



थोड़ा याद करें

पिछली कक्षा में हमने $ax + ay$ और $a^2 - b^2$ इस स्वरूप वाली बैजिक राशियों के गुणनखंड का अध्ययन किया है।

उदाहरण (1) $4xy + 8xy^2 = 4xy(1 + 2y)$

(2) $p^2 - 9q^2 = (p)^2 - (3q)^2 = (p + 3q)(p - 3q)$



आओ जानें

वर्ग त्रिपद के गुणनखंड (Factors of a quadratic trinomial)

$ax^2 + bx + c$ स्वरूप वाले बैजिक राशि को वर्ग त्रिपद कहते हैं।

हम यह जानते हैं कि $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$

$\therefore x^2 + (a + b)x + ab$ के $(x + a)$ तथा $(x + b)$ गुणनखंड हैं।

$x^2 + 5x + 6$ के गुणनखंड ज्ञात करने के लिए इसकी तुलना $x^2 + (a + b)x + ab$

से करने पर, $a + b = 5$ और $ab = 6$ अतः 6 के ऐसे गुणखंड ज्ञात करो जिनका योग 5 हो तथा त्रिपदी $x^2 + (a + b)x + ab$ इस रूप में लिखकर उसके गुणनखंड ज्ञात कीजिए।

$$\begin{aligned} x^2 + 5x + 6 &= x^2 + (3 + 2)x + 3 \times 2 \quad \dots\dots\dots x^2 + (a + b)x + ab \\ &= \underline{x^2 + 3x} + \underline{2x + 6} \quad \dots\dots\dots (3 + 2) \text{ को } x \text{ से गुणा कर प्राप्त गुणनफल के} \\ &\quad \text{चार पदों के दो समूह बनाकर गुणनखंड प्राप्त कीजिए} \\ &= x(x + 3) + 2(x + 3) = (x + 3)(x + 2) \end{aligned}$$

दिए गए वर्ग त्रिपदी के गुणनखंड ज्ञात करने के लिए निम्नलिखित उदाहरणों का अध्ययन कीजिए।

उदा. (1) $2x^2 - 9x + 9$ के गुणनखंड ज्ञात कीजिए।

हल : वर्ग पद का गुणांक तथा स्थिर पद का गुणा करने पर गुणनफल $2 \times 9 = 18$ है।

अब 18 के ऐसे गुणनखंड ज्ञात करेंगे जिनका योगफल मध्य पद के गुणांक के बराबर अर्थात् -9 होगा।

$18 = (-6) \times (-3)$ और $(-6) + (-3) = -9$

-9x इस पद को $-6x - 3x$ ऐसे लिखेंगे

$(x - 3)$ सामान्य पद ज्ञात करेंगे।

$\therefore 2x^2 - 9x + 9 = (x - 3)(2x - 3)$

$$\begin{array}{r} \begin{array}{c} +18 \\ -6 \quad -3 \end{array} \\ 2x^2 - 9x + 9 \\ = \underline{2x^2 - 6x} - \underline{3x + 9} \\ = 2x(x - 3) - 3(x - 3) \\ = (x - 3)(2x - 3) \end{array}$$

उदा. (2) $2x^2 + 5x - 18$ के गुणनखंड ज्ञात कीजिए ।

हल : $2x^2 + 5x - 18$

$$= \underline{2x^2 + 9x} - \underline{4x - 18}$$

$$= x(2x + 9) - 2(2x + 9)$$

$$= (2x + 9)(x - 2)$$

उदा. (3) $x^2 - 10x + 21$ के गुणनखंड ज्ञात कीजिए ।

हल : $x^2 - 10x + 21$

$$= \underline{x^2 - 7x} - \underline{3x + 21}$$

$$= x(x - 7) - 3(x - 7)$$

$$= (x - 7)(x - 3)$$

उदा. (4) $2y^2 - 4y - 30$ के गुणनखंड ज्ञात कीजिए ।

हल : $2y^2 - 4y - 30$

$$= 2(y^2 - 2y - 15) \quad \dots\dots\dots \text{सभी पदों में से सामान्य गुणनखंड 2 प्राप्त करेंगे।}$$

$$= 2(\underline{y^2 - 5y} + \underline{3y - 15}) \quad \dots\dots\dots$$

$$= 2[y(y - 5) + 3(y - 5)]$$

$$= 2(y - 5)(y + 3)$$

प्रश्नसंग्रह 6.1

1. गुणनखंड ज्ञात कीजिए ।

(1) $x^2 + 9x + 18$

(2) $x^2 - 10x + 9$

(3) $y^2 + 24y + 144$

(4) $5y^2 + 5y - 10$

(5) $p^2 - 2p - 35$

(6) $p^2 - 7p - 44$

(7) $m^2 - 23m + 120$

(8) $m^2 - 25m + 100$

(9) $3x^2 + 14x + 15$

(10) $2x^2 + x - 45$

(11) $20x^2 - 26x + 8$

(12) $44x^2 - x - 3$



आओ जानें

$a^3 + b^3$ के गुणनखंड (Factors of $a^3 + b^3$)

हम जानते हैं कि, $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

दाहिने पक्ष में $3ab$ सामान्य लेकर विस्तार सूत्र की रचना निम्नलिखित प्रकार से कर सकते हैं ।

$$(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$$

अब, $a^3 + b^3 + 3ab(a + b) = (a + b)^3 \dots\dots\dots$ पक्ष बदलने पर

$$\therefore a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b) = [(a + b)(a + b)^2] - 3ab(a + b)$$

$$= (a + b)[(a + b)^2 - 3ab] = (a + b)(a^2 + 2ab + b^2 - 3ab)$$

$$= (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$\therefore a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

दो घनों के योग के गुणनखंडों का उपरोक्त सूत्रों का उपयोग कर दिए गए उदाहरण हल करेंगे।

उदा. (1) $x^3 + 27y^3 = x^3 + (3y)^3$

$$= (x + 3y) [x^2 - x(3y) + (3y)^2]$$

$$= (x + 3y) [x^2 - 3xy + 9y^2]$$

उदा. (2) $8p^3 + 125q^3 = (2p)^3 + (5q)^3 = (2p + 5q) [(2p)^2 - 2p \times 5q + (5q)^2]$

$$= (2p + 5q) (4p^2 - 10pq + 25q^2)$$

उदा. (3) $m^3 + \frac{1}{64m^3} = m^3 + \left(\frac{1}{4m}\right)^3 = \left(m + \frac{1}{4m}\right) \left[m^2 - m \times \frac{1}{4m} + \left(\frac{1}{4m}\right)^2\right]$

$$= \left(m + \frac{1}{4m}\right) \left(m^2 - \frac{1}{4} + \frac{1}{16m^2}\right)$$

उदा. (4) $250p^3 + 432q^3 = 2(125p^3 + 216q^3)$

$$= 2[(5p)^3 + (6q)^3] = 2(5p + 6q)(25p^2 - 30pq + 36q^2)$$

प्रश्नसंग्रह 6.2

1. गुणनखंड ज्ञात कीजिए : (1) $x^3 + 64y^3$ (2) $125p^3 + q^3$ (3) $125k^3 + 27m^3$ (4) $2l^3 + 432m^3$
 (5) $24a^3 + 81b^3$ (6) $y^3 + \frac{1}{8y^3}$ (7) $a^3 + \frac{8}{a^3}$ (8) $1 + \frac{q^3}{125}$



आओ जानें

$a^3 - b^3$ के गुणनखंड (Factors of $a^3 - b^3$)

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a - b)$$

अब, $a^3 - b^3 - 3ab(a - b) = (a - b)^3$

$$\therefore a^3 - b^3 = (a - b)^3 + 3ab(a - b)$$

$$= [(a - b)(a - b)^2 + 3ab(a - b)]$$

$$= (a - b) [(a - b)^2 + 3ab]$$

$$= (a - b) (a^2 - 2ab + b^2 + 3ab)$$

$$= (a - b) (a^2 + ab + b^2)$$

$$\therefore \boxed{a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)}$$

दो घनों के अंतर का गुणनखंड ज्ञात करने के सूत्र का उपयोग कर दिए गए उदाहरण हल कीजिए ।

उदा. (1) $x^3 - 8y^3 = x^3 - (2y)^3$

$$\therefore x^3 - 8y^3 = x^3 - (2y)^3 \\ = (x - 2y)(x^2 + 2xy + 4y^2)$$

उदा. (2) $27p^3 - 125q^3 = (3p)^3 - (5q)^3 = (3p - 5q)(9p^2 + 15pq + 25q^2)$

उदा. (3) $54p^3 - 250q^3 = 2[27p^3 - 125q^3] = 2[(3p)^3 - (5q)^3]$
 $= 2(3p - 5q)(9p^2 + 15pq + 25q^2)$

उदा. (4) $a^3 - \frac{1}{a^3} = \left(a - \frac{1}{a}\right) \left(a^2 + 1 + \frac{1}{a^2}\right)$

उदा. (5) सरल रूप दीजिए : $(a - b)^3 - (a^3 - b^3)$

हल : $(a - b)^3 - (a^3 - b^3) = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 - a^3 + b^3 = -3a^2b + 3ab^2$

उदा. (6) सरल रूप दीजिए : $(2x + 3y)^3 - (2x - 3y)^3$

हल : $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ इस सूत्र के आधार पर

$$\therefore (2x + 3y)^3 - (2x - 3y)^3 \\ = [(2x + 3y) - (2x - 3y)][(2x + 3y)^2 + (2x + 3y)(2x - 3y) + (2x - 3y)^2] \\ = [2x + 3y - 2x + 3y][4x^2 + 12xy + 9y^2 + 4x^2 - 9y^2 + 4x^2 - 12xy + 9y^2] \\ = 6y(12x^2 + 9y^2) = 72x^2y + 54y^3$$



मैंने यह समझा

(i) $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ (ii) $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

प्रश्नसंग्रह 6.3

1. गुणनखंड ज्ञात कीजिए (1) $y^3 - 27$ (2) $x^3 - 64y^3$ (3) $27m^3 - 216n^3$ (4) $125y^3 - 1$

(5) $8p^3 - \frac{27}{p^3}$ (6) $343a^3 - 512b^3$ (7) $64x^3 - 729y^3$ (8) $16a^3 - \frac{128}{b^3}$

2. सरल रूप दीजिए (1) $(x + y)^3 - (x - y)^3$

(2) $(3a + 5b)^3 - (3a - 5b)^3$

(3) $(a + b)^3 - a^3 - b^3$

(4) $p^3 - (p + 1)^3$

(5) $(3xy - 2ab)^3 - (3xy + 2ab)^3$



आओ जानें

परिमेय बैजिक व्यंजक (Rational algebraic expressions)

A और B दो बैजिक व्यंजक हों तो $\frac{A}{B}$ इस व्यंजक को परिमेय बैजिक व्यंजक कहते हैं। परिमेय बैजिक व्यंजक को सरल रूप देते समय गणितीय संक्रियाएँ जोड़, घटाना, गुणा, भाग आदि परिमेय संख्याओं पर संक्रियाओं की तरह होती है। बैजिक राशियों का भाग करते समय हर या भाजक शून्य नहीं हो सकता, इसे ध्यान में रखें।

उदा. (1) सरल रूप दीजिए $\frac{a^2 + 5a + 6}{a^2 - a - 12} \times \frac{a - 4}{a^2 - 4}$

हल :
$$\begin{aligned} \frac{a^2 + 5a + 6}{a^2 - a - 12} \times \frac{a - 4}{a^2 - 4} \\ = \frac{(a + 3)(a + 2)}{(a - 4)(a + 3)} \times \frac{(a - 4)}{(a + 2)(a - 2)} \\ = \frac{1}{a - 2} \end{aligned}$$

उदा. (2) $\frac{7x^2 + 18x + 8}{49x^2 - 16} \times \frac{14x - 8}{x + 2}$

हल :
$$\begin{aligned} \frac{7x^2 + 18x + 8}{49x^2 - 16} \times \frac{14x - 8}{x + 2} \\ = \frac{(7x + 4)(x + 2)}{(7x + 4)(7x - 4)} \times \frac{2(7x - 4)}{(x + 2)} \\ = 2 \end{aligned}$$

उदा. (3) सरल रूप दीजिए $\frac{x^2 - 9y^2}{x^3 - 27y^3}$

हल :
$$\frac{x^2 - 9y^2}{x^3 - 27y^3} = \frac{(x + 3y)(x - 3y)}{(x - 3y)(x^2 + 3xy + 9y^2)} = \frac{x + 3y}{x^2 + 3xy + 9y^2}$$

प्रश्नसंग्रह 6.4

1. सरल रूप दीजिए।

(1) $\frac{m^2 - n^2}{(m + n)^2} \times \frac{m^2 + mn + n^2}{m^3 - n^3}$

(2) $\frac{a^2 + 10a + 21}{a^2 + 6a - 7} \times \frac{a^2 - 1}{a + 3}$

(3) $\frac{8x^3 - 27y^3}{4x^2 - 9y^2}$

(4) $\frac{x^2 - 5x - 24}{(x + 3)(x + 8)} \times \frac{x^2 - 64}{(x - 8)^2}$

(5) $\frac{3x^2 - x - 2}{x^2 - 7x + 12} \div \frac{3x^2 - 7x - 6}{x^2 - 4}$

(6) $\frac{4x^2 - 11x + 6}{16x^2 - 9}$

(7) $\frac{a^3 - 27}{5a^2 - 16a + 3} \div \frac{a^2 + 3a + 9}{25a^2 - 1}$

(8) $\frac{1 - 2x + x^2}{1 - x^3} \times \frac{1 + x + x^2}{1 + x}$



उत्तर सूची

प्रश्नसंग्रह 6.1

1. (1) $(X + 6)(X + 3)$ (2) $(X - 9)(X - 1)$ (3) $(Y + 12)(Y + 12)$
(4) $5(Y + 2)(Y - 1)$ (5) $(P - 7)(P + 5)$ (6) $(P + 4)(P - 11)$
(7) $(M - 15)(M - 8)$ (8) $(M - 20)(M - 5)$ (9) $(X + 3)(3X + 5)$
(10) $(X + 5)(2X - 9)$ (11) $2(5X - 4)(2X - 1)$ (12) $(11X - 3)(4X + 1)$

प्रश्नसंग्रह 6.2

1. (1) $(X + 4Y)(X^2 - 4XY + 16Y^2)$ (2) $(5P + Q)(25P^2 - 5PQ + Q^2)$
(3) $(5K + 3M)(25K^2 - 15KM + 9M^2)$ (4) $2(L + 6M)(L^2 - 6LM + 36M^2)$
(5) $3(2A + 3B)(4A^2 - 6AB + 9B^2)$ (6) $\left(Y + \frac{1}{2Y}\right)\left(Y^2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4Y^2}\right)$
(7) $\left(A + \frac{2}{A}\right)\left(A^2 - 2 + \frac{4}{A^2}\right)$ (8) $\left(1 + \frac{Q}{5}\right)\left(1 - \frac{Q}{5} + \frac{Q^2}{25}\right)$

प्रश्नसंग्रह 6.3

1. (1) $(Y - 3)(Y^2 + 3Y + Y^2)$ (2) $(X - 4Y)(X^2 + 4XY + 16Y^2)$
(3) $(3M - 6N)(9M^2 + 18MN + 36N^2)$ (4) $(5Y - 1)(25Y^2 + 5Y + 1)$
(5) $\left(2P - \frac{3}{P}\right)\left(4P^2 + 6 + \frac{9}{P^2}\right)$ (6) $(7A - 8B)(49A^2 + 56AB + 64B^2)$
(7) $(4X - 9Y)(16X^2 + 36XY + 81Y^2)$ (8) $16\left(A - \frac{2}{B}\right)\left(A^2 + \frac{2A}{B} + \frac{4}{B^2}\right)$
2. (1) $6X^2Y + 2Y^3$ (2) $270a^2b + 250b^3$ (3) $3a^2b + 3ab^2$
(4) $-3P^2 - 3P - 1$ (5) $-108X^2Y^2ab - 16a^3b^3$

प्रश्नसंग्रह 6.4

1. (1) $\frac{1}{m+n}$ (2) $a + 1$ (3) $\frac{4x^2 + 6xy + 9y^2}{2x + 3y}$
(4) 1 (5) $\frac{(x-1)(x-2)(x+2)}{(x-3)^2(x-4)}$
(6) $\frac{x-2}{4x+3}$ (7) $5a + 1$ (8) $\frac{1-x}{1+x}$

