली ?

7. तीन क्रमागत नैसर्गिक संख्यांपैकी सर्वांत लहान संख्येची पाचपट सर्वांत मोठ्या संख्येच्या चौपटीपेक्षा 9 ने अधिक आहे तर त्या संख्या कोणत्या ?

8. राजूने एक सायकल 8% नफ्याने अमितला विकली. अमितने 54 रुपये खर्च करून ती दुरुस्त करून घेतली. ती सायकल त्याने निखिलला 1134 रुपयांना विकली. तेव्हा अमितला नफा किंवा तोटा झाला नाही. तर राजूने ती सायकल किती रुपयांना खरेदी केली होती ?

9. एका क्रिकेट खेळाडूने एका सामन्यात 180 धावा काढल्या. दुसऱ्या सामन्यात 257 धावा काढल्या. तिसऱ्या सामन्यात त्याने किती धावा काढल्या तर त्याच्या सामन्यातील धावांची सरासरी 230 होईल ?

10. सुधीरचे वय विरूच्या वयाच्या तिपटीपेक्षा 5 ने जास्त आहे. अनिलचे वय सुधीरच्या वयाच्या निमपट आहे. सुधीरचे वय व विरूचे वय यांच्या वयांची बेरीज व अनिलच्या वयाची तिप्पट यांचे गुणोत्तर 5:6 आहे तर विरूचे वय काढा.

उत्तरसूची

सरावसंच 12.1 1. समीकरणाची उकल असलेल्या किमती. (1) $x = 7$ (2) $m = 9$ (3) $a = -2$ (4) $y = -1$ 2. (1) $p = 3$ (2) $m = 1$ (3) $x = -16$ (4) $x = \frac{21}{2}$ (5) $x = 8$ (6) $y = 7$ (7) $x = \frac{1}{2}$ (8) $y = 8$ (9) $x = 19$ (10) $y = \frac{8}{5}$ (11) $b = 27$

सरावसंच 12.2 1. 12 वर्षे 2. $\frac{23}{35}$ 3. 245 ग्रॅम 4. 15, 16, 17 किंवा 16, 17, 18 5. 42 6. 110 7. 17, 18, 19 8. ₹ 1000 9. 253 10. 5 वर्षे