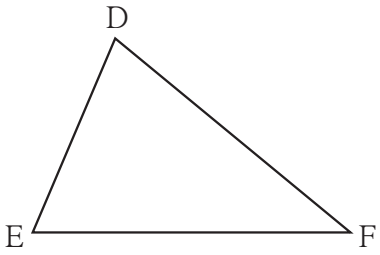
13 त्रिभुजों की सर्वांगसमता

थोड़ा याद करें –

साथ की आकृति से निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर खोजिए ।



(i) भुजा DE का सम्मुख कोण कौनसा है ?

(ii) ∠ E किस भुजा का सम्मुख कोण है ?

(iii) भुजा DE तथा भुजा DF में समाविष्ट कोण कौनसा?

(iv) ∠ E तथा ∠ F में समाविष्ट भुजा कौनसी ?

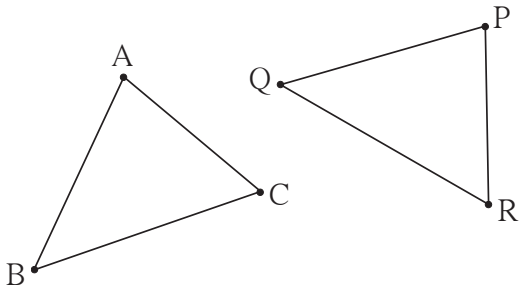
(v) भुजा DE के संलग्न कौनसे कोण है ?

- जो आकृतियाँ परस्पर हूबहू मिलती है उन आकृतियो को सर्वांगसम आकृति कहते है ।
- जिन रेखाखंडो की लंबाई समान होती है वे रेखाखंड सर्वांगसम होते है ।
- जिन कोणों के माप समान होते है वे कोण सर्वांगसम होते हैं ।

आओ जानें

त्रिभुजों की सर्वांगसमता (Congruence of triangles)

कृति : संलग्न आकृतियाँ देखो । पारदर्शक ट्रेसिंग पेपर पर Δ ABC बनाकर वह कागज Δ PQR पर रखकर देखिए । बिंदु A को बिंदु P पर, बिंदु B को बिंदु Q पर तथा बिंदु C को बिंदु R पर रखकर देखो दोनों त्रिभुज हूबहू मिलते हैं (ढक लेते हैं) अर्थात वे सर्वांगसम है ऐसा दिखाई देगा ।

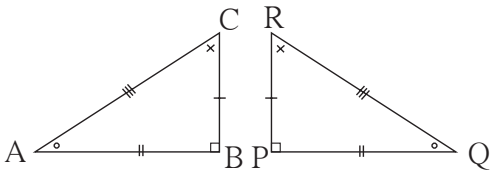


कृति में Δ ABC को Δ PQR पर रखने की एक पद्धति दी गई हैं । परंतु बिंदु A को Q पर, बिंदु B को R पर तथा बिंदु C को P पर रखने पर त्रिभुज परस्पर हूबहू नही मिलेंगे । अर्थात विशिष्ट पद्धति से ही उन्हें एक दूसरे से मिलाना होता है । एक दूसरे से मिलाने की पद्धति एक-एक संगति द्वारा दर्शाई जाती है । बिंदु A की संगति बिंदु P से है, इसे A ↔ P ऐसा लिखते है । यहाँ A ↔ P, B ↔ Q, C ↔ R इस संगति से त्रिभुज सर्वांगसम है । इस पद्धति से त्रिभुज सर्वांसम होने पर ∠A ≅ ∠P, ∠B ≅ ∠Q,

$\angle C \cong \angle R$ तथा रेख AB $\cong$ रेख PQ, रेख BC $\cong$ रेख QR, रेख CA $\cong$ रेख RP ऐसी छह सर्वांगसमता प्राप्त होती है । इसलिए Δ ABC तथा Δ PQR, ABC $\leftrightarrow$ PQR इस संगति द्वारा सर्वांगसम है, ऐसा कहा जाता है । तथा Δ ABC $\cong$ Δ PQR ऐसा लिखते हैं । इस प्रकार लिखने में A $\leftrightarrow$ P, B $\leftrightarrow$ Q, C $\leftrightarrow$ R यह शीर्षबिंदुओं की एकैकी संगति तथा उसके कारण प्राप्त छह सर्वांगसमताओं का अंतर्भाव होता है । इसलिए दो त्रिभुज सर्वांगसम हैं यह लिखते समय शीर्षबिंदुओं का क्रम सर्वांगसमता की एकैकी संगति का पालन करता हो इस ओर ध्यान दीजिए ।

आओ चर्चा करें

Δ ABC तथा Δ PQR इन सर्वांगसम त्रिभुजों के सर्वांगसम घटक समान चिह्नों द्वारा दर्शाए गए हैं ।



अनिल, रेहाना तथा सुरजित ने इन त्रिभुजों के सर्वांगसमता का लेखन निम्नानुसार किया था ।

अनिल का लेखन : Δ ABC $\cong$ Δ QPR

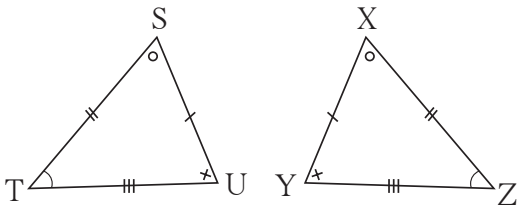
रेहाना का लेखन : Δ BAC $\cong$ Δ PQR

सुरजित का लेखन : Δ ABC $\cong$ Δ PQR

इनमें से कौन-सा लेखन सही है तथा कौन-सा गलत है । चर्चा कीजिए ।

हल किए गए उदाहरण

उदा. (1) साथ की आकृति में समान चिह्नों द्वारा दर्शाए गए घटक सर्वांगसम हैं ।



(i) शीर्षबिंदुओं के जिस एकैकी संगति द्वारा वे त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं उस संगति में त्रिभुजों की सर्वांगसमता दो प्रकार से लिखिए ।

(ii) Δ XYZ $\cong$ Δ STU यह लेखन सही है या गलत, कारणसहित लिखिए ।

हल : निरीक्षण द्वारा दिए गए त्रिभुज STU $\leftrightarrow$ XZY इस एकैकी संगति द्वारा सर्वांगसम हैं ।

(i) एक प्रकार : Δ STU $\cong$ Δ XZY, दूसरा प्रकार: Δ UST $\cong$ Δ YXZ

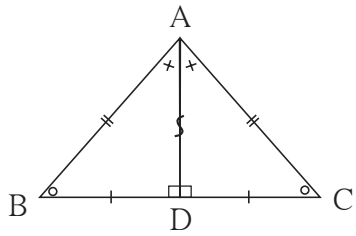
इसी सर्वांगसमता को और अन्य प्रकार से लिखने का प्रयास कीजिए ।

(ii) इन त्रिभुजों की सर्वांगसमता Δ XYZ $\cong$ Δ STU ऐसी लिखने पर भुजा ST $\cong$ भुजा XY ऐसा अर्थ होगा और यह गलत है ।

$\therefore$ Δ XYZ $\cong$ Δ STU यह लेखन गलत है ।

(Δ XYZ ≅ Δ STU इस लेखन द्वारा और भी कुछ गलतियाँ होती हैं । वे विद्यार्थियों को खोजनी हैं परंतु उत्तर क्यों गलत है ? यह बताने के लिए एक गलती दिखाना पर्याप्त है ।)

उदा. (2) आगे दी गई आकृति में, त्रिभुजों की जोड़ी में समान चिह्नों द्वारा दर्शाए गए घटक सर्वांगसम हैं । उन त्रिभुजों के शीर्षबिंदुओं के कौन-से एकैकी संगति द्वारा त्रिभुज सर्वांगसम होंगे यह बताकर त्रिभुजों की सर्वांगसमता चिह्न द्वारा दर्शाइए ।



हल : ΔABD तथा ΔACD में भुजा AD
सामान्य रेखाखंड है ।
प्रत्येक रेखाखंड स्वयं के सर्वांगसम होता है ।

संगति : A ↔ A, B ↔ C, D ↔ D. Δ ABD ≅ Δ ACD

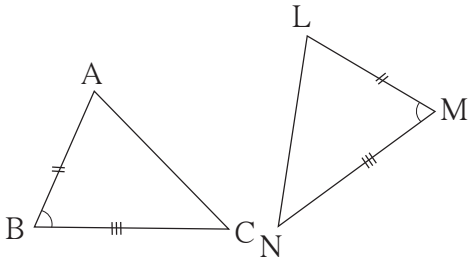
टीप : सामान्य भुजा पर ' ऽ ' ऐसा चिह्न लगाने की पद्धति है ।

किसी जोड़ी के त्रिभुज सर्वांगसम हैं यह दिखाने के लिए सभी छह घटकों की सर्वांगसमता दिखाने की आवश्यक्ता नहीं होती । एक त्रिभुज के तीन विशिष्ट घटक दूसरे त्रिभुज के संगत घटकों से सर्वांगसम हों तो शेष तीन घटकों की जोड़ियाँ भी परस्पर सर्वांगसम होती हैं, अर्थात वे विशिष्ट तीन घटक सर्वांगसमता की कसौटी निश्चित करते हैं ।

कुछ त्रिभुजों की रचना करना हमने सीखा है । जो तीन घटक दिए गए हों तो त्रिभुज की एकमेव आकृति बनाई जा सकती है वे ही घटक सर्वांगसमता की कसौटियाँ निश्चित करते हैं, इसे हम जाँच कर देखेंगे ।

(1) दो भुजाएँ तथा उनमें समाविष्ट कोण : भुकोभु कसौटी

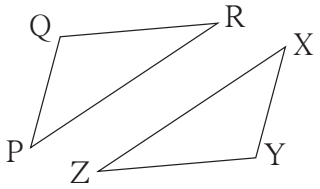
भुजाओं की दो जोड़ियाँ सर्वांगसम हों तथा उनमें समाविष्ट कोण भी सर्वांगसम हो, ऐसे ΔABC तथा ΔLMN बनाइए ।



ΔABC तथा ΔLMN में $l(AB) = l(LM)$, $l(BC) = l(MN)$, $m\angle ABC = m\angle LMN$
ΔABC को ट्रेसिंग पेपर पर बनाकर ट्रेसिंग पेपर ΔLMN पर इस प्रकार रखिए की शीर्षबिंदु A को शीर्षबिंदु L पर, भुजा AB को भुजा LM पर, ∠B को ∠M तथा भुजा BC को भुजा MN पर रखेंगे । ΔABC ≅ ΔLMN है ऐसा दिखाई देगा ।

(2) तीन संगत भुजाएँ : भुभुभु कसौटी

$l(PQ) = l(XY), l(QR) = l(YZ), l(RP) = l(ZX)$

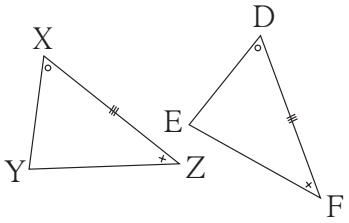


इस प्रकार त्रिभुज ΔPQR तथा ΔXYZ बनाइए ।

ट्रेसिंग पेपर पर ΔPQR बनाकर वह ΔXYZ पर

$P \leftrightarrow X$, $Q \leftrightarrow Y$, $R \leftrightarrow Z$ इस प्रकार एकैकी संगति से रखिए । $\Delta PQR \cong \Delta XYZ$ दिखाई देगा ।

(3) दो कोण तथा समाविष्ट भुजा : कोभुको कसौटी



ΔXYZ तथा ΔDEF ऐसे बनाइए कि,

$l(XZ) = l(DF), \angle X \cong \angle D$ तथा $\angle Z \cong \angle F$

ट्रेसिंग पेपर पर ΔXYZ बनाकर वह पेपर ΔDEF पर

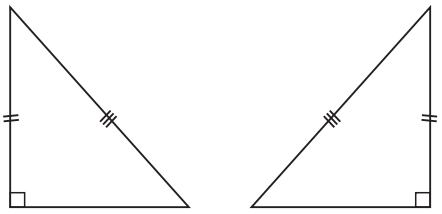
रखिए । $X \leftrightarrow D$, $Y \leftrightarrow E$, $Z \leftrightarrow F$ इस संगति के अनुसार $\Delta XYZ \cong \Delta DEF$ दिखाई देंगे ।

(4) कोकोभु (अथवा भुकोको) कसौटी :

दो त्रिभुजों में संगत कोणों की दो जोड़ियाँ सर्वांगसम हों, तो शेष कोण भी सर्वांगसम होते हैं । क्योंकि त्रिभुज के तीनों कोणों के मापों का योगफल $180°$ होता है । इसलिए कोई दो कोण तथा एक कोण की संलग्न भुजा दूसरे त्रिभुज के दो कोण तथा संगत भुजा से सर्वांगसम हो तो कोभुको कसौटी की शर्त पूरी होती है तथा वे त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं ।

(5) समकोण त्रिभुज की कर्ण भुजा कसौटी

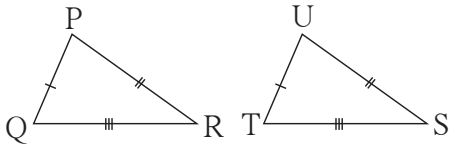
समकोण त्रिभुज का विकर्ण तथा एक भुजा दी गई हो तो एकमेव त्रिभुज की रचना की जा सकती है । किसी समकोण त्रिभुज का विकर्ण तथा एक भुजा दूसरे समकोण त्रिभुज के संगत घटकों से सर्वांगसम हो ऐसे दो समकोण त्रिभुज बनाकर उपरोक्त विधि के अनुसार वे सर्वांगसम है क्या ? जाँच कीजिए ।



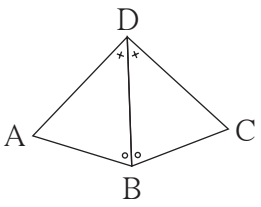
हल किए गए उदाहरण

उदा. (1) आगे दी गई आकृतियों के त्रिभुजों की प्रत्येक जोड़ी में समान चिह्नों द्वारा दर्शाए गए घटक सर्वांगसम हैं । प्रत्येक जोड़ी के त्रिभुज किस कसौटी के अनुसार तथा शीर्षबिंदुओं के किस एकैकी संगति के अनुसार सर्वांगसम हैं ? लिखिए ।

(i)



(ii)

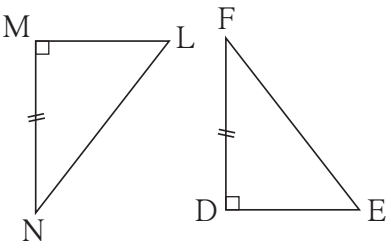


हल : (i) भु-भु-भु कसौटी द्वारा PQR ↔ UTS इस संगति से

(ii) को-भु-को कसौटी द्वारा DBA ↔ DBC इस संगति से

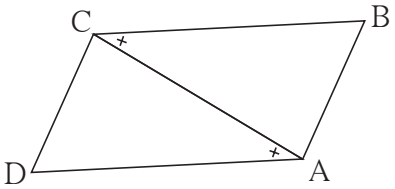
उदा. (2) आगे दी गई आकृतियों के त्रिभुज की प्रत्येक जोड़ियों में समान चिह्नों द्वारा दर्शाए गए घटक सर्वांगसम हैं । प्रत्येक आकृति के नीचे त्रिभुजों की सर्वांगसमता की कसौटी लिखी गई है । उस कसौटी द्वारा त्रिभुजों को सर्वांगसम होने के लिए और क्या जानकारी देना आवश्यक है तथा वह जानकारी देने के बाद त्रिभुज शीर्षबिंदुओं की किस एकैकी संगति द्वारा सर्वांगसम होंगे, लिखिए ।

(i)



कर्ण भुजा कसौटी

(ii)



कोभुको कसौटी

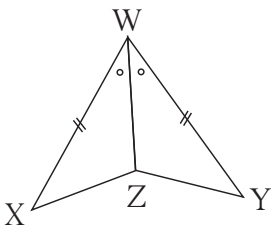
हल : (i) दिए गए त्रिभुज समकोण त्रिभुज हैं । उनकी एक-एक भुजा सर्वांगसम है । इसलिए उनके रेख LN तथा EF विकर्ण सर्वांगसम है, यह जानकारी देना आवश्यक है । यह जानकारी देने पर LMN ↔ EDF इस संगति द्वारा त्रिभुज सर्वांगसम होंगे ।

(ii) आकृति के त्रिभुजों की रेख CA सामान्य भुजा है इसलिए ∠ DCA ≅ ∠ BAC यह जानकारी देने पर DCA ↔ BAC इस संगति द्वारा त्रिभुज सर्वांगसम होंगे ।

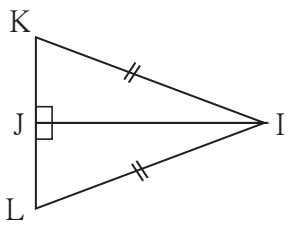
प्रश्नसंग्रह 13.1

1. आगे दी गई आकृतियों के त्रिभुजों की प्रत्येक जोड़ी में समान चिह्नों द्वारा दर्शाए गए घटक सर्वांगसम है । प्रत्येक जोड़ी के त्रिभुज किस कसौटी तथा शीर्षबिंदुओ की किस एकैकी संगति द्वारा सर्वांगसम हैं, लिखिए ।

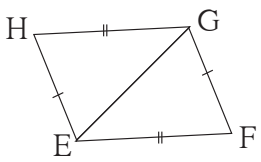
(i)



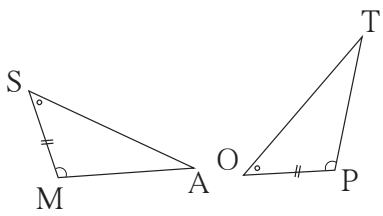
(ii)



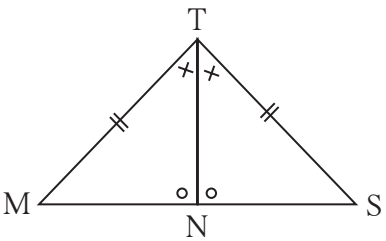
(iii)



(iv)



(v)



मैंने यह समझा

(1) **भु–को–भु कसौटी** : यदि किसी त्रिभुज की दो भुजाएँ तथा उनमें समाविष्ट कोण दूसरे त्रिभुज की दो संगत भुजा तथा उनके द्‌वारा समाविष्ट कोण से सर्वांगसम हों तो, वे त्रिभुज परस्पर सर्वांगसम होते हैं ।

(2) **भु–भु–भु कसौटी**: यदि किसी त्रिभुज की तीन भुजाएँ दूसरे त्रिभुज की तीन संगत भुजाओं से सर्वांगसम हों, तो वे दो त्रिभुज परस्पर सर्वांगसम होते हैं ।

(3) **को–भु–को कसौटी** : यदि किसी त्रिभुज के दो कोण तथा उनमें समाविष्ट भुजा दूसरे त्रिभुज के दो संगत कोण तथा उनमें समाविष्ट भुजा के सर्वांगसम होती हों तो, वे त्रिभुज परस्पर सर्वांगसम होते हैं ।

(4) **को–को–भु कसौटी :** यदि किसी त्रिभुज के दो कोण तथा उनमें समाविष्ट न हो ऐसी भुजा दूसरे त्रिभुज के संगत कोण तथा उनमें समाविष्ट न हो ऐसी संगत भुजा से सर्वांगसम हों, तो वे दोनों त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं ।

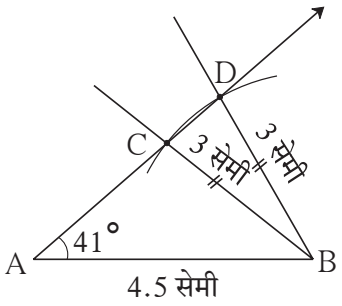
(5) **कर्ण–भुजा कसौटी** : किसी समकोण त्रिभुज का विकर्ण और एक भुजा दूसरे समकोण त्रिभुज के विकर्ण तथा संगत भुजा के सर्वांगसम हों तो वे दो त्रिभुज परस्पर सर्वांगसम होते हैं ।

अधिक जानकारी हेतु

किसी त्रिभुज की दो भुजाएँ तथा उनमें समाविष्ट न हो ऐसा कोण दूसरे त्रिभुज के संगत घटकों से सर्वांगसम हों, तो क्या वे दो त्रिभुज परस्पर सर्वांगसम होगे ?

Δ ABC तथा Δ ABD में,

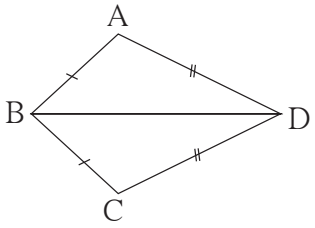
AB सामान्य भुजा है । भुजा BC $\cong$ भुजा BD, $\angle$ A सामान्य कोण है । परंतु सर्वांगसम भुजाओं द्‌वारा वह कोण समाविष्ट किया गया कोण नहीं है । अर्थात एक त्रिभुज के तीन घटक दूसरे त्रिभुज के संगत घटकों से सर्वांगसम हैं परंतु वे त्रिभुज सर्वांगसम नहीं हैं ।



इस आधार पर किसी त्रिभुज की दो भुजाएँ तथा उनके द्‌वारा समाविष्ट न किया गया कोण दूसरे त्रिभुज के संगत घटकों से सर्वांगसम हो, तो वे दो त्रिभुज सर्वांगसम होंगे ही ऐसा नहीं है ।

हल किए गए उदाहरण

उदा. (1) आकृति में, □ ABCD की सर्वांगसम भुजाएँ समान के चिह्नों द्‌वारा दर्शाई गई है । इस आकृति में सर्वांगसम कोणों की जोडियाँ हैं क्या, खोजिए ।



हल : Δ ABD तथा Δ CBD में,

भुजा AB ≅ भुजा CB ..... (दिया गया है)

भुजा DA ≅ भुजा DC ..... (दिया गया है)

भुजा BD सामान्य भुजा है ।

∴ Δ ABD ≅ Δ CBD ..... (भु-भु-भु कसौटी के अनुसार)

∴ ∠ BAD ≅ ∠ BCD

∴ ∠ ABD ≅ ∠ CBD

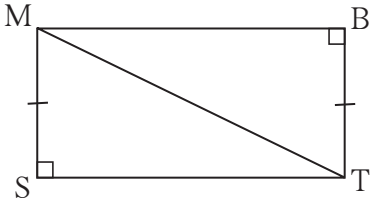
∠ ADB ≅ ∠ CDB

} .....(सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत कोण)

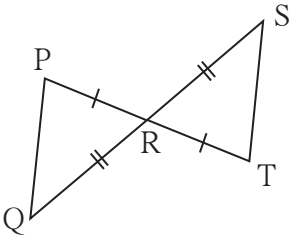
प्रश्नसंग्रह 13.2

1. आगे दी गई प्रत्येक जोड़ी के त्रिभुजों में समान चिह्नों द्‌वारा दर्शाए गए घटक सर्वांगसम हैं । प्रत्येक जोड़ी के त्रिभुज, शीर्षबिंदुओ के किस संगति से तथा किस कसौटी द्‌वारा सर्वांगसम हैं लिखिए । प्रत्येक जोड़ी के त्रिभुजों में शेष संगत सर्वांगसम घटक लिखिए ।

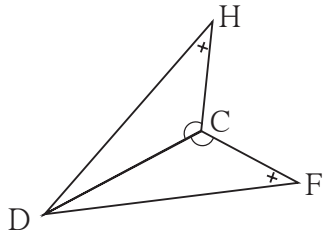
(1)



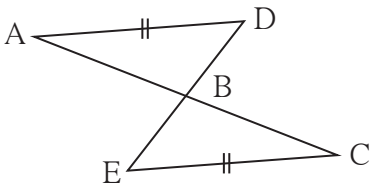
(2)



(3)



2★. संलग्न आकृति में, रेख AD ≅ रेख EC है और कौन-सी जानकारी देने पर Δ ABD तथा Δ EBC भुकोको कसौटी के अनुसार सर्वांगसम होगे ?



उत्तर सूची

प्रश्नसंग्रह 13.1 **1.** (i) भुकोभु, XWZ ↔ YWZ (ii) कर्णभुजा KJI ↔ LJI (iii) भुभुभु HEG ↔ FGE (iv) कोभुको SMA ↔ OPT (v) कोभुको या भुकोको MTN ↔ STN

प्रश्नसंग्रह 13.2 **1.** (1) Δ MST ≅ Δ TBM - कर्णभुजा, भुजा ST ≅ भुजा MB, ∠ SMT ≅ ∠ BTM, ∠ STM ≅ ∠ BMT (2) Δ PRQ ≅ Δ TRS - भुकोभु, भुजा PQ ≅ भुजा TS, ∠ RPQ ≅ ∠ RTS, ∠ PQR ≅ ∠ TSR
(3) Δ DCH ≅ Δ DCF - भुकोको, ∠ DHC ≅ ∠ DFC, भुजा HC ≅ भुजा FC
2. ∠ ADB ≅ ∠CEB तथा ∠ ABD ≅ ∠ CBE अथवा ∠ DAB ≅ ∠ ECB तथा ∠ ABD ≅ ∠CBE

CQU884