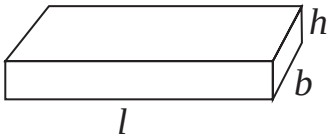
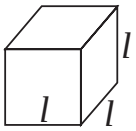
16 पृष्ठफल एवं घनफल

थोड़ा याद करें

घनाभ का संपूर्ण पृष्ठफल = $2(l \times b + b \times h + l \times h)$



समघन (घन) का संपूर्ण पृष्ठफल = $6l^2$



1 मी = 100 सेमी 1 वर्ग मी = 100 × 100 वर्ग सेमी = 10000 वर्ग सेमी = 10^4 वर्ग सेमी

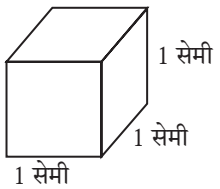
1 सेमी = 10 मिमी 1 वर्ग सेमी= 10 × 10 वर्ग मिमी = 100 वर्ग मिमी = 10^2 वर्ग मिमी

आओ जानें

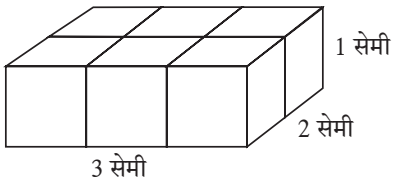
घनाभ, समघन और लंब वृत्ताकार बेलन यह त्रिमितीय आकार अर्थात घनाकृति होते हैं । यह घनाकृति अवकाश में जगह घेरती है । **किसी भी घनाकृति द्वारा अवकाश में घिरी हुई जगह का माप अर्थात घनाकृति का घनफल होता है ।**

घनफल की प्रामाणिक इकाई (Standard unit of volume)

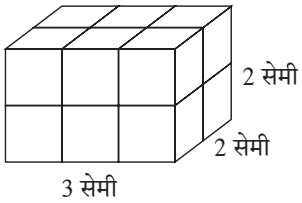
संलग्न आकृति में, घन की प्रत्येक भुजा 1 सेमी है । इस घन द्वारा घिरा स्थान, घनफल मापन की एक प्रामाणिक इकाई है । इसे 1 घनसेंटीमीटर, संक्षेप में 1 घसेमी या 1 सेमी ^{3} लिखते हैं ।



कृति I : प्रत्येक भुजा 1 सेमी हो ऐसे कई घन मिलाइए । आकृति में दर्शाए अनुसार 6 घन एक दूसरे से सटाकर रखो । एक घनाभ बनेगा । इस घनाभ की लंबाई 3 सेमी, चौड़ाई 2 सेमी तथा ऊँचाई 1 सेमी है । 1 सेमी भुजावाले 6 घन मिलाकर यह घनाभ बनता है । इसका घनफल 3 × 2 × 1 = 6 घसेमी है इसे ध्यान में रखिए ।



कृति II : संलग्न घनाभ की लंबाई 3 सेमी, चौड़ाई 2 सेमी तथा ऊँचाई 2 सेमी है । इस घनाभ में 1 घसेमी घनफलवाले 3 × 2 × 2 = 12 घन हैं । इसलिए इस घनाभ का घनफल 12 घसेमी है । इस प्रकार



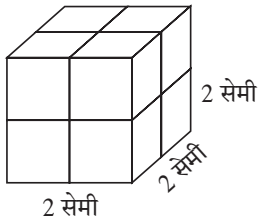
घनाभ का घनफल = लंबाई × चौड़ाई × ऊँचाई यह सूत्र प्राप्त होता है ।

लंबाई के लिए l चौड़ाई के लिए b और ऊँचाई के लिए h अक्षर लेने पर **घनाभ का घनफल = $l \times b \times h$**

कृति III :

संलग्न आकृति में 1 घसेमी घनफलवाले 8 घन एक दूसरे से सटाकर रखे हैं इससे प्राप्त घनाकृति 2 सेमी भुजा वाला घन है ।

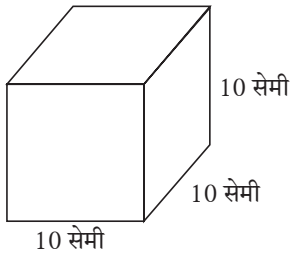
इस घन का घनफल = $2 \times 2 \times 2 = 2^3$ ध्यान में रखें ।



इस आधार पर घन की भुजा l हो तो **घन का घनफल =** $l \times l \times l = l^3$ **होता है ।**

द्रव का घनफल : द्रव की धारिता अर्थात द्रव का घनफल 1 द्रव की धारिता मापने के लिए मिली लीटर और लीटर इकाई का प्रयोग करते हैं, यह हमें ज्ञात है ।

संलग्न आकृति में 10 सेमी भुजावाला एक खोखला घन है । इसका घनफल $10 \times 10 \times 10 = 1000$ घसेमी है । यह घन पानी से भरा तो इस पानी की धारिता अर्थात घनफल 1000 घसेमी होगी । इस धारिता को ही एक लीटर कहते हैं ।



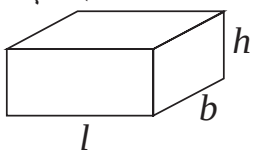
$\therefore$ 1 लीटर = 1000 मिली, यह हमें ज्ञात है ।

$\therefore$ 1 लीटर = 1000 घसेमी = 1000 मिली, इस प्रकार 1 घसेमी = 1 मिली इसे भी ध्यान में रखो ।

अर्थात 1 सेमी भुजावाले घनाभ में समाविष्ट पानी की धारिता 1 मिली होती है ।

हल किए गए उदाहरण

उदा. (1) घनाभ के आकार का, मछलियाँ रखने वाले काँच की पेटी की लंबाई 1 मीटर, चौड़ाई 40 सेमी तथा ऊँचाई 50 सेमी हो तो ज्ञात कीजिए कि उसमें कितने लीटर पानी भरा जाएगा ।



हल : पेटी में भरे जाने वाले पानी का घनफल उस पेटी के घनफल के बराबर होता है । 1 मीटर = 100 सेमी, चौड़ाई 40 सेमी तथा ऊँचाई 50 सेमी है ।

पेटी का घनफल = $l \times b \times h = 100 \times 40 \times 50 = 200000$ घसेमी,

$$200000 \text{ घसेमी} = \frac{200000}{1000} = 200 \text{ ली. } (\because 1000 \text{ घसेमी} = 1 \text{ ली})$$

$\therefore$ टंकी में 200 लीटर पानी भरा जाएगा ।

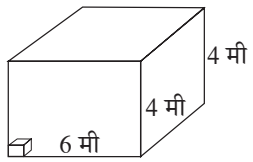
उदा. (2) किसी घनाभ आकारवाले गोदाम की लंबाई 6 मी, चौड़ाई 4 मी और ऊँचाई 4 मी है । इस गोदाम में 40 सेमी भुजावाले अधिक-से-अधिक कितने समघनाकार बक्से रखे जा सकेंगे ?

हल : रखे गए बक्सों से गोदाम पूरा भरने पर सभी डिब्बों का कुल घनफल गोदाम के घनफल के बराबर होगा । उदाहरण हल करने के लिए अगले चरण (सोपान) का विचार करेंगे ।

(1) गोदाम का घनफल ज्ञात करेंगे ।

(2) एक बक्से का घनफल ज्ञात करेंगे ।

(3) बक्से कि संख्या ज्ञात करेंगे ।



सोपान (1) : गोदाम की लंबाई 6 मी = 600 सेमी, चौड़ाई = ऊँचाई = 4 मी = 400 सेमी

गोदाम का घनफल = लंबाई × चौड़ाई × ऊँचाई = 600 × 400 × 400 घसेमी

सोपान (2) : एक बक्से का घनफल = भुजा^{3} = $(40)^3$ = 40 × 40 × 40 घसेमी

सोपन (3) : बक्से की संख्या = $\dfrac{\text{गोदाम का घनफल}}{\text{एक बॉक्स का घनफल}} = \dfrac{600 \times 400 \times 400}{40 \times 40 \times 40} = 1500$

∴ उस गोदाम में अधिक-से-अधिक 1500 बक्से रखे जा सकेंगे ।

उदा. (3) बर्फी बनाने के लिए खोया (मावा) तथा शक्कर को गलाकर 5 लीटर मिश्रण घनाभ के आकार के ट्रे में डालने पर वह पूर्णत: भरता हैं । ट्रे की चौड़ाई 40 सेमी तथा ऊँचाई 2.5 सेमी हो तो उसकी लंबाई ज्ञात कीजिए ।

हल: उदाहरण हल करने के लिए निम्नलिखित चौखट में योग्य संख्या लिखिए ।

सोपान (1) : ट्रे की धारिता = 5 लीटर = ☐ घनसेमी (∵ 1 ली = 1000 घसेमी)

सोपान (2) : मिश्रण का घनफल = ☐ घनसेमी

सोपान (3) : आयताकार ट्रे का घनफल = मिश्रण का घनफल

लंबाई × चौड़ाई × ऊँचाई = ☐ घनसेमी

लांबी × 40 × 2.5 = ☐ घनसेमी, ∴ ट्रे की लंबाई = $\dfrac{\square}{100}$ = 50 सेमी

मैंने यह समझा

- घनाभ का घनफल = लंबाई × चौड़ाई × ऊँचाई = $l \times b \times h$
- समघन का घनफल = भुजा^{3} = l^3

प्रश्नसंग्रह 16.1

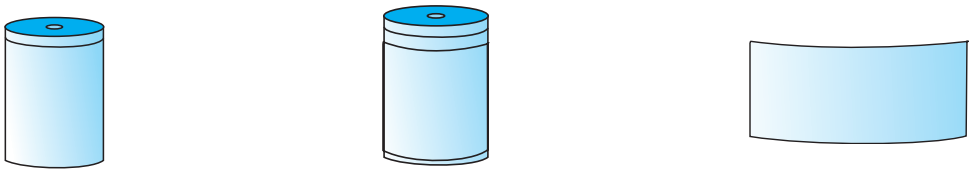
1. किसी बक्से की लंबाई 20 सेमी, चौड़ाई 10.5 सेमी तथा ऊँचाई 8 सेमी हो तो उसका घनफल ज्ञात कीजिए ।
2. किसी घनाभ के आकार के साबुन का घनफल 150 घसेमी है । उसकी लंबाई 10 सेमी तथा चौड़ाई 5 सेमी हो तो उसकी मोटाई कितनी होगी ?
3. 6 मीटर लंबी, 2.5 मी ऊँची तथा 0.5 मी चौड़ी दीवार बनाने के लिए 25 सेमी लंबी, 15 सेमी चौड़ी तथा 10 सेमी ऊँचाई वाली कितनी ईंटें लगेंगी ?

4. बारिश का पानी जमा करने के लिए किसी मुहल्ले में 10 मी लंबी, 6 मी चौड़ी तथा 3 मी गहरी पानी की टंकी बनाई गई है । उस टंकी की धारिता कितनी है ? टंकी में कितने लीटर पानी भरा जा सकेगा ?

आओ जानें

लंब वृत्ताकार बेलन का घनफल (Surface area of a cylinder)

लंब वृत्ताकार बेलन के आकार का डिब्बा लीजिए । उसकी ऊँचाई के बराबर चौड़ाई वाला एक आयताकार कागज लीजिए । उस डिब्बे के चारों ओर कागज को ऐसा लपेटें कि उसका वक्रपृष्ठभाग पूरी तरह से ढँक जाएँ । कागज का बचा हुआ भाग काटकर अलग कर लीजिए ।



डिब्बा | कागज से लपेटा हुआ डिब्बा | वृत्त की परिधि = लंबाई

लपेटा हुआ कागज अलग कीजिए । वह आयताकार दिखेगा । इस आयत का क्षेत्रफल अर्थात लंब वृत्ताकार बेलन के वक्राकार भाग का क्षेत्रफल अर्थात लंब वृत्ताकार बेलन का वक्रपृष्ठफल ।

आयत की लंबाई अर्थात वृत्त के आधार की परिधि तथा आयत की चौड़ाई अर्थात लंब वृत्ताकार बेलन की ऊँचाई होती है ।

लंब वृत्ताकार बेलन का वक्रपृष्ठफल = आयत का क्षेत्रफल = लंबाई × चौड़ाई

= लंब वृत्ताकार बेलन के आधार की परिधि × बेलन की ऊँचाई

लंब वृत्ताकार बेलन का वक्रपृष्ठफल = $2\pi r \times h = 2\,\pi rh$

बंद लंब वृत्ताकार बेलन के आधार का पृष्ठ और ऊपर का पृष्ठ वृत्ताकार होता है ।

∴ बंद लंब वृत्ताकार बेलन का संपूर्ण पृष्ठफल =

व्रकपृष्ठफल + ऊपरी पृष्ठ का क्षेत्रफल + आधार का क्षेत्रफल

∴ लंब वृत्ताकार बेलन का संपूर्ण पृष्ठफल = लंब वृत्ताकार बेलन का वक्रपृष्ठफल + 2 × वृत्त का क्षेत्रफल

$$= 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi r\,(h + r)$$

हल किए गए उदाहरण

उदा. (1) किसी लंब वृत्ताकार बेलन के आकारवाली पानी के टंकी का व्यास 1 मी और ऊँचाई 2 मीटर है । टंकी पर ढक्कन लगा हुआ है । ढक्कन सहित टंकी के भीतर तथा बाहर रंग लगवाना है । रंग का खर्च 80 रुपये प्रति वर्ग मी हो तो टंकी को रंगवाने के लिए कितना खर्च आएगा ? ($\pi = 3.14$)

हल : टंकी के भीतर तथा बाहर रंग लगाना है । अर्थात रंग लगाने वाले भाग का क्षेत्रफल टंकी के संपूर्ण बाह्य पृष्ठफल का दुगुना है ।

लंब वृत्ताकार बेलन के आधार का व्यास 1 मीटर

$\therefore$ त्रिज्या 0.5 मी और लंब वृत्ताकार बेलन की ऊँचाई 2 मी है ।

$\therefore$ लंब वृत्ताकार बेलन का संपूर्ण पृष्ठफल $= 2\pi r\,(h + r) = 2 \times 3.14 \times 0.5\,(2.0 + 0.5)$

$= 2 \times 3.14 \times 0.5 \times 2.5 = 7.85$ वर्ग मी

$\therefore$ रंग लगाने वाले भाग का क्षेत्रफल $= 2 \times 7.85 = 15.70$ व.मी

$\therefore$ टंकी को रंगवाने का कुल खर्च $= 15.70 \times 80 = 1256$ रुपये ।

उदा. (2) जस्ते के किसी आयताकार पत्तरे की लंबाई 3.3 मी तथा चौड़ाई 3 मी है । इस पत्तरे से 3.5 सेमी त्रिज्या और 30 सेमी लंबाईवाले अधिक-से-अधिक कितनी नलिकाएँ बनेंगी ?

हल: आयताकार पत्तरे का क्षेत्रफल = लंबाई $\times$ चौड़ाई

$= 3.3 \times 3$ वर्ग मी $= 330 \times 300$ वर्ग सेमी

नलिका की लंबाई अर्थात लंब वृत्ताकार बेलन की ऊँचाई $= h = 30$ सेमी

नलिका की त्रिज्या = लंब वृत्ताकार बेलन के आधार की त्रिज्या $= r = 3.5$ सेमी,

एक नलिका बनाने के लिए लगने वाला पत्तरा = एक नलिका का वक्रपृष्ठफल

$$= 2\pi rh = 2 \times \frac{22}{7} \times \frac{35}{10} \times \frac{30}{1}$$

$$= 2 \times 22 \times 15 \qquad = 660 \text{ वर्ग सेमी.}$$

$$\text{पत्तरे से बने नलिका की संख्या} = \frac{\text{पत्तरे का क्षेत्रफल}}{\text{एक नलिका का वक्रपृष्ठफल}} = \frac{330 \times 300}{660} = 150$$

प्रश्नसंग्रह 16.2

1. निम्नलिखित प्रत्येक प्रश्न में लंबवृतत्ताकार बेलन के आधार की त्रिज्या r तथा ऊँचाई h दी गई है ; इनके आधार पर लंब वृत्ताकार बेलन का वक्रपृष्ठफल तथा संपूर्ण पृष्ठफल ज्ञात कीजिए ।

   (1) $r = 7$ सेमी, $h = 10$ सेमी (2) $r = 1.4$ सेमी, $h = 2.1$ सेमी (3) $r = 2.5$ सेमी, $h = 7$ सेमी

   (4) $r = 70$ सेमी, $h = 1.4$ सेमी (5) $r = 4.2$ सेमी, $h = 14$ सेमी

2. दोनों ओर से बंद एक टंकी का व्यास 50 सेमी तथा ऊँचाई 45 सेमी है तो इस टंकी का संपूर्ण पृष्ठफल ज्ञात कीजिए । ($\pi = 3.14$)

3. किसी लंब वृत्ताकार बेलन का वक्रपृष्ठफल 660 वर्ग सेमी तथा ऊँचाई 21 सेमी है तो उसकी त्रिज्या तथा आधार का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ।

4. किसी लंब वृत्ताकार बेलन के आकार के पत्तरे के डिब्बे का व्यास 28 सेमी तथा उसकी ऊँचाई 20 सेमी है । यदि लंबवृत्ताकार बेलन का एक सिरा खुला हो तो उसके लिए लगने वाले पत्तरे का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए । उस डिब्बे का 2 सेमी ऊँचाई वाला ढक्कन बनाने के लिए लगभग कितने वर्ग सेमी पत्तरा लगेगा ज्ञात कीजिए ।

आओ जानें

लंब वृत्ताकार बेलन का घनफल (Volume of a cylinder)

लंब वृत्ताकार बेलन के आकारवाली पानी की टंकी में कितना पानी आएगा इसे ज्ञात करने के लिए उस टंकी का घनफल निकालना पड़ता है ।

किसी भी लंब वृत्ताकार बेलन का घनफल = आधार का क्षेत्रफल × ऊँचाई, यह सामान्य सूत्र है ।

लंब वृत्ताकार बेलन का आधार वृत्ताकार होता है । लंब वृत्ताकार बेलन का घनफल = $\pi r^2 h$

हल किए गए उदाहरण

उदा (1) किसी लंब वृत्ताकार बेलन के आधार की त्रिज्या 5 सेमी तथा उसकी ऊँचाई 10 सेमी हो तो उस लंबवृत्ताकार बेलन का घनफल ज्ञात कीजिए । (π = 3.14)

हल : लंब वृत्ताकर बेलन के आधार की त्रिज्या r = 5 सेमी और ऊँचाई h = 10 सेमी

लंब वृत्ताकार बेलन का घनफल = $\pi r^2 h = 3.14 \times 5^2 \times 10 = 3.14 \times 25 \times 10 = 785$ घसेमी.

उदा. (2) किसी लंबवृत्ताकार बेलन के आकारवाले टंकी की ऊँचाई 56 सेमी है । उस टंकी की धारिता 70.4 लीटर हो तो उसकी त्रिज्या ज्ञात कीजिए । ($\pi = \frac{22}{7}$)

हल : माना वृत्ताकार टंकी के आधार की त्रिज्या = r

टंकी में भरे पानी का घनफल = 70.4 लीटर

टंकी की धारिता = टंकी का घनफल = 70.4 × 1000 घसेमी = 704 × 100 घसेमी

1 ली = 1000 मिली ∴ 70.4 ली = 70400 मिली

∴ टंकी का घनफल = $\pi r^2 h$ = 70400

$$\therefore r^2 = \frac{70400}{\pi h} = \frac{70400 \times 7}{22 \times 56} = \frac{70400}{22 \times 8} = \frac{8800}{22} = 400$$

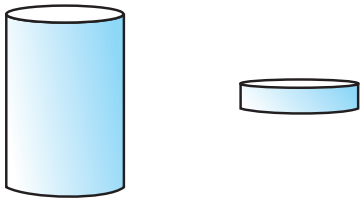
∴ r = 20, ∴ टंकी की त्रिज्या 20 सेमी है ।

उदा. (3) ताँबे के ठोस लंब वृत्ताकार बेलन के आधार की त्रिज्या 4.2 सेमी तथा ऊँचाई 16 सेमी है । इसे पिघलाकर 1.4 सेमी व्यास तथा 0.2 सेमी मोटी कितनी चकतियाँ बनेंगी ?

हल : लंब वृत्ताकार बेलन के आधार की त्रिज्या = R = 4.2 सेमी ऊँचाई = H = 16 सेमी

लंब वृत्ताकार बेलन का घनफल = $\pi R^2 H = \pi \times 4.2 \times 4.2 \times 16.0$

चकती के आधार की त्रिज्या = $1.4 \div 2 = 0.7$ सेमी



चकती की मोटाई = लंब वृत्ताकार बेलन की ऊँचाई = 0.2 सेमी

चकती का घनफल = $\pi r^2 h = \pi \times 0.7 \times 0.7 \times 0.2$

माना पिघलाए गए लंब वृत्ताकार बेलन से n चकतियाँ बनेंगी ।

$\therefore$ $n \times$ एक चकती का घनफल = लंब वृत्ताकार बेलन का घनफल

$$n = \frac{\text{लंब वृत्ताकार बेलन का घनफल}}{\text{एक चकती का घनफल}} = \frac{\pi R^2 H}{\pi r^2 h} = \frac{R^2 H}{r^2 h} = \frac{4.2 \times 4.2 \times 16}{0.7 \times 0.7 \times 0.2}$$

$$= \frac{42 \times 42 \times 160}{7 \times 7 \times 2} = 6 \times 6 \times 80 = 2880$$

$\therefore$ 2880 चकतियाँ बनेंगी ।

मैंने यह समझा

लंब वृत्ताकार बेलन का वक्रपृष्ठफल = $2\pi rh$ लंब वृत्ताकार बेलन का संपूर्ण पृष्ठफल = $2\pi r(h + r)$

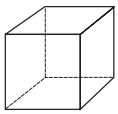
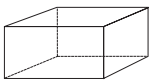
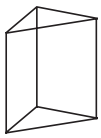
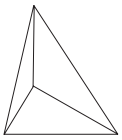
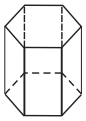
लंब वृत्ताकार बेलन का घनफल = $\pi r^2 h$

प्रश्नसंग्रह 16.3

1. नीचे लंब वृत्ताकार बेलन के आधार की त्रिज्या (r) तथा ऊँचाई (h) दी गई है । इस आधार पर लंब वृत्ताकार बेलन का घनफल ज्ञात कीजिए ।
   (1) r =10.5 सेमी, h = 8 सेमी (2) r = 2.5 मी, h = 7 मी
   (3) r = 4.2 सेमी, h = 5 सेमी (4) r = 5.6 सेमी, h = 5 सेमी
2. 90 सेमी लंबाई तथा 1.4 सेमी व्यासवाले लोहे की सरिया बनाने में लगने वाले लोहे का घनफल ज्ञात कीजिए ।
3. लंब वृत्ताकार बेलन के आकारवाले किसी हौज का आंतरिक व्यास 1.6 मी तथा उसकी गहराई 0.7 मी है । उस हौज में अधिक-से-अधिक कितना पानी भरा जा सकता है ?
4. किसी लंब वृत्ताकार बेलन के आधार की परिधि 132 सेमी तथा उसकी ऊँचाई 25 सेमी हो तो उसका घनफल कितना होगा ?

ऑयलर का सूत्र :

पृष्ठ (F), शीर्षबिंदु (V), और कोर (E) वाले घनाकृति के संबंध में एक मनोरंजक सूत्र लिओनार्ड ऑयलर नाम के एक महान वैज्ञानिक ने अत्यंत छोटी उम्र में ही खोजा था । निम्नलिखित सारणी में दिए गए प्रत्येक आकृति के पृष्ठ, कोरें तथा शीर्षबिंदुओं की संख्या लिखकर सारणी पूर्ण कीजिए और इस आधार पर F + V = E + 2 ऑयलर के सूत्र की जाँच कीजिए ।

नाम	घन	घनाभ	त्रिभुजाकार प्रिज्म	त्रिभुजाकार पिरामिड	पंचभुजाकार पिरामिड	षटभुजाकार प्रिज्म
आकार						
पृष्ठ (F)	6					8
शीर्षबिंदु (V)	8					12
कोरे (E)		12			10	

उत्तर सूची

प्रश्नसंग्रह 16.1

1. 1680 घसेमी **2.** 3 सेमी **3.** 2000 ईंटें **4.** 1,80,000 ली.

प्रश्नसंग्रह 16.2

1. (1) 440 वर्ग सेमी, 748 वर्ग सेमी (2) 18.48 वर्ग सेमी, 30.80 वर्ग सेमी

(3) 110 वर्ग सेमी, 149.29 वर्ग सेमी (4) 616 वर्ग सेमी, 31416 वर्ग सेमी

(5) 369.60 वर्ग सेमी, 480.48 वर्ग सेमी

2. 10,990 वर्ग सेमी 3. 5 सेमी, 78.50 वर्ग सेमी

4. 2376 वर्ग सेमी, ढक्कन के लिए लगभग 792 वर्ग सेमी पत्तरा लगेगा ।

प्रश्नसंग्रह 16.3

1. (1) 2772 घसेमी (2) 137.5 घमी (3) 277.2 घसेमी

(4) 492.8 घसेमी

2. 138.6 घसेमी **3.** 1408 ली **4.** 34650 घसेमी

CZCR5J