1 परिमेय तथा अपरिमेय संख्याएँ

थोड़ा याद करें

हमने प्राकृत संख्या समूह, पूर्ण संख्या समूह, पूर्णांक संख्या समूह और परिमेय संख्या समूह की पहचान कर ली ।

प्राकृत संख्या समूह

1,2,3,4,...

पूर्ण संख्या समूह

0,1,2,3,4, ...

पूर्णांक संख्या समूह

...,−4,−3,−2,−1, 0, 1, 2, 3,...

परिमेय संख्या समूह

$\frac{-25}{3}, \frac{10}{-7}, -4, 0, 3, 8, \frac{32}{3}, \frac{67}{5}$, आदि

परिमेय संख्या समूह : $\frac{m}{n}$ इस स्वरुपवाली संख्या को परिमेय संख्या कहते हैं । यहाँ m तथा n पूर्णांक होते हैं परंतु n शून्येतर संख्या होती है ।

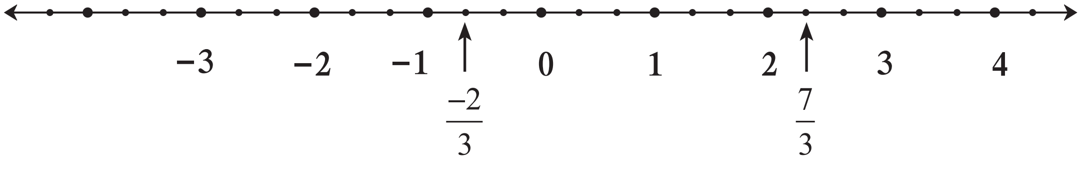
हमने देखा है कि दो परिमेय संख्याओं के मध्य असंख्य परिमेय संख्याएँ होती हैं ।

आओ जानें

संख्यारेखा पर परिमेय संख्याओं का निरुपण (To show rational numbers on a number line)

संख्याएँ $\frac{7}{3}$, 2, $\frac{-2}{3}$ संख्यारेखा पर कैसे दर्शाते हैं ? देखेंगे ।

सर्वप्रथम एक संख्यारेखा खींचिए ।



- 2 यह परिमेय संख्या पूर्णांक भी है । इसे संख्यारेखा पर निरुपित करेंगे ।
- $\frac{7}{3} = 7 \times \frac{1}{3}$, अर्थात शून्य के दाईं ओर प्रत्येक इकाई के तीन समान भाग करेंगे । शून्य से सातवाँ बिंदु $\frac{7}{3}$ यह संख्या दर्शाएगा; या $\frac{7}{3} = 2 + \frac{1}{3}$, अर्थात इस संख्या के आगे $\frac{1}{3}$ इकाई दूरी पर स्थित बिंदु $\frac{7}{3}$ यह संख्या दर्शाएगा ।

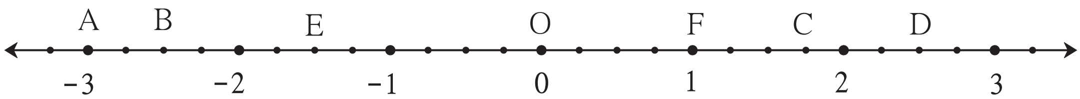
- संख्यारेखापर $\frac{-2}{3}$ यह संख्या दर्शाने के लिए, पहले $\frac{2}{3}$ यह संख्या दिखाकर 0 के बायीं ओर उतने ही अंतर पर $\frac{-2}{3}$ यह संख्या दर्शाई जायेगी ।

प्रश्नसंग्रह 1.1

1. निम्नलिखित परिमेय संख्याओं को संख्यारेखा पर निरुपित कर प्रत्येक के लिए अलग संख्यारेखा खींचिए ।

(1) $\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, -\frac{3}{2}$ (2) $\frac{7}{5}, \frac{-2}{5}, \frac{-4}{5}$ (3) $\frac{-5}{8}, \frac{11}{8}$ (4) $\frac{13}{10}, \frac{-17}{10}$

2. निम्नलिखित आकृति का निरीक्षण करके पूछे गए प्रश्नों के उत्तर लिखिए ।



(1) बिंदु B कौन–सी परिमेय संख्या दर्शाता है ? (2) $1\frac{3}{4}$ यह संख्या कौन–से बिंदु से दर्शाई गई है ?

(3) 'बिंदु D द्वारा संख्या $\frac{5}{2}$ निरुपित की गई है ।' यह कथन सत्य है या असत्य, लिखिए ।

आओ जानें

परिमेय संख्याओं में क्रमसंबंध (Comparison of rational numbers)

हम जानते हैं कि संख्यारेखा पर संख्या के प्रत्येक युग्म में, बायीं ओर की संख्या दाई ओर की संख्या से छोटी होती है । उसी प्रकार परिमेय संख्या के अंश तथा हर को एक ही शून्येतर संख्या से गुणा करें तो संख्या वही रहती है या उसका मान नही बदलता, अर्थात $\frac{a}{b} = \frac{ka}{kb}$, $(k \neq 0)$ ।

उदा. (1) संख्या $\frac{5}{4}$ तथा $\frac{2}{3}$ में क्रमसंबध निश्चित कीजिए । <, =, > इनमें से सही चिह्न का उपयोग करके लिखिए ।

हल : $\frac{5}{4} = \frac{5\times3}{4\times3} = \frac{15}{12}$ $\frac{2}{3} = \frac{2\times4}{3\times4} = \frac{8}{12}$

$\frac{15}{12} > \frac{8}{12}$ $\therefore \frac{5}{4} > \frac{2}{3}$

उदा. (2) परिमेय संख्या $\frac{-7}{9}$, $\frac{4}{5}$ की तुलना कीजिए ।

हल : ऋणात्मक संख्या हमेशा धनात्मक संख्या से छोटी होती है अर्थात $-\frac{7}{9} < \frac{4}{5}$.

दो ऋणात्मक संख्यांओं की तुलना करने के लिए

a, b धनात्मक संख्या हो तथा यदि $a < b$, तो $-a > -b$ इसका अनुभव लेंगे ।

$$\left.\begin{array}{l} 2 < 3 \text{ किंतु } -2 > -3 \\ \frac{5}{4} < \frac{7}{4} \text{ किंतु } \frac{-5}{4} > \frac{-7}{4} \end{array}\right\} \text{इनकी संख्यारेखा पर जाँच करो ।}$$

उदा. (3) $\frac{-7}{3}$, $\frac{-5}{2}$ की तुलना कीजिए ।

हल : सर्वप्रथम $\frac{7}{3}$ और $\frac{-5}{2}$ की तुलना करेंगे ।

$$\frac{7}{3} = \frac{7\times2}{3\times2} = \frac{14}{6}, \qquad \frac{5}{2} = \frac{5\times3}{2\times3} = \frac{15}{6} \qquad \text{तथा} \qquad \frac{14}{6} < \frac{15}{6}$$

$$\therefore \frac{7}{3} < \frac{5}{2} \qquad \therefore \frac{-7}{3} > \frac{-5}{2}$$

उदा. (4) परिमेय संख्याएँ $\frac{3}{5}$ तथा $\frac{6}{10}$ की तुलना कीजिए ।

हल : $\frac{3}{5} = \frac{3\times2}{5\times2} = \frac{6}{10} \qquad \therefore \frac{3}{5} = \frac{6}{10}$

परिमेय संख्याओं की तुलना करते समय निम्नलिखित नियम उपयोगी होते हैं ।

$\frac{a}{b}$ तथा $\frac{c}{d}$ परिमेय संख्याओं में यदि b और d धनात्मक हों और

(1) यदि $a \times d < b \times c$ तो $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$

(2) यदि $a \times d = b \times c$ तो $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

(3) यदि $a \times d > b \times c$ तो $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$

प्रश्नसंग्रह 1.2

1. निम्नलिखित संख्याओं में क्रमसंबध निश्चित कीजिए ।

(1) $-7, -2$ (2) $0, \frac{-9}{5}$ (3) $\frac{8}{7}, 0$ (4) $\frac{-5}{4}, \frac{1}{4}$ (5) $\frac{40}{29}, \frac{141}{29}$

(6) $-\frac{17}{20}, \frac{-13}{20}$ (7) $\frac{15}{12}, \frac{7}{16}$ (8) $\frac{-25}{8}, \frac{-9}{4}$ (9) $\frac{12}{15}, \frac{3}{5}$ (10) $\frac{-7}{11}, \frac{-3}{4}$

आओ जानें

परिमेय संख्याओं के दशमलव रुप (Decimal representation of rational numbers)

परिमेय संख्या के अंश को हर से भाग देते समय दशमलव अपूर्णांक का उपयोग किया तो उस संख्या का दशमलव रुप प्राप्त होता है । उदाहरणार्थ, $\frac{7}{4}$ =1.75, यहाँ 7 को 4 से भाग देने पर शेषफल शून्य आया । भाग की संक्रिया पूर्ण हुई है ।

परिमेय संख्या के ऐसे दशमलवरुप को खंडित (अवसानी) दशमलव रुप कहते हैं ।

हम जानते हैं कि प्रत्येक परिमेय संख्या को अखंड आवर्ती (अनवसानी) दशमलव के रुप में लिख सकते हैं ।

उदाहरणार्थ, (1) $\frac{7}{6} = 1.1666... = 1.1\dot{6}$ (2) $\frac{5}{6} = 0.8333... = 0.8\dot{3}$

(3) $\frac{-5}{3} = -1.666... = -1.\dot{6}$

(4) $\frac{22}{7} = 3.142857142857... = 3.\overline{142857}$ (5) $\frac{23}{99} = 0.2323... = 0.\overline{23}$

उसी प्रकार $\frac{7}{4} = 1.75 = 1.75000... = 1.75\dot{0}$ इस प्रकार शून्य का उपयोग कर खंडित रुप को भी अखंडित आवर्ती दशमलव रुप में लिख सकते हैं ।

प्रश्नसंग्रह 1.3

1. निम्नलिखित परिमेय संख्याओं को दशमलव रुप में लिखिए ।

(1) $\frac{9}{37}$ (2) $\frac{18}{42}$ (3) $\frac{9}{14}$ (4) $\frac{-103}{5}$ (5) $-\frac{11}{13}$

आओ जानें

अपरिमेय संख्याएँ (Irrational numbers)

परिमेय संख्याओं के अतिरिक्त और भी अनेक संख्याएँ संख्यारेखा पर होती हैं । वे परिमेय नहीं होती, अर्थात वे अपरिमेय होती हैं । $\sqrt{2}$ ऐसी ही एक अपरिमेय संख्या है ।

हम $\sqrt{2}$ इस संख्या को संख्यारेखा पर दर्शाएँगे ।

- संख्यारेखा पर बिंदु A संख्या 1 दर्शाता है । संख्यारेखा पर बिंदु A से रेखा l लंब खीचें ।
  रेखा l पर बिंदु P ऐसा लें कि OA = AP = 1 इकाई हो ।
- रेख OP खींचने पर समकोण Δ OAP तैयार होता है ।

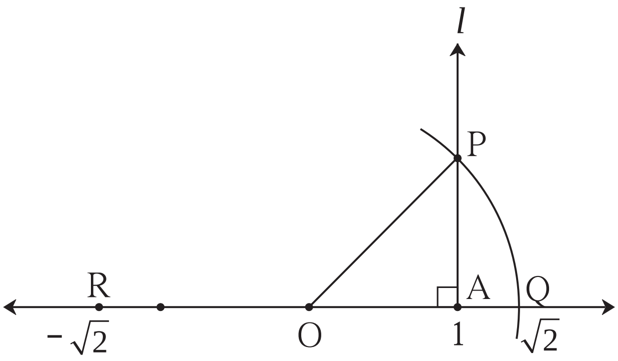
पाइथागोरस के प्रमेयानुसार,

$OP^2 = OA^2 + AP^2$

$= 1^2 + 1^2 = 1+1 = 2$

$OP^2 = 2$

$\therefore\ OP = \sqrt{2}$ ...(दोनों पक्षों का वर्गमूल लेने पर)



- अब O केंद्र तथा OP के बराबर त्रिज्या लेकर एक चाप खींचें । वह चाप संख्यारेखा पर जहाँ प्रतिच्छेदित करता है, उस बिंदु को Q नाम दें OQ की दूरी $\sqrt{2}$ है ।

अर्थात $\sqrt{2}$ यह संख्या, संख्यारेखा पर बिंदु Q से दर्शाई गई हैं ।

OQ जितना अंतर कंपास में लेकर 'O' के बायीं ओर बिंदु R स्थापित किया, तो उस बिंदु से दर्शाने वाली संख्या $-\sqrt{2}$ होगी ।

अगली कक्षा में हम सिद्ध करेंगे कि, $\sqrt{2}$ यह अपरिमेय संख्या है । अपरिमेय संख्या का दशमलव रुप अखंड और अनावर्ती होता है यह भी हम अगली कक्षा में देखेंगे ।

ध्यान में रखें कि ;

पिछली कक्षा में हमने सीखा है कि π यह परिमेय संख्या नहीं है । अर्थात वह अपरिमेय संख्या है । हम व्यवहार में सुविधा के लिए π का बहुत ही नजदीक का मान $\frac{22}{7}$ या 3.14 यह π के लिए लेते हैं । किंतु संख्या $\frac{22}{7}$ तथा 3.14 परिमेय है ।

जो संख्याएँ संख्यारेखा पर बिंदु से दर्शाते हैं उन संख्याओं को वास्तविक संख्या कहते हैं । हमने देखा है कि सभी परिमेय संख्याओं को संख्यारेखा पर दर्शा सकते हैं । इसलिए सभी परिमेय संख्याएँ वास्तविक संख्याएँ हैं । उसी प्रकार अनंत अपरिमेय संख्याएँ भी वास्तविक संख्याएँ हैं ।

$\sqrt{2}$ यह अपरिमेय संख्या है । $3\sqrt{2}$, $7 + \sqrt{2}$, $3 - \sqrt{2}$ आदि सभी अपरिमेय संख्याएँ हैं, इसे ध्यान में रखें । कारण यदि $3\sqrt{2}$ परिमेय संख्या हो तो $\frac{3\sqrt{2}}{3}$ भी परिमेय संख्या होनी चाहिए । परंतु यह सत्य नहीं है ।

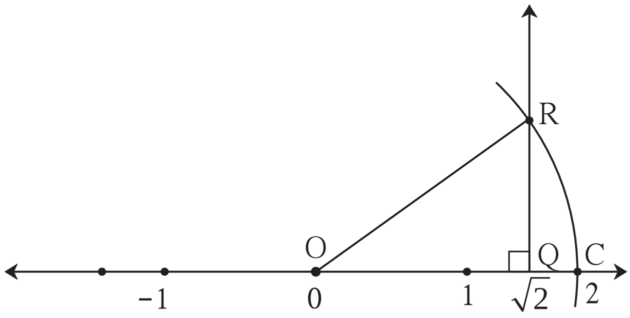
हमने देखा है कि परिमेय संख्याओं को संख्यारेखा पर कैसे दर्शाते हैं । उसी प्रकार $\sqrt{2}$ इस अपरिमेय संख्या को संख्यारेखा पर निरुपित किया है । उसी प्रकार हम $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ . . . ऐसी अपरिमेय संख्याएँ भी संख्यारेखा पर दर्शा सकते हैं ।

प्रश्नसंग्रह 1.4

1. $\sqrt{2}$ संख्या संख्यारेखा पर दर्शाई हैं । उसी प्रकार $\sqrt{3}$ इस संख्या को संख्यारेखा पर दर्शाने के लिए निम्नलिखित कृति के सोपान दिए गए हैं । उन सोपानों में रिक्त स्थानों की उचित पूर्ति कर कृति पूर्ण कीजिए ।

कृति :

- संख्यारेखा पर बिंदु Q ...... यह संख्या दर्शाता है ।
- बिंदु Q से एक लंब रेखा खींची गई है । इस रेखा पर 1 इकाई लंबाई दर्शाने वाला बिंदु R है ।
- OR जोड़ने पर समकोण Δ ORQ प्राप्त होता है ।
- l(OQ) = $\sqrt{2}$, l(QR) = 1



$\therefore$ पाइथागोरस के प्रमेयानुसार,

$$[l(OR)]^2 = [l(OQ)]^2 + [l(QR)]^2$$
$$= \square^2 + \square^2 = \square + \square$$
$$= \square \qquad \therefore\ l(OR) = \square$$

OR के बराबर अंतर लेकर खींचा गया चाप जहाँ संख्यारेखा को प्रतिच्छेदित करता है उस बिंदु को C नाम दें । बिंदु C यह $\sqrt{3}$ इस संख्या को दर्शाता है ।

2. $\sqrt{5}$ इस संख्या को संख्यारेखा पर दर्शाऐं ।

3★. संख्या $\sqrt{7}$ संख्यारेखा पर दर्शाऐं ।

उत्तर सूची

प्रश्नसंग्रह 1.1

2. (1) $\frac{-10}{4}$ (2) C (3) सत्य

प्रश्नसंग्रह 1.2

1. (1) $-7 < -2$ (2) $0 > \frac{-9}{5}$ (3) $\frac{8}{7} > 0$ (4) $\frac{-5}{4} < \frac{1}{4}$ (5) $\frac{40}{29} < \frac{141}{29}$

(6) $\frac{-17}{20} < \frac{-13}{20}$ (7) $\frac{15}{12} > \frac{7}{16}$ (8) $\frac{-25}{8} < \frac{-9}{4}$ (9) $\frac{12}{15} > \frac{3}{5}$ (10) $\frac{-7}{11} > \frac{-3}{4}$

प्रश्नसंग्रह 1.3

(1) $0.\overline{243}$ (2) $0.\overline{428571}\ldots$ (3) $0.6\overline{428571}$ (4) -20.6

(5) $-0.\overline{846153}$