

10

बहुपदींचा भागाकार



जरा आठवूया.

मागील इयत्तेत बैजिक राशींवर बेरीज, वजाबाकी व गुणाकार या क्रिया कशा करायच्या हे आपण शिकलो आहोत.

खालील उदाहरणांत रिकाम्या जागा भरा.

$$(1) 2a + 3a = \boxed{}$$

$$(2) 7b - 4b = \boxed{}$$

$$(3) 3p \times p^2 = \boxed{}$$

$$(4) 5m^2 \times 3m^2 = \boxed{}$$

$$(5) (2x + 5y) \times \frac{3}{x} = \boxed{}$$

$$(6) (3x^2 + 4y) \times (2x + 3y) = \boxed{}$$



जाणून घेऊया.

बहुपदीची ओळख (Introduction to polynomial)

एका चलातील बैजिक राशीच्या प्रत्येक पदातील चलाचा घातांक हा पूर्ण संख्या असेल, तर ती राशी एका चलातील बहुपदी असते.

उदाहरणार्थ, $x^2 + 2x + 3$; $3y^3 + 2y^2 + y + 5$ या एका चलातील बहुपदी आहेत.

बहुपदी या विशिष्ट बैजिक राशीच असतात म्हणून बहुपदींवरील बेरीज, वजाबाकी व गुणाकार या क्रिया बैजिक राशींप्रमाणे केल्या जातात.

$$\begin{aligned} \text{उदाहरणार्थ, (1) } (3x^2 - 2x) \times (4x^3 - 3x^2) \\ &= 3x^2(4x^3 - 3x^2) - 2x(4x^3 - 3x^2) \\ &= 12x^5 - 9x^4 - 8x^4 + 6x^3 \\ &= 12x^5 - 17x^4 + 6x^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad (4x - 5) - (3x^2 - 7x + 8) \\ &= 4x - 5 - 3x^2 + 7x - 8 \\ &= -3x^2 + 11x - 13 \end{aligned}$$

बहुपदीची कोटी (Degree of a polynomial)

पुढील उदाहरणात दिलेल्या बहुपदीतील चलाचा सर्वात मोठा घातांक चौकटीत लिहा.

उदा. (1) $3x^2 + 4x$ या बहुपदीतील चलाचा सर्वात मोठा घातांक 2 आहे.

उदा. (2) $7x^3 + 5x + 4x^5 + 2x^2$ या बहुपदीतील चलाचा सर्वात मोठा घातांक 5 आहे.

दिलेल्या बहुपदीतील चलाच्या सर्वात मोठ्या घातांकास त्या बहुपदीची कोटी म्हणतात.



हे मला समजले.

- एका चलातील बैजिक राशीच्या प्रत्येक पदातील चलाचा घातांक हा पूर्ण संख्या असेल तर ती राशी बहुपदी असते.
- बहुपदीतील चलाचा सर्वात मोठा घातांक म्हणजे त्या बहुपदीची कोटी होय.



जाणून घेऊया.

(I) एकपदीला एकपदीने भागणे (To divide a monomial by a monomial)

उदा. (1) $15p^3 \div 3p$ हा भागाकार करा.

उकल : भागाकार ही गुणाकाराची उलट क्रिया आहे.

$\therefore 15p^3 \div 3p$ हा भागाकार करण्यासाठी, $3p$ या एकपदीला कोणत्या एकपदीने गुणले असता गुणाकार $15p^3$ येतो, हा विचार करावा लागेल.

$$3p \times 5p^2 = 15p^3 \therefore 15p^3 \div 3p = 5p^2$$

या उदाहरणाची मांडणी शेजारी दाखवल्याप्रमाणे करता येते.

$$\begin{array}{r} 5p^2 \\ 3p \overline{) 15p^3} \\ \underline{-15p^3} \\ 0 \end{array}$$

उदा. (2) भागाकार करा व चौकटीत योग्य ती पदे लिहा.

(i) $(-36x^4) \div (-9x)$

(ii) $(5m^2) \div (-m)$

(iii) $(-20y^5) \div (2y^3)$

$$\begin{array}{r} \boxed{} \\ -9x \overline{) -36x^4} \\ \underline{} \\ \boxed{} \\ \underline{} \\ \boxed{} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \boxed{} \\ -m \overline{) 5m^2} \\ \underline{} \\ \boxed{} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \boxed{} \\ 2y^3 \overline{) -20y^5} \\ \underline{} \\ \boxed{} \\ \underline{} \\ \boxed{} \end{array}$$

बहुपदीला एकपदीने भागणे (To divide a polynomial by a monomial)

खालील उदाहरणे अभ्यासा व बहुपदीला एकपदीने भागण्याची रीत समजून घ्या.

उदा. (1) $(6x^3 + 8x^2) \div 2x$

उकल :

$$\begin{array}{r} 3x^2 + 4x \\ 2x \overline{) 6x^3 + 8x^2} \\ \underline{6x^3} \\ 0 + 8x^2 \\ \underline{- 8x^2} \\ 0 \end{array}$$

स्पष्टीकरण -

(i) $2x \times \boxed{3x^2} = 6x^3$

(ii) $2x \times \boxed{4x} = 8x^2$

$\therefore$ भागाकार $= 3x^2 + 4x$ व बाकी $= 0$

उदा. (2) $(15y^4 + 10y^3 - 3y^2) \div 5y^2$

उकल :

$$\begin{array}{r}
 3y^2 + 2y - \frac{3}{5} \\
 5y^2 \overline{) 15y^4 + 10y^3 - 3y^2} \\
 \underline{-15y^4} \\
 0 + 10y^3 - 3y^2 \\
 \underline{-10y^3} \\
 0 - 3y^2 \\
 \underline{+ 3y^2} \\
 0
 \end{array}$$

स्पष्टीकरण -

(i) $5y^2 \times 3y^2 = 15y^4$

(ii) $5y^2 \times 2y = 10y^3$

(iii) $5y^2 \times \frac{-3}{5} = -3y^2$

$\therefore$ भागाकार = $3y^2 + 2y - \frac{3}{5}$ व बाकी = 0

उदा. (3) $(12p^3 - 6p^2 + 4p) \div 3p^2$

उकल :

$$\begin{array}{r}
 4p - 2 \\
 3p^2 \overline{) 12p^3 - 6p^2 + 4p} \\
 \underline{-12p^3} \\
 0 - 6p^2 + 4p \\
 \underline{+ 6p^2} \\
 0 + 4p
 \end{array}$$

स्पष्टीकरण -

(i) $3p^2 \times 4p = 12p^3$

(ii) $3p^2 \times -2 = -6p^2$

$\therefore$ भागाकार = $4p - 2$ व बाकी = $4p$

उदा. (4) $(5x^4 - 3x^3 + 4x^2 + 2x - 6) \div x^2$

उकल :

$$\begin{array}{r}
 5x^2 - 3x + 4 \\
 x^2 \overline{) 5x^4 - 3x^3 + 4x^2 + 2x - 6} \\
 \underline{-5x^4} \\
 0 - 3x^3 + 4x^2 + 2x - 6 \\
 \underline{+ 3x^3} \\
 0 + 4x^2 + 2x - 6 \\
 \underline{- 4x^2} \\
 0 + 2x - 6
 \end{array}$$

स्पष्टीकरण -

(i) $x^2 \times 5x^2 = 5x^4$

(ii) $x^2 \times -3x = -3x^3$

(iii) $x^2 \times 4 = 4x^2$

$\therefore$ भागाकार = $5x^2 - 3x + 4$ व बाकी = $2x - 6$

बहुपदीचा भागाकार करताना जेव्हा बाकी शून्य उरते किंवा बाकीची कोटी ही भाजक बहुपदीच्या कोटीपेक्षा लहान असते तेव्हा भागाकाराची क्रिया पूर्ण होते.

वरील उदा. (3) मध्ये, बाकी $4p$ ची कोटी ही $3p^2$ या भाजक बहुपदीच्या कोटीपेक्षा लहान आहे. तसेच उदा. (4) मध्ये $2x - 6$ ह्या बाकीची कोटी ही x^2 या भाजक बहुपदीच्या कोटीपेक्षा लहान आहे हे लक्षात घ्या.

सरावसंच 10.1

1. भागाकार करा. भागाकार व बाकी लिहा.

$$(1) 21m^2 \div 7m$$

$$(2) 40a^3 \div (-10a)$$

$$(3) (-48p^4) \div (-9p^2)$$

$$(4) 40m^5 \div 30m^3$$

$$(5) (5x^3 - 3x^2) \div x^2$$

$$(6) (8p^3 - 4p^2) \div 2p^2$$

$$(7) (2y^3 + 4y^2 + 3) \div 2y^2$$

$$(8) (21x^4 - 14x^2 + 7x) \div 7x^3$$

$$(9) (6x^5 - 4x^4 + 8x^3 + 2x^2) \div 2x^2$$

$$(10) (25m^4 - 15m^3 + 10m + 8) \div 5m^3$$



जाणून घेऊया.

बहुपदीला द्विपदीने भागणे (To divide a polynomial by a binomial)

बहुपदीला द्विपदीने भागण्याची रीत ही बहुपदीला एकपदीने भागण्याच्या रीतीप्रमाणेच असते.

उदा. (1) $(x^2 + 4x + 4) \div (x + 2)$

उकल :

$$\begin{array}{r} x + 2 \\ x + 2 \overline{) x^2 + 4x + 4} \\ \underline{-x^2 - 2x} \\ 0 + 2x + 4 \\ \underline{-2x - 4} \\ 0 \end{array}$$

स्पष्टीकरण

(i) प्रथम भाज्यास व भाजकास घातांकांच्या उतरत्या क्रमाने लिहावे.

भाजकाच्या पहिल्या पदास x ने गुणले की भाज्याचे पहिले पद मिळते.

$\therefore$ भाजकास x ने गुणावे

(ii) $(x + 2) \times \boxed{2} = 2x + 4$

$\therefore$ भागाकार $= x + 2$ व बाकी $= 0$

उदा. (2) $(y^4 + 24y - 10y^2) \div (y + 4)$

उकल : येथे भाज्य बहुपदीची कोटी 4 आहे. तिच्यातील चलाचे घातांक उतरत्या क्रमाने नाहीत. तसेच घातांक 3 असलेले पदही नाही. ते $0y^3$ मानू आणि भाज्य बहुपदी घातांकांच्या उतरत्या क्रमाने लिहू व भागाकार करू.

$$\begin{array}{r}
 y^3 - 4y^2 + 6y \\
 y + 4 \overline{) y^4 + 0y^3 - 10y^2 + 24y} \\
 \underline{-y^4 + 4y^3} \\
 0 - 4y^3 - 10y^2 + 24y \\
 \underline{+ 4y^3 + 16y^2} \\
 0 + 6y^2 + 24y \\
 \underline{- 6y^2 + 24y} \\
 0
 \end{array}$$

स्पष्टीकरण -

(i) $(y + 4) \times y^3 = y^4 + 4y^3$

(ii) $(y + 4) \times -4y^2 = -4y^3 - 16y^2$

(iii) $(y + 4) \times 6y = 6y^2 + 24y$

$\therefore$ भागाकार $= y^3 - 4y^2 + 6y$ व बाकी $= 0$

उदा. (3) $(6x^4 + 3x^2 - 9 + 5x + 5x^3) \div (x^2 - 1)$

उकल :

$$\begin{array}{r}
 6x^2 + 5x + 9 \\
 x^2 - 1 \overline{) 6x^4 + 5x^3 + 3x^2 + 5x - 9} \\
 \underline{- 6x^4 + 6x^2} \\
 0 + 5x^3 + 9x^2 + 5x - 9 \\
 \underline{+ 5x^3 + 5x} \\
 0 + 9x^2 + 10x - 9 \\
 \underline{- 9x^2 + 9} \\
 0 + 10x + 0
 \end{array}$$

स्पष्टीकरण -

(i) $(x^2 - 1) \times 6x^2 = 6x^4 - 6x^2$

(ii) $(x^2 - 1) \times 5x = 5x^3 - 5x$

(iii) $(x^2 - 1) \times 9 = 9x^2 - 9$

$\therefore$ भागाकार $= 6x^2 + 5x + 9$ व बाकी $= 10x$



हे मला समजले.

- बहुपदीचा भागाकार करताना जेव्हा बाकी शून्य उरते, किंवा बाकीची कोटी ही भाजक बहुपदीच्या कोटीपेक्षा लहान असते तेव्हा भागाकाराची क्रिया पूर्ण होते.
- भाज्य बहुपदीतील पदे घातांकांच्या उतरत्या क्रमाने नसतील तर ती बहुपदी घातांकांच्या उतरत्या क्रमाने लिहावी ती तशी लिहिताना एखाद्या घातांकाचे पद नसेल तर त्याचा सहगुणक 0 मानून घातांकांचा उतरता क्रम पूर्ण करावा.

सरावसंच 10.2

1. भागाकार करा. भागाकार व बाकी लिहा.

$$(1) (y^2 + 10y + 24) \div (y + 4)$$

$$(2) (p^2 + 7p - 5) \div (p + 3)$$

$$(3) (3x + 2x^2 + 4x^3) \div (x - 4)$$

$$(4) (2m^3 + m^2 + m + 9) \div (2m - 1)$$

$$(5) (3x - 3x^2 - 12 + x^4 + x^3) \div (2 + x^2)$$

$$(6^*) (a^4 - a^3 + a^2 - a + 1) \div (a^3 - 2)$$

$$(7^*) (4x^4 - 5x^3 - 7x + 1) \div (4x - 1)$$

२२२

उत्तरसूची

सरावसंच 10.1

$$1. 3m, 0$$

$$2. -4a^2, 0$$

$$3. \frac{16}{3}p^2, 0$$

$$4. \frac{4}{3}m^2, 0$$

$$5. 5x - 3, 0$$

$$6. 4p - 2, 0$$

$$7. y + 2, 3$$

$$8. 3x, -14x^2 + 7x$$

$$9. 3x^3 - 2x^2 + 4x + 1, 0$$

$$10. 5m - 3, 10m + 8$$

सरावसंच 10.2

$$1. y + 6, 0$$

$$2. p + 4, -17$$

$$3. 4x^2 + 18x + 75, 300$$

$$4. m^2 + m + 1, 10$$

$$5. x^2 + x - 5, x - 2$$

$$6. a - 1, a^2 + a - 1$$

$$7. x^3 - x^2 - \frac{x}{4} - \frac{29}{16}, \frac{-13}{16}$$

