7 विचरण

थोड़ा याद करें

एक दर्जन कॉपियों का मूल्य 240 रुपये हो तो 3 कॉपियों का मूल्य कितना होगा ? 9 कॉपियों का मूल्य कितना होगा ? 24 कॉपियों का मूल्य कितना होगा ? 50 कॉपियों का मूल्य कितना होगा ? इसे ज्ञात करने के लिए निम्नलिखित सारणी पूर्ण कीजिए ।

कॉपियों की संख्या (x)	12	3	9	24	50	1
मूल्य (रुपये) (y)	240					20

उपर्युक्त सारणी के आधार पर कह सकते हैं कि प्रत्येक जोड़ी में कॉपियों की संख्या (x) और उसके मूल्य (y) का अनुपात $\frac{1}{20}$ है । यह स्थिर है । कॉपियों की संख्या तथा उनका मूल्य समान अनुपात में हैं । ऐसे उदाहरण में दो में से एक संख्या के बढ़ने पर दूसरी संख्या उसी अनुपात में बढ़ती है ।

आओ जानें

प्रत्यक्ष विचरण (Direct variation)

x और y समानुपात में है इस कथन को हम x और y में प्रत्यक्ष विचरण है या x और y के बीच प्रत्यक्ष विचरण है, इस प्रकार लिख सकते हैं । इसी प्रकार इस कथन को गणितीय भाषा में चिह्न का उपयोग करके $x \propto y$ ऐसे लिख सकते हैं । [α(अल्फा) यह विचरण के लिए प्रयोग किया जाने वाला ग्रीक अक्षर है ।]

$x \propto y$ को समीकरण के रूप में $x = ky$ लिखते हैं । यहाँ k स्थिर पद है ।

$x = ky$ या $\frac{x}{y} = k$ यह विचरण के समीकरण हैं । k विचरण का स्थिरांक है ।

निम्नलिखित कथनों को विचरण का चिह्न लगाकर कैसे लिखे गए है ? देखिए ।

(i) वृत्त का क्षेत्रफल उसकी त्रिज्या के वर्ग के प्रत्यक्ष समानुपात में होता है ।

वृत्त का क्षेत्रफल = A, त्रिज्या = r लेकर उपर्युक्त कथन $A \propto r^2$ लिखा जाता है ।

(ii) द्रव का दाब (p) उस द्रव की गहराई (d) के प्रत्यक्ष विचरण में है, इस कथन को $p \propto d$ के रुप में लिखते हैं ।

प्रत्यक्ष विचरण के चिह्नांकित विन्यास की सभी संकल्पनाएँ समझने के लिए दिए गए उदाहरणों का अध्ययन कीजिए ।

उदा. (1) x, y के प्रत्यक्ष विचरण में है, $x = 5$ हो तो $y = 30$, तो विचरण का अचरांक ज्ञात करें तथा विचरण का समीकरण लिखें ।

हल : x, y के प्रत्यक्ष विचरण में है, अर्थात $x \propto y$

$\therefore$ $x = ky$ ..... k विचरण का अचरांक है । जब $x = 5$ तब $y = 30$ दिया गया है ।

$\therefore$ $5 = k \times 30$ $\therefore$ $k = \frac{1}{6}$ विचरण का अचरांक

$\therefore$ इस अधार पर $x = ky$ अर्थात $x = \frac{y}{6}$ या $y = 6x$ प्राप्त होता है ।

उदा. (2) मूँगफली की कीमत तथा उसके वजन में प्रत्यक्ष विचरण है । 5 किग्रा मूँगफली की कीमत ₹ 450 हो, तो 1 क्विंटल मूँगफली की कीमत ज्ञात कीजिए । (1 क्विंटल = 100 किग्रा)

हल : माना मूँगफली की कीमत x तथा मूँगफली का वजन y है ।

x तथा y में प्रत्यक्ष विचरण है यह दिया गया है । अर्थात $x \alpha y$ या $x = ky$

परंतु $x = 450$ रु होने पर $y = 5$ होता है यह दिया गया है, इस आधार पर k ज्ञात करेंगे ।

$\therefore$ $x = ky$ $\therefore$ $450 = 5k$ $\therefore$ $k = 90$ (विचरण का अचरांक)

अब, $y = 100$ हो

तो $x = 90 \times 100 = 9000$

$\therefore$ 1 क्विंटल मूँगफली की कीमत 9000 रुपये होगा ।

प्रश्नसंग्रह 7.1

1. विचरण के चिह्न का उपयोग करके लिखिए ।

   (1) वृत्त की परिधि (c) उसकी त्रिज्या (r) के समानुपात में होती है ।

   (2) कार में भरा हुआ पेट्रोल (l) तथा उसके द्वारा तय की गई दूरी (d) प्रत्यक्ष विचरण में होती हैं ।

2. सेब का मूल्य तथा सेबों की संख्या में प्रत्यक्ष विचरण है । इस आधार पर निम्नलिखित सारणी पूर्ण कीजिए ।

सेबों की संख्या (x)	1	4	. . .	12	. . .
सेब का मूल्य (y)	8	32	56	. . .	160

3. यदि $m \alpha n$ और $m = 154$ हो तो $n = 7$ तो $n = 14$ होने पर m का मान ज्ञात कीजिए ।

4. n, m के प्रत्यक्ष विचरण में हो, तो दी गई सारणी पूर्ण कीजिए ।

m	3	5	6.5	. . .	1.25
n	12	20	. . .	28	. . .

5. y, x से वर्गमूल के प्रत्यक्ष विचरण में बदलता है । जब $x = 16$ तब $y = 24$ तो विचरण का अचरांक ज्ञात कीजिए तथा विचरण का समीकरण ज्ञात कीजिए ।

6. सोयाबीन की फसल निकालने के लिए 4 मजदूरों को ₹ 1000 मजदूरी देनी पड़ती है । यदि मजदूरी और मजदूरों की संख्या में प्रत्यक्ष विचरण हो तो 17 मजदूरों को कितनी मजदूरी देनी पड़ेगी ?

थोड़ा याद करें

व्यायाम के लिए विद्यार्थियों की कतार बनाई गई । प्रत्येक कतार में विद्यार्थियों की संख्या तथा कतारों की संख्या निम्न प्रकार से है ।

कतार में छात्रों की संख्या	40	10	24	12	8
कतार की संख्या	6	24	6	20	30

उपर्युक्त सारणी के आधार पर ऐसा दिखता है कि प्रत्येक जोड़ी में कतार में विद्यार्थियों की संख्या तथा कुल कतारों की संख्या का गुणनफल 240 है । अर्थात यह गुणनफल स्थिर है । प्रत्येक कतार के विद्यार्थियों की संख्या और कतारों की संख्या में प्रतिलोम विचरण है ।

जब दो संख्याओं में से एक संख्या बढ़ी तो दूसरी संख्या उसी अनुपात में कम होती हो तब वे दोनों संख्याएँ प्रतिलोम विचरण में होती हैं । उदाहरणार्थ एक संख्या दुगुनी हो गई तो दूसरी संख्या आधी हो जाती है ।

आओ जानें

प्रतिलोम विचरण (Inverse Variation)

संख्या x और y प्रतिलोम अनुपात में है यही कथन x और y प्रतिलोम विचरण में है ऐसा लिखते हैं । x और y प्रतिलोम विचरण में हो तो $x \times y$ स्थिर पद होता है । उसे k मानकर उदाहरण हल करना आसान होता है ।

x और y में प्रतिलोम विचरण है इसे $x \propto \frac{1}{y}$ ऐसा दर्शाते है ।

$x \propto \frac{1}{y}$ अर्थात $x = \frac{k}{y}$ या $x \times y = k$ यह विचरण का समीकरण है । k विचरण का अचरांक है ।

हल किए गए उदाहरण

उदा. (1) यदि a, b से प्रतिलोम विचरण में हो तो निम्नलिखित सारणी पूर्ण कीजिए ।

a	6	12	15	. . .
b	20	. . .	. . .	4
$a \times b$	120	120	. . .	. . .

हल : (i) $a \propto \frac{1}{b}$ अर्थात $a \times b = k$

(i) $a = 6$ तब $b = 20$

$\therefore k = 6 \times 20 = 120$ (विचरण का अचरांक)

(ii) $a = 12$ तब $b = ?$

$a \times b = 120$

$\therefore 12 \times b = 120$

$\therefore \quad b = 10$

(iii) $a = 15$ तब $b = ?$

$a \times b = 120$

$\therefore 15 \times b = 120$

$\therefore \quad b = 8$

(iv) $b = 4$ तब $a = ?$

$a \times b = 120$

$\therefore a \times 4 = 120$

$\therefore \quad a = 30$

उदा. (2) $f \propto \frac{1}{d^2}$, $d = 5$ तब $f = 18$

तो (i) $d = 10$ हो तो f का मान ज्ञात कीजिए। (ii) $f = 50$ हो तो d ज्ञात कीजिए।

हल : $f \propto \frac{1}{d^2}$ $\quad \therefore f \times d^2 = k$, $\quad d = 5$ तब $f = 18$ इस आधार पर k ज्ञात कीजिए।

$18 \times 5^2 = k \quad \therefore k = 18 \times 25 = 450$ (विचरण का स्थिरांक)

(i) $d = 10$ तो $f = ?$

$f \times d^2 = 450$

$\therefore f \times 10^2 = 450$

$\therefore f \times 100 = 450$

$\therefore \quad f = 4.5$

(ii) $f = 50$, $d = ?$

$f \times d^2 = 450$

$50 \times d^2 = 450$

$d^2 = 9$

$d = 3$ या $d = -3$

प्रश्नसंग्रह 7.2

1. किसी कार्य को पूरा करने के लिए लगाए गए मजदूरों की संख्या और कार्य पूरा होने में लगने वाले दिनों की जानकारी निम्नलिखित सारणी में दी गई है, यह सारणी पूर्ण कीजिए।

मजदूरों की संख्या	30	20		10	
दिन	6	9	12		36

2. प्रत्येक उदाहरण में विचरण के अचरांक ज्ञात कीजिए तथा विचरण के समीकरण लिखिए।

(1) $p \propto \frac{1}{q}$; $p = 15$ तब $q = 4$

(2) $z \propto \frac{1}{w}$; जब $z = 2.5$ तब $w = 24$

(3) $s \propto \frac{1}{t^2}$; जब $s = 4$ तब $t = 5$

(4) $x \propto \frac{1}{\sqrt{y}}$; जब $x = 15$ तब $y = 9$

3. सेबों के ढेर से सभी सेब पेटी में भरे जाते हैं। प्रत्येक पेटी में 24 सेब रखें तो उसे भरने के लिए 27 पेटियाँ लगती हैं। यदि प्रत्येक पेटी में 36 सेब रखें तो उसे भरने के लिए कितनी पेटियाँ लगेंगी ?

4. नीचे दिए गए कथन के विचरण का चिह्न का उपयोग करके लिखिए ।

(1) ध्वनि के तरंगदैर्ध्य की लंबाई (l) और बारंबारता (f) में प्रतिलोम विचरण है ।

(2) दीये के प्रकाश की तीव्रता (I) और दीये तथा परदे के बीच दूरी (d) के वर्ग में प्रतिलोम विचरण होता है ।

5. $x \alpha \frac{1}{\sqrt{y}}$ और $x = 40$ हो तो $y = 16$ होता है । यदि $x = 10$ हो तो y कितना होगा ?

6. x और y राशियो में प्रतिलोम विचरण है । $x = 15$ तब $y = 10$ होता है, $x = 20$ हो तो y = कितना ?

आओ जानें

समय, कार्य, वेग (Time, Work, Speed)

किसी निर्माण कार्य को पूरा करने के लिए निर्धारित मजदूरों की संख्या तथा उन्हें कार्य करने में लगने वाले समय से सबंधित उदाहरण प्रतिलोम विचरण के होते हैं । इसी प्रकार प्रतिलोम विचरण के कुछ उदाहरण वाहनों की गति तथा उनके द्वारा निर्धारित दूरी तय करने में लगने वाले समय से संबधित होते हैं । ऐसे उदाहरणों को समय-कार्य-वेग से संबंधित उदाहरण कहते हैं ।

उदा. (1) किसी खेत में मूँगफली निकालने का कार्य 15 महिलाएँ 8 दिन में पूरा करती हैं । वही कार्य 6 दिन में पूरा करना हो तो कितनी महिलाओं को कार्य पर लगना होगा ?

हल : कार्य को पूरा होने में लगने वाले दिन और कार्य करने वाली महिलाओं की संख्या में प्रतिलोम विचरण हैं । माना, दिनों की संख्या d और महिलाओं की संख्या n है ।

$d \alpha \frac{1}{n}$ $\quad \therefore d \times n = k$ $\quad$ (k अचरांक है)

जब $n = 15$, तब $d = 8$ $\quad \therefore k = d \times n = 15 \times 8 = 120$ (विचरण का स्थिरांक)

अब $d = 6$ हो तो n कितना यह ज्ञात करेंगे ।

$\therefore d \times n = 120$ $\quad \therefore 6 \times n = 120,$ $\quad \therefore n = 20$

$\therefore$ कार्य को 6 दिन में पूरा करने के लिए 20 महिलाओं को कार्य पर लगाना होगा ।

उदा. (2) किसी वाहन की औसत गति 48 किमी/ घंटा होने पर कुछ दूरी तय करने के लिए उसे 6 घंटे लगते हैं, तो गति 72 किमी / घंटा होने पर उतनी ही दूरी तय करने के लिए कितना समय लगेगा ?

हल : माना, वाहन की गति s तथा लगने वाला समय t गति तथा समय में प्रतिलोम विचरण है ।

$s \alpha \frac{1}{t}$ $\quad \therefore s \times t = k$ $\quad$ (k अचरांक है)

$k = s \times t = 48 \times 6 = 288$ (विचरण का स्थिरांक)

अब $s = 72$ हो तो t ज्ञात करेंगे ।

$s \times t = 288$ $\therefore 72 \times t = 288$

$\therefore t = \frac{288}{72} = 4$ घंटे

चाल 72 किमी / घंटा होने पर उतनी ही दूरी जाने के लिए 4 घंटे लगेंगे ।

प्रश्नसंग्रह 7.3

1. निम्नलिखित में से कौन-से कथन प्रतिलोम विचरण के हैं ?
   (1) मजदूरों की संख्या तथा उनके द्वारा कार्य पूर्ण करने के लिए लगने वाला समय ।
   (2) पानी की टंकी भरने के लिए आवश्यक एक जैसे नलों की संख्या तथा पानी की टंकी भरने में लगने वाला समय ।
   (3) वाहन में भरे हुए पेट्रोल तथा उसका मूल्य ।
   (4) वृत्त के क्षेत्रफल तथा उस वृत्त की त्रिज्या ।
2. यदि 15 मजदूरों द्वारा एक दीवार बनाने के लिए 48 घंटे लगते है तो 30 घंटे में वही कार्य पूरा करने के लिए कितने मजदूर लगेंगे ?
3. थैली में दूध भरने वाले यंत्र से यदि 3 मिनट में आधे लीटर के 120 थैलियाँ भरी जाती हो तो 1800 थैलियाँ भरने के लिए कितना समय लगेगा ?
4. किसी कार की औसत गति 60 किमी/ घंटा होने पर उसे कुछ दूरी तय करने में 8 घंटे लगते हैं । यदि वही दूरी साढ़े सात घंटे में तय करना हो तो उस कार की औसत गति ज्ञात कीजिए ?

उत्तर सूची

प्रश्नसंग्रह 7.1 1. (1) $c \alpha r$ (2) $l \alpha d$ 2. x क्रमश: 7 तथा 20, $y = 96$ 3. 308
4. $m = 7$, n क्रमश: 26 तथा 5 5. $k = 6$, $y = 6\sqrt{x}$ 6. ₹ 4250

प्रश्नसंग्रह 7.2 1. मजदूरों की संख्या क्रमश: 15 तथा 5, दिन = 18 2. (1) $k = 60$, $pq = 60$
(2) $k = 60$, $zw = 60$ (3) $k = 100$, $st^2 = 100$ (4) $k = 45$, $x\sqrt{y} = 45$
3. 18 पेटियाँ 4. (1) $l \alpha \frac{1}{f}$ (2) $I \alpha \frac{1}{d^2}$ 5. $y = 256$ 6. $y = 7.5$

प्रश्नसंग्रह 7.3 1. प्रतिलोम विचरण (1), (2) 2. 24 मजदूर 3. 45 मिनट
4. 4 किमी/घंटा

CP9HXB