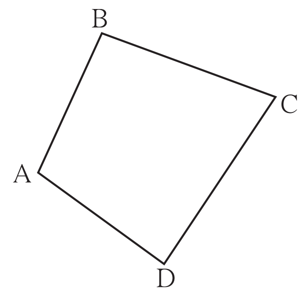
5 ذواربعۃ الاضلاع Quadrilateral

آیئے، سیکھیں

- متوازی الاضلاع
- مستطیل
- مثلث کے دو ضلعوں کے وسطی نقطہ کا مسئلہ
- متوازی الاضلاع کی کسوٹیاں
- مربع
- معین
- ذوزنقہ

آیئے ذرا یاد کریں



شکل 5.1

.1 □ABCD سے متعلق درج ذیل جوڑیاں لکھیے۔

متواتر ضلعوں کی جوڑیاں

(1) .... ، .... (2) .... ، ....

(3) .... ، .... (4) .... ، ....

متواتر زاویوں کی جوڑیاں

(1) .... ، .... (2) .... ، ....

(3) .... ، .... (4) .... ، ....

مقابل کے ضلعوں کی جوڑیاں : (1) .... ، .... (2) .... ، ....

مقابل کے زاویوں کی جوڑیاں : (1) .... ، .... (2) .... ، ....

یاد کیجیے، میری قسمیں اور خصوصیت دیکھیے

میں ذواربعۃ الاضلاع ہوں

- میری مقابل کے ضلعوں کی دونوں جوڑیاں متوازی
  - میری خصوصیت
  - مقابل کے ضلع متماثل ....
  - مقابل کے زاویے ....
  - وتر ....
- میرے تمام زاویے قائمہ
  - میری خصوصیت
  - مقابل کے ضلع ....
  - وتر ....
  - اور ....
- میرے تمام اضلاع مساوی لمبائی کے
  - میری خصوصیت
  - مقابل کے زاویے ....
  - وتر ....
  - اور ....
- میرے تمام زاویے مساوی تمام ضلعے مساوی
  - میری خصوصیت
  - وتر ....
  - اور ....

میں ذوزنقہ ہوں   میری خصوصیت

ذوار بعۃ الاضلاع کی مختلف قسمیں اوران کی خصوصیات آپ کو معلوم ہیں۔ضلعے اور زاویے کی پیمائش کرنا، تہہ کرنا، جیسے عملی کام کے ذریعے انھیں آپ سمجھ چکے ہیں۔تو اب ہم مطالعہ کریں گے کہ یہ خصوصیت منطق سے کس طرح ثابت کرتے ہیں۔

کسی خصوصیت کو منطق سے ثابت کرتے ہیں تب اس خصوصیت کو مسئلہ کہتے ہیں۔

مستطیل، معین اور مربع یہ مخصوص متوازی الاضلاع ہیں۔کس طرح، یہ اس سبق کے مطالعہ سے آپ سمجھ جائیں گے، اس لیے مطالعہ کی شروعات ہم متوازی الاضلاع سے کریں گے۔

آیئے سمجھ لیں

متوازی الاضلاع (Parallelogram)

جس ذوار بعۃ الاضلاع مقابل کے ضلعوں کی دونوں جوڑیاں متوازی ہوتی ہیں۔اس ذوار بعۃ الاضلاع کو متوازی الاضلاع کہتے ہیں۔

مسئلہ ثابت کرتے وقت، مثالیں حل کرتے وقت، اس ذوار بعۃ الاضلاع کی شکل بار بار بنانا ہوتی ہے۔لہٰذا اس شکل کو کس طرح بنایا جا سکتا ہے اس پر غور کریں گے۔

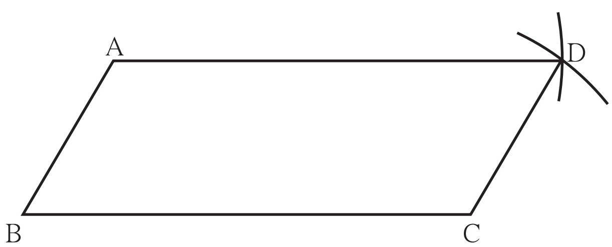
فرض کیجیے ہمیں ABCD□، متوازی الاضلاع بنانا ہے۔

طریقہ I :

شکل 5.2

- پہلے AB اور BC کوئی بھی لمبائی کے اور ایک دوسرے سے کوئی بھی پیمائش کا زاویہ بنانے والے قطعہ خط کھینچیے ۔
- اب قطعہ AD اور قطعہ BC متوازی ہونا چاہیے۔اس لیے نقطہ A سے قطعہ BC کے متوازی خط کھینچیے ۔
- اسی طرح DC قطعہ || AB قطعہ، اس لیے نقطہ C سے قطعہ AB کے متوازی خط کھینچیے ۔دونوں خط جس نقطہ پر قطع کرتے ہیں، وہ نقطہ D ہے۔لہٰذا اس طرح بننے والا ذوار بعۃ الاضلاع ABCD، متوازی الاضلاع ہے۔

طریقہ II :



شکل 5.3

- قطعہ AB اور قطعہ BC کوئی بھی لمبائی کے ایک دوسرے سے کسی بھی پیمائش کا زاویہ بنانے والے قطعات کھینچیے ۔
- کمپاس میں BC فاصلہ لے کر اور نقطہ A کو مرکز مان کر ایک قوس کھینچیے ۔
- کمپاس میں AB فاصلہ لے کر اور نقطہ A کو مرکز مان کر پہلے قوس کو قطع کرنے والا قوس کھینچیے ۔
- قوسین کے نقطہ تقاطع کو D نام دیجیے۔قطعہ AD اور قطعہ CD بنائیے۔اس طرح بننے والا ABCD□ متوازی الاضلاع ہے۔

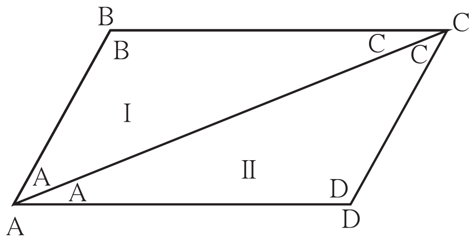
دوسرے طریقہ سے کھینچا گیا ذواربعۃ الاضلاع ہم نے مقابل کے ضلعے مساوی والا ذواربعۃ الاضلاع کھینچا ہے۔اس کا مقابل کا ضلع متوازی کیوں آتا ہے۔یہ ایک مسئلہ کے ثبوت سے آپ کو سمجھ میں آجائے گا۔

عملی کام I : متواتر ضلعے مختلف لمبائی کے اور ان کا درمیانی زاویہ مختلف پیمائشوں کا لے کر پانچ مختلف متوازی الاضلاع بنائیے۔

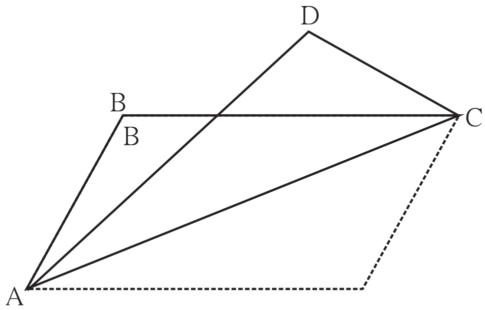
متوازی الاضلاع کے مسئلہ کو ثابت کرنے کے لیے متماثل مثلثوں کا استعمال کرتے ہیں۔اسے کس طرح لیا جائے، اسے سمجھنے کے لیے درج ذیل عمل کیجیے۔

عملی کام II

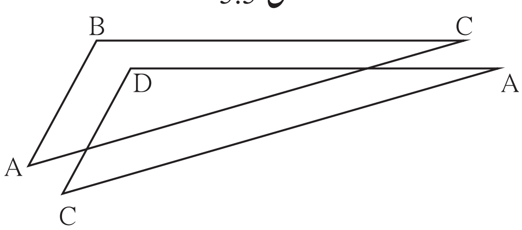
- ایک موٹے کاغذ پر □ABCD متوازی الاضلاع بنائیے۔اس کا وتر AC بنائیے۔شکل میں دکھائے ہوئے کے مطابق راسوں کے نام ذواربعۃ الاضلاع کے اندر ہی لکھیے۔
- وتر AC پر تہہ کر کے دیکھیے کہ △ADC اور △CBA ایک دوسرے پر منطبق ہوتے ہیں۔
- □ABCD اس کے AC وتر پر کاٹ کر △ADC اور △CBA علیحدہ کیجیے۔ △CBA کو پلٹ کر دیکھیے کہ وہ کیا △ADC پر منطبق ہوتا ہے۔



شکل 5.4



شکل 5.5



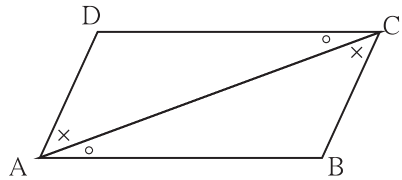
شکل 5.6

کیا دکھائی دیا؟ △CBA کا کون سا ضلع △ADC کے کون سے ضلع پر منطبق ہوا؟ △CBA کا کون سا زاویہ △ADC کے کون سے زاویے پر منطبق ہوا۔

ضلع DC، ضلع BC پر اور ضلع AD، ضلع BC پر منطبق ہوتا ہے۔اسی طرح ∠B، ∠C پر منطبق ہوتا ہے۔

یعنی ایسا دکھائی دیتا ہے کہ متوازی الاضلاع کے مقابل کے ضلعے اور مقابل کے زاویے متماثل ہیں۔آیئے متوازی الاضلاع کی اس خصوصیت کو ہم ثابت کریں۔

مسئلہ **1.** متوازی الاضلاع کے مقابل کے ضلع متماثل ہوتے ہیں اور مقابل کے زاویے متماثل ہوتے ہیں۔



شکل 5.7

دیا ہوا ہے : ABCD□ متوازی الاضلاع ہے۔ اس لیے

ضلع DC ‖ ضلع AB ، ضلع BC ‖ ضلع AD

ثابت کرنا ہے : قطعہ BC ≅ قطعہ AD ، قطعہ AB ≅ قطعہ DC ،

$\angle ADC \cong \angle CBA$ اور $\angle DAB \cong \angle BCD$

ہندسی عمل : وتر AC کھینچیے۔

ثبوت : ضلع AB ‖ ضلع DC اور وتر AC تقاطع ہے۔

متبادلہ زاویے .... } $\therefore \angle DCA \cong \angle BAC$ ...... (1)

اور $\angle DAC \cong \angle BCA$ ...... (2)

اب، △ADC اور △CBA میں،

[بیان (2) کی بناء پر] ... $\angle DAC \cong \angle BCA$

[بیان (1) کی بناء پر] ... $\angle DCA \cong \angle BAC$

(مشترک ضلع) ... ضلع AC ≅ ضلع CA

(زا-ضل-زا کی آزمائش) ... $\therefore \Delta ADC \cong \Delta CBA$

(متماثل مثلثوں کے نظیری اضلاع) ... ∴ ضلع AD ≅ ضلع CB

(متماثل مثلثوں کے نظیری اضلاع) ... اور ضلع DC ≅ ضلع AB

(متماثل مثلثوں کے نظیری زاویے) ... $\angle ADC \cong \angle CBA$ ، اسی طرح

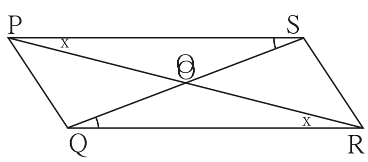
(ثابت کرسکتے ہیں) ... $\angle DAB \cong \angle BCD$ اسی طرح

غور کیجیے

مذکورہ بالا کی طرح $\angle DAB \cong \angle BCD$ ثابت کرنے کے لیے ہندسی عمل میں کیا کچھ تبدیلی کرنا پڑے گی؟ وہ تبدیلی کرکے کس طرح ثبوت لکھا جائے گا؟

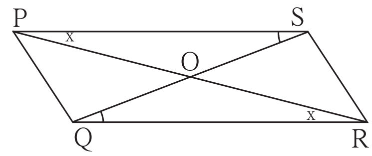
متوازی الاضلاع کی مزید ایک خصوصیت سمجھنے کے لیے ذیل کا عملی کام کیجیے۔

عملی کام : PQRS□ کوئی بھی ایک متوازی الاضلاع بنائیے۔ وتر PR اور وتر QS کھینچ کر ان کے نقطۂ تقاطع کو O نام دیجیے۔ ہر وتر کے بننے والے دو حصوں کی لمبائیوں کا موازنہ تقسیم کار (Divider) کی مدد سے کیجیے۔ آپ کو کیا دکھائی دیا؟



شکل 5.8

مسئلہ **2.** متوازی الاضلاع کے وتر ایک دوسرے کی تنصیف کرتے ہیں۔



شکل 5.7

دیا ہوا ہے : □PQRS متوازی الاضلاع ہے۔

وتر PR اور وتر QS ایک دوسرے کو نقطہ O پر کرتے ہیں۔

ثابت کرنا ہے : قطعہ RO ≅ قطعہ PO، قطعہ QO ≅ قطعہ SO،

ثبوت : △POS اور △ROQ میں،

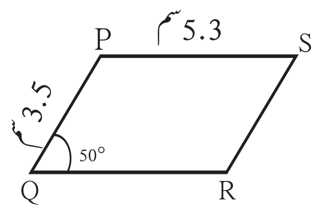
(متبادلہ زاویے) ...	$\angle OPS \cong \angle ORQ$
(متوازی الاضلاع کے مقابل کے ضلعے) ...	قطعہ PS ≅ قطعہ RQ
(متبادلہ زاویے) ...	$\angle PSO \cong \angle RQO$
(زا-ضل-زا کی آزمائش) ...	$\therefore \Delta POS \cong \Delta ROQ$
(متماثل مثلثوں کے نظیری اضلاع) ...	$\therefore$ قطعہ PO ≅ قطعہ RO ...
	اور , قطعہ SO ≅ قطعہ QO ...

اسے دھیان میں رکھیں

- متوازی الاضلاع کے مقابل کے ضلعے متماثل ہوتے ہیں۔
- متوازی الاضلاع کے مقابل کے زاویے متماثل ہوتے ہیں۔
- متوازی الاضلاع کے وتر ایک دوسرے کی تنصیف کرتے ہیں۔

حل کردہ مثالیں :

مثال **1** : □PQRS ایک متوازی الاضلاع ہے۔ PQ = 3.5 سم، PS = 5.3 سم، ∠Q = 50° ہو تو □PQRS کے دیگر اضلاع کی لمبائیاں اور زاویوں کی پیمائشیں معلوم کیجیے۔



شکل 5.10

حل : □PQRS ایک متوازی الاضلاع ہے۔

(داخلہ زاویے) ... $\therefore \angle Q + \angle P = 180^\circ$

$\therefore 50^\circ + \angle P = 180^\circ$

$\therefore \angle P = 180^\circ - 50^\circ = 130^\circ$

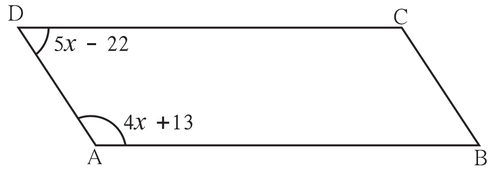
(متوازی الاضلاع کے مقابل کے زاویے) ... اب, $\angle P = \angle R$ اور , $\angle Q = \angle S$

$\therefore \angle R = 130^\circ$ اور, $\angle S = 50^\circ$

(متوازی الاضلاع کے مقابل کے ضلعے) ... اسی طرح, PS = QR اور, PQ = SR

$\therefore$ QR = 5.3 اور, SR = 3.5

مثال 2 : ABCD□ ایک متوازی الاضلاع ہے۔ ABCD□ میں $\angle A = (4x + 13)^\circ$، $\angle D = (5x - 22)^\circ$ ہوتب $\angle B$ اور $\angle C$ کی پیمائشیں معلوم کیجیے۔



شکل 5.11

حل : متوازی الاضلاع کے متواتر زاویے متمم ہوتے ہیں۔

یہاں $\angle A$ اور $\angle D$ متواتر زاویے ہیں۔

$$\therefore\ (4x + 13)^\circ + (5x - 22)^\circ = 180^\circ$$

$$\therefore\ 9x - 9 = 180$$

$$\therefore\ 9x = 189$$

$$\therefore\ x = 21$$

$$\therefore\ \angle A = 4x + 13 = 4 \times 21 + 13 = 84 + 13 = 97^\circ\ ,\ \therefore\ \angle C = 97^\circ$$

$$\angle D = 5x - 22 = 5 \times 21 - 22 = 105 - 22 = 83^\circ\ ,\ \therefore\ \angle B = 83^\circ$$

مشقی سیٹ 5.1

.1 متوازی الاضلاع WXYZ□ کے وتر نقطہ O پر قطع کرتے ہیں۔ $m\angle XYZ = 135^\circ$ ہوتب $m\angle XWZ = ?$، $m\angle YZW = ?$ اگر $l(OY) = 5$ سم ہو تب $l(WY) = ?$

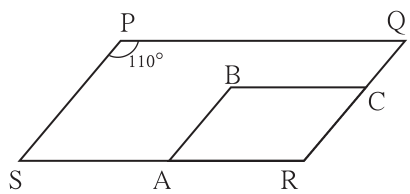
.2 متوازی الاضلاع ABCD□ میں $\angle A = (3x + 12)^\circ$ ، $\angle B = (2x - 32)^\circ$ ہوتب x کی قیمت معلوم کیجیے۔اس کی مدد سے $\angle C$ اور $\angle D$ کی پیمائشیں معلوم کیجیے۔

.3 ایک متوازی الاضلاع کا احاطہ 150 سم ہے اور ایک ضلع دوسرے ضلع سے 25 سم بڑا ہے تو اس متوازی الاضلاع کے تمام ضلعوں کی لمبائیاں معلوم کیجیے۔

.4 ایک متوازی الاضلاع کے متواتر دو زاویوں کی نسبت 1 : 2 ہے تو اس متوازی الاضلاع کے تمام زاویوں کی پیمائشیں معلوم کیجیے۔

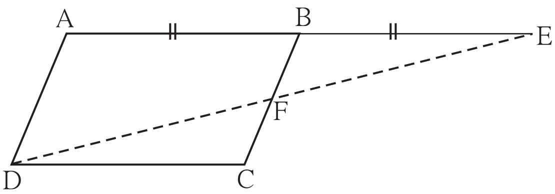
.5 متوازی الاضلاع ABCD□ کے وتر ایک دوسرے کو نقطہ O پر قطع کرتے ہیں۔ $AO = 5$، $BO = 12$ اور $AB = 13$ ہوتب دکھائیے کہ ABCD□ معین ہے۔

.6 شکل 5.12 میں PQRS□ اور ABCR□، یہ دونوں متوازی الاضلاع ہیں۔ $\angle P = 110^\circ$ ہوتب ABCR□ کے تمام زاویوں کی پیمائشیں معلوم کیجیے۔



شکل 5.12

7. ABCD□ متوازی الاضلاع ہے۔ شعاع AB پر نقطہ E اس طرح ہے کہ BE = AB تب ثابت کیجیے کہ خط ED، قطعہ BC کو نقطہ F پر تنصیف کرتا ہے۔



شکل 5.13

آیئے ذرا یاد کریں

متوازی خطوط کی آزمائشیں

1. دو خطوط کو ایک تقاطع قطع کرتا ہے تو بننے والے نظیری زاویوں کی ایک جوڑی متماثل ہوتی ہے، تب وہ دونوں خطوط ایک دوسرے کے متوازی ہوتے ہیں۔
2. دو خطوط کو ایک تقاطع قطع کرتا ہے تو بننے والے متبادلہ زاویوں کی ایک جوڑی متماثل ہوتی ہے، تب وہ دونوں خطوط ایک دوسرے کے متوازی ہوتے ہیں۔
3. دو خطوط کو ایک تقاطع قطع کرتا ہے اور اگر داخلہ زاویوں کی ایک جوڑی متمم ہو تب وہ دونوں خطوط ایک دوسرے کے متوازی ہوتے ہیں۔

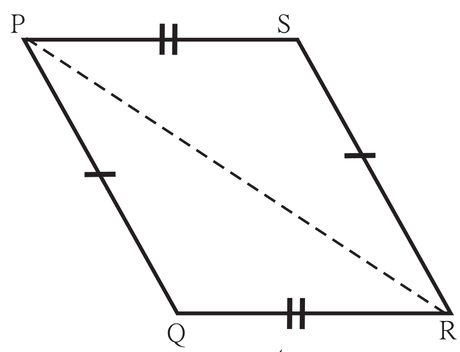
آیئے سمجھ لیں

متوازی الاضلاع کی آزمائشیں (Test for Parallelogram)

شکل 5.14

فرض کیجیے PQRS□ میں PS = QR اور PQ = SR ہے۔
PQRS□ متوازی الاضلاع ثابت کرنا ہے۔اس کے لیے ہمیں بتانا ہوگا کہ ذوار بعۃ الاضلاع کے ضلعوں کی کون سی جوڑیاں متوازی ہیں؟
اس کے لیے متوازی خطوط کی کون سی آزمائش کا استعمال کرنا سودمند ہوگا؟
آزمائش کے لیے ضروری زاویے حاصل کرنے کے لیے کون سے خط کو تقاطع کے طور پر لینا سہولت بخش ہوگا۔

مسئلہ : ذوار بعۃ الاضلاع کے مقابل کے زاویوں کی جوڑیاں متماثل ہوتی ہیں تب وہ ذوار بعۃ الاضلاع متوازی الاضلاع ہوتا ہے۔



شکل 5.15

دیا ہوا ہے : PQRS□ میں،
ضلع PS ≅ ضلع QR
ضلع PQ ≅ ضلع SR

ثابت کرنا ہے : PQRS□ متوازی الاضلاع ہے۔

ہندسی عمل : وتر PR کھینچیے ۔

ثبوت : △SPR اور △QRP میں،

ضلع SP ≅ ضلع QR ... (دیا ہوا ہے)
ضلع SR ≅ ضلع QP ... (دیا ہوا ہے)
ضلع PR ≅ ضلع RP ... (مشترک ضلع)
$\therefore$ Δ SPR ≅ Δ QRP ... (ضل ضل ضل آزمائش)

(متماثل مثلثوں کے نظیری زاویے) ... $\therefore\ \angle SPR \cong \angle QRP$

(متماثل مثلثوں کے نظیری زاویے) ... اسی طرح، $\angle PRS \cong \angle RPQ$

$\angle SPR$ اور $\angle QRP$ یہ قطعہ PS اور قطعہ QR کے تقاطع خط PR سے بننے والے متبادلہ زاویے ہیں۔

(متوازی خطوط کی متبادلہ زاویوں کی آزمائش) ... (I) ... $\therefore$ ضلع PS $\parallel$ ضلع QR

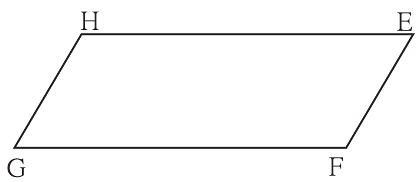
اسی طرح $\angle PRS$ اور $\angle RPQ$، یہ قطعہ PQ اور قطعہ SR کے تقاطع خط PR کی وجہ سے بننے والے متبادلہ زاویے ہیں۔

(متوازی خطوط کی متبادلہ زاویوں کی آزمائش) ... (II) ... $\therefore$ ضلع PQ $\parallel$ ضلع SR

$\therefore$ I اور II بیان کی بنا پر □PQRS متوازی الاضلاع ہے۔

متوازی الاضلاع بنانے کے دو طریقے ابتدا میں دیے ہوئے ہیں۔ دوسرے طریقے میں مقابل کے ضلع مساوی والا ذو اربعۃ الاضلاع بنایا گیا ہے۔ ایسا ذو اربعۃ الاضلاع متوازی الاضلاع کیوں ہوتا ہے، کیا اب سمجھ میں آیا؟

مسئلہ 3 : ذو اربعۃ الاضلاع کے مقابل کے زاویوں کی جوڑیاں متماثل ہوتی ہیں تب وہ متوازی الاضلاع ہوتا ہے۔ درج ذیل دیے ہوئے دعویٰ کو ثابت کرنا ہے اور ثبوت میں خالی جگہ پُر کیجیے۔



شکل 5.16

دیا ہوا ہے : □EFGH میں $\angle E \cong \angle G$ اور

$\angle .... \cong \angle ....$

ثابت کرنا ہے : □EFGH ....

ثبوت : فرض کیجیے، $m\angle E = m\angle G = x$ اور $m\angle H = m\angle F = y$

ذو اربعۃ الاضلاع کے زاویوں کی پیمائشوں کا مجموعہ .... ہوتا ہے۔

$\therefore\ m\angle E + m\angle G + m\angle H + m\angle F = ...$

$\therefore\ x + ... + y + ... = ...$

$\therefore\ \square x + \square y = ...$

$\therefore\ x + y = 180^\circ$

$\therefore\ \angle G + \angle H = ...$

قطعہ HE اور قطعہ HG کو تقاطع خط HG کے ذریعے قطع کرنے سے $\angle G$ اور $\angle H$ یہ داخلہ زاویے بن گئے ہیں۔

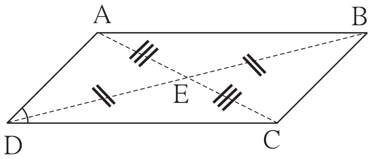
(متوازی خطوط کے داخلہ زاویوں کی آزمائش) ... (I) ... $\therefore$ ضلع HE $\parallel$ ضلع GH

اسی طرح، $m\angle G + m\angle F = ...$

(متوازی خطوط کے داخلہ زاویوں کی آزمائش) ... (II) ... $\therefore$ ضلع .... $\parallel$ ضلع ....

$\therefore$ (I) اور (II) کی بناء پر □EFGH .... ہے۔

مسئلہ : ذواربعۃ الاضلاع کے وتر ایک دوسرے کی تنصیف کرتے ہوں تب وہ ذواربعۃ الاضلاع متوازی الاضلاع ہوتا ہے۔



شکل 5.16

دیا ہوا ہے : □ABCD کے وتر ایک دوسرے کی نقطہ E پر تنصیف کرتے ہیں۔

یعنی قطعہ CE ≅ قطعہ AE اور قطعہ DE ≅ قطعہ BE

ثابت کرنا ہے : □ABCD متوازی الاضلاع ہے۔

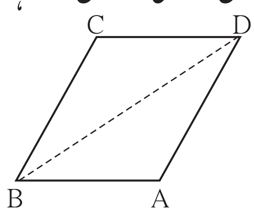
ثبوت : درج ذیل سوالوں کے جواب تلاش کیجیے اور ثبوت آپ خود لکھیے۔

1. قطعہ DC ∥ قطعہ AB، ثابت کرنے کے لیے متبادلہ زاویوں کی کون سی جوڑی متماثل دکھانا ہوگی؟
متبادلہ زاویوں کی وہ جوڑی کس تقاطع سے حاصل ہوگی؟
2. متبادلہ زاویوں کی منتخب کی گئی جوڑی میں زاویے کون کون سے مثلثوں کے زاویے ہیں؟
3. اُن میں سے کون کون سے مثلث کس آزمائش سے متماثل ہوتے ہیں؟
4. اسی طرح غور کر کے بتائیے کہ کیا قطعہ BC ∥ قطعہ AD ثابت کیا جاسکتا ہے؟

کسی ذواربعۃ الاضلاع کو متوازی الاضلاع ثابت کرنا ہو تب اوپر دیا ہوا مسئلہ استعمال کیا جاسکتا ہے۔ اس لیے ان مسئلوں کو متوازی الاضلاع کی آزمائش کہتے ہیں۔

مزید ایک مسئلہ متوازی الاضلاع کی آزمائش کے طور پر استعمال کرتے ہیں۔

مسئلہ : ذواربعۃ الاضلاع کے مقابل کے اضلاع کی ایک جوڑی متماثل اور متوازی ہو تب وہ ذواربعۃ الاضلاع متوازی الاضلاع ہوتا ہے۔



شکل 5.18

دیا ہوا ہے : □ABCD میں قطعہ DA ≅ قطعہ CB اور
قطعہ DA ∥ قطعہ CB

ثابت کرنا ہے : □ABCD متوازی الاضلاع ہے۔

ہندسی عمل : وتر BD کھینچیے۔

ذیل میں دیے ہوئے ثبوت کو آپ وسعت دے کر لکھیے۔

(ضل زا ضل آزمائش) ... $\triangle CBD \cong \triangle ADB$

(متماثل مثلثوں کے نظیری زاویے) ... $\therefore \angle CDB \cong \angle ABD$

(متوازی خطوط کی متبادلہ زاویوں کی آزمائش) ... $\therefore$ قطعہ DA ∥ قطعہ CB

اسے دھیان میں رکھیں

★ جس ذواربعۃ الاضلاع کے مقابل کے زاویوں کی جوڑیاں متماثل ہوتی ہیں تب وہ ذواربعۃ الاضلاع متوازی الاضلاع ہوتا ہے۔

★ جس ذواربعۃ الاضلاع کے مقابل کے اضلاع کی جوڑیاں متماثل ہوتی ہیں تب وہ ذواربعۃ الاضلاع متوازی الاضلاع ہوتا ہے۔

★ جس ذواربعۃ الاضلاع کے وتر ایک دوسرے کی تنصیف کرتے ہیں وہ ذواربعۃ الاضلاع متوازی الاضلاع ہوتا ہے۔

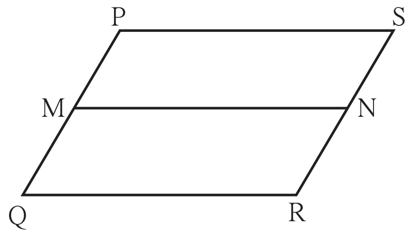
★ جس ذواربعۃ الاضلاع کے مقابل کے اضلاع کی ایک جوڑی متماثل اور متوازی ہوتی ہے، تب وہ ذواربعۃ الاضلاع متوازی الاضلاع ہوتا ہے۔
ان مسئلوں کو متوازی الاضلاع کی آزمائشیں کہتے ہیں۔

غور کیجیے

بیاض میں چھپے ہوئے خطوط ایک دوسرے کے متوازی ہوتے ہیں۔ ان خطوط کا استعمال کر کے کوئی ایک متوازی الاضلاع کس طرح بنایا جاسکتا ہے؟

حل کردہ مثالیں :

مثال **(1)** □PQRS ایک متوازی الاضلاع ہے۔ضلع PQ کا وسطی نقطہ M اور ضلع RS کا وسطی نقطہ N ہے۔تب ثابت کیجیے □PMNS اور □MQRN متوازی الاضلاع ہیں۔



شکل 5.19

دیا ہوا ہے : □PQRS متوازی الاضلاع ہے۔ضلع PQ اور ضلع RS کے بالترتیب M اور N وسطی نقاط ہیں۔

ثابت کیجیے کہ : □PMNS متوازی الاضلاع ہے۔

□MQRN متوازی الاضلاع ہے۔

ثبوت : ضلع PQ ∥ ضلع SR

ضلع PM ∥ ضلع SN ∴ ... (I) (∵ P – M – Q ; S – M – Q)

اسی طرح , ضلع PQ = ضلع SR

∴ $\frac{1}{2}$ ضلع PQ = $\frac{1}{2}$ ضلع SR

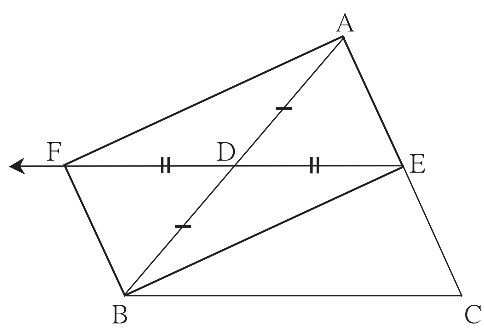
∴ ضلع PM = ضلع SN ... (II) ... (∵ M اور N وسطی نقاط ہیں۔)

∴ (I) اور (II) کی بناء پر □PMNQ متوازی الاضلاع ہے۔

اسی طرح، □MQRN متوازی الاضلاع ثابت کیا جاسکتا ہے۔

مثال **(2)** △ABC کے ضلع AB اور ضلع AC کے بالترتیب D اور E وسطی نقاط ہیں۔شعاع ED پر نقطہ F اس طرح ہے کہ ED = DF تو ثابت کیجیے کہ □AFBE متوازی الاضلاع ہے۔

اس مثال میں دیا ہوا ہے اور ثابت کرنا ہے یہ آپ لکھیے اور ثبوت میں دی ہوئی خالی جگہ پُر کرکے اسے مکمل کیجیے۔



شکل 5.20

دیا ہوا ہے : ....

ثابت کرنا ہے : ....

ثبوت : قطعہ AB اور قطعہ EF، یہ □AFBE کے [   ] ہیں۔

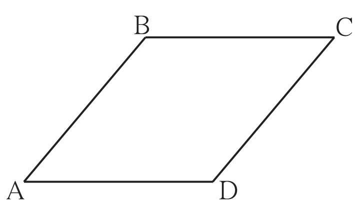
قطعہ AD ≅ قطعہ DB ....([   ])

(ہندسی عمل) ... قطعہ [   ] ≅ قطعہ [   ]

∴ □AFBE کے وتر ایک دوسرے کی [   ]

∴ [   ] آزمائش سے □AFBE متوازی الاضلاع ہے۔

مثال **(3)** ثابت کیجیے کہ کوئی بھی معین، متوازی الاضلاع ہوتا ہے۔



شکل 5.21

دیا ہوا ہے : □ABCD ایک معین ہے۔

ثابت کرنا ہے : □ABCD متوازی الاضلاع ہے۔

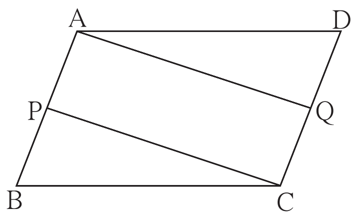
ثبوت : (دیا ہوا ہے) ... ضلع AB = ضلع BC = ضلع CD = ضلع DA

∴ ضلع AB = ضلع CD اور ضلع BC = ضلع DA

∴ □ABCD متوازی الاضلاع ہے۔ ... (متوازی الاضلاع کے مقابل کے ضلعوں کی آزمائش)

مشقی سیٹ 5.2

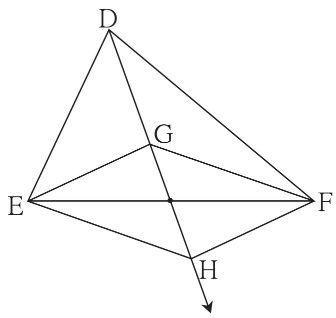
.1 شکل 5.22 میں، ABCD□ متوازی الاضلاع ہے۔
نقطہ P اور نقطہ Q بالترتیب ضلع AB اور ضلع DC کے وسطی نقاط ہیں تو ثابت کیجیے APCQ□ متوازی الاضلاع ہے۔



شکل 5.22

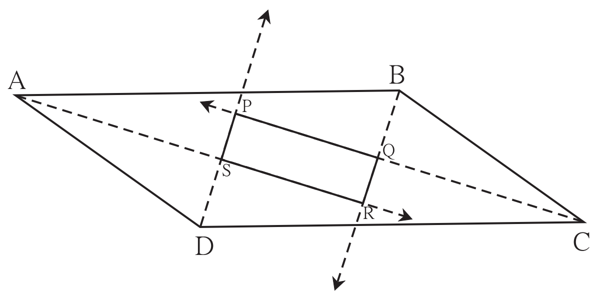
.2 کوئی بھی مستطیل متوازی الاضلاع ہوتا ہے۔ اسے ثابت کیجیے۔

.3 شکل 5.23 میں، نقطہ G، یہ △DEF کا ہندسی مرکز ہے۔ شعاع DG پر نقطہ H اس طرح ہے کہ D – G –H اور DG = GH تو
ثابت کیجیے : GEHF□ متوازی الاضلاع ہے۔



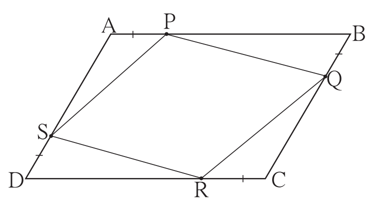
شکل 5.22

*4. ثابت کیجیے کہ متوازی الاضلاع کے چاروں زاویوں کے ناصفوں سے بننے والا ذواربعۃ الاضلاع مستطیل ہوتا ہے۔ (شکل 5.24)



شکل 5.24

.5 متصلہ شکل 5.25 میں ABCD□، متوازی الاضلاع کے اضلاع پر P، Q، R، S نقاط اس طرح ہیں کہ
AP = BQ = CR = DS تو ثابت کیجیے کہ
PQRS□ متوازی الاضلاع ہے۔



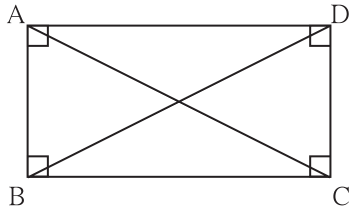
شکل 5.25

آیئے سمجھ لیں

مستطیل، معین اور مربع کی مخصوص خصوصیات (Properties of rectangle, rhombus and Square)

مستطیل، معین اور مربع یہ متوازی الاضلاع ہی ہوتے ہیں۔ اس کی وجہ سے مقابل کے ضلع مساوی ہونا، متواتر زاویے مساوی ہونا اور وتر ایک دوسرے کی تنصیف کرنا یہ خصوصیت تینوں قسم کے ذوار بعۃ الاضلاع میں ہوتی ہے۔

لیکن اس کے علاوہ کچھ زائد خصوصیت ہر قسم کے ذوار بعۃ الاضلاع میں ہوتی ہیں۔ آیئے اس پر غور کرتے ہیں۔ ان خصوصیات کا ثبوت آگے مختصراً دیا ہوا ہے۔ درمیانی مراحل کو دھیان میں رکھ کر اس ثبوت کو آپ تفصیل کے ساتھ لکھیے۔



شکل 5.26

مسئلہ : مستطیل کے وتر متماثل ہوتے ہیں۔

دیا ہوا ہے : □ABCD مستطیل ہے۔

ثابت کرنا ہے : وتر BD ≅ وتر AC

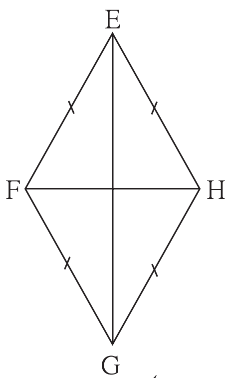
ثبوت : مختصراً دیے ہوئے ثبوت کو وجوہات کے ساتھ مکمل کیجیے۔

$\Delta\ ADC \cong \Delta\ DAB$ ... (ضل زاضل آزمائش)

وتر BD ≅ وتر AC ... (متماثل مثلثوں کے نظیری اضلاع)

مسئلہ : مربع کے وتر متماثل ہوتے ہیں۔

دیا ہوا ہے، ثابت کرنا ہے اور ثبوت آپ لکھیے۔



شکل 5.27

مسئلہ : معین کے وتر ایک دوسرے کے عمودی ناصف ہوتے ہیں۔

دیا ہوا ہے : □EFGH معین ہے۔

ثابت کرنا ہے : (i) وتر EG، وتر HF کا عمودی ناصف ہے۔

(ii) وتر HF، وتر EG کا عمودی ناصف ہے۔

ثبوت :

(i)

قطعہ EH ≅ قطعہ EF
قطعہ GH ≅ قطعہ GF } ... (دیا ہوا ہے)

قطعہ خط کے اختتامی نقاط سے ہم فاصلہ ہر نقطہ اُس قطعہ خط کے عمودی ناصف پر ہوتا ہے۔

∴ نقطہ E اور نقطہ G یہ قطعہ HF کے عمودی ناصف پر ہیں۔

دو مختلف نقاط سے ایک اور صرف ایک خط گزرتا ہے۔

∴ خط EG، وتر HF کا عمودی ناصف خط ہے۔

∴ وتر EG، وتر HF کا عمودی ناصف ہے۔

(ii) اسی طرح وتر HF، وتر EG کا عمودی ناصف ہے ثابت کر سکتے ہیں۔

ذیل کے مسئلوں کا ثبوت آپ لکھیے۔

- مربع کے وتر ایک دوسرے کے عمودی ناصف ہوتے ہیں۔
- معین کے وتر، اس کے مقابل کے زاویوں کی تنصیف کرتے ہیں۔
- مربع کے وتر، اس کے مقابل کے زاویوں کی تنصیف کرتے ہیں۔

اسے دھیان میں رکھیں

- مستطیل کے وتر متماثل ہوتے ہیں۔
- مربع کے وتر متماثل ہوتے ہیں۔
- معین کے وتر، ایک دوسرے کے عمودی ناصف ہوتے ہیں۔
- مربع کے وتر، ایک دوسرے کے عمودی ناصف ہوتے ہیں۔
- معین کے وتر، مقابل کے زاویوں کی تنصیف کرتے ہیں۔
- مربع کے وتر، مقابل کے زاویوں کی تنصیف کرتے ہیں۔

مشقی سیٹ 5.3

1. ABCD□ مستطیل کے وتر نقطہ O پر قطع کرتے ہیں۔اگر 8 = AC سم ہو تب ? = BO
اگر 35° = CAD∠ ہو تب ? = ACB∠

2. PQRS□ معین ہے۔اگر 7.5 = PQ سم ہو تب ? = QR
اگر 75° = QPS∠ ہو تب ? = PQR∠ ، ? = SRQ∠

3. IJKL□ مربع کے وتر ایک دوسرے کو نقطہ M پر قطع کرتے ہیں۔تب IMJ∠، JIK∠ اور LJK∠ کی پیمائشیں طے کیجیے۔

4. ایک معین کے وتروں کی لمبائیاں بالترتیب 20 سم اور 21 سم ہیں تو اس ذواربعۃ الاضلاع کا ضلع اور احاطہ معلوم کیجیے۔

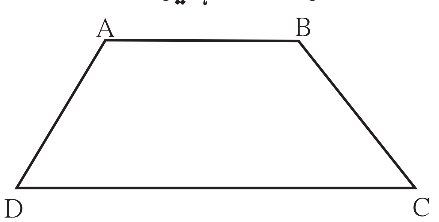
5. درج ذیل بیانات صحیح ہیں یا غلط، وجہ کے ساتھ لکھیے۔

(i) ہر متوازی الاضلاع معین ہوتا ہے۔ (ii) ہر معین، مستطیل ہوتا ہے۔
(iii) ہر مستطیل متوازی الاضلاع ہوتا ہے۔ (iv) ہر مربع، مستطیل ہوتا ہے۔
(v) ہر مربع، معین ہوتا ہے۔ (vi) ہر متوازی الاضلاع مستطیل ہوتا ہے۔

آیئے سمجھ لیں

ذوزنقہ (Trapezium)

جس ذواربعۃ الاضلاع کے مقابل کے اضلاع کی صرف ایک جوڑی متوازی ہوتی ہے اس ذواربعۃ الاضلاع کو ذوزنقہ کہتے ہیں۔

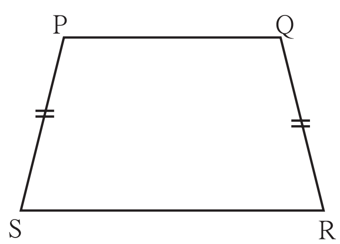


شکل 5.28

متصلہ شکل میں ABCD□ کے صرف AB اور DC ضلعے ایک دوسرے کے متوازی ہیں۔لہٰذا یہ ذوزنقہ ہے۔
متوازی خطوط کی خصوصیت کے لحاظ سے A∠ اور D∠ ان متواتر زاویوں کی جوڑی متمم ہے۔اسی طرح B∠ اور C∠ ان متواتر زاویوں کی جوڑی بھی متمم ہے۔

ذوزنقہ میں متواتر زاویوں کی دو جوڑیاں متمم ہوتی ہیں۔

ذوزنقہ کے غیر متوازی اضلاع کی جوڑی متماثل ہو تب اس ذواربعۃ الاضلاع کو متساوی الساقین (Isosceles Trapzium) کہتے ہیں۔

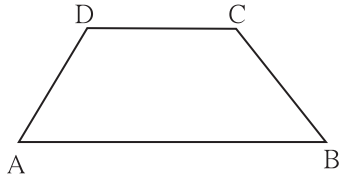


شکل 5.29

کسی بھی ذوزنقہ کے غیر متوازی ضلعوں کے وسطی نقاط کو جوڑنے والے قطعہ خط کو اس ذوزنقہ کا وسطانیہ کہتے ہیں۔

حل کردہ مثالیں :

مثال (1) $\square$ABCD کے زاویوں کی پیمائشیں 8 : 7 : 5 : 4 کے تناسب میں ہیں تب دکھایئے کہ $\square$ABCD ذوزنقہ ہے۔



شکل 5.30

حل : فرض کیجیے $\angle A$، $\angle B$، $\angle C$، $\angle D$ کی پیمائشیں بالترتیب $(4x)^\circ$، $(5x)^\circ$، $(7x)^\circ$ اور $(8x)^\circ$ ہیں۔

ذوار بعۃ الاضلاع کے تمام زاویوں کی پیمائشوں کا مجموعہ 360° ہوتا ہے۔

$\therefore\ 4x + 5x + 7x + 8x = 360$

$\therefore\ 24x = 360$, $\therefore\ x = 15$

$\angle A = 4 \times 15 = 60^\circ$, $\angle B = 5 \times 15 = 75^\circ$, $\angle C = 7 \times 15 = 105^\circ$,

اور, $\angle D = 8 \times 15 = 120^\circ$

اب, $\angle B + \angle C = 75^\circ + 105^\circ = 180^\circ$

$\therefore$ ضلع CD $\parallel$ ضلع BA ... (I)

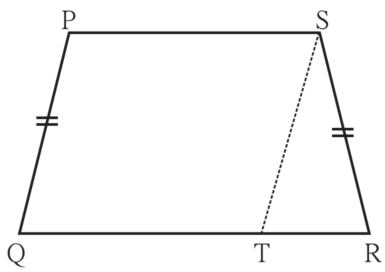
لیکن , $\angle B + \angle A = 75^\circ + 60^\circ = 135^\circ \neq 180^\circ$

$\therefore$ ضلع BC اور ضلع AD ایک دوسرے کے متوازی نہیں ہیں۔ ... (II)

$\therefore$ $\square$ABCD ذوزنقہ ہے۔ ... [بیان (1) اور (2) کی رُو سے]

مثال (2) ذوزنقہ $\square$PQRS میں ضلع QR $\parallel$ ضلع PS اور ضلع SR $\cong$ ضلع PQ، ضلع PS < ضلع QR تب

ثابت کیجیے : $\angle PQR \cong \angle SRQ$



شکل 5.31

دیا ہوا ہے : $\square$PQRS میں ضلع QR $\parallel$ ضلع PS اور ضلع SR $\cong$ ضلع PQ

ثابت کرنا ہے : $\angle PQR \cong \angle SRQ$

عمل : نقطہ S سے ضلع PQ کے متوازی ایک قطعہ خط کھینچا وہ ضلع QR کو نقطہ T پر قطع کرتا ہے۔

ثبوت : $\square$PQRS میں

قطعہ PS $\cong$ قطعہ QT ... (دیا ہوا ہے اور Q – T – R)

قطعہ PQ $\cong$ قطعہ ST ...(عمل)

$\therefore$ $\square$PQRS متوازی الاضلاع ہے۔

$\therefore\ \angle PQT \cong \angle STR$ ... (نظیری زاویے) ... (I)

اسی طرح, قطعہ PQ $\cong$ قطعہ ST

لیکن , قطعہ PQ $\cong$ قطعہ SR ... (دیا ہوا ہے)

$\therefore$ قطعہ ST $\cong$ قطعہ SR

$\therefore\ \angle STR \cong \angle SRT$ ... (متساوی الساقین مثلث کا مسئلہ) (II)

$\therefore\ \angle PQT \cong \angle SRT$ ... [بیان (I) اور (II) کی رُو سے]

$\therefore\ \angle PQR \cong \angle SRQ$ ... Q – T – R

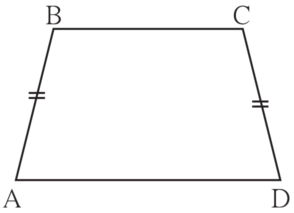
اس بنا پر ثابت ہوتا ہے کہ متساوی الساقین ذوزنقہ کے قاعدہ پر کے زاویے متماثل ہوتے ہیں۔

مشقی سیٹ 5.4

1. $\square IJKL$ میں KL ضلع $\parallel$ IJ ضلع ہے۔ $\angle I = 108°$، $\angle K$ 53° ہو تب $\angle J$ اور $\angle L$ کی پیمائشیں معلوم کیجیے۔

2. $\square ABCD$ میں AD ضلع $\parallel$ BC ضلع اور DC ضلع $\cong$ AB ضلع اور اگر $\angle A = 72°$ ہو تب $\angle B$ اور $\angle D$ کی پیمائشیں طے کیجیے۔

3. شکل 5.32 میں $\square ABCD$ میں AD ضلع $<$ BC ضلع، AD ضلع $\parallel$ BC ضلع اور اگر CD ضلع $\cong$ BA ضلع ہو تب ثابت کیجیے کہ $\angle ABC \cong \angle DCB$

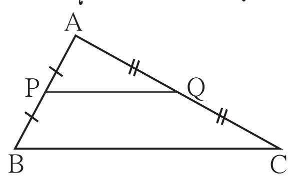


شکل 5.32

آیئے سمجھ لیں

مثلث کے دو ضلعوں کے وسطی نقاط کا مسئلہ (Theorem of midpoints of two sides of triangle)

بیان : ایک مثلث کے کوئی دو ضلعوں کے وسطی نقاط کو جوڑنے والا قطعہ خط تیسرے ضلع کے متوازی ہوتا ہے اور اس ضلع کی لمبائی کے نصف ہوتا ہے۔

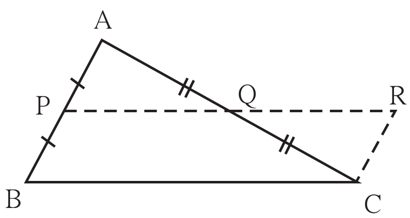


شکل 5.33

دیا ہوا ہے : $\triangle ABC$ میں نقطہ P، قطعہ AB کا وسطی نقطہ ہے اور Q، قطعہ AC کا وسطی نقطہ ہے۔

ثابت کرنا ہے : قطعہ BC $\parallel$ قطعہ PQ اور

$$PQ = \frac{1}{2} BC$$



شکل 5.34

عمل : قطعہ PQ کو R تک اس طرح بڑھائیں کہ PQ = QR

قطعہ RC کھینچیے۔

ثبوت : $\triangle AQP$ اور $\triangle CQR$ میں

قطعہ PQ $\cong$ قطعہ QR ... (عمل)

قطعہ AQ $\cong$ قطعہ QC ... (Q قطعہ AC کا وسطی نقطہ ہے)

$\angle AQP \cong \angle CQR$ ... (متقابلہ زاویے)

$\therefore \triangle AQP \cong \triangle CQR$ ... (ضل زا ضل آزمائش)

$\angle PAQ \cong \angle RCQ$ ... (متماثل مثلثوں کے نظیری زاویے) ... (1)

$\therefore$ قطعہ AP $\cong$ قطعہ CR ... (متماثل مثلثوں کے نظیری اضلاع) ... (2)

خط AB $\parallel$ خط CR ... [بیان (1) سے، متبادلہ زاویوں کی آزمائش]

قطعہ AP $\cong$ قطعہ CR ... [بیان (2) سے]

لیکن , قطعہ AP $\cong$ قطعہ PB $\cong$ قطعہ CR , اور قطعہ PB $\parallel$ قطعہ CR

$\therefore$ $\square PBCR$ متوازی الاضلاع ہے۔

$\therefore$ قطعہ PQ $\parallel$ قطعہ BC اور PR = BC ... (کیوں کہ مقابل کے اضلاع مساوی لمبائی کے ہوتے ہیں)

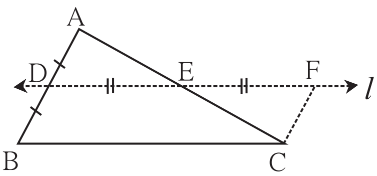
$$PQ = \frac{1}{2} PR \quad ... (\text{عمل})$$

$$\therefore PQ = \frac{1}{2} BC \qquad \because PR = BC$$

مثلث کے دو ضلعوں کے وسطی نقاط کے مسئلہ کا عکس

مسئلہ : مثلث کے ایک ضلع کے وسطی نقطہ سے گزرنے والا اور دوسرے ضلع کے متوازی خط تیسرے ضلع کی تنصیف کرتا ہے۔

اس بیان کے لیے، شکل، دیا ہوا ہے، ثابت کرنا ہے، عمل دیے ہوئے ہیں۔ اس بنا پر اس بیان کا ثبوت لکھنے کی کوشش کیجیے۔



شکل 5.35

دیا ہوا ہے : △ABC کے ضلع AB کا وسطی نقطہ D ہے۔
نقطہ D سے گزرنے والا ضلع BC کا متوازی خط l ہے، اور ضلع AC کو نقطہ E پر قطع کرتا ہے۔

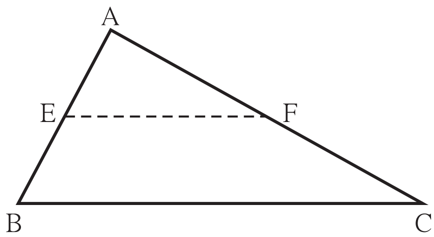
ثابت کیجیے : AE = EC

عمل : خط l پر نقطہ F اس طرح لیجیے کہ D – E – F اور DE = EF ، قطعہ CF کھینچیے۔

ثبوت : (دیا ہوا ہے) ... خط BC $\parallel$ خط l اور کیے ہوئے عمل کا استعمال کر کے دکھائیے کہ □BCFD متوازی الاضلاع ہے۔
△ADE ≅ △CFE ثابت کیجیے اور اس کی مدد سے ثابت کیجیے کا ثبوت دیجیے۔

حل کردہ مثالیں :

مثال (1) △ABC کے ضلع AB اور ضلع AC کے بالترتیب نقاط E اور F وسطی نقاط ہیں۔ اگر E = 5.6 ہو تب BC کی لمبائی معلوم کیجیے۔



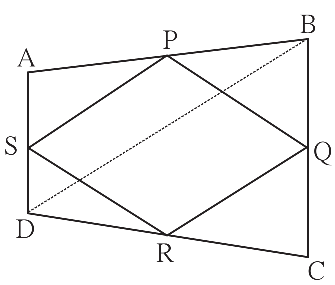
شکل 5.36

حل : △ABC میں نقطہ E اور نقطہ F بالترتیب ضلع AB اور ضلع AC کے وسطی نقاط ہیں۔

$$EF = \frac{1}{2} BC \quad ... (\text{وسطی نقطہ کا مسئلہ})$$

$$5.6 = \frac{1}{2} BC \qquad \therefore BC = 5.6 \times 2 = 11.2$$

مثال (2) ثابت کیجیے کہ کسی بھی ذوار بعۃ الاضلاع کے وسطی نقاط کو جوڑنے سے بننے والا ذوار بعۃ الاضلاع متوازی الاضلاع ہوتا ہے۔



شکل 5.37

دیا ہوا ہے : □ABCD کے اضلاع AB، BC، CD اور AD کے وسطی نقاط بالترتیب P، Q، R اور S ہیں۔

ثابت کیجیے : □PQRS متوازی الاضلاع ہے۔

عمل : وتر BC کھینچیے۔

ثبوت : $\triangle ABD$ میں نقطہ S قطعہ AD کا وسطی نقطہ ہے اور نقطہ P، قطعہ AB کا وسطی نقطہ ہے۔

(وسطی نقاط کے مسئلہ سے) ... (1) ... $PS = \frac{1}{2} BD$ اور $\therefore PS \parallel DB$

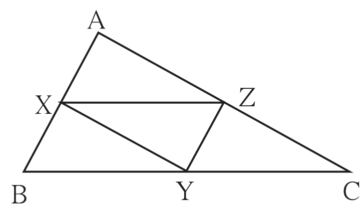
اسی طرح $\triangle DBC$ میں Q اور R بالترتیب BC اور DC اضلاع کے وسطی نقاط ہیں۔

(وسطی نقاط کے مسئلہ سے) .... (2) ... $QR = \frac{1}{2} BD$ اور $\therefore QR \parallel BD$

[بیان (1) اور (2) سے] ... $PS = QR$ اور $\therefore PS \parallel QR$

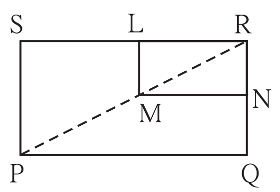
$\therefore \square PQRS$ متوازی الاضلاع ہے۔

مشقی سیٹ 5.5



شکل 5.38

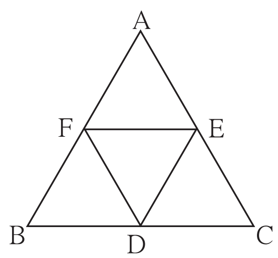
.1 شکل 5.38 میں $\triangle ABC$ کے ضلع AB، ضلع BC اور ضلع AC کے بالترتیب نقاط X، Y، Z وسطی نقاط ہیں۔ $AB = 5$ سم، $AC = 9$ سم، $BC = 11$ سم ہو تب XY، YZ اور ZX کی لمبائیاں معلوم کیجیے۔



شکل 5.39

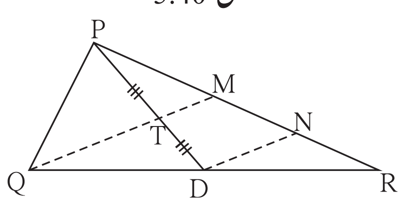
.2 شکل 5.39 میں $\square PQRS$ اور $\square MNRL$ مستطیل ہیں۔ نقطہ M، قطعہ PR کا وسطی نقطہ ہے۔

تب ثابت کیجیے (i) $SL = LR$ (ii) $LN = \frac{1}{2} SQ$



شکل 5.40

.3 شکل 5.40 میں $\triangle ABC$ متساوی الاضلاع مثلث میں نقاط F، D، E بالترتیب ضلع AB، ضلع BC، ضلع AC کے وسطی نقاط ہیں۔ تب ثابت کیجیے کہ $\triangle FED$ متساوی الاضلاع مثلث ہے۔



شکل 5.41

.4 شکل 5.41 میں قطعہ PD، $\triangle PQR$ کا وسطانیہ ہے۔ نقطہ T، ضلع PD کا وسطی نقطہ ہے، QT بڑھانے پر PR کو M نقطہ پر قطع کرتا ہے تو

دکھائیے کہ $\frac{PM}{PR} = \frac{1}{3}$

[ہدایت : $DN \parallel QM$ کھینچیے]

مجموعہ سوالات 5

.1 درج ذیل سوالوں کے متبادل جواب میں سے صحیح متبادل منتخب کیجیے۔

(i) جس ذواربعۃ الاضلاع کے متواتر ضلعوں کی تمام جوڑیاں متماثل ہوتی ہیں تو اس ذواربعۃ الاضلاع کا نام کون سا ہے؟

(A) مستطیل (B) متوازی الاضلاع (C) ذوزنقہ (D) معین

(ii) ایک مربع کے وتر کی لمبائی $12\sqrt{2}$ سم ہے تو اس کا احاطہ کتنا ہے؟

(A) 24 سم (B) $24\sqrt{2}$ سم (C) 48 سم (D) $48\sqrt{2}$ سم

(iii) ایک معین کے مقابل کے زاویوں کی پیمائش $(2x)^\circ$ اور $(3x-40)^\circ$ ہوں تب $x = ?$

(A) 100° (B) 80° (C) 160° (D) 40°

2. ایک قائمۃ الزاویہ ذوار بعۃ الاضلاع کے متواتر اضلاع بالترتیب 7 سم اور 24 سم ہیں۔ تب اس ذوار بعۃ الاضلاع کے وتر کی لمبائی معلوم کیجیے۔

3. مربع کے وتر کی لمبائی 13 سم ہے تو مربع کا ضلع معلوم کیجیے۔

4. متوازی الاضلاع کے دو اضلاع کی نسبت 3 : 4 ہے۔ اگر اس کا احاطہ 112 سم ہو تب اس کے تمام اضلاع کی لمبائیاں معلوم کیجیے۔

5. معین کے وتر PR اور وتر QS کی لمبائیاں بالترتیب 20 سم اور 48 سم ہے۔ تب معین PQRS کے ضلع PQ کی لمبائیاں معلوم کیجیے۔

6. مستطیل PQRS کے وتر ایک دوسرے کو M نقطہ پر قطع کرتے ہیں۔ اگر $\angle QMR = 50^\circ$ ہو تب $\angle MPS$ کی پیمائش معلوم کیجیے۔

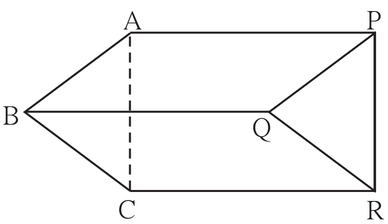
7. متصلہ شکل 5.42 میں،

قطعہ PQ $\parallel$ قطعہ AB، قطعہ PQ $\cong$ قطعہ AB،

قطعہ PR $\parallel$ قطعہ AC، قطعہ PR $\cong$ قطعہ AC

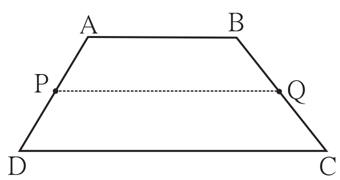
تو ثابت کیجیے کہ قطعہ QR $\parallel$ قطعہ BC اور

قطعہ QR $\cong$ قطعہ BC



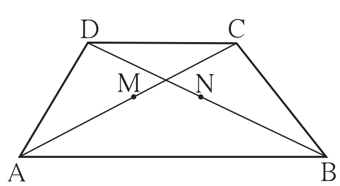
شکل 5.42

8. متصلہ شکل 5.43 میں $\square$ABCD ذوزنقہ ہے۔ DC $\parallel$ AB ہے۔ P اور Q بالترتیب قطعہ AD اور قطعہ BC کے وسطی نقاط ہیں۔ تو ثابت کیجیے کہ PQ $\parallel$ AB اور $PQ = \frac{1}{2}(AB + DC)$



شکل 5.43

9. متصلہ شکل 5.44 میں $\square$ABCD ذوزنقہ ہے۔ DC $\parallel$ AB ہے۔ M اور N بالترتیب وتر AC اور وتر DB کے وسطی نقاط ہیں تو ثابت کیجیے کہ MN $\parallel$ AB

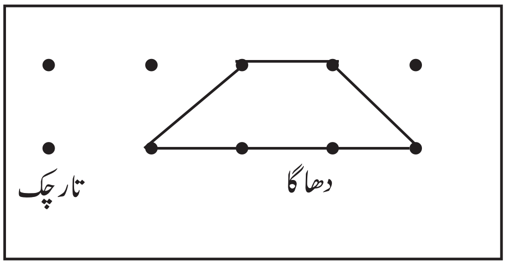


شکل 5.44

عملی کام :

ذواربعۃ الاضلاع کے مختلف مسئلوں کی تصدیق کرنا۔

وسائل : سم 10 × سم 15 کا پلائے ووڈ کا ایک ٹکڑا، 12 سے 15 تارچک، موٹا دھاگا، پرانے دعوت نامے، قینچی

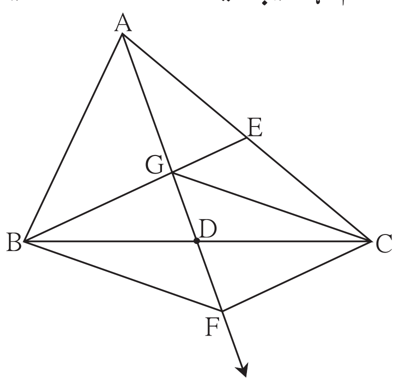


شکل 5.45

ہدایت : سم 10 × سم 15 کے پلائے ووڈ کے ٹکڑے پر مستقیم خط میں 2 سم کے فاصلے پر 5 کھلے (تارک چک) ٹھونکیے۔اسی طرح نیچے کے خط مستقیم میں کھلے ٹھونکیے۔دو خطوط کے درمیان بھی 2 سم کا فاصلہ رکھیے۔دھاگے سے مختلف ذواربعۃ الاضلاع (تارچک کے سہارے) بنائیے۔ضلع سے متعلق خصوصیات کی دھاگے کی مدد سے تصدیق کیجیے۔اس کی مدد سے ذواربعۃ الاضلاع کے زاویوں سے متعلق خصوصیات کی تصدیق کیجیے۔

مزید معلومات کے لیے

مثلثوں کے ہندسی مرکز ہر وسطانیہ کو 2 : 1 کے تناسب میں تقسیم کرتے ہیں۔یہ خصوصیت آپ کو معلوم ہے۔نیچے دیے ہوئے ثبوت کا مطالعہ کیجیے۔



شکل 5.46

دیا ہوا ہے : $\triangle ABC$ کے قطعہ AD اور قطعہ BE وسطانیہ ہیں۔جو نقطہ G پر قطع ہوتے ہیں۔

ثابت کرنا ہے : $AG : GD = 2 : 1$

عمل : شعاع AD پر نقطہ F اس طرح لیجیے کہ $G - D - F$ اور $GD = GF$

ثبوت : $\square BGCF$ کے وتر ایک دوسرے کی تنصیف کرتے ہیں۔

... (دیا ہوا ہے اور عمل)

$\therefore$ $\square BGCF$ متوازی الاضلاع ہے۔

(متوازی الاضلاع کے مقابل کے اضلاع کو شامل کرنے والا خط) ... $\therefore$ قطعہ BE ∥ خط FC

اب $\triangle AFC$ کے ضلع AC کا E وسطی نقطہ ہے۔ ... (دیا ہوا ہے)

$\therefore$ قطعہ EB ∥ خط FC

مثلث کے ایک ضلع کے وسطی نقطہ سے دوسرے ضلع کے متوازی خط، تیسرے ضلع کی تنصیف کرتا ہے۔

$\therefore$ قطعہ AF کا G وسطی نقطہ ہے۔

$\therefore AG = GF$

$AG = 2GD$ (عمل , $\because GF = 2GD$)

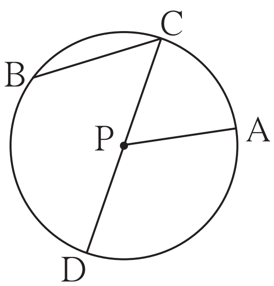
$\therefore \frac{AG}{GD} = \frac{2}{1}$ یعنی , $AG : GD = 2 : 1$

6 دائرہ Circle

آیئے، سیکھیں

- دائرہ
- داخلی دائرہ
- دائرہ کے وتر کی خصوصیت
- حائط دائرہ

آیئے ذرا یاد کریں



شکل 6.1

متصلہ شکل میں P مرکز والے دائرہ کا مشاہدہ کیجیے۔

اس شکل کے لحاظ سے درج ذیل جدول مکمل کیجیے۔

∠CPA	....	....	....	....	قطعہ PA	....
....	مرکزی زاویہ	مرکز	نصف قطر	قطر	....	وتر

آیئے سمجھ لیں

دائرہ (Circle)

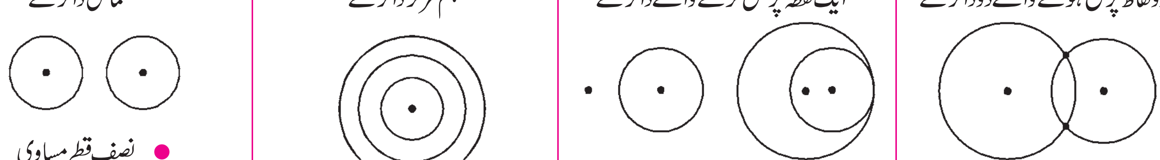
نقاط کے سیٹ کی صورت میں دائرہ کی تعریف کرتے ہیں۔

- مستوی میں ایک متعین نقطہ سے مساوی فاصلوں پر واقع تمام نقاط کے سیٹ کو دائرہ (Circle) کہتے ہیں۔
  اس متعین نقطہ کو دائرہ کا مرکز (Centre of a Circle) کہتے ہیں۔

دائرہ سے متعلق کچھ اصطلاحات :

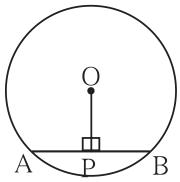
- دائرہ کے مرکز اور دائرہ پر کے کوئی بھی نقطہ کو جوڑنے والے قطعہ خط کو دائرہ کا نصف قطر (radius) کہتے ہیں۔
- دائرہ کے مرکز اور دائرہ کے کوئی بھی نقطہ کے درمیان فاصلہ کو دائرہ کا نصف قطر کہتے ہیں۔
- دائرہ پر کے کوئی بھی دو نقاط کو جوڑنے والے قطعہ خط کو دائرہ کا وتر Chord کہتے ہیں۔
- دائرہ کے مرکز سے گذرنے والے وتر کو اس دائرہ کا قطر (Diameter) کہتے ہیں۔ قطر، دائرہ کا سب سے بڑا وتر ہوتا ہے۔

مستوی میں دائرے



- دو نقاط پر قطع ہونے والے دو دائرے: مرکز مختلف، نصف قطر مختلف، مشترک نقاط دو
- ایک نقطہ پر مس کرنے والے دائرے: مرکز مختلف، نصف قطر مختلف، مشترک نقطہ صرف ایک
- ہم مرکز دائرے: مرکز ایک اور نصف قطر مختلف
- متماثل دائرے: نصف قطر مساوی

عملی کام : گروہ کے ہر طالب علم سے درج ذیل عملی کام کروایئے۔



شکل 6.3

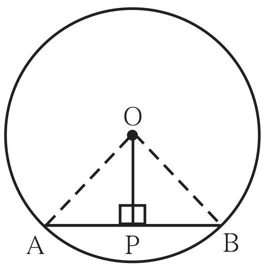
اپنی بیاض میں ایک دائرہ کھینچیے ۔اس میں ایک وتر کھینچیے ۔دائرہ کے مرکز سے وتر پر عمود کھینچیے ۔وتر کے دو حصے ہو جائیں گے۔ان کی لمبائیاں ناپیے ۔

گروہ کا رہنما درج ذیل کے مطابق ایک جدول بنائے۔اس جدول میں تمام ہی مشاہدات کا اندراج کرے۔

طالب علم / لمبائی	1	2	3	4	5	6
l(AP)	.... سم					
l(PB)	.... سم					

ان مشاہدات کی بنا پر ذہن میں آنے والی خصوصیت لکھیے ۔اس خصوصیت کا ثبوت دیکھیں گے۔

مسئلہ : دائرہ کے مرکز سے وتر پر کھینچا گیا عمود وتر کی تنصیف کرتا ہے۔



شکل 6.4

دیا ہوا ہے : O مرکز والے دائرے کا قطعہ AB وتر ہے۔

قطعہ OP ⊥ وتر AB

ثابت کیجیے : وتر BP ≅ قطعہ AP

ثبوت : قطعہ OA اور قطعہ OB کھینچیے ۔

ΔOPA اور ΔOPB میں،

∠ OPA ≅ ∠ OPB ... (قطعہ OP ⊥ وتر AB)

قطعہ OP ≅ قطعہ OP ... (مشترک ضلع)

وتر OA ≅ وتر OB ... (ایک ہی دائرہ کے نصف قطر)

∴ ΔOPA ≅ ΔOPB ... (وتر ضلع مسئلہ)

قطعہ PA ≅ قطعہ PB ... (متماثل مثلثوں کے نظیری اضلاع)

عملی کام (II) گروہ کے ہر طالب علم سے درج ذیل عملی کام کروایئے۔

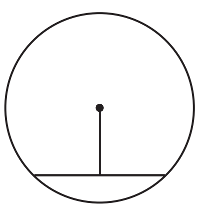
اپنی بیاض میں ایک دائرہ کھینچیے ۔اس میں ایک وتر کھینچیے ۔وتر کا وسطی نقطہ معلوم کیجیے۔

اس وسطی نقطہ اور دائرہ کے مرکز کو جوڑنے والا قطعہ خط کھینچیے ۔

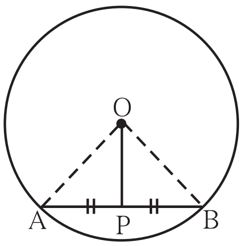
اس قطعہ خط کے وتر سے جو زاویہ بناتا ہے اسے ناپیے ۔کیا سمجھ میں آتا ہے؟

آپ کے ناپے ہوئے زاویوں کی پیمائشیں ایک دوسرے کو بتایئے۔

اس بناء پر کون سی خصوصیت سمجھ میں آتی ہے ۔اسے طے کیجیے۔


شکل 6.5

مسئلہ : دائرے کے مرکز اور وتر کے وسطی نقطہ کو جوڑنے والا قطعہ خط وتر پر عمود ہوتا ہے۔



شکل 6.6

دیا ہوا ہے : O مرکز والے دائرے کا قطعہ AB وتر ہے۔

وتر AB کا P وسطی نقطہ ہے اس لیے قطعہ PB $\cong$ قطعہ AP

ثابت کرنا ہے : وتر AB $\perp$ قطعہ OP

ثبوت : قطعہ OA اور قطعہ OB کھینچیے۔

Δ AOP اور Δ BOP میں،

قطعہ OB $\cong$ قطعہ OA ... (ایک ہی دائرے کے نصف قطر)

قطعہ OP $\cong$ قطعہ OP ... (مشترک ضلع)

قطعہ BP $\cong$ قطعہ AP ... (دیا ہوا ہے)

$\therefore \quad \Delta AOP \cong \Delta BOP$ ... (ضل ضل ضل آزمائش)

$\therefore \quad \angle OPA \cong \angle OPB$ ... (متماثل مثلثوں کے نظیری زاویے) ...(I)

اب , $\angle OPA + \angle OPB = 180°$ ... (خطی جوڑی کے زاویے)

$\therefore \quad \angle OPB + \angle OPB = 180°$ ... [بیان (I) سے]

$2\angle OPB = 180°$

$\angle OPB = 90°$

$\therefore$ وتر AB $\perp$ قطعہ OP

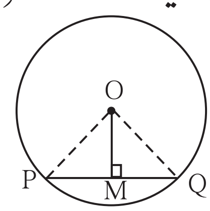
حل کردہ مثالیں :

مثال (1) : ایک دائرہ کا نصف قطر 5 سم ہے۔اس دائرہ کے ایک وتر کی لمبائی 8 سم ہے تو اس وتر کا دائرہ کے مرکز سے فاصلہ معلوم کیجیے۔

حل : سب سے پہلے دی ہوئی معلومات کو ظاہر کرنے والی شکل بنائیں گے۔

فرض کیجیے O مرکز والے دائرہ کے وتر PQ کی لمبائی 8 سم ہے۔

وتر PQ $\perp$ قطعہ OM کھینچیے۔



شکل 6.7

ہمیں پتہ ہے کہ دائرہ کے مرکز سے وتر پر کھینچا گیا عمود وتر کی تنصیف کرتا ہے۔

PM = MQ = 4 سم

OQ = 5 سم ... (دائرے کا نصف قطر 5 سم دیا ہوا ہے)

قائمۃ الزاویہ ΔOPB میں فیثاغورث کے مسئلہ کی رُو سے

$$OM^2 + MQ^2 = OQ^2$$

$$OM^2 + 4^2 = 5^2$$

$$\therefore \quad OM^2 = 5^2 - 4^2 = 25 - 16 = 9 = 3^2$$

$$\therefore \quad OM = 3$$

لہٰذا دائرہ کے مرکز سے وتر کا فاصلہ 3 سم ہے۔

مثال (2) : ایک دائرہ کا نصف قطر 20 سم ہے۔اس دائرہ کا ایک وتر، دائرہ کے مرکز سے 12 سم فاصلہ پر ہے۔تب اس وتر کی لمبائی معلوم کیجیے۔

حل : فرض کیجیے دائرہ کا مرکز O ہے۔ 20 سم = OD = نصف قطر۔ وتر CD، مرکز O سے 12 سم فاصلہ پر ہے۔

قطعہ CD $\perp$ قطعہ OP

OP = 12 سم

CP = PD ... (دائرہ کے مرکز سے وتر پر کھینچا گیا عمود وتر کی تنصیف کرتا ہے)

قائمۃ الزاویہ ΔOPD میں فیثاغورث کے مسئلہ کی رُو سے،

$$OP^2 + PD^2 = OD^2$$

$$12^2 + PD^2 = 20^2$$

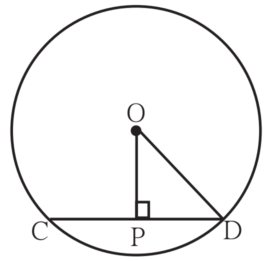
$$PD^2 = 20^2 - 12^2$$

$$PD^2 = (20+12)(20-12)$$

$$= 32 \times 8 = 256$$

$\therefore$ PD = 16 , $\therefore$ CP = 16

لیکن, CD = CP + PD = 16 + 16 = 32



شکل 6.8

وتر کی لمبائی 32 سم ہے۔

مشقی سیٹ 6.1

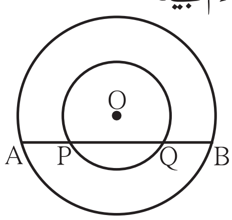
(1) دائرہ کے مرکز O سے وتر AB کا فاصلہ 8 سم ہے۔وتر AB کی لمبائی 12 سم ہے،تو دائرہ کا قطر معلوم کیجیے۔

(2) ایک دائرہ کا قطر 26 سم ہے اور وتر کی لمبائی 24 سم ہے تو اس وتر کا دائرہ کے مرکز سے فاصلہ معلوم کیجیے۔

(3) دائرہ کے مرکز سے وتر کا فاصلہ 30 ہے اور دائرہ کا نصف قطر 34 ہے، تو وتر کی لمبائی معلوم کیجیے۔

(4) O مرکز والے دائرہ کا نصف قطر 41 ہے۔دائرہ کے وتر کی لمبائی 80 ہے تو وتر PQ کا مرکز سے فاصلہ معلوم کیجیے۔

(5) شکل 6.9 میں، مرکز O والے دو دائرے ہیں۔بڑے دائرہ کا وتر AB، چھوٹے دائرہ کو نقطہ P اور Q پر قطع کرتا ہے تو ثابت کیجیے کہ AP = BQ



شکل 6.9

(6) ثابت کیجیے کہ دائرہ کا قطر اگر دائرہ کے دو وتروں کی تنصیف کرتا ہو تب وہ دونوں وتر ایک دوسرے کے متوازی ہوتے ہیں۔

عملی کام I :

(1) اپنی سہولت والے نصف قطر کے دائرہ بنایئے۔

(2) ہر دائرہ میں مساوی لمبائی کے دو وتر کھینچیے ۔

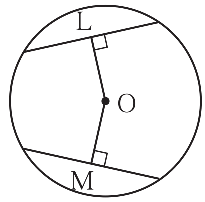
(3) دائرہ کے مرکز سے ہر وتر پر عمود کھینچیے ۔

(4) دائرہ کے مرکز سے ہر وتر کا فاصلہ ناپیے ۔

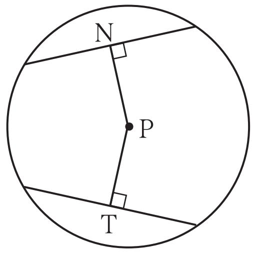
آیئے سمجھ لیں

دائرہ کے متماثل وتر اور ان کا دائرہ کے مرکز سے فاصلہ سے متعلق خصوصیت

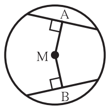
عملی کام II :



شکل (i)



شکل (ii)



شکل (iii)

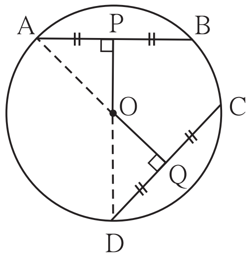
شکل (i) میں OL = OM، شکل (ii) میں PN = PT، شکل (iii) میں MA = MB کیا ایسا سمجھ میں آتا ہے؟

اس عملی کام سے دھیان میں آنے والی خصوصیت کو الفاظ میں لکھیے۔

آیئے سمجھ لیں

متماثل وتروں کی خصوصیت (Properties of congruent chords)

مسئلہ : ایک ہی دائرہ کے متماثل وتر دائرہ کے مرکز سے مساوی فاصلہ پر ہوتے ہیں۔



شکل 6.10

دیا ہوا ہے : O مرکز والے دائرہ میں،

وتر AB $\cong$ وتر CD

$OP \perp AB$، $OQ \perp CD$

ثابت کرنا ہے : $OP = OQ$

عمل : O , A اور D, O کو جوڑیے۔

ثبوت : (دائرہ کے مرکز سے وتر پر کھینچا گیا عمود، وتر کی تنصیف کرتا ہے۔) ... $AP = \frac{1}{2} AB, \quad DQ = \frac{1}{2} CD$

(دیا ہوا ہے) ... $AB = CD$

$\therefore \ AP = DQ$

(مساوی لمبائی کے قطعات) ... (I) ... قطعہ AP $\cong$ قطعہ DQ

قائمۃ الزاویہ ΔAPO اور قائمۃ الزاویہ ΔDQO میں،

[بیان (I) سے] ... قطعہ AP $\cong$ قطعہ DQ

(ایک ہی دائرہ کے نصف قطر) ... وتر OA $\cong$ وتر OD

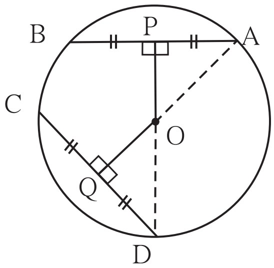
(وتر – ضلع مسئلہ) ... $\therefore \ \Delta APO \cong \Delta DQO$

(متماثل مثلثوں کے نظیری اضلاع) ... $\therefore$ قطعہ OP $\cong$ قطعہ OQ

(متماثل قطعات کی لمبائی مساوی ہوتی ہے) ... $\therefore \ OP = OQ$

دائرہ کے متماثل وتر دائرہ کے مرکز سے مساوی فاصلہ پر ہوتے ہیں۔

مسئلہ : ایک ہی دائرہ کے مرکز سے مساوی فاصلہ پر واقع وتر متماثل ہوتے ہیں۔



شکل 6.11

دیا ہوا ہے : O مرکز والے دائرہ میں،

وتر AB ⊥ قطعہ OP ، وتر CD ⊥ قطعہ OQ اور $OP = OQ$

ثابت کرنا ہے : وتر CD ≅ وتر AB

عمل : A,O اور D,O کو جوڑیے۔

ثبوت : درج ذیل بیانات کے لیے خالی جگہ پر کیجیے۔

قائمۃ الزاویہ ΔOPA اور قائمۃ الزاویہ ΔOQD میں،

وتر OA ≅ وتر OD ... [ ]

وتر OP ≅ وتر OQ ... (دیا ہوا ہے۔)

$\Delta OPA \cong \Delta OQD$ ... [ ]

قطعہ AP ≅ قطعہ QD ... (متماثل مثلثوں کے نظیری اضلاع)

$AP = QD$ ... (I)

لیکن، $AP = \frac{1}{2} AB$, $OQ = \frac{1}{2} CD$ ... [ ]

$\therefore \quad AP = QD$ ... (بیان (I) کی رُو سے)

$\therefore \quad AB = CD$

$\therefore$ قطعہ AB ≅ قطعہ CD

مذکورہ بالا دونوں مسئلے ایک دوسرے کے عکس ہیں۔ اسے سمجھ لیجیے۔

اسے دھیان میں رکھیں

ایک دائرہ کے متماثل وتر دائرہ کے مرکز سے مساوی فاصلہ پر ہوتے ہیں۔

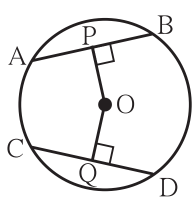
عملی کام :

مذکورہ بالا دونوں مسئلے ایک ہی دائرہ کی بجائے دو متماثل دائرے لے کر ثابت کر سکتے ہیں۔

1. متماثل دائروں کے متماثل وتر دائرے کے مرکزوں سے مساوی فاصلہ پر ہوتے ہیں۔
2. متماثل دائروں کے مرکزوں سے مساوی فاصلوں پر واقع وتر متماثل ہوتے ہیں۔

یہ دونوں مسئلوں کے لیے دیا ہوا ہے، ثابت کرنا ہے اور ثبوت لکھیے۔

حل کردہ مثالیں :



شکل 6.12

مثال (1) : دی ہوئی شکل 6.12 میں نقطہ O، دائرہ کا مرکز ہے اور

$AB = CD$ ہے۔ اگر سم $OP = 4$ ہو تب OQ کی لمبائی معلوم کیجیے۔

حل : O مرکز والے دائرے میں،

وتر AB ≅ وتر CD ... (دیا ہوا ہے۔)

(شکل میں دکھایا ہوا ہے) ... $OP \perp AB$ ،$OQ \perp CD$

$OP = 4$ سم دیا ہوا ہے۔لہٰذا وتر AB کا دائرہ کے مرکز O سے فاصلہ 4 سم ہے۔

ہمیں معلوم ہے کہ ایک ہی دائرہ کے متماثل وتر دائرہ کے مرکز سے مساوی فاصلہ پر ہوتے ہیں۔

$\therefore\ OQ = 4$ سم

مشقی سیٹ 6.2

(1) ایک دائرہ کا نصف قطر 10 سم ہے۔اس دائرہ میں دو وتر ہیں۔ ہر ایک کی لمبائی 16 سم ہے۔تو وہ وتر دائرہ کے مرکز سے کتنے فاصلہ پر ہیں؟

(2) ایک دائرہ میں دو مساوی لمبائی کے وتر ہیں۔دائرہ کے مرکز سے وہ 5 سم فاصلے پر ہیں۔دائرہ کا نصف قطر 13 سم ہے۔تو ان وتروں کی لمبائی معلوم کیجیے۔

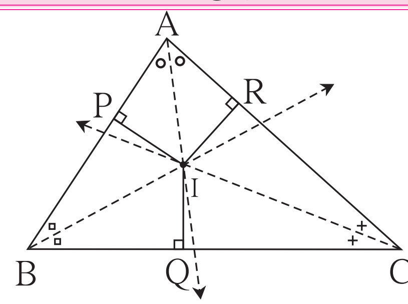
(3) مرکز C والے دائرہ کے قطعہ PM اور قطعہ PN متماثل وتر ہیں۔تو ثابت کیجیے کہ شعاع PC یہ $\angle NPM$ کی ناصف ہے۔

آیئے ذرا یاد کریں

گذشتہ جماعت میں ہم مختلف مثلث بنا کر ان کے زاویوں کے ناصف متراکز ہوتے ہیں۔اس خصوصیت کی تصدیق کر چکے ہیں۔مثلث کے زاویوں کے ناصفوں کا نقطہ تراکز 'I' حرف سے ظاہر کرتے ہیں۔

آیئے سمجھ لیں

مثلث کا داخلی دائرہ (Incircle of a triangle)



شکل 6.13

ΔABC کے تینوں زاویوں کے ناصف I نقطہ پر ملتے ہیں۔

زاویوں کے ناصفوں کو I نقطہ تراکز سے مثلث کے تینوں ضلعوں پر عمود کھینچے ہوئے ہیں۔

$IP \perp AB$ ،$IQ \perp BC$ ،$IR \perp AC$

زاویوں کے ناصفوں پر واقع ہر نقطہ زاویے کے دونوں ساقین (ضلعوں) سے مساوی فاصلے پر ہوتے ہیں اس کا مطالعہ ہم کر چکے ہیں۔

$\angle B$ کے ناصف پر I نقطہ ہے۔اس لیے $IP = IQ$

$\angle B$ کے ناصف پر I نقطہ ہے۔اس لیے $IQ = IR$

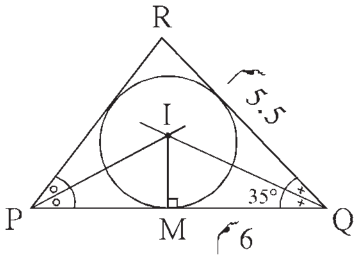
$\therefore\ IP = IQ = IR$

نقطہ I، مثلث کے تینوں اضلاع سے یعنی AB، AC، BC سے ہم فاصلہ ہے۔

نقطہ I کو مرکز مان کر اور IP کو نصف قطر لے کر کھینچا گیا دائرہ ضلع AB ، AC اور BC کو اندرونی طور پر مس کرے گا۔ایسے دائرہ کو مثلث کا داخلی دائرہ کہتے ہیں۔

آیئے سمجھ لیں

مثلث کا داخلی دائرہ بنانا (To construct incircle of a triangle)

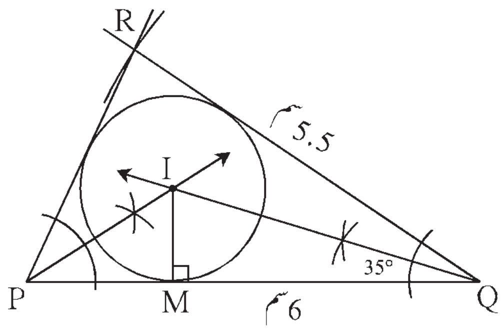


کچی شکل 6.14

مثال : Δ PQR اس طرح بنایئے کہ سم PQ = 6 ، ∠Q = 35° ،

سم QR = 5.5 ، Δ PQR کا داخلی دائرہ بنایئے۔

پہلے کچی شکل بنایئے اور اس میں دی ہوئی معلومات دکھایئے۔



شکل 6.15

عمل کے مراحل :

(1) Δ PQR، دی ہوئی پیمائشوں کا مثلث بنایئے۔

(2) کوئی بھی دو زاویوں کے ناصف کھینچیے ۔

(3) زاویوں کے ناصفوں کے نقطہ تقاطع کا I نام دیجیے۔

(4) نقطہ I سے قطعہ PQ پر IM عمود کھینچیے ۔

(5) IM نصف قطر اور I کو مرکز مان کر دائرہ بنایئے۔

اسے دھیان میں رکھیں

مثلث کے تینوں ضلعوں کو مس کرنے والے دائرہ کو مثلث کا داخلی دائرہ کہتے ہیں اور اس دائرہ کے مرکز کو داخلی مرکز کہتے ہیں۔

آیئے ذرا یاد کریں

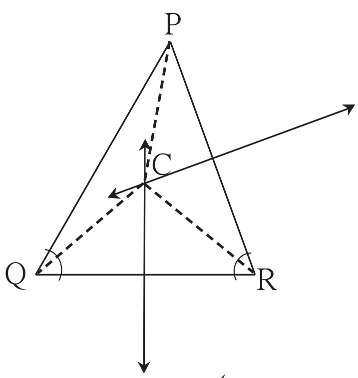
گزشتہ جماعت میں ہم نے 'مثلث کے اضلاع کے عمودی ناصف متراکز ہوتے ہیں۔' اس خصوصیت کی مختلف مثلث بنا کر تصدیق کر چکے ہیں۔

مثلث کے اضلاع کے عمودی ناصفوں کے نقطۂ تراکز کو 'C' حرف سے ظاہر کرتے ہیں۔

آیئے سمجھ لیں

Δ PQR کے اضلاع کے عمودی ناصف 'C' نقطہ پر ملتے ہیں۔اس لیے

'C' عمودی ناصفوں کا نقطۂ تراکز ہے۔



شکل 6.16

مثلث کا حائط دائرہ (Circum circle)

نقطہ C، مثلث PQR کے تینوں اضلاع کے عمودی ناصفوں پر واقع ہے۔ PC، QC اور RC کو جوڑیئے۔ قطعہ خط کے عمودی ناصف پر واقع ہر نقطہ، اس قطعہ خط کے اختتامی نقاط سے مساوی فاصلہ پر ہوتا ہے۔ ہم اس کا مطالعہ کر چکے ہیں۔

(نقطہ C، قطعہ PQ کے عمودی ناصف پر ہے۔) ... (I) ... $\therefore PC = QC$

(نقطہ C، قطعہ QR کے عمودی ناصف پر ہے۔) ... (II) ... $\therefore QC = RC$

(بیان I اور II سے) ... $\therefore PC = QC = RC$

$\therefore$ نقطہ C کو مرکز مان کر PC کو نصف قطر لے کر بنایا گیا دائرہ مثلث کے تینوں راس سے گزرے گا۔ ایسے دائرہ کو مثلث کا حائط دائرہ کہتے ہیں۔

اسے دھیان میں رکھیں

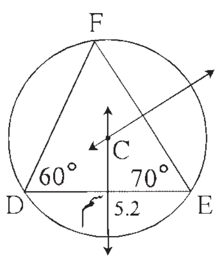
مثلث کے تمام راسوں سے گزرنے والے دائرہ کو مثلث کا حائط دائرہ کہتے ہیں اور اس دائرہ کے مرکز کو حائط مرکز کہتے ہیں۔

آیئے سمجھ لیں

مثلث کا حائط دائرہ بنانا :

مثال : Δ DEF میں سم DE = 5.2، $\angle D=60°$، $\angle E = 70°$ ہو تب Δ DEF بنایئے۔ اور اس کا حائط دائرہ بنایئے۔

پہلے کچی شکل بنایئے۔ اس میں دی ہوئی معلومات لکھیے۔



کچی شکل

شکل 6.17

عمل کے مراحل :

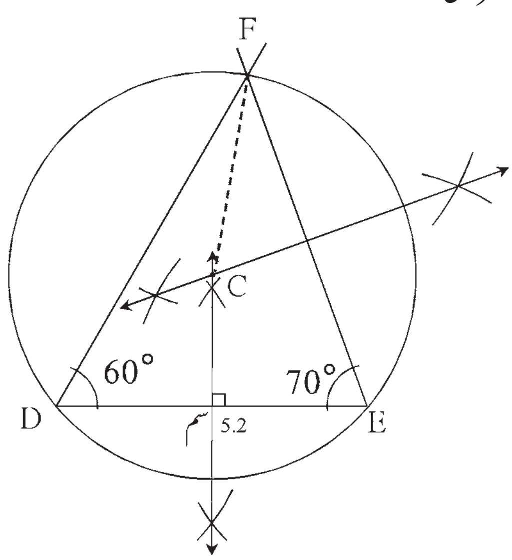
(1) دی ہوئی پیمائش کا مثلث DEF بنایئے۔

(2) کوئی دو اضلاع کے عمودی ناصف بنایئے۔

(3) وہ عمودی ناصف جہاں ملتے ہیں اس نقطہ کو C نام دیجیے۔

(4) قطعہ CF کھینچیے۔

(5) CF نصف قطر لے کر اور C کو مرکز مان کر دائرہ کھینچیے۔



شکل 6.18

عملی کام :

مختلف پیائشوں کے اور مختلف قسم کے مثلث بنائیے ۔ان کے داخلی دائرے اور حائط دائرے بنائیے ۔اپنے مشاہدات کا درج ذیل جدول میں اندراج کیجیے اور بحث کیجیے۔

مختلف الاضلاع مثلث	متساوی الساقین مثلث	متساوی الاضلاع مثلث	مثلث کی قسم
مثلث کے اندر	مثلث کے اندر	مثلث کے اندر	داخلی دائرہ کے مرکز کا مقام
	مثلث کے اندر یا باہر یا مثلث پر	مثلث کے اندر	حائطہ دائرہ کے مرکز کا مقام

منفرجۃ الزاویہ مثلث	قائمۃ الزاویہ مثلث	حادۃ الزاویہ مثلث	مثلث کی قسم
			داخلی دائرہ کے مرکز کا مقام
	وتر کی وسط میں		حائطہ دائرہ کے مرکز کا مقام

اسے دھیان میں رکھیں

- مثلث کا داخلی دائرہ مثلث کے تمام اضلاع کو اندر سے مس کرتا ہے۔
- مثلث کا داخلی دائرہ بنانے کے لیے مثلث کے کوئی بھی دو زاویوں کے ناصف بنانا ہوتے ہیں۔
- مثلث کا حائطہ دائرہ مثلث کے تینوں راسوں سے گذرتا ہے۔
- مثلث کا حائطہ دائرہ بنانے کے لیے اس کے کوئی بھی دو اضلاع کے عمودی ناصف کھینچنا ہوتے ہیں۔
- حادہ الزاویہ مثلث کا حائطہ مرکز مثلث کے اندر ہوتا ہے۔
- قائمۃ الزاویہ مثلث کا حائطہ مرکز، وتر کا وسطی نقطہ ہوتا ہے۔
- منفرجۃ الزاویہ مثلث کا حائطہ مرکز مثلث کے باہر ہوتا ہے۔
- کسی بھی مثلث کے داخلی دائرہ کا داخلی مرکز۔مثلث کے اندرونی حصہ میں ہوتا ہے۔

عملی کام : کوئی بھی ایک متساوی الاضلاع مثلث بنا کر اس کا حائطہ دائرہ اور داخلی دائرہ بنائیے۔

مذکورہ عملی کام کرتے وقت آپ کو درج ذیل کے بارے میں کیا مشاہدہ ہوتا ہے۔

(1) مثلث کا حائطہ دائرہ اور داخلی دائرہ بناتے وقت اس کے زاویے کے ناصف اور اضلاع کے عمودی ناصف یہ دونوں صرف ایک ہی ہیں ۔کیوں؟

(2) حائط دائرہ اور داخلی دائرہ کے مرکز صرف ایک ہی ہوتا ہے۔کیوں؟

(3) حائط دائرہ کا نصف قطر اور داخلی دائرہ کے نصف قطر ناپ کر ان کی نسبت معلوم کیجیے۔

اسے دھیان میں رکھیں

- متساوی الاضلاع مثلث کا حائط دائرہ اور داخلی دائرہ بناتے وقت ان کے زاویے کے ناصف اور اضلاع کے ناصف ایک ہی آتے ہیں۔
- متساوی الاضلاع مثلث کا حائط مرکز اور داخلی مرکز دونوں ایک ہی ہوتے ہیں۔
- متساوی الاضلاع مثلث کا حائط دائرہ کے نصف قطر کی داخلی دائرہ کے نصف قطر سے نسبت 1 : 2 ہوتی ہے۔

مشقی سیٹ 6.4

(1) ΔABC اس طرح بنائیے کہ $\angle B=100°$، $BC = 6.4$ سم، $\angle C = 50°$ اور اس مثلث کا داخلی دائرہ بنائیے۔

(2) ΔPQR اس طرح بنائیے کہ $\angle P = 70°$، $\angle R = 50°$، $QR = 7.3$ سم اور اس مثلث کا داخلی دائرہ بنائیے۔

(3) ΔXYZ اس طرح بنائیے کہ $XY = 6.7$ سم ، $YZ = 5.8$ سم ، $XZ = 6.9$ سم اور اس مثلث کا داخلی دائرہ بنائیے۔

(4) ΔLMN اس طرح بنائیے کہ $LM = 7.2$ سم ، $\angle M = 105°$، $MN = 6.4$ سم ہو تب مثلث LMN بنائیے اور اس کا حائط دائرہ بنائیے۔

(5) ΔLMN بنائیے سم $DE = ET = 6$، $\angle F = 45°$, اور اس مثلث کا حائط دائرہ بنائیے۔

مجموعہ سوالات 6

.1 درج ذیل کثیر متبادل سوالوں کے دیے ہوئے جواب میں سے صحیح متبادل منتخب کیجیے۔

(i) ایک دائرہ کا نصف قطر 10 سم ہے۔اس کا ایک وتر دائرہ کے مرکز سے 6 سم فاصلہ پر ہے۔تو اس وتر کی لمبائی کتنی ہے؟

(A) 16 سم (B) 8 سم (C) 12 سم (D) 32 سم

(ii) مثلث کے تینوں زاویوں کے ناصف متراکز ہوتے ہیں۔اس نقطہ تراکز کو کیا کہتے ہیں؟

(A) ہندسی مرکز (B) حائط مرکز (C) داخلی مرکز (D) عمودی تراکز

(iii) مثلث کے تمام راسوں سے گذرنے والے دائرہ کو کیا کہتے ہیں؟

(A) حائط دائرہ (B) داخلی دائرہ (C) متماثل دائرے (D) ہم مرکز دائرے

(iv) ایک دائرے کے وتر کی لمبائی 24 سم لمبائی ہے۔اس کا مرکز سے فاصلہ 5 سم ہو تو اس دائرہ کا نصف قطر معلوم کیجیے۔

(A) 12 سم (B) 13 سم (C) 14 سم (D) 15 سم

(v) 2.9 سم نصف قطر والے دائرہ میں زیادہ سے زیادہ کتنی لمبائی کے وتر ہو سکتے ہیں؟

(A) 3.5 سم (B) 7 سم (C) 10 سم (D) 5.8 سم

(vi) ایک دائرہ کا نصف قطر 4 سم ہے۔O دائرہ کا مرکز ہے۔سم $l(OP) = 4.2$ ہو تو نقطہ P کا مقام کہاں ہے؟

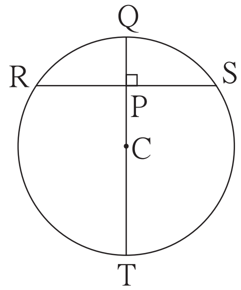
(A) مرکز پر (B) دائرہ کے اندرونی حصہ میں (C) دائرہ کے بیرون میں (D) دائرہ پر

(vii) ایک دائرہ میں متوازی وتروں کی لمبائیاں 6 سم اور 8 سم ہے۔اس دائرے کا نصف قطر 5 سم ہو تب ان وتروں کے درمیان کتنا فاصلہ ہے؟

(A) 2 سم (B) 1 سم (C) 8 سم (D) 7 سم

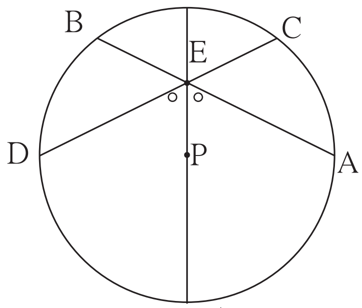
2. متساوی الاضلاع ΔDSP میں $DS = 7.5$ سم ہو تب ΔDSP کا حائط دائرہ اور داخلی دائرہ بنائیے۔حائط دائرہ اور داخلی دائرہ کے نصف قطر ناپ کر لکھیے۔حائط دائرہ کے نصف قطر کی داخلی دائرہ کے نصف قطر سے نسبت معلوم کیجیے۔

3. ΔNTS میں $NT = 5.7$ سم، $TS = 7.5$ سم اور $\angle NTS = 110^\circ$ ہے تب ΔNTS بنا کر اس کا حائط دائرہ اور داخلی دائرہ بنائیے۔



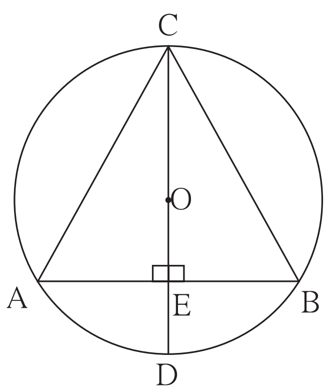
شکل 6.19

4. شکل 6.19 میں C دائرہ کا مرکز ہے۔قطعہ QT قطر ہے۔ $CP = 5, \ CT = 13$ ہو تب وتر RS معلوم کیجیے۔



شکل 6.20

5. شکل 6.20 میں P دائرہ کا مرکز ہے۔وتر AB اور وتر CD، قطر کو نقطہ E پر قطع کرتے ہیں۔اگر $\angle AEP \cong \angle DEP$ تو ثابت کیجیے کہ $AB = CD$



شکل 6.21

6. شکل 6.21 میں O مرکز والے دائرہ کا قطر CD ہے اور AB وتر ہے۔ قطر CD، وتر AB کے E نقطہ پر عمود ہے۔ تو دکھائیے کہ ΔABC متساوی الساقین مثلث ہے۔

ITC Tools or Links

Geogebra Software کی مدد سے مختلف دائرے بنا کر اس میں وتر، قطر کی خصوصیات کا عملی طور پر تجربہ کیجیے۔حائط دائرہ، داخلی دائرہ بنائیے۔ Move Option کا استعمال کر کے اصل مثلث کی ساخت میں تبدیلی کر کے داخلی مرکز، حائط مرکز کے کس طرح تبدیل ہوتے ہیں۔ان کا عملی طور پر مشاہدہ کیجیے۔

7 محددی علم ہندسہ Co-ordinate Geometry

آیئے ، سیکھیں

- محور، مبداء اور ربع
- X– محور کے متوازی خط
- نقطہ کے مستوی میں محددین
- Y– محور کے متوازی خط
- نقطہ مرتسم کرنا
- خط کی مساوات

ایک عمارت کے سامنے میدان میں چنٹو اور اس کے دوست کرکٹ کھیل رہے تھے۔ ایک بزرگ وہاں تشریف لائے۔

بزرگ : ارے چنٹو، دتّا بھاؤ اسی سوسائٹی میں رہتے ہیں نا؟

چنٹو : جی ہاں، یہیں رہتے ہیں ۔ دوسرے منزلہ پر ان کا گھر ہے۔ یہاں سے وہ کھڑکی دکھ رہی ہے نا وہیں۔

بزرگ : ارے، دوسرے منزلہ پر مجھے پانچ کھڑکیاں دکھائی دے رہی ہیں۔ واقعی میں گھر کون سا ہے؟

چنٹو : دوسرے منزلے پر بائیں جانب سے تیسری کھڑکی ان کی ہے۔

چنٹو کے ذریعے کیے گئے دتّا بھاؤ کے گھر کے مقام کا وضاحتی بیان دراصل محددی علم ہندسہ کا اصل تصور ہے۔ گھر کا مقام واقعی سمجھنے کے لیے صرف منزلہ کا نمبر بتانا کافی نہیں ہے بلکہ بائیں طرف سے یا دائیں طرف سے کتنے نمبر پر گھر ہے بتانا ہوگا۔ یعنی ترتیب سے دو اعداد بتانا ہوگا۔ زمین سے دوسرا منزلہ بائیں طرف سے تیسری کھڑکی، اس طرح دو ترتیبی اعداد کا استعمال کرنا ہوتا ہے۔

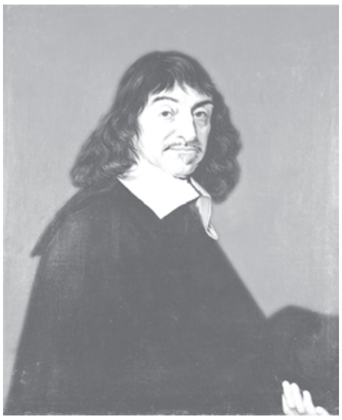
آیئے سمجھ لیں

محور، مبداء اور ربع (Axes, Origin, Quadrants)

دتا بھاؤ کے گھر کے مقام دو ترتیبی اعداد سے حقیقی طور پر بتائے گئے ہیں۔ اسی طرح ایک دوسرے پر عمود، دو خطوط سے فاصلوں کے ذریعے مستوی میں کسی نقطہ کا مقام صحیح طور پر بتا سکتے ہیں۔

کسی نقطہ کا مستوی میں مقام بتانے کے لیے اس مستوی میں ایک افقی عددی خط کھینچتے ہیں۔ اس عددی خط کو X– محور کہتے ہیں۔

رینے ڈیکارت (1596 - 1650)



سترہویں صدی عیسوی میں فرانسیسی ریاضی داں رینے ڈیکارت نے مستوی میں نقطہ کا مقام بالکل صحیح طور پر ظاہر کرنے کے لیے ''محددی نظام'' پیش کیا۔اس نظام کو ''کارتیسین محددی نظام'' کہتے ہیں۔ ڈیکارت کے نام پر یہ نام دیا گیا ہے۔ڈیکارت نے سب سے پہلے علم ہندسہ اور الجبرا کے درمیان ربط پیدا کیا۔جس کی وجہ سے ریاضی میں انقلاب آیا۔

کارتیسین محددی نظام ہی تجزیاتی علم ہندسہ (Analytical Geometry) کا اساس ہے۔

'لاجیومیٹرک' رینے ڈیکارت کی پہلی کتاب ہے۔اس کتاب میں انھوں نے علم ہندسے کے مطالعہ کے مطالعہ کے لیے الجبرا کا استعمال کیا۔مستوی میں نقطہ حقیقی اعداد کی ترتیبی جوڑی سے ظاہر کرسکتے ہیں۔اسے انھوں نے سب سے پہلے اپنی کتاب میں پیش کیا۔اس مرتب جوڑی کو کارتیسین محددین کہتے ہیں۔

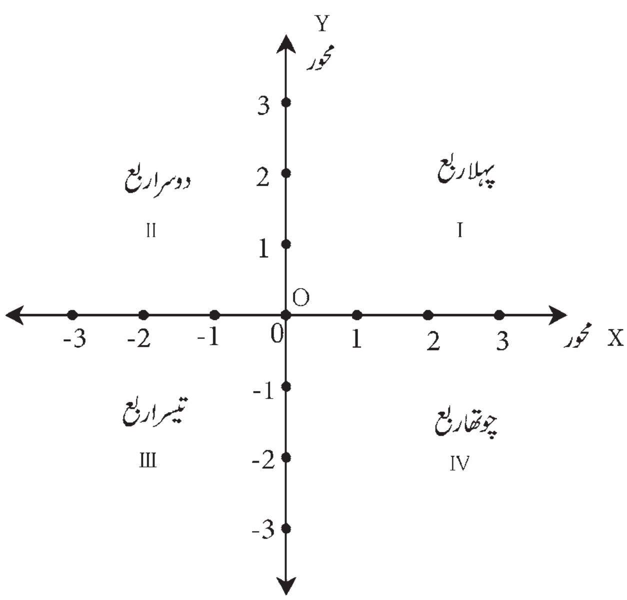
محددی علم ہندسہ کا استعمال علم طبیعات، انجینئرنگ، جہازرانی، علم زلزلہ اور فن جیسے مختلف شعبوں میں کیا جاتا ہے۔ٹیکنالوجی کی ترقی میں محددی علم ہندسہ اہمیت کا کردار ادا کرتا ہے۔جیوجبرا میں علم ہندسہ اور الجبرا میں ربط واضح طور پر دکھائی دیتا ہے۔Geometry اور Algebra ان دونوں الفاظ سے ہی 'Geogebra' نام دیا گیا ہے۔

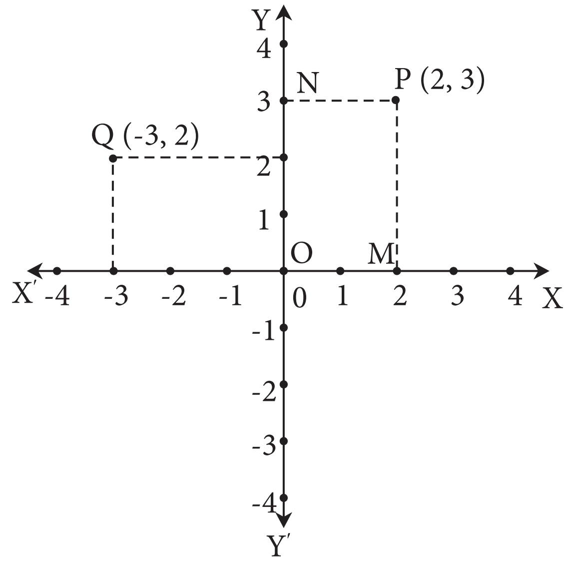
X-محور پر 0 محدد والے نقطہ سے X محور پر عمود، دوسرا خط Y-محور ہے۔عام طور پر دونوں عددی خط پر 0 عدد ایک ہی نقطہ سے ظاہر کی جاتی ہے۔اس نقطہ کو مبداء (Origin) کہتے ہیں۔اسے انگریزی حرف O سے ظاہر کرتے ہیں۔

X-محور پر O کے دائیں طرف مثبت عدد جب کہ بائیں طرف منفی عدد دکھاتے ہیں۔

Y-محور پر O کے اوپر مثبت عدد اور نیچے منفی عدد دکھاتے ہیں۔

X اور Y محوروں کی وجہ سے مستوی کے چار حصے ہوجاتے ہیں۔ ہر حصہ کو ربع کہتے ہیں۔شکل میں دکھائے ہوئے کے مطابق گھڑی کی غیر ساعت دار سمت سے ربعات کے نمبر شمار دینے کا رواج ہے۔





شکل 7.2

X-محور اور Y-محور کے ذریعے متعین کیے گئے مستوی میں نقطہ P دکھایا گیا ہے۔اس کا مقام اس کے دونوں محوروں سے فاصلہ سے متعین کرتے ہیں ۔ اس کے لیے X-محور ⊥ PM قطعہ اور Y-محور ⊥ PN قطعہ بنائیے۔

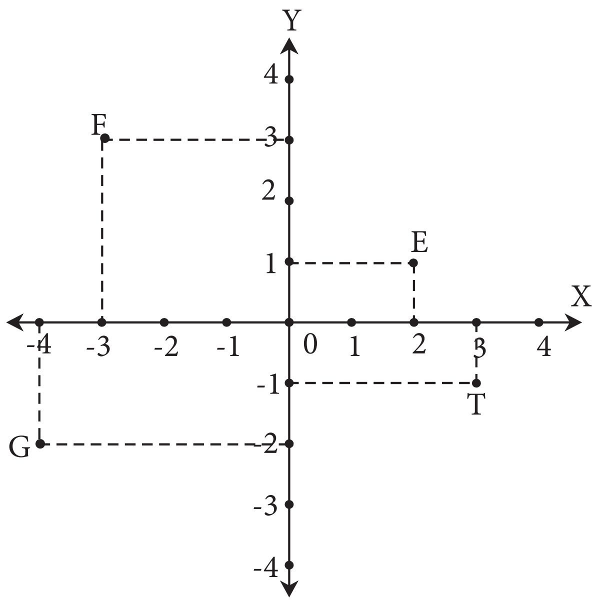
M کا X-محور پر محدد 2 ہے۔N کا Y-محور پر محدد 3 ہے۔اس لیے P کا x محدد 2 اور y محدد 3 ہے۔

نقطہ کا مقام بتاتے وقت اس کا x محدد پہلے بتانے کا رواج ہے۔اس مفروضے کے لحاظ سے p نقطہ کے محددین کا محوروں سے فاصلہ بالترتیب 2 ، 3 کا تعین کرتا ہے۔اور نقطہ P کے مقام کے اعداد کو (2, 3) جوڑی سے مختصراً بتاتے ہیں۔

نقطہ Q سے X-محور پر QS عمود کھینچا اور Y-محور پر QR عمود کھینچا۔ Q کا X-محور پر محدد 3− اور Y- محور پر محدد 2 ہے۔اس لیے نقطہ Q کے محددین (−3, 2) ہیں۔

مثال : متصلہ شکل میں دکھائے ہوئے T, G, F, E نقاط کے محددین لکھیے۔

حل :
- نقطہ E کے محددین (2,1) ہیں۔
- نقطہ F کے محددین (−3,3) ہیں۔
- نقطہ G کے محددین (−4,−2) ہیں۔
- نقطہ T کے محددین (3,−1) ہیں۔



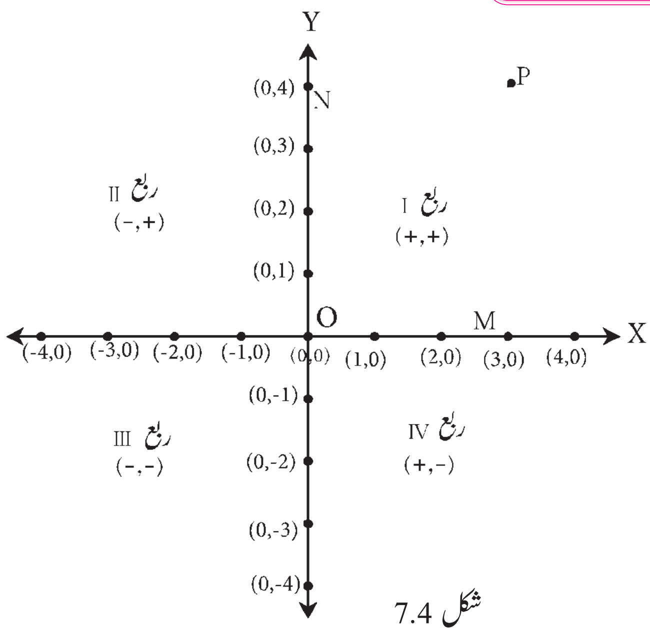
شکل 7.3

آیئے سمجھ لیں

محوروں پر نقاط کے محددین (Co-ordinate of points od the axes)

M نقطہ کا x محدد یعنی نقطہ M کا Y-محور سے فاصلہ ہے۔ اس لیے M کا x محدد 3 ہے۔ اس نقطہ کا اس X-محور سے فاصلہ 0 ہے۔ اس لیے M کا y محدد 0 ہے اور اس بنا پر X-محور پر M نقطہ کے محددین (3,0) ہیں۔ Y-محور پر N نقطہ کا y محدد 4 ہے۔ کیونکہ وہ نقطہ X-محور سے 4 فاصلہ پر ہے اور نقطہ N کا Y-محور سے فاصلہ صفر ہے اس لیے x محدد 0 ہے۔

اس بنا پر Y-محور پر نقطہ N کے محددین (0,4) ہیں۔



شکل 7.4

اب O مبدا X- اور Y- دونوں محوروں پر واقع ہے۔ اس نقطہ کا X- اور Y- دونوں محوروں سے فاصلہ 0 ہے۔ اس لیے O کے محددین (0,0) ہیں۔

اس بنا پر مستوی میں ہر نقطہ سے محددین کی ایک اور صرف ایک جوڑی (مرتب جوڑی) مربوط ہے۔

اسے دھیان میں رکھیں

- X-محور پر ہر نقطہ کا y محدد صفر ہوتا ہے۔
- Y-محور پر ہر نقطہ کا x محدد صفر ہوتا ہے۔
- مبدا کے محددین (0,0) ہوتے ہیں۔

مثال : درج ذیل نکات کس ربع میں واقع ہیں یا کس محور پر واقع ہیں۔ پہچانیے۔

A(5,7), B(−6,4), C(4,−7), D(−8,−9), P(−3,0), Q(0,8)

حل : A(5, 7) کا x محدد مثبت اور y محدد مثبت ہے۔ $\therefore$ A پہلے ربع میں واقع ہے۔

B(−6, 4) کا x محدد منفی اور y محدد مثبت ہے۔ $\therefore$ B دوسرے ربع میں واقع ہے۔

C(4, −7) کا x محدد مثبت اور y محدد منفی ہے۔ $\therefore$ C چوتھے ربع میں واقع ہے۔

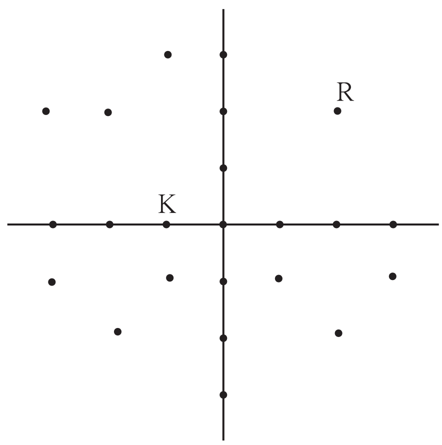
D(-8, −9) کا x محدد منفی اور y محدد منفی ہے۔ $\therefore$ D تیسرے ربع میں واقع ہے۔

P (–3, 0) کا y محدد صفر ہے۔ ∴ نقطہ P، X-محور پر واقع ہے۔

Q (0, 8) کا y محدد صفر ہے۔ ∴ نقطہ Q، Y-محور پر واقع ہے۔

عملی کام : اسکول کے میدان پر متصلہ شکل میں دکھائے ہوئے کے مطابق ایک افقی اور ایک عمودی قطار میں طلبہ کو بٹھائیے، جس کی وجہ سے X-محور اور Y-محور بنتے ہیں۔

- مختلف رنگوں سے دکھائے ہوئے دھبوں کی جگہ چاروں ربعات میں طلبہ کو بٹھائیے۔
- اب مختلف طلبہ کے نام کے پہلے حرف کو ادا کر کے شکل میں دکھائے ہوئے کے مطابق کھڑا کیجیے اور ان کے محددین پوچھیے۔ مثلاً راجندر (2,2) اور کرشما (–1,0)
- اس طرح اس میدان میں عملی کام سے مستوی میں نقاط کے مقام کھیل کھیل اور مزاح سے آسانی سے واضح ہو جائیں گے۔



شکل 7.5

آیئے سمجھ لیں

دیے ہوئے محددین سے مربوط نقاط مرتسم کرنا (To plot the points with given co-ordinates)

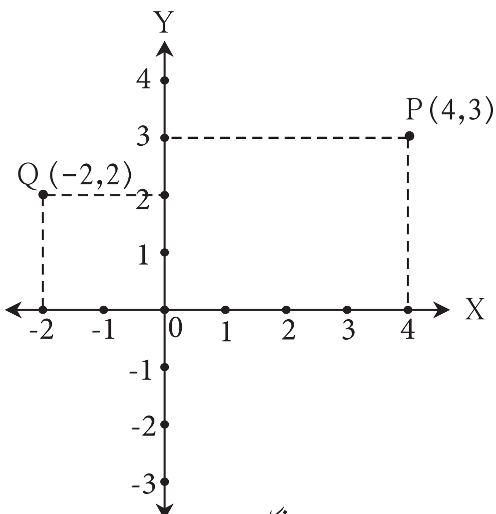
فرض کیجیے P(4,3) اور Q(–2, 2) نقاط کو مرتسم کرنا ہے۔

نقطہ مرتسم کرنے کا مرحلہ :

(i) مستوی میں X-محور اور Y-محور کھینچیے۔ مبداء دکھائیے۔

(ii) P(4, 3) اس نقطہ کو دکھانے کے لیے X-محور پر 4 عدد کو دکھانے والے نقطہ سے Y-محور کے متوازی خط کھینچیے۔

Y-محور پر 3 عدد دکھانے والے نقطہ سے X-محور کے متوازی خط کھینچیے۔



شکل 7.6

(iii) ان دونوں خطوط کا نقطہ تقاطع $P(4, 3)$ نقطہ ہے۔ یہ نقطہ کس ربع میں ہے؟ مشاہدہ کیجیے۔

(iv) اسی طرح $Q(-2, 2)$ اس نقطہ کو مرتسم کیجیے۔ کیا یہ نقطہ دوسرے ربع میں آیا ہے؟ اسی طرح محددی نظام سے $R(-3, -4)$، $S(3, -1)$ نقاط مرتسم کیجیے۔

مثال : درج ذیل نقاط کس ربع میں ہیں یا کس محور پر؟ لکھیے۔

(i) (5,3) (ii) (-2,4) (iii) (2,-5) (iv) (0,4)

(v) (-3,0) (vi) (-2,2.5) (vii) (5,3.5) (viii) (-3.5,1.5)

(ix) (0, -4) (x) (2,-4)

حل :

	محددین	ربع/ محور
(i)	(5,3)	ربع I
(ii)	(-2,4)	ربع II
(iii)	(2,-5)	ربع IV
(iv)	(0,4)	Y-محور
(v)	(-3,0)	X-محور

	محددین	ربع/ محور
(vi)	(-2, -2.5)	ربع III
(vii)	(5,3.5)	ربع I
(viii)	(-3.5,1.5)	ربع II
(ix)	(0, -4)	Y-محور
(x)	(2,-4)	ربع IV

مشقی سیٹ 7.1

1. درج ذیل نقاط ان کے محددین کی بنا پر کس ربع میں یا کس محور پر؟ لکھیے۔

- A(-3,2), • B(-5,-2), • K(3.5,1.5), • D(2,10),
- E(37,35), • F(15,-18), • G(3,-7), • H(0,-5),
- M(12,0), • N(0,9), • P(0,2.5), • Q(-7,-3)

2. درج ذیل نقاط کس ربع میں ہو سکتے ہیں؟

(i) جن کے دونوں محددین مثبت ہیں۔

(ii) جن کے دونوں محددین منفی ہیں۔

(iii) جن کے x محدد مثبت اور y محدد منفی ہے۔

(iv) جن کے x محدد منفی اور y محدد مثبت ہے۔

3. مستوی میں ایک محددی نظام متعین کیجیے اور درج ذیل نقاط مرتسم کیجیے۔

L(-2,4), M(5,6), N(-3,-4), P(2,-3), Q(6,-5), S(7,0), T(0,-5)

آیئے سمجھ لیں

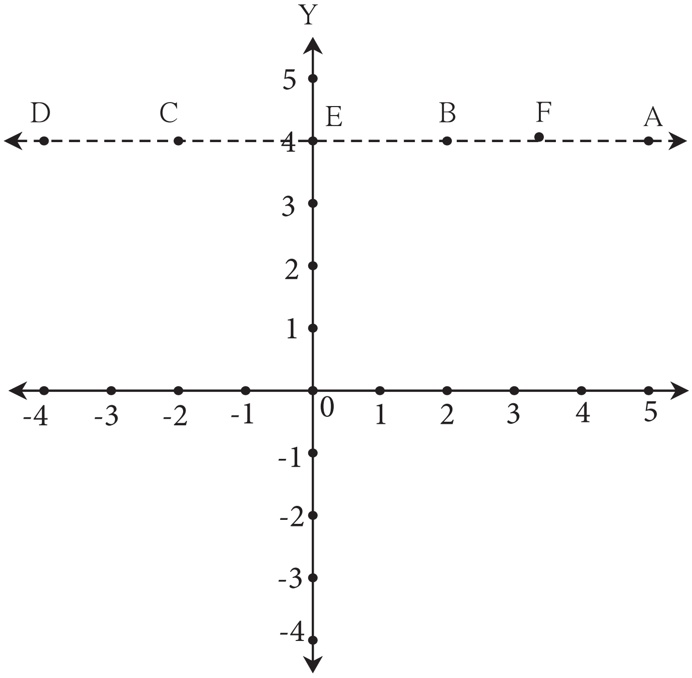
X-محور کے متوازی خط (Lines parallel to X-axis)

- ترسیمی کاغذ پر درج ذیل نقاط مرتسم کیجیے۔

A(5,4), B(2,4), C(−2,4), D(−4,4), E(0,4), F(3,4)

- نقاط کے محددین کا مشاہدہ کیجیے۔
- تمام نقاط کے y محدد مساوی ہیں۔کیا یہ سمجھ میں آیا؟
- تمام نقاط ہم خطی ہیں۔
- یہ خط کس محور کے متوازی ہے؟
- خط DA پر ہر نقطے کا y محدد مساوی ہے یعنی 4 ہے۔وہ مستقل ہے۔اس لیے خط DA کا بیان $y = 4$ مساوات سے کرتے ہیں۔کسی بھی نقطے کا y محدد 4 ہو تب وہ نقطہ اس خط X پر یعنی خط DA پر واقع ہے۔

X-محور سے 4 اکائی فاصلہ پر متوازی خط کی مساوات $y = 4$ ہے۔



شکل 7.7

آیئے، بحث کریں

- X-محور کے متوازی اور اس سے 6 اکائی فاصلہ پر X-محور کے نیچے کیا ایسا کوئی خط بنایا جاسکتا ہے؟
- (−3,−6)، (10,−6)، $\left(\frac{1}{2}, -6\right)$ کیا یہ تمام نقاط اس خط پر واقع ہیں؟
- اس خط کی مساوات کون سی ہوگی؟

اسے دھیان میں رکھیں

اگر $b > 0$ ہو اور $y = b$، X-محور کے متوازی $(0, b)$ نقطہ سے گزرنے والا خط کھینچیں تب وہ X-محور کے اس کے اوپر کی طرف متوازی ہوگی

اور $b < 0$ ہو تب وہ خط X-محور کے اس کے نیچے کی طرف کے متوازی ہوگی۔

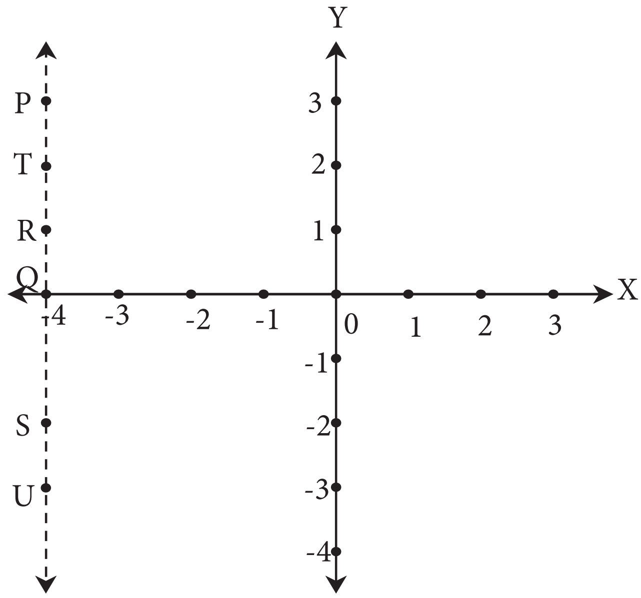
X-محور کے متوازی، خط کی مساوات $y = b$ کی صورت میں آتی ہے۔

آیئے سمجھ لیں

Y-محور کے متوازی خط (Lines parallel to Y-axis)

ترسیمی کاغذ پر درج ذیل نقاط مرتسم کیجیے۔

P(-4,3),　Q(-4,0),　R(-4,1),　S(-4,-2),　T(-4,2),　U(-4,-3)



شکل 7.8

- نقاط کے محددین کا مشاہدہ کیجیے۔
- کیا آپ کو یہ سمجھ میں آیا کہ تمام نقاط کے x محدد مساوی ہیں؟
- کیا تمام نقاط ہم خطی ہیں؟
- یہ خط کس محور کے متوازی ہے؟
- خط PS پر واقع ہر نقطے کا x محدد مساوی ہے یعنی 4– ہے۔ وہ مستقل ہے۔ اس لیے خط PS کا بیان $x = -4$ مساوات سے کرتے ہیں۔ جس نقطے کا x محدد 4– ہو تب وہ نقطہ اس خط پر یعنی خط PS پر واقع ہوگا۔

Y-محور کے بائیں طرف 4 اکائی فاصلہ پر متوازی خط کی مساوات $x = -4$ ہے۔

آیئے، بحث کریں

- کیا ایسا خط کھینچا جا سکتا ہے جو Y-محور کے متوازی اور اس سے 2 اکائی فاصلہ پر دائیں طرف واقع ہے؟
- (2,10)، (2,8)، $(2, -\frac{1}{2})$ کیا یہ تمام نقاط اس خط پر واقع ہیں؟
- اس خط کی مساوات کون سی ہے؟

اسے دھیان میں رکھیں

اگر $x = a$ یہ Y-محور کے متوازی، $(a, 0)$ سے گزرنے والا خط کھینچیں اور $a > 0$ ہو تب وہ خط Y محور کے دائیں جانب ہوتا ہے۔ اگر $a < 0$ ہو تب وہ خط Y-محور کے بائیں جانب ہوتا ہے۔ Y-محور کے متوازی خط کی مساوات $x = a$ کی صورت میں ہوتی ہے۔

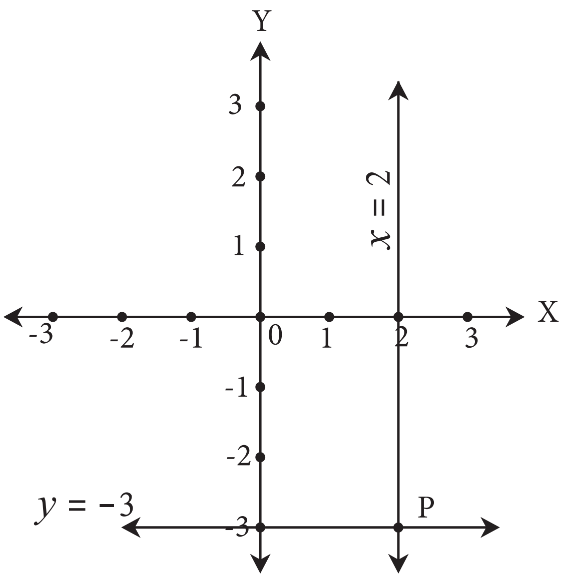
اسے دھیان میں رکھیں

(1) X-محور پر واقع ہر نقطے کا y محدد 0 ہوتا ہے۔اسکے برعکس جس نقطے کا y محدد 0 ہوتا ہے، وہ X-محور پر واقع ہوتا ہے۔اس لیے X-محور کی مساوات $y = 0$ لکھتے ہیں۔

(2) Y-محور پر واقع ہر نقطے کا x محدد 0 ہوتا ہے۔اس کے برعکس جس نقطے کا x محدد 0 ہوتا ہے، وہ Y-محور پر واقع ہوتا ہے۔اس لیے Y-محور کی مساوات $y = 0$ لکھتے ہیں۔

آیئے سمجھ لیں

خطی مساوات کی ترسیم (Graph of Linear equation)



شکل 7.9

مثال : $x = 2$ اور $y = -3$ ، ان مساواتوں کی ترسیم کھینچیے ۔

حل : (i) ترسیمی کاغذ پر X-محور اور Y-محور کھینچیے ۔

(ii) $x = 2$ دیا ہوا ہے۔اس لیے Y-محور کے دائیں طرف 2 اکائی فاصلے پر Y-محور کے متوازی خط کھینچیے ۔

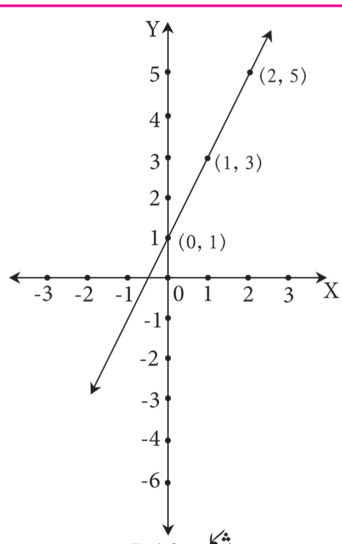
(iii) $y = -3$ دیا ہوا ہے۔اس لیے X-محور کے نیچے کی طرف 3 اکائی فاصلے پر X-محور کے متوازی خط کھینچیے ۔

(iv) محوروں کے متوازی کھینچے گئے یہ خطوط دی ہوئی مساواتوں کی ترسیم ہیں۔

(v) یہ دونوں خطوط ایک دوسرے کو جہاں قطع کرتے ہیں اس نقطہ P کے محددین لکھیے۔

(vi) کیا P کے محددین $(2, -3)$ ہیں؟ اس کی تصدیق کیجیے۔

عام صورت میں خطی مساوات کی ترسیم



شکل 7.10

عملی کام :

ترسیمی کاغذ پر $(0, 1)$، $(1, 3)$، $(2, 5)$ نقاط مرتسم کیجیے۔کیا وہ ہم خطی ہیں؟ جانچ کیجیے۔اگر ہم خطی ہوں تب ان سے گذرنے والا خط کھینچیے ۔

- وہ خط کن کن ربعات سے گذرتا ہے۔مشاہدہ کیجیے۔
- وہ خط Y-محور کو جس نقطہ پر قطع کرتا ہے اس نقطے کے محددین لکھیے ۔
- اس خط پر تیسرے ربع میں واقع کوئی بھی ایک نقطہ بتایئے۔اس کے محددین لکھیے ۔

مثال : $2x - y + 1 = 0$ یہ ایک دو متغیری عام صورت کی مساوات ہے۔اس مساوات کی ترسیم کھینچیے ۔

حل : $2x - y + 1 = 0$ یعنی $y = 2x + 1$

x کی کچھ قیمتیں لے کر اوراس کی بناء پر y کی نظیری قیمتیں معلوم کریں گے۔

مثلاً اگر $x = 0$، یہ قیمت مساوات میں رکھیں تو $y = 1$ قیمت حاصل ہوگی۔

اس طرح x کی 0، 1، 2، $\frac{1}{2}$، -2 قیمتیں لے کر y کی قیمت معلوم کریں گے۔

ان قیمتوں کو مرتب جوڑی کی صورت میں جدول میں لکھیں گے۔

x	0	1	2	$\frac{1}{2}$	-2
y	1	3	5	2	-3
(x, y)	$(0, 1)$	$(1, 3)$	$(2, 5)$	$(\frac{1}{2}, 2)$	$(-2, -3)$

ان نقاط کو مرتسم کریں گے۔مرتسم نقاط ہم خطی ہیں۔اس کا اطمینان کرلیں گے۔ان تمام نقاط سے گذرنے والا خط کھینچیں گے۔یہ خط یعنی $2x - y + 1 = 0$ کی مساوات کی ترسیم ہے۔

ITC Tools or Links

Geogebra Software کی مدد سے X-محوراور Y-محور کھینچیے۔ مختلف نقاط مرتسم کیجیے۔ Algebraic View میں نقاط کے محددین دیکھیے اور مطالعہ کیجیے۔محوروں کے متوازی خطوط کی مساواتیں دیکھیے ۔ Move Option کا استعمال کرکے خطوط کے مقام بدلتے رہیے۔X-محوراور Y-محور کی مساواتیں کون کون سی آتی ہیں؟

مشقی سیٹ 7.2

.1 ترسیمی کاغذ پر $A(3, 0)$، $B(3, 3)$، $C(0, 3)$ نقاط مرتسم کیجیے۔ AB اور BC جوڑیے۔کون سی شکل حاصل ہوتی ہے۔اسے لکھیے ۔

.2 Y-محور کے متوازی اوراس محور کے بائیں طرف 7 اکائی فاصلے پر واقع خط کی مساوات لکھیے ۔

.3 X-محور کے متوازی اوراس محور کے نیچے 5 اکائی فاصلے پر واقع خط کی مساوات لکھیے ۔

.4 نقطہ $Q(-3, -2)$ Y-محور کے متوازی واقع خط پر ہے۔اس خط کی مساوات لکھیے اوراس کی ترسیم کھینچیے ۔

.5 Y-محوراور $x = -4$ متوازی خطوط ہیں تو ان دونوں خطوط کے درمیان کتنا فاصلہ ہے؟

6. درج ذیل میں سے کون سی مساواتوں کی ترسیم X-محور کے متوازی ہیں اور کون سی مساواتوں کی ترسیم Y-محور کے متوازی ہیں۔ اسے لکھیے۔

(i) $x = 3$ (ii) $y - 2 = 0$ (iii) $x + 6 = 0$ (iv) $y = -5$

7. ترسیمی کاغذ پر A(2, 3)، B(6, –1) اور C(0, 5) نقاط مرتسم کیجیے۔ اگر یہ نقاط ہم خطی ہوں تو ان کو شامل کرنے والا خط کھینچیے۔ یہ خط X-محور اور Y-محور کو جن نقاط پر قطع کرتا ہے۔ ان نقاط کے محددین لکھیے۔

8. درج ذیل مساواتوں کی ترسیم ایک ہی محددی نظام سے مرتسم کیجیے۔ ان کے نقطہ تقاطع کے محددین لکھیے۔

$x + 4 = 0,\ y - 1 = 0,\ 2x + 3 = 0,\ 3y - 15 = 0$

9. درج ذیل مساواتوں کی ترسیم بنائیے۔

(i) $x + y = 2$ (ii) $3x - y = 0$ (iii) $2x + y = 1$

مجموعہ سوالات 7

1. درج ذیل کثیر متبادل سوالوں کے جواب میں سے صحیح متبادل منتخب کیجیے۔

(i) X-محور پر کوئی بھی نقطہ درج ذیل میں سے کس صورت میں ہوتا ہے؟

(A) (b, b) (B) $(0, b)$ (C) $(a, 0)$ (D) (a, a)

(ii) خط $y = x$، اس خط پر ہر نقطہ کے محددین درج ذیل میں سے کس صورت میں ہوتا ہے؟

(A) (a, a) (B) $(0, a)$ (C) $(a, 0)$ (D) $(a, -a)$

(iii) X محور کی مساوات درج ذیل میں سے کون سی ہے؟

(A) $x = 0$ (B) $y = 0$ (C) $x + y = 0$ (D) $x = y$

(iv) (-4,-3) یہ نقطہ کس ربع میں ہے؟

(A) پہلے (B) دوسرے (C) تیسرے (D) چوتھے

(v) (–5, 5)، (6, 5)، (–3, 5)، (0, 5) ان نقطہ کو شامل کرنے والے خط کی صورت کیسی ہوگی؟

(A) مبداء سے جانے والی (B) Y - محور کے متوازی

(C) X- محور کے متوازی (D) ان میں سے کوئی بھی نہیں

(iv) P(–1, 1)، Q(3, –4)، R(1, –1)، S(–2, –3)، T(–4, 4) ان نقاط میں سے چوتھے ربع میں کون سے نقاط ہیں؟

(A) P اور T (B) Q اور R (C) صرف S (D) P اور R

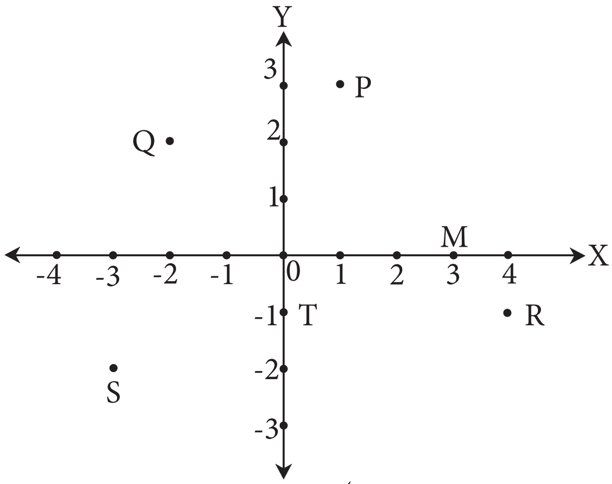
(2) شکل میں کچھ نقاط دکھائے ہوئے ہیں ۔ درج ذیل سوالوں کے جواب لکھیے ۔

(i) Q اور R نقاط کے محددین لکھیے ۔

(ii) T اور M نقاط کے محددین لکھیے ۔

(iii) تیسرے ربع میں کون سا نقطہ ہے؟

(iv) کس نقطہ کا x اور y محدد مساوی ہے۔



شکل 7.11

(3) درج ذیل نقاط مرتسم کیے بغیر لکھیے کہ وہ کس ربع یا محور پر واقع ہیں۔

(i) $(5, -3)$ (ii) $(-7, -12)$ (iii) $(-23, 4)$

(iv) $(-9, 5)$ (v) $(0, -3)$ (vi) $(-6, 0)$

(4) درج ذیل نقاط ایک ہی محددی نظام سے مرتسم کیجیے۔

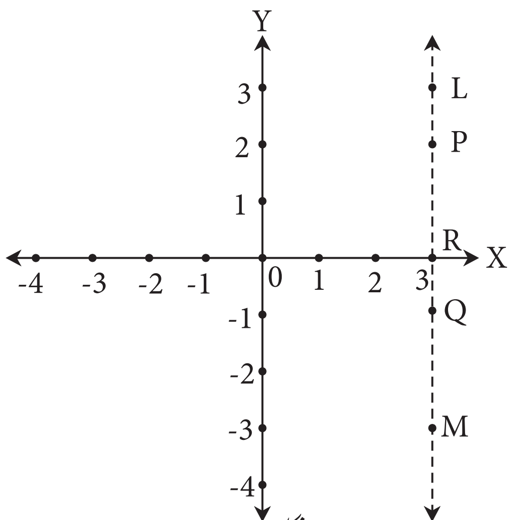
$A(1,3)$, $B(-3,-1)$, $C(1,-4)$, $D(-2,3)$, $E(0,-8)$, $F(1,0)$

(5) متصلہ ترسیم میں خط LM یہ Y-محور کے متوازی ہے۔

(i) خط LM کا X-محور سے کتنا فاصلہ ہے؟

(ii) P، Q، R ان نقاط کے محددین لکھیے ۔

(iii) نقطہ L اور نقطہ M کے x محدد میں فرق کتنا ہے؟



شکل 7.12

(6) X-محور کے متوازی اور X-محور سے 5 اکائی فاصلے پر کتنے خطوط ہیں۔

(7)* کسی بھی حقیقی عدد 'a' لے کر Y-محور اور $x = a$ خط کے درمیان کتنا فاصلہ ہے؟

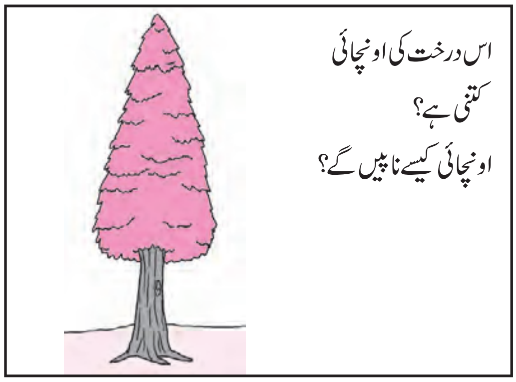
❑❑❑

8 علم مثلث Trigonometry

آیئے، سیکھیں

- علم مثلث کا تعارف
- مثلثیاتی نسبتوں کے درمیان باہمی تعلق
- مثلثیاتی نسبتیں
- مخصوص زاویوں کی مثلثیاتی نسبتیں

علم مثلث کا تعارف (Introduction to trigonometry)



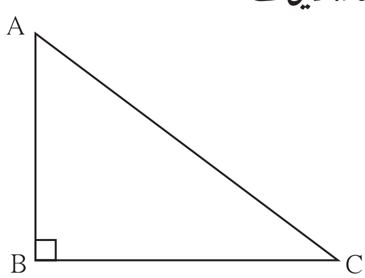
ہم زمین پر فاصلہ ڈوری سے یا چلتے ہوئے ناپ سکتے ہیں۔لیکن سمندر میں جہاز کا روشنی کے مینار سے فاصلہ کس طرح ناپ سکتے ہیں؟ درخت کی اونچائی کیسے ناپیں گے؟

اوپر دی ہوئی تصاویر کا مشاہدہ کیجیے۔تصاویر میں سوال ریاضی سے تعلق رکھتا ہے۔ان سوالوں کے جوابات حاصل کرنے کے لیے ریاضی مضمون کی علم مثلث،شاخ کا استعمال ہوتا ہے۔علم مثلث کا استعمال انجینئر نگ،علم فلکیات، جہاز رانی وغیرہ شاخوں میں کیا جاتا ہے۔

علم مثلث (Trigonometry) یہ لفظ تین لاطینی الفاظ سے بنایا گیا ہے۔Tri یعنی تین، gona یعنی ضلع اور metron یعنی ناپ تول۔

آیئے ذرا یاد کریں

ہم مثلث کا مطالعہ کر چکے ہیں۔قائمۃ الزاویہ مثلث،فیثا غورث کا مسئلہ، مشابہ مثلثوں کی خصوصیات پر مبنی علم مثلث مضمون کی ابتدا ہوتی ہے۔ان کا اعادہ کریں گے۔



شکل 8.1

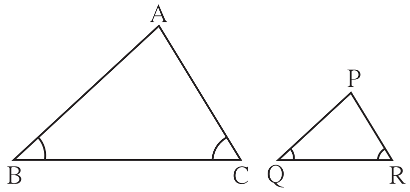
- ΔABC میں $\angle B$ قائمۃ الزاویہ ہے۔جبکہ $\angle B$ یعنی قائمہ زاویہ کے مقابل کا ضلع AC وتر ہے۔

$\angle A$ کے مقابل کا ضلع BC اور $\angle C$ کے مقابل کا ضلع AB ہے۔اس مثلث سے متعلق فیثا غورث کے مسئلہ کا بیان :

$$(AB)^2 + (BC)^2 = (AC)^2$$

- اگر $\Delta PQR \sim \Delta ABC$ ہوتب ان کے نظیری اضلاع تناسب میں ہوتے ہیں۔

یعنی $\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{AC}{PR}$

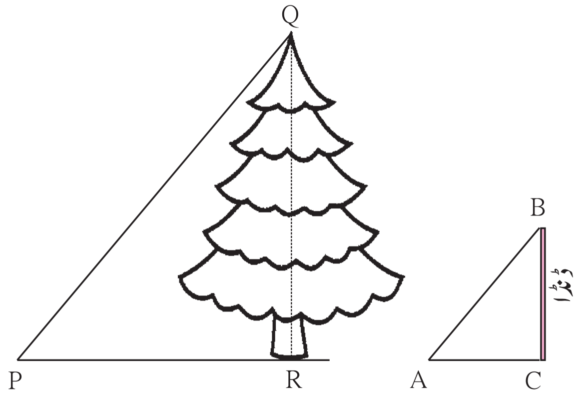


شکل 8.2

کسی بڑے درخت کی اونچائی ناپنا ہو تب مشابہ مثلثوں کے خصوصیت کا استعمال کرکے وہ کس طرح معلوم کرسکتے ہیں۔ اسے دیکھیں گے۔

عملی کام :

QR درخت کی اونچائی ہے۔ BC ایک ڈنڈے کی اونچائی ہے۔ چھوٹے ڈنڈے کو زمین میں کھڑا گاڑ کر اس کی اونچائی اور اس کے سایہ کی لمبائی ناپیے۔ درخت کے سایہ کی لمبائی ناپیے۔ سورج کی شعاعیں متوازی ہونے کی وجہ سے ΔPQR اور ΔABC



شکل 8.3

مشابہ زاویہ والے یعنی متشابہ مثلث ہیں۔ اسے سمجھ لیں۔ متشابہ مثلثوں کے نظیری اضلاع تناسب میں ہوتے ہیں۔

اس کا استعمال کرکے $\frac{QR}{PR} = \frac{BC}{AC}$ ملتا ہے۔

$$\text{درخت کی اونچائی} = QR = \frac{BC}{AC} \times PR$$

یہ مساوات حاصل ہوتی ہے۔

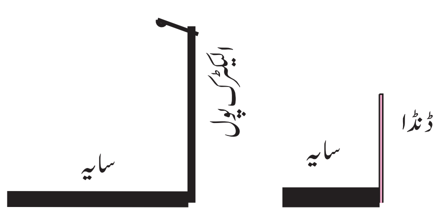
PR ، BC اور AC کی قیمتیں ہمیں معلوم ہیں۔ یہ قیمتیں مساوات میں رکھ کر QR کی لمبائی یعنی درخت کی اونچائی معلوم کی جاسکتی ہے۔

غور کیجیے

یہ تجربہ صبح 8 بجے کرنے کی بجائے دوپہر 11:30 یا 1:30 بجے کرنا سہولت بخش ہے۔ ایسا کیوں؟

عملی کام :

مذکورہ بالا عملی کام کرکے آپ اپنے اطراف اونچے درخت کی اونچائی معلوم کیجیے۔ اطراف میں درخت نہ ہو تو کسی کھمبے (ستون) کی اونچائی معلوم کیجیے۔

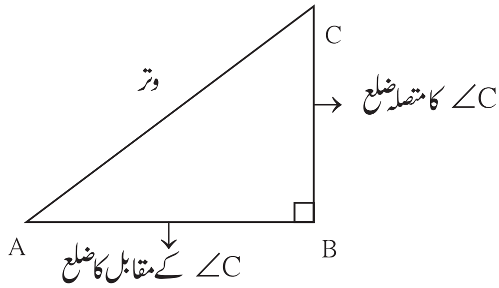


شکل 8.4

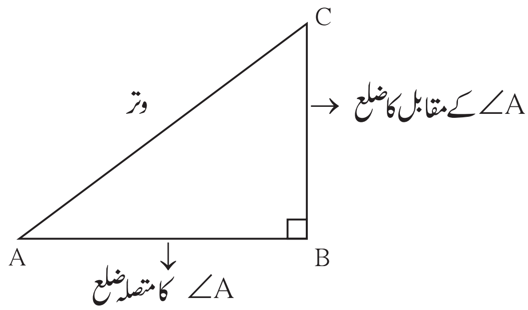
آیئے سمجھ لیں

شلث سے متعلق کچھ اصطلاحات (Terms related to triangle)

قائمۃ الزاویہ Δ ABC میں، $\angle B = 90°$ ہے تب $\angle A$ اور $\angle C$ حادہ زاویہ ہیں۔

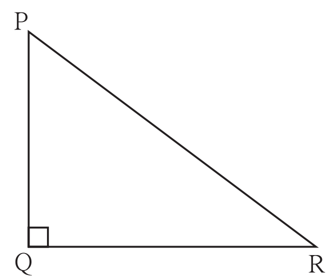


شکل 8.6



شکل 8.5

مثال : قائمۃ الزاویہ ΔPQR میں،



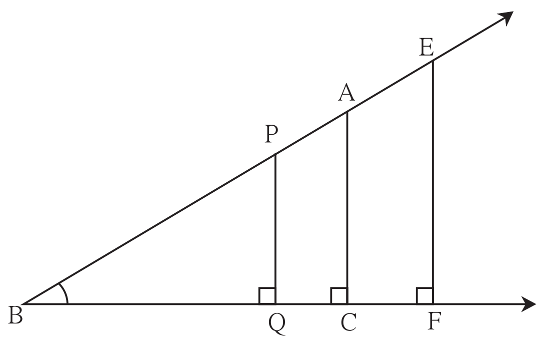
شکل 8.7

$\angle P$ = ... کا متصلہ ضلع , $\angle P$ = ... کے مقابل کا ضلع

$\angle R$ = ... کا متصلہ ضلع , $\angle R$ = ... کے مقابل کا ضلع

مثلثیاتی نسبتیں (Trigonometric Ratios)

متصلہ شکل 8.8 میں کچھ قائمۃ الزاویہ مثلث دکھائے ہوئے ہیں۔ ان کا $\angle B$ مشترک زاویہ ہے۔اس کی وجہ سے تمام قائمۃ الزاویہ مثلث متشابہ ہیں۔



شکل 8.8

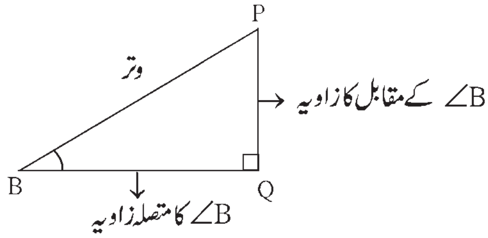
یہاں $\Delta PQB \sim \Delta ACB$

$$\therefore \frac{PB}{AB} = \frac{PQ}{AC} = \frac{BQ}{BC}$$

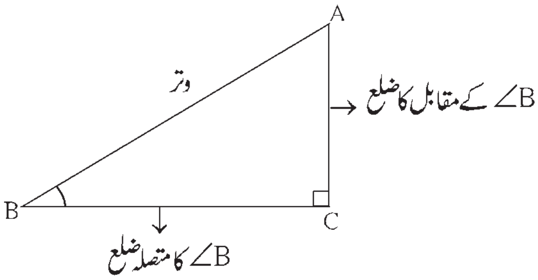
$$\frac{PQ}{AC} = \frac{PB}{AB} \quad , \quad \therefore \frac{PQ}{PB} = \frac{AC}{AB} \quad \text{... (عمل تبدیل)}$$

$$\frac{QB}{BC} = \frac{PB}{AB} \quad , \quad \therefore \frac{QB}{PB} = \frac{BC}{AB} \quad \text{... (عمل تبدیل)}$$

درج ذیل اشکال 8.9 اور 8.10 کو شکل 8.8 سے علیحدہ کیے گئے مثلثوں کی ہیں۔



شکل 8.9



شکل 8.10

(i) △PQB میں،

$$\frac{PQ}{PB} = \frac{\angle B \text{ کے مقابل کا ضلع}}{\text{وتر}}$$

△ACB میں،

$$\frac{AC}{AB} = \frac{\angle B \text{ کے مقابل کا ضلع}}{\text{وتر}}$$

$\frac{PQ}{PB}$ اور $\frac{AC}{AB}$ مساوی نسبتیں ہیں۔

$$\frac{PQ}{PB} = \frac{AC}{AB} = \frac{\angle B \text{ کے مقابل کا ضلع}}{\text{وتر}}$$

اس نسبت کو زاویہ B کی سائن (sine) نسبت کہتے ہیں۔ اس نسبت کو مختصراً sinB لکھتے ہیں۔

(ii) ΔPQB اور ΔACB میں،

$$\frac{BC}{AB} = \frac{\angle B \text{ کا متصلہ ضلع}}{\text{وتر}} \quad \text{اور} \quad \frac{BQ}{PB} = \frac{\angle B \text{ کا متصلہ ضلع}}{\text{وتر}}$$

$$\frac{BQ}{PB} = \frac{BC}{AB} = \frac{\angle B \text{ کا متصلہ ضلع}}{\text{وتر}}$$

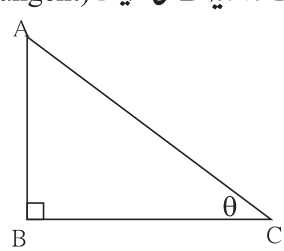
اس نسبت کو زاویہ B کی کوسائن (cosine) نسبت کہتے ہیں اس نسبت کو مختصراً cos B لکھتے ہیں۔

(iii) Δ PQB اور Δ ACB میں،

$$\frac{AC}{BC} = \frac{\angle B \text{ کے مقابل کا ضلع}}{\angle B \text{ کا متصلہ ضلع}} \quad \text{اور} \quad \frac{PQ}{BQ} = \frac{\angle B \text{ کے مقابل کا ضلع}}{\angle B \text{ کا متصلہ ضلع}}$$

$$\frac{PQ}{BQ} = \frac{AC}{BC} = \frac{\angle B \text{ کے مقابل کا ضلع}}{\angle B \text{ کا متصلہ ضلع}}$$

اس نسبت کو زاویہ B کی ٹینجینٹ (Tangent) نسبت کہتے ہیں اس نسبت کو مختصراً tan B لکھتے ہیں۔



شکل 8.11

مثال : کبھی کبھی قائمۃ الزاویہ مثلث کے حادہ زاویوں کی پیمائشوں کو θ (تھیٹا)، α (الفا)، β (بیٹا) وغیرہ لاطینی حروف سے ظاہر کرتے ہیں۔ متصلہ شکل 8.11 میں Δ ABC کے حادہ زاویہ C کی پیمائش θ حروف سے ظاہر کی گئی ہے ایسے وقت میں sin C, cos C, tan C نسبتوں کو بالترتیب $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$ لکھتے ہیں۔

$\sin C = \sin \theta = \frac{AB}{AC}$, $\cos C = \cos \theta = \frac{BC}{AC}$, $\tan C = \tan \theta = \frac{AB}{BC}$

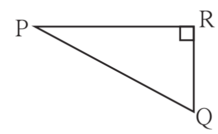
اسے دھیان میں رکھیں

- sin نسبت = زاویہ کے مقابل کا ضلع / وتر
- cos نسبت = زاویہ کا متصلہ ضلع / وتر
- tan نسبت = زاویہ کے مقابل کا ضلع / زاویہ کا متصلہ ضلع

مشقی سیٹ 8.1

.1 متصلہ شکل 8.12 میں ΔPQR میں $\angle R$ قائمۃ الزاویہ ہے۔ تب درج ذیل نسبتیں لکھیے۔

(i) sin P (ii) cos Q (iii) tan P (iv) tan Q

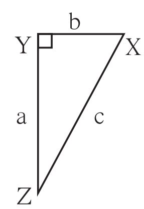


شکل 8.12

.2 متصلہ شکل 8.13 میں ΔXYZ قائمۃ الزاویہ مثلث ہے۔

$\angle XYZ=90°$ ہے۔ اضلاع کی لمبائیاں a، b، c دی ہوئی ہیں۔ اس کی بناء پر درج ذیل نسبتیں لکھیے۔

(i) sin X (ii) tan Z (iii) cos X (iv) tan X

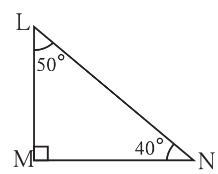


شکل 8.13

.3 قائمۃ الزاویہ ΔLMN میں $\angle LMN=90°$، $\angle L=50°$ اور $\angle N= 40°$ ہے۔ اس بنا پر درج ذیل نسبتیں لکھیے۔

(i) $\sin 50°$ (ii) $\cos 50°$

(iii) $\tan 40°$ (iv) $\cos 40°$

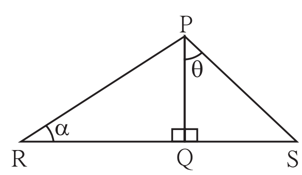


شکل 8.14

.4 دی ہوئی شکل 8.15 میں $\angle PQS = 90°$، $\angle PRQ = \alpha$ اور $\angle QPS=\theta$ ہو تب درج ذیل مثلثیاتی نسبتیں لکھیے۔

(i) $\sin \alpha, \cos \alpha, \tan \alpha$

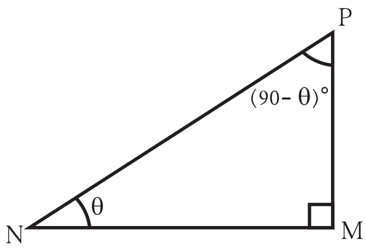
(ii) $\sin \theta, \cos \theta, \tan \theta$



شکل 8.15

آیئے سمجھ لیں

مثلثیاتی نسبتوں کے درمیان باہمی تعلق (Relation among trignometric ratios)



شکل 8.16

شکل 8.16 میں ΔPMN قائمۃ الزاویہ مثلث ہے۔ $m\angle M=90^\circ$،

$\angle P$ اور $\angle N$ ایک دوسرے کے مکملہ زاویے ہیں۔

اگر $m\angle N = \theta$ تب $m\angle P = 90 - \theta$

$$\sin\theta = \frac{PM}{PN} \quad \ldots(1)$$

$$\cos\theta = \frac{NM}{PN} \quad \ldots(2)$$

$$\tan\theta = \frac{PM}{NM} \quad \ldots(3)$$

$$\sin(90-\theta) = \frac{NM}{PN} \quad \ldots(4)$$

$$\cos(90-\theta) = \frac{PM}{PN} \quad \ldots(5)$$

$$\tan(90-\theta) = \frac{NM}{PM} \quad \ldots(6)$$

$\therefore\ \sin\theta = \cos(90-\theta)$ ... [بیان (1) اور (5) سے]

$\cos\theta = \sin(90-\theta)$ ... [بیان (2) اور (4) سے]

اب اس پر بھی توجہ دیجیے۔

$\tan\theta \times \tan(90-\theta) = \frac{PM}{NM} \times \frac{NM}{PM}$ ... [بیان (3) اور (6) سے]

$\therefore\ \tan\theta \times \tan(90-\theta) = 1$

اسی طرح، $\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\frac{PM}{PN}}{\frac{NM}{PN}} = \frac{PM}{PN} \times \frac{PN}{NM} = \frac{PM}{NM} = \tan\theta$

اسے دھیان میں رکھیں

$\cos(90-\theta) = \sin\theta,\qquad \sin(90-\theta) = \cos\theta$

$\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta,\qquad \tan\theta \times \tan(90-\theta) = 1$

* مزید معلومات کے لیے

$$\frac{1}{\sin\theta} = \operatorname{cosec}\theta, \quad \frac{1}{\cos\theta} = \sec\theta, \quad \frac{1}{\tan\theta} = \cot\theta$$

یعنی $\operatorname{cosec}\theta$ ، $\sec\theta$ اور $\cot\theta$ بالترتیب $\sin\theta$ ، $\cos\theta$ اور $\tan\theta$ کی معکوس نسبتیں ہیں۔

- $\sec\theta = \operatorname{cosec}(90-\theta)$
- $\operatorname{cosec}\theta = \sec(90-\theta)$
- $\tan\theta = \cot(90-\theta)$
- $\cot\theta = \tan(90-\theta)$

آیئے ذرا یاد کریں

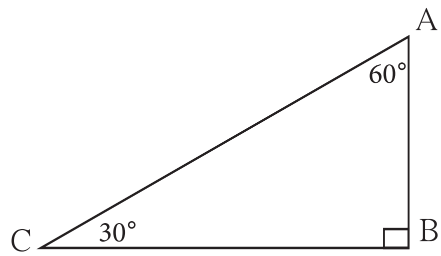
$30° - 60° - 90°$ پیمائشوں کے مثلث کی خصوصیت

کسی مثلث کے زاویوں کی پیمائش $30°–60°–90°$ ہوں تب ہمیں معلوم ہے کہ $30°$ زاویہ کے مقابل کا ضلع وتر کے نصف ہوتا ہے۔ اور $60°$ زاویہ کے مقابل کا ضلع وتر کی لمبائی کے $\frac{\sqrt{3}}{2}$ گنا ہے۔

متصلہ شکل میں، قائمۃ الزاویہ ΔABC میں $\angle C=30°$ ، $\angle A=60°$ ،

$\angle B = 90°$ ہے۔

$$\therefore\ AB = \frac{1}{2}AC \quad \text{اور} \quad BC = \frac{\sqrt{3}}{2}AC$$



شکل 8.17

آیئے سمجھ لیں

$30°$ اور $60°$ زاویوں کی مثلثیاتی نسبتیں (Trignometric ratios of 30°and 90° angles)

قائمۃ الزاویہ ΔPQR میں، اگر $\angle R=30°$ ، $\angle P=60°$ ، $\angle Q = 90°$

اور فرض کیجیے $PQ = a$ تب

$$PQ = \frac{1}{2}PR$$

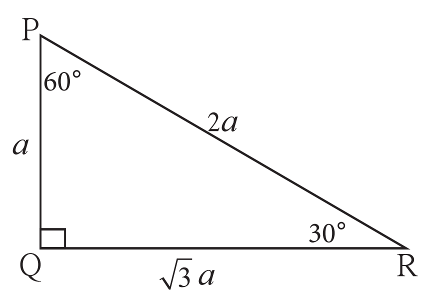
$$a = \frac{1}{2}PR$$

$$\therefore\ PR = 2a$$

$$QR = \frac{\sqrt{3}}{2}PR$$

$$QR = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2a$$

$$QR = \sqrt{3}\,a$$



شکل 8.18

$\therefore$ اگر $PQ = a$ ہو تب $PR = 2a$ اور $QR = \sqrt{3}\,a$

(i) 30° پیمائش کے زاویہ کی مثلثیاتی نسبتیں

$$\sin 30° = \frac{PQ}{PR} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30° = \frac{QR}{PR} = \frac{\sqrt{3}a}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 30° = \frac{PQ}{QR} = \frac{a}{\sqrt{3}a} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

(ii) 60° پیمائش کے زاویہ کی مثلثیاتی نسبتیں

$$\sin 60° = \frac{QR}{PR} = \frac{\sqrt{3}\,a}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60° = \frac{PQ}{PR} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$$

$$\tan 60° = \frac{QR}{PQ} = \frac{\sqrt{3}\,a}{a} = \sqrt{3}$$

قائمۃ الزاویہ ΔPQR میں $\angle Q = 90°$ دیا ہوا ہے۔ $\angle P$ اور $\angle R$ ایک دوسرے کے مکملہ زاویہ ہیں۔ اس لیے مکملہ زاویہ کے سائن اور کوسائن نسبتوں میں تعلق کی تصدیق کیجیے۔

$\cos\theta = \sin(90-\theta)$
$\cos 30° = \sin(90° - 30°) = \sin 60°$
$\cos 30° = \sin 60°$

$\sin\theta = \cos(90-\theta)$
$\sin 30° = \cos(90° - 30°) = \cos 60°$
$\sin 30° = \cos 60°$

اسے دھیان میں رکھیں

$\tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sin 30° = \frac{1}{2}$
$\tan 60° = \sqrt{3}$	$\cos 60° = \frac{1}{2}$	$\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

(iii) 45° پیمائش کے زاویہ کی مثلثیاتی نسبتیں (Trignometric ratios of 45° angle)

قائمۃ الزاویہ ΔABC میں، $\angle B = 90°$، $\angle A = 45°$، $\angle C = 45°$

$\therefore$ یہ متساوی الساقین قائمۃ الزاویہ مثلث ہے۔

فرض کیجیے $AB = a$ ہے تب $BC = a$

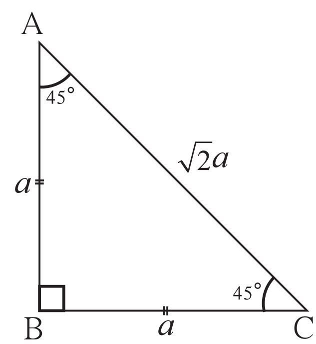
فیثا غورث کے مسئلہ کی رو سے AC کی لمبائی معلوم کیجیے۔

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

$$= a^2 + a^2$$

$$AC^2 = 2a^2$$

$$\therefore AC = \sqrt{2}\,a$$



شکل 8.19

پچھلی شکل 8.19 میں $\angle C = 45°$ ہے۔

$$\sin 45° = \frac{AB}{AC} = \frac{a}{\sqrt{2}\,a} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

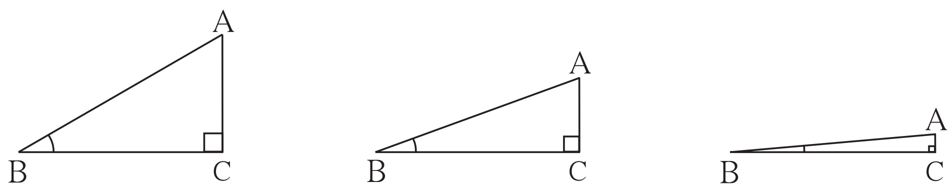
$$\cos 45° = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{\sqrt{2}\,a} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\tan 45° = \frac{AB}{BC} = \frac{a}{a} = 1$$

اسے دھیان میں رکھیں

$$\sin 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad \cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad \tan 45° = 1$$

(iv) 0° اور 90° پیمائشوں کے زاویوں کی مثلثیاتی نسبتیں

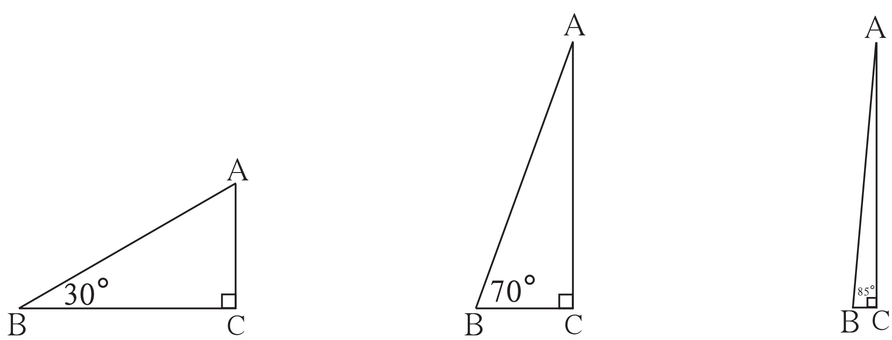


شکل 8.20

قائمۃ الزاویہ ΔABC میں $\angle C = 90°$ اور $\angle B = 30°$ ہے۔ اس لیے $\sin 30° = \frac{AC}{AB}$ یہ ہمیں معلوم ہے۔ AB کی لمبائی مستقل رکھ کر، $\angle B$ کی پیمائش جیسے جیسے کم ہوتی جاتی ہے۔ ویسے ویسے $\angle B$ کے مقابل کا ضلع AC کی لمبائی کم ہوتی جاتی ہے۔ اس لیے $\angle B$ کی پیمائش کم ہوتی ہے ویسے ویسے $\sin\theta$ کی قیمت بھی کم ہوتی ہے۔

$\therefore$ جب $\angle B$ کی پیمائش 0° ہوجائے گی تب AC کی لمبائی 0 ہوجائے گی۔

$$\therefore \sin 0° = \frac{AC}{AB} = \frac{0}{AB} \qquad \therefore \sin 0° = 0$$



شکل 8.21

اب شکل 8.21 میں دیکھیے اس قائمۃ الزاویہ مثلث میں $\angle B$ کی پیمائش جیسے جیسے بڑھتی جاتی ہے۔ ویسے ویسے AC کی لمبائی بڑھتی ہوئی نظر آتی ہے۔ $\angle B$ کی پیمائش اگر 90° ہوجاتی ہے۔ تب AB,AC کے مساوی ہوجائے گی۔

$$\therefore \sin 90^\circ = \frac{AC}{AB} \qquad \therefore \sin 90^\circ = 1$$

ہم نے قائمۃ الزاویہ مثلث کی مثلثیاتی نسبتیں دیکھ چکے ہیں۔

$$\sin\theta = \cos(90-\theta) \quad \text{اور} \quad \cos\theta = \sin(90-\theta)$$

$$\therefore \cos 0^\circ = \sin(90-0)^\circ = \sin 90^\circ = 1$$

$$\text{اور} \quad \cos 90^\circ = \sin(90-90)^\circ = \sin 0^\circ = 0$$

اسے دھیان میں رکھیں

$\sin 0^\circ = 0, \quad \sin 90^\circ = 1, \quad \cos 0^\circ = 1, \quad \cos 90^\circ = 0$

ہمیں معلوم ہے کہ،

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \qquad \therefore \tan 0 = \frac{\sin 0}{\cos 0} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\text{لیکن}, \ \tan 90^\circ = \frac{\sin 90^\circ}{\cos 90^\circ} = \frac{1}{0}$$

لیکن $\frac{1}{0}$ یہ تقسیم نہیں کرسکتے۔ θ حادہ زاویہ بڑا ہوتے ہوتے 90° کے قریب ہوتے جاتا ہے۔ ویسے ویسے $\tan\theta$ تیزی سے خوب بڑھتا جاتا ہے۔ لیکن $\tan 90^\circ$ کی قیمت طے نہیں کرسکتے۔

اسے دھیان میں رکھیں

مخصوص پیمائشوں کے زاویوں کی مثلثیاتی نسبتیں

زاویوں کی پیمائش / نسبتیں	0°	30°	45°	60°	90°
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
tan	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	طے نہیں کی جاسکتی

حل کردہ مثالیں :

مثال (1) قیمت معلوم کیجیے : $2\tan 45^\circ + \cos 30^\circ - \sin 60^\circ$

حل :

$$2\tan 45^\circ + \cos 30^\circ - \sin 60^\circ$$
$$= 2 \times 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$= 2 + 0$$
$$= 2$$

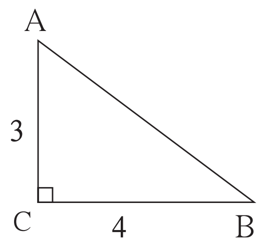
مثال (2) قیمت معلوم کیجیے۔ $\frac{\cos 56^\circ}{\sin 34^\circ}$

حل : $56^\circ + 34^\circ = 90^\circ$ یعنی 56° اور 34° یہ مکملہ زاویوں کی پیمائشیں ہیں۔

$$\sin \theta = \cos \ 90 - \theta$$
$$\therefore \quad \sin 34^\circ = \cos (90 - 34)^\circ = \cos 56^\circ$$
$$\therefore \quad \frac{\cos 56^\circ}{\sin 34^\circ} = \frac{\cos 56^\circ}{\cos 56^\circ} = 1$$

مثال (3) قائمۃ الزاویہ ΔABC میں، اگر $\angle C = 90^\circ$، $AC = 3$، $BC = 4$ ہو تب $\angle A$ اور $\angle B$ کی درج ذیل مثلثیاتی نسبتیں معلوم کیجیے۔

$\sin A, \ \sin B, \ \cos A, \ \tan B$



شکل 8.22

حل : قائمۃ الزویہ ΔABC میں فیثاغورث کے مسئلہ کی رُو سے

$$AB^2 = AC^2 + BC^2$$
$$= 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$$
$$= 5^2$$
$$AB = 5$$

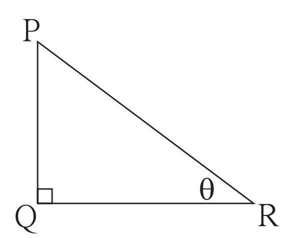
$$\sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{4}{5} \qquad \cos A = \frac{AC}{AB} = \frac{3}{5}$$

$$\sin B = \frac{AC}{AB} = \frac{3}{5} \qquad \tan B = \frac{AC}{BC} = \frac{3}{4}$$

مثال (4) قائمۃ الزاویہ ΔPQR میں $\angle Q = 90^\circ$، $\angle R = \theta$ اور اگر $\sin \theta = \frac{5}{13}$ ہو تب $\cos\theta$ اور $\tan\theta$ معلوم کیجیے۔

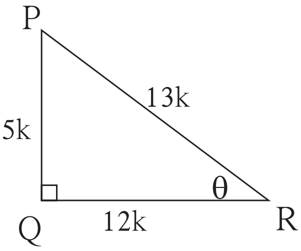
حل : قائمۃ الزاویہ ΔPQR میں $\angle R = \theta$

$$\sin \theta = \frac{5}{13}$$
$$\therefore \quad \frac{PQ}{PR} = \frac{5}{13}$$



∴ فرض کریں، PQ = 5k اور PR = 13k

فیثا غورث کے مسئلہ سے QR معلوم کریں گے۔



شکل 8.24

$$PQ^2 + QR^2 = PR^2$$
$$(5k)^2 + QR^2 = (13k)^2$$
$$25k^2 + QR^2 = 169\,k^2$$
$$QR^2 = 169\,k^2 - 25k^2$$
$$QR^2 = 144\,k^2$$
$$QR = 12k$$

اب قائمۃ الزاویہ ΔPQR میں $PQ = 5k$, $PR = 13k$ اور $QR=12k$

$$\cos\theta = \frac{QR}{PR} = \frac{12k}{13k} = \frac{12}{13}\ ,\ \tan\theta = \frac{PQ}{QR} = \frac{5k}{12k} = \frac{5}{12}$$

غور کیجیے

(1) مذکورہ بالا مثالیں حل کرتے وقت PQ اور PR اضلاع کی لمبائی $5k$ اور $13k$ کیوں لی گئی ہیں؟

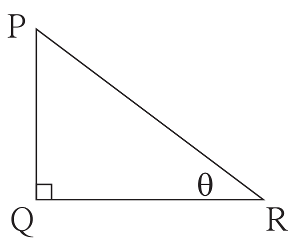
(2) کیا PQ اور PR کی لمبائی بالترتیب 5 اور 13 لی جاسکتی ہیں؟ لی جاسکتی ہوں تو تحریر میں کچھ تبدیلی کی جائے گی؟

مثلثیاتی نسبتوں کی اہم مساوات :

ΔPQR قائمۃ الزاویہ مثلث ہے۔

$\angle PQR = 90°$، فرض کریں $\angle R = \theta$

$$\sin\theta = \frac{PQ}{PR} \quad \dots (1)$$
$$\cos\theta = \frac{QR}{PR} \quad \dots (2)$$



شکل 8.25

فیثا غورث کے مسئلہ کی رو سے،

$$PQ^2 + QR^2 = PR^2$$
$$\therefore \frac{PQ^2}{PR^2} + \frac{QR^2}{PR^2} = \frac{PR^2}{PR^2} \quad \dots$$ (طرفین کے ہر رکن کو PR^2 سے تقسیم کیا)

$$\therefore \left(\frac{PQ}{PR}\right)^2 + \left(\frac{QR}{PR}\right)^2 = 1$$
$$\therefore (\sin\theta)^2 + (\cos\theta)^2 = 1$$

... (بیان (1) اور (2) کی رو سے]

اسے دھیان میں رکھیں

$(\sin\theta)^2$ یعنی $\sin\theta$ کا مربع اسے $\sin^2\theta$ لکھتے ہیں۔

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ یہ مساوات ہم نے فیثا غورث کا مسئلہ استعمال کر کے θ حادہ زاویہ والے قائمۃ الزاویہ مثلث کے لیے ثابت کر چکے ہیں۔ $\theta = 0°$ یا $\theta = 90°$ ہو تب بھی یہ مساوات مطمئن ہوتی ہے۔اس کی تصدیق کیجیے۔

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ یہ مساوات کسی بھی پیمائش کے زاویہ کے لیے مطمئن ہوتی ہے۔اس لیے اسے بنیادی متماثلہ مساوات یا دائمی مساوات کہتے ہیں۔

(i) $0 \le \sin\theta \le 1,\ 0 \le \sin^2\theta \le 1$

(ii) $0 \le \cos\theta \le 1,\ 0 \le \cos^2\theta \le 1$

مشقی سیٹ 8.2

.1 درج ذیل جدول کے ہر ستون میں ایک نسبت دی ہوئی ہے۔اس کی مدد سے دیگر دو نسبتیں معلوم کیجیے اور خالی جگہ پر کیجیے۔

$\sin\theta$		$\frac{11}{61}$		$\frac{1}{2}$				$\frac{3}{5}$	
$\cos\theta$	$\frac{35}{37}$				$\frac{1}{\sqrt{3}}$				
$\tan\theta$			1			$\frac{21}{20}$	$\frac{8}{15}$		$\frac{1}{2\sqrt{2}}$

.2 قیمتیں معلوم کیجیے۔

(i) $5\sin 30° + 3\tan 45°$

(ii) $\frac{4}{5}\tan^2 60° + 3\sin^2 60°$

(iii) $2\sin 30° + \cos 0° + 3\sin 90°$

(iv) $\frac{\tan 60}{\sin 60 + \cos 60}$

(v) $\cos^2 45° + \sin^2 30°$

(vi) $\cos 60° \times \cos 30° + \sin 60° \times \sin 30°$

.3 اگر $\sin\theta = \frac{4}{5}$ ہو تب $\cos\theta$ معلوم کیجیے۔

.4 اگر $\cos\theta = \frac{15}{17}$ ہو تب $\sin\theta$ معلوم کیجیے۔

(1) درج ذیل کثیر متبادل سوالوں کے جواب سے صحیح متبادل منتخب کیجیے۔

(i) درج ذیل میں سے کون سا بیان صحیح ہے؟

(A) $\sin \theta = \cos (90- \theta)$ (B) $\cos \theta = \tan (90- \theta)$

(C) $\sin \theta = \tan (90- \theta)$ (D) $\tan \theta = \tan (90- \theta)$

(ii) $\sin 90^\circ$ کی قیمت درج ذیل میں سے کون سی ہے؟

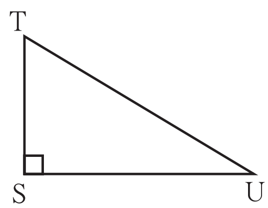
(A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (B) 0 (C) $\frac{1}{2}$ (D) 1

(iii) $2 \tan 45^\circ + \cos 45^\circ - \sin 45^\circ =$ کتنا ؟

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

(iv) $\frac{\cos 28^\circ}{\sin 62^\circ} =$ کتنا ؟

(A) 2 (B) -1 (C) 0 (D) 1

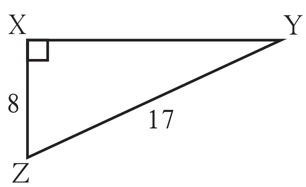


شکل 8.26

(2) قائمۃ الزاویہ ΔTSU میں $TS = 5$، $\angle S = 90^\circ$، $SU = 12$

ہو تب $\tan T, \cos T, \sin T$ معلوم کیجیے اسی طرح

$\tan U, \cos U, \sin U$ معلوم کیجیے۔

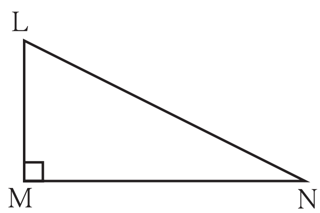


شکل 8.27

(3) قائمۃ الزاویہ مثلث ΔYXZ میں $\angle X = 90^\circ$، $XZ = 8$ سم،

$YZ = 17$ سم ہو تب $\tan Y, \cos Y, \sin Y$ اور

$\tan Z, \cos Z, \sin Z$ معلوم کیجیے۔



شکل 8.28

(4) قائمۃ الزاویہ ΔLMN میں $\angle N = \theta$، $\angle M = 90^\circ$

$\cos \theta = \frac{24}{25}$ ہو تب $\sin \theta$ اور $\tan \theta$ کی نسبتیں معلوم کیجیے۔اسی طرح $(\sin^2\theta)$

اور $(\cos^2\theta)$ کی قیمت معلوم کیجیے۔

(5) خالی جگہ پر کیجیے۔

(i) $\sin 20^\circ = \cos \square^\circ$

(ii) $\tan 30^\circ \times \tan \square^\circ = 1$

(iii) $\cos 40^\circ = \sin \square^\circ$

❑❑❑

سطح کا رقبہ اور حجم Surface area and Volume

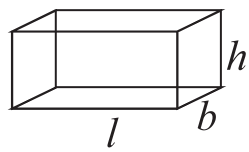
آیئے، سیکھیں

- مخروط کی سطحوں کا رقبہ
- کرّہ کی سطح کا رقبہ
- مخروط کا حجم
- کرّہ کا حجم

آیئے ذرا یاد کریں

ہم نے گذشتہ جماعت میں مستطیلی منشور (مکعب نما) مکعب، مدوّر استوانہ جیسے اجسام کی سطح کا رقبہ اور حجم معلوم کرنے کا مطالعہ کر چکے ہیں۔

مستطیلی منشور : مستطیلی منشور (مکعب نما) کی لمبائی، چوڑائی اور اونچائی بالترتیب l , b, h ہو تب،



شکل 9.1

(i) مستطیلی منشور کی عمودی سطحوں کا رقبہ $= 2(l + b) \times h$

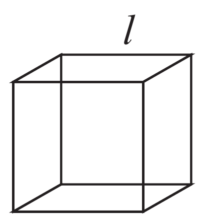
یہاں مستطیلی منشور کی عمودی 4 سطحوں کے رقبوں پر غور کیا گیا ہے۔

(ii) مستطیلی منشور کی کل سطحوں کا رقبہ $= 2(lb + bh + lh)$

یہاں، مستطیلی منشور کی چھے سطحوں کے رقبوں پر غور کیا گیا ہے۔

(iii) مستطیلی منشور کا حجم $= l \times b \times h$

مکعب : مکعب کا کنارہ (edge) l ہو تب



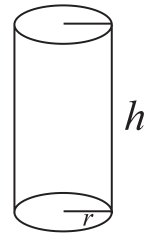
شکل 9.2

(i) مکعب کی کل سطحوں کا رقبہ $= 6l^2$

(ii) مکعب کی عمودی سطحوں کا رقبہ $= 4l^2$

(iii) مکعب کا حجم $= l^3$

مدّور استوانہ : مدوّر استوانہ کے قاعدہ کا نصف قطر r اور اونچائی h ہو تب



شکل 9.3

(i) مدوّر استوانہ کی خمدار سطح کا رقبہ $= 2\pi rh$

(ii) مدوّر استوانہ کی کل سطح کا رقبہ $= 2\pi r(r + h)$

(iii) مدوّر استوانہ کا حجم $= \pi r^2h$

مشقی سیٹ 9.1

.1 ایک مستطیلی منشورشکل کے دوائیوں کے بکس کی لمبائی، چوڑائی اوراونچائی بالترتیب 20 سم، 12 سم اور 10 سم ہے تو اس بکس کے عمودی سطحوں کا رقبہ اورکل سطحوں کا رقبہ معلوم کیجیے۔

.2 ایک مستطیلی منشورشکل کے بکس کی کل سطحوں کا رقبہ 500 مربع اکائی ہے۔اس کی چوڑائی اوراونچائی بالترتیب 6 اور 5 اکائی ہے تو اس بکس کی لمبائی کتنی ہوگی؟

.3 ایک مکعب کا ضلع 4.5 سم ہے، اس مکعب کے عمودی سطحوں کا رقبہ اورکل سطحوں کا رقبہ معلوم کیجیے۔

.4 ایک مکعب کی کل سطحوں کا رقبہ 5400 مربع سم ہے تو اس مکعب کی عمودی سطحوں کا رقبہ معلوم کیجیے۔

.5 ایک مستطیلی منشورکا حجم 34.50 مکعب میٹر ہے۔اس کی چوڑائی اوراونچائی بالترتیب 1.5 میٹراور 1.15 میٹر ہے تو اس مستطیلی منشورکی لمبائی معلوم کیجیے۔

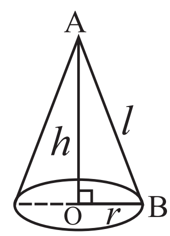
.6 7.5 سم کنارے والے مکعب کا حجم کتنا؟

.7 ایک مدوّر استوانہ کے قاعدہ کا نصف قطر 20 سم اوراونچائی 13 سم ہے تو اس مدوّر استوانہ کی خمدار سطح کا رقبہ اورکل رقبہ معلوم کیجیے۔ $(\pi = 3.14)$

.8 مدوّر استوانہ کی خمدار سطح کا رقبہ 1980 مربع سم ہے اور قاعدہ کا نصف قطر 15 سم ہو تو اس مدوّر استوانے کی اونچائی معلوم کیجیے۔ $(\pi = \frac{22}{7})$

آیئے سمجھ لیں

مخروط سے متعلق اصطلاحات اوران کا باہمی تعلق (Term related with a cone and their relation)



شکل 9.4

متصلہ شکل 9.4 کی شکل مخروط کی ہے۔مخروط کے قاعدہ کا مرکز O ہے اورمخروط کا راس A ہے۔ قطعہ OA نصف قطر OB پر عمود ہے۔لہٰذا OA مخروط کی بلندی (h) ہے۔ AB مخروط کی مائل بلندی (l) ہے۔

$\triangle AOB$ قائمۃ الزاویہ مثلث ہے۔

$\therefore$ فیثا غورث مسئلہ کی رؤ سے،

$$AB^2 = AO^2 + OB^2$$

$$\therefore \quad l^2 = h^2 + r^2$$

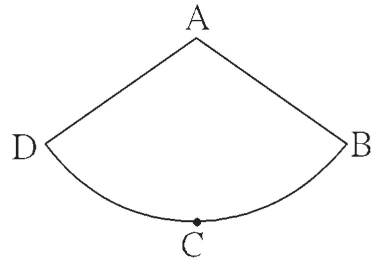
یعنی ، $(\text{مائل بلندی})^2 = (\text{بلندی})^2 + (\text{قاعدہ کا نصف قطر})^2$

مخروط کی سطح کا رقبہ (Surface Area of a Cone)

مخروط کی دو سطحیں ہوتی ہیں۔ (i) دائروی سطح (ii) خمدار سطح

ان میں سے دائرہ کے رقبہ کے ضابطے سے مخروط کے قاعدہ کا رقبہ معلوم کیا جاسکتا ہے۔مخروط کی خمدار سطح کا رقبہ معلوم کرنے کے لیے ضابطہ کس طرح معلوم کریں گے۔

اس کے لیے مخروط کی خمدار سطح کا مشاہدہ باریک بینی سے کریں گے۔



شکل 9.5

شکل 9.4 میں مخروط کو اس کی مائل بلندی AB پر سے کاٹ کر کھول دیا گیا ہے۔اس کی بناوٹ متصلہ شکل 9.5 کے مطابق ملتی ہے۔اس شکل کو دائروی پنکھڑی کہتے ہیں۔

شکل 9.4 اور شکل 9.5 کا موازنہ کیجیے۔کیا اس بناء پر آپ کے ذہن میں ذیل کی باتیں آتی ہیں؟

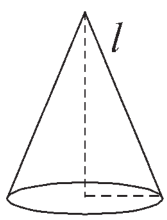
(i) دائروی پنکھڑی کا نصف قطر AB، یہ مخروط کی مائل بلندی کے مساوی ہے۔

(ii) دائروی پنکھڑی کا قوس BCD، مخروط کے قاعدہ کے محیط کی تحویلی شکل ہے۔

(iii) A-BCD، دائروی پنکھڑی کا رقبہ = مخروط کی خمدار سطح کا رقبہ

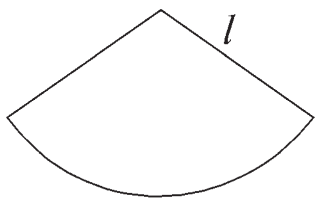
اس بناء پر مخروط کی خمدار سطح کا رقبہ معلوم کرنے کے لیے اس کی بناوٹ کا یعنی دائروی پنکھڑی کا رقبہ معلوم کرنا ہوگا۔یہ رقبہ کس طرح معلوم کر سکتے ہیں؟ ذیل کے عملی کام سے سمجھ لیں

عملی کام :



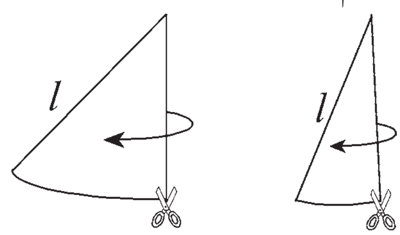
مخروط

شکل 9.6



خمدار سطح کی بناوٹ

شکل 9.7



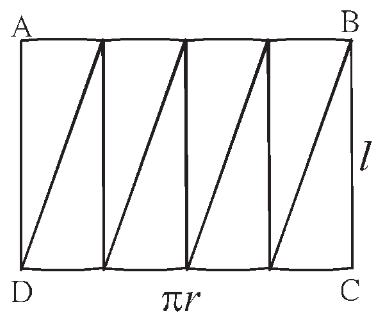
بناوٹ کے ٹکڑے

شکل 9.8

قاعدہ کا محیط = $2\pi r$

ایک خمدار سطح کی شکل 9.9 میں دکھائے ہوئے کے مطابق ہے۔جہاں تک ممکن ہو اتنے چھوٹے ٹکڑے کیجیے۔انھیں شکل 9.10 سے دکھائے ہوئے کے مطابق جوڑیے۔

مخروط کی خمدار سطح کے ٹکڑے اس طرح جوڑنے سے ABCD□ تقریباً ایک مستطیل حاصل ہوا۔



شکل 9.9

AB اور CD کی کل لمبائی $2\pi r$ ہے۔

$\therefore$ ABCD□ مستطیل کے ضلع AB کی لمبائی πr اور ضلع CD کی لمبائی πr ہے۔

l = مخروط کی مائل سطح کی اونچائی = مستطیل کے BC ضلع کی لمبائی

$\therefore$ مخروط کی خمدار سطح یعنی مستطیل کا رقبہ ہوگا۔

$\therefore$ مخروط کی خمدار سطح کا رقبہ = مستطیل کا رقبہ $= AB \times BC = \pi r \times l = \pi r l$

اب، مخروط کی کل سطح کا رقبہ کا ضابطہ معلوم کریں گے۔

مخروط کی کل سطح کا رقبہ = مخروط کی خمدار سطح کا رقبہ + قاعدہ کا رقبہ

$= \pi rl + \pi r^2$

$= \pi r(l + r)$

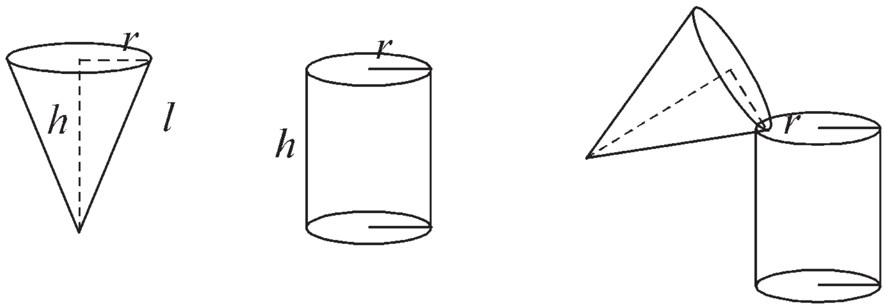
یہاں کیا آپ کے ذہن میں کوئی اہم بات آئی؟ مخروط بند نہیں ہو تو (جوکر کی ٹوپی / جنم دن کی ٹوپی وغیرہ) تب خمدار سطح ہی اس کی ایک سطح ہوتی ہے۔ یعنی ضابطہ سے اس کا کل رقبہ πrl ضابطہ سے ملتا ہے۔

عملی کام :

ایک کارڈ بورڈ لیجیے۔ اس کے ذریعے ایک مخروط اور ایک بند مدوّر استوانہ بنایئے۔ یعنی قاعدہ کا نصف قطر اور بلندی مساوی والا ایک مخروط اور ایک طرف سے بند مدوّر استوانہ بنایئے۔ یعنی مخروط کی بلندی (عمودی اونچائی) اور مدوّر استوانہ کی اونچائی مساوی ہو ایسا ایک مخروط اور مدوّر استوانہ بنایئے۔

مخروط کو باریک بالو سے پورا بھر لیجیے وہ بالو مدوّر استوانہ میں انڈیلیے۔ مدوّر استوانہ پورا بھرنے تک یہی عمل کیجیے۔

مدوّر استوانہ پورا بھرنے کے لئے کتنے مخروط بھر کر بالو ڈالا گیا؟ شمار کیجیے۔



شکل 9.10

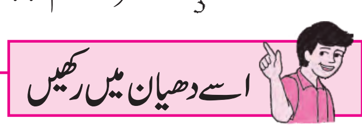
مدوّر استوانہ بھرنے کے لئے بالو سے بھرے ہوئے تین مخروط لگے۔

مخروط کا حجم (Volume of a Cone)

مدوّر استوانے کا حجم = مخروط کا حجم × 3

$\therefore$ 3 × مخروط کا حجم $= \pi r^2 h$

$\therefore$ مخروط کا حجم $= \frac{1}{3} \times \pi r^2 h$



(i) مخروط کے قاعدہ کا رقبہ $= \pi r^2$

(ii) مخروط کی خمدار سطح کا رقبہ $= \pi rl$

(iii) مخروط کی کل سطح کا رقبہ $= \pi r(l + r)$

(iv) مخروط کا حجم $= \frac{1}{3} \times \pi r^2 h$

حل کردہ مثالیں :

مثال (1) مخروط کے قاعدہ کا دیا ہوا نصف قطر (r) اور دی ہوئی بلندی (h) لے کر اس کی مائل بلندی (l) معلوم کیجیے۔

(i) $r = 6$ سم، $h = 8$ سم

$l^2 = r^2 + h^2$

$\therefore l^2 = (6)^2 + (8)^2$

$\therefore l^2 = 36 + 64$

$\therefore l^2 = 100$

$\therefore l = 10$ سم

(ii) $r = 9$ سم، $h = 12$ سم

$l^2 = r^2 + h^2$

$\therefore l^2 = (9)^2 + (12)^2$

$\therefore l^2 = 81 + 144$

$\therefore l^2 = 225$

$\therefore l = 15$ سم

مثال (2) ایک مخروط کا نصف قطر 12 سم اور بلندی 16 سم ہے۔اس مخروط کی مائل بلندی، خمدار سطح کا رقبہ اور کل سطح کا رقبہ معلوم کیجیے۔

$(\pi = 3.14)$

(i) $r = 12$ سم، $h = 16$ سم

$l^2 = r^2 + h^2$

$\therefore l^2 = (12)^2 + (16)^2$

$\therefore l^2 = 144 + 256$

$\therefore l^2 = 400$

$\therefore l = 20$ سم

(ii) مخروط کی خمدار سطح کا رقبہ $= \pi r l$

$= 3.14 \times 12 \times 20$

$= 753.6$ مربع سم

(iii) مخروط کی کل سطح کا رقبہ $= \pi r(l + r)$

$= 3.14 \times 12(20+12)$

$= 3.14 \times 12 \times 32$

$= 1205.76$ مربع سم

مثال (3) ایک مخروط کی کل سطح کا رقبہ 704 مربع سم اور قاعدہ کا نصف قطر 7 سم ہو تو مخروط کی مائل بلندی معلوم کیجیے۔ $(\pi = \frac{22}{7})$

مخروط کی کل سطح کا رقبہ $= \pi r(l + r)$

$\therefore \quad 704 = \frac{22}{7} \times 7\,(l + 7)$

$\therefore \quad \frac{704}{22} = l + 7$

$\therefore \quad 32 = l + 7$

$\therefore \quad 32 - 7 = l$

$\therefore \quad l = 25$ سم

مثال (4) : ایک مخروط کے قاعدہ کارقبہ 1386 مربع سم ہے اور مخروط کی بلندی 28 سم ہو تو، مخروط کی خمدار سطح کا رقبہ معلوم کیجیے۔ $(\pi = \frac{22}{7})$

حل : مخروط کے قاعدہ کارقبہ $= \pi r^2$

$\therefore \quad 1386 = \frac{22}{7} \times r^2$

$\therefore \quad \frac{1386 \times 7}{22} = r^2$

$\therefore \quad 63 \times 7 = r^2$

$\therefore \quad 441 = r^2$

$\therefore \quad r = 21$ سم

$l^2 = r^2 + h^2$

$\therefore l^2 = (21)^2 + (28)^2$

$\therefore l^2 = 441 + 784$

$\therefore l^2 = 1225$

$\therefore l = 35$ سم

مخروط کی خمدار سطح کا رقبہ $= \pi r l$

$= \frac{22}{7} \times 21 \times 35$

$= 22 \times 21 \times 5$

$= 2310$ مربع سم

مشقی سیٹ 9.2

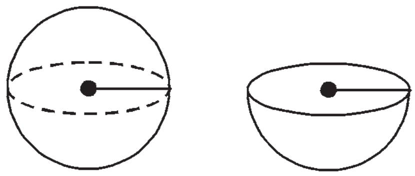
1. مخروط کی بلندی 12 سم اور مائل بلندی 13 سم ہے تب مخروط کے قاعدہ کا نصف قطر کتنا؟
2. ایک مخروط کی کل سطح کا رقبہ 7128 مربع سم اور مخروط کے قاعدہ کا نصف قطر 28 سم ہو تو مخروط کا حجم معلوم کیجیے۔ $(\pi = \frac{22}{7})$
3. ایک مخروط کی خمدار سطح کا رقبہ مربع سم 251.2 اور قاعدہ کا نصف قطر 8 سم ہو تو مخروط کی مائل بلندی اور عمودی بلندی معلوم کیجیے۔ $(\pi = 3.14)$
4. 5 میٹر نصف قطر اور 8 میٹر مائل بلندی کے پترے کی بند مخروطی شکل بنانے کے لیے ₹10 فی مربع میٹر نرخ ہو تو ایسا مخروط بنانے کے لیے درکار خرچ معلوم کیجیے۔ $(\pi = \frac{22}{7})$
5. مخروط کا حجم 6280 مکعب سم ہے، قاعدہ کا نصف قطر 20 سم ہے تو مخروط کی بلندی معلوم کیجیے۔ $(\pi = 3.14)$
6. مخروط کی خمدار سطح کا رقبہ 188.4 مربع سم اور مائل بلندی 10 سم ہے تو مخروط کی بلندی معلوم کیجیے۔ $(\pi = 3.14)$
7. ایک مخروط کا حجم 1232 مکعب سم ہے اور بلندی 24 سم ہے تو اس مخروط کی خمدار سطح کا رقبہ معلوم کیجیے۔ $(\pi = \frac{22}{7})$
8. ایک مخروط کی خمدار سطح کا رقبہ 2200 مربع سم ہے اور اس کی مائل بلندی 50 سم ہے تو اس مخروط کی کل سطح کا رقبہ اور حجم معلوم کیجیے۔ $(\pi = \frac{22}{7})$

*9. ایک مخروطی خیمہ میں 25 افراد رہتے ہیں۔ ہر ایک کو زمین پر 4 مربع میٹرز مین درکار ہے۔ اگر خیمہ کی بلندی 18 میٹر ہو تو خیمہ کا حجم کتنا ہے؟

*10. ایک کھیت میں مویشیوں کے لیے سوکھا چارا مخروطی شکل میں ڈھیر بنا کر رکھا ہوا ہے۔ ڈھیر کی اونچائی 2.1 میٹر ہے اور قاعدہ کا قطر 7.2 میٹر ہے۔ تب چارے کے ڈھیر کا حجم معلوم کیجیے۔ بارش ہونے کا امکان نظر آنے پر ایسے موقع پر اس ڈھیر کو پلاسٹک سے ڈھانکنا ہو تو کسان کو کتنے مربع میٹر پلاسٹک کا کاغذ درکار ہوگا؟ ($\sqrt{17.37} = 4.17$ اور $\pi = \frac{22}{7}$ لیجیے)

آیئے سمجھ لیں

کرہ کی سطح کا رقبہ (Surface Area of Sphere)



شکل 9.12

کھوکھلے کرہ کی خمدار سطح کا رقبہ = $4\pi r^2$

نصف کرہ کی خمدار سطح کا رقبہ = $2\pi r^2$

ٹھوس نصف کرہ کی کل سطح کا رقبہ = خمدار سطح کا رقبہ + دائرہ کا رقبہ

$= 2\pi r^2 + \pi r^2$

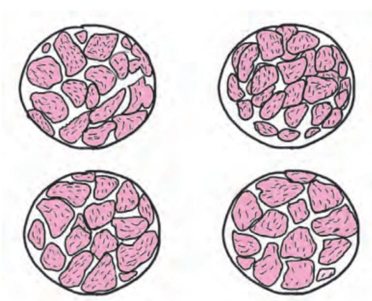
$= 3\pi r^2$

عملی کام :

ایک موسمبی لیجیے۔ اس کے دو نصف حصے کیجیے۔

ایک نصف کرّہ مسطح کاغذ پر اوندھا رکھ کر اس کے گرد پنسل سے دائرہ بنائیے۔ ایسے چار دائرے بنائیے۔ اب موسمبی کی چار مساوی پھانکیں بنائیے۔

ہر پھانک کے چھلکوں کے باریک باریک ٹکڑے کیجیے۔ ایک دائرہ ایک پھانک کے ٹکڑوں سے تقریباً بھر جائے گا۔ اس طرح اس بنا پر چاروں دائرے پورے بھر جائیں گے۔



کرہ کی خمدار سطح کا رقبہ = 4 × دائرہ کا رقبہ

$= 4\pi r^2$

حل کردہ مثالیں :

(1) ایک کرہ کا نصف قطر 7 سم ہے، تب اس کرہ کی خمدار سطح کا رقبہ معلوم کیجیے۔ $(\pi = \frac{22}{7})$

کرہ کی خمدار سطح کا رقبہ $= 4\pi r^2$

$= 4 \times \frac{22}{7} \times (7)^2$

$= 4 \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7$

$= 88 \times 7$

$= 616$

کرہ کی خمدار سطح کا رقبہ = 616 مربع سم

(2) ایک کرہ کی خمدار سطح کا رقبہ 1256 مربع سم ہے تو اس کرہ کا نصف قطر معلوم کیجیے۔ $(\pi = 3.14)$

کرہ کی خمدار سطح کا رقبہ $= 4\pi r^2$

$\therefore 1256 = 4 \times 3.14 \times r^2$

$\therefore 1256 = \frac{1256}{4\times3.14} = r^2$

$\therefore 1256 = \frac{31400}{314} = r^2$

$\therefore 100 = r^2$

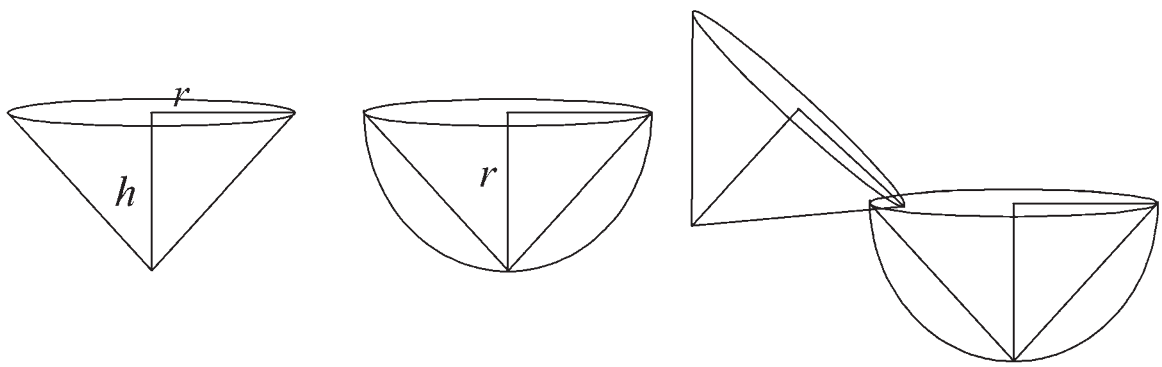
$\therefore 10 = r$

$\therefore r = 10$ سم

عملی کام :

ایک مخروط اور ایک نصف کرہ اس طرح لیجیے کہ، نصف کرہ کا نصف قطر اور مخروط کی بلندی مساوی ہے۔ اسی طرح مخروط کے قاعدہ کا نصف قطر اور نصف کرہ کا نصف قطر مساوی ہے۔

مخروط بالو سے پورا بھریئے۔ پورا بھرا ہوا مخروط نصف کرہ میں انڈیلیے۔ نصف کرہ مکمل طور پر بھرنے کے لیے کتنے مخروط درکار ہوں گے۔ اسے دیکھیے۔



شکل 9.12

ایک نصف کرہ پورا بھرنے کے لیے دو مخروط بھر کر بالو لگے۔

$\therefore$ 2 × مخروط کا حجم = نصف کرہ کا حجم

$\therefore$ مخروط کا حجم × 2 = نصف کرہ کا حجم

$= 2 \times \frac{1}{3} \times \pi r^2 h$

$= 2 \times \frac{1}{3} \times \pi r^2 \times r$

$= \frac{2}{3} \pi r^3$

$\therefore$ کرہ کا حجم = 2 × نصف کرہ کا حجم

$= \frac{4}{3}\pi r^3$

$\therefore$ کرہ کا حجم $= \frac{4}{3}\pi r^3$

اسے دھیان میں رکھیں

$$\text{کرہ کا حجم} = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$\text{نصف کرہ کا حجم} = \frac{2}{3}\pi r^3$$

$$\text{ٹھوس کرہ کی کل سطح کا رقبہ} = 2\pi r^2 + \pi r^2 = 3\pi r^2$$

حل کردہ مثالیں :

مثال (1) ایک کرہ کا نصف قطر 21 سم ہے تو اس کرہ کا حجم معلوم کیجیے۔ $(\pi = \frac{22}{7})$

حل :

$$\text{کرہ کا حجم} = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$= \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times (21)^3$$

$$= \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times 21 \times 21 \times 21$$

$$= 88 \times 441$$

$\therefore$ کرہ کا حجم = 38808 مکعب سم

$\therefore$ کرہ کا حجم 38808 مکعب سم ہے۔

مثال (2) 113040 مکعب سم والے کرہ کا نصف قطر معلوم کیجیے۔ $(\pi = 3.14)$

حل :

$$\text{کرہ کا حجم} = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$113040 = \frac{4}{3} \times 3.14 \times r^3$$

$$\frac{113040 \times 3}{4 \times 3.14} = r^3$$

$$\frac{28260 \times 3}{3.14} = r^3$$

$$\therefore 9000 \times 3 = r^3$$

$$\therefore r^3 = 27000$$

$\therefore r = 30$ سم

کرہ کا نصف قطر 30 سم ہے۔

مثال (3) خمدار سطح کا رقبہ 314 مربع سم والے کرہ کا حجم کتنا؟ $(\pi = 3.14)$

$$\text{کرہ کی خمدار سطح کا رقبہ} = 4\pi r^2$$

$$314 = 4 \times 3.14 \times r^2$$

$$\frac{314}{4 \times 3.14} = r^2$$

$$\frac{31400}{4 \times 314} = r^2$$

$$\therefore \frac{100}{4} = r^2$$

$$\therefore 25 = r^2$$

$\therefore r = 5$ مکعب سم

$$\text{کرہ کا حجم} = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$= \frac{4}{3} \times 3.14 \times 5^3$$

$$= \frac{4}{3} \times 3.14 \times 125$$

$= 523.33$ مکعب سم

مشقی سیٹ 9.3

1. ذیل میں دیے ہوئے عدد کروں کے نصف قطر کو ظاہر کرتے ہیں۔

(i) 4 سم (ii) 9 سم (iii) 3.5 سم

تو ان کروں کی خمدار سطحوں کا رقبہ اور حجم معلوم کیجیے۔ $(\pi = 3.14)$

2. 5 سم نصف قطر والے ٹھوس نصف کرہ کی خمدار سطح کا رقبہ اور کل سطح کا رقبہ معلوم کیجیے۔ $(\pi = 3.14)$

3. 2826 مربع سم خمدار سطح کا رقبہ والے کرہ کا حجم معلوم کیجیے۔ $(\pi = 3.14)$

4. 38808 مکعب سم حجم والے کرہ کی خمدار سطح کا رقبہ معلوم کیجیے۔ $(\pi = \frac{22}{7})$

5. ایک نصف کرہ کا حجم 18000π مکعب سم ہے۔اس کرہ کا قطر معلوم کیجیے۔

مجموعہ سوالات 9

1. 0.9 میٹر قطر اور 1.4 میٹر لمبائی والے روڈ رولر (محرک دھمس) کی 500 گردشوں سے کتنی زمین دبائی جائے گی؟ $(\pi = \frac{22}{7})$

2. ایک مستطیلی منشور کی شکل کا گھریلو مچھلی گھر (ماہی خانہ) (aquarium) بنانے کے لیے 2 ملی میٹر موٹی کانچ کا استعمال کیا گیا۔ماہی خانہ (کی دیوار کی) باہر سے لمبائی، چوڑائی اور اونچائی بالترتیب سینٹی میٹر میں $60.4 \times 40.4 \times 40.2$ ہے۔تو اس ماہی خانہ میں زیادہ سے زیادہ کتنا پانی سمائے گا؟

3. ایک مخروط کے قاعدے کا نصف قطر اور بلندی کی نسبت $5 : 12$ ہے۔مخروط کا حجم 314 مکعب میٹر ہے۔اس کی بلندی اور مائل بلندی معلوم کیجیے۔ $(\pi = 3.14)$

4. ایک کرہ کا حجم 904.32 مکعب سب ہے تو اس کرہ کا نصف قطر معلوم کیجیے۔ $(\pi = 3.14)$

5. ایک مکعب کی کل سطح کا رقبہ 864 مربع سم ہے تو اس کا حجم معلوم کیجیے۔

6. جس کرہ کی سطح کا رقبہ 154 مربع سم ہے۔اس کرہ کا حجم معلوم کیجیے۔

7. ایک مخروط کی کل سطح کا رقبہ 616 مربع سم ہے۔اس کی مائل بلندی، قاعدہ کے نصف قطر کے تین گنا ہو تو مائل بلندی معلوم کیجیے۔

8. دائروی کنویں کا اندرونی قطر 4.20 میٹر اور کنویں کی گہرائی 10 میٹر ہے تو اس کی اندرونی خمدار سطح کا رقبہ کتنا ہے؟ کنویں کی اندرونی خمدار سطح پر استر کاری (پلاسٹر) کرنے کے لیے فی مربع میٹر ₹52 کے نرخ سے کتنا خرچ ہوگا؟

9. ایک محرک دھمس (روڈ رولر) کی لمبائی 2.1 میٹر اور اس کا قطر 1.4 میٹر ہے۔ایک میدان کی ہموار کاری کے دوران رولر نے 500 گردشیں مکمل کرتا ہے تو رولر نے کتنے مربع میٹر میدان ہموار کیا ہوگا؟ ہموار کاری کا نرخ ₹7 فی مربع میٹر ہو تو کتنا خرچ ہوا ہوگا؟

جوابات کی فہرست

1. علم ہندسہ کے بنیادی تصورات

مشقی سیٹ 1.1

1. (i) 3 (ii) 3 (iii) 7 (iv) 1
(v) 3 (vi) 5 (vii) 2 (viii) 7

2. (i) 6 (ii) 8 (iii) 10 (iv) 1 (v) 3 (vi) 12

3. (i) P–R–Q (ii) ہم خطی نہیں ہیں (iii) A–C–B (iv) ہم خطی نہیں ہیں
(v) X–Y–Z (vi) ہم خطی نہیں ہیں

4. 2 اور 18 5. 9 اور 25 **6.** (i) 4.5 (ii) 6.2 (iii) $2\sqrt{7}$ 7. مثلث

مشقی سیٹ 1.2

1. (i) نہیں (ii) نہیں (iii) ہاں 2. 4 3. 5 **4.** BP < AP < AB

5. (i) شعاع RS یا شعاع RT (ii) شعاع PQ (iii) قطعہ QR
(iv) شعاع QR اور شعاع PQ وغیرہ (v) شعاع RQ اور شعاع RT وغیرہ (vi) شعاع SR , شعاع ST وغیرہ
(vii) نقطہ S

6. (i) نقطہ A اور نقطہ C، نقطہ D اور نقطہ P (ii) نقطہ L اور نقطہ U، نقطہ P اور نقطہ R
(iii) $d(U,V) = 10$,$d(P,C) = 6$, $d(V,B) = 3$, $d(U,L) = 2$

مشقی سیٹ 1.3

.1 (i) اگر کوئی ذوار بعۃ الاضلاع متوازی الاضلاع ہو تب اس ذوار بعۃ الاضلاع کے مقابل کے زاویے متماثل ہوتے ہیں۔
(ii) اگر کوئی ذوار بعۃ الاضلاع مستطیل ہو تب اس ذوار بعۃ الاضلاع کے وتر متماثل ہوتے ہیں۔
(iii) اگر کوئی مثلث متساوی الساقین مثلث ہو تو اس مثلث کے راس اور قاعدہ کے وسطی نقطہ کو جوڑنے والا قطعہ قاعدہ پر عمود ہوتا ہے۔

.2 (i) اگر دو خطوط اور ان کا تقاطع دیا ہوا اور بننے والے متبادلہ زاویے متماثل ہوں تب وہ دونوں خطوط متوازی ہوتے ہیں۔
(ii) دو متوازی خطوط کو تقاطع قطع کرتا ہو تو بننے والے داخلہ زاویوں کی جوڑی متمم ہوتی ہے۔
(iii) اگر کوئی ذوار بعۃ الاضلاع کے وتر متماثل ہوں تب وہ ذوار بعۃ الاضلاع مستطیل ہوتا ہے۔

مجموعہ سوالات – 1

1. (i) A (ii) C (iii) C (iv) C (v) B

2. (i) غلط (ii) غلط (iii) صحیح (iv) غلط

3. (i) 3 (ii) 8 (iii) 9 (iv) 2 (v) 6 (vi) 22 (vii) 165 4. 1 اور –15

5. (i) 10.5 (ii) 9.1 (6) 6. 8 اور –6

2. متوازی خطوط

مشقی سیٹ 2.1

1. (i) 95° (ii) 95° (iii) 85° (iv) 85°
2. $\angle a = 70°, \angle b = 70°, \angle c = 115°, \angle d = 65°$
3. $\angle a = 135°, \angle b = 135°, \angle c = 135°$
5. (i) 75° (ii) 75° (iii) 105° (iv) 75°

مشقی سیٹ 2.2

1. نہیں   4. $\angle ABC = 130°$

مجموعہ سوالات - 2

1. (i) C (ii) C (iii) A (iv) B (v) C   4. $x = 130°$ $y = 50°$
5. $x = 126°$ 6. $f = 100°$ 7. $g = 80°$

3. مثلث

مشقی سیٹ 3.1

1. 110°   2. 45°   3. 80°, 60°, 40°   4. 30°, 60°, 90°
5. 60°, 80°, 40°   6. $\angle DRE = 70°, \angle ARE = 110°$
7. $\angle AOB = 125°$ 9. 30°, 70°, 80°

مشقی سیٹ 3.2

1. (i) ضل ضل ضل   (ii) ضل زا ضل   (iii) زا ضل زا   (iv) وترضلع
2. (i) زا ضل زا, $\angle BAC \cong \angle QPR$, قطعہ AB $\cong$ قطعہ PQ, قطعہ AC $\cong$ قطعہ PR
   (ii) ضل زا ضل $\angle TPQ \cong \angle TSR$, $\angle TQP \cong \angle TRS$, قطعہ PQ $\cong$ قطعہ SR
3. وترضلع, $\angle ACB \cong \angle QRP$, $\angle ABC \cong \angle QPR$, قطعہ AC $\cong$ قطعہ QR
4. ضل ضل ضل, $\angle MLN \cong \angle MPN$, $\angle LMN \cong \angle MNP$, $\angle LNM \cong \angle PMN$

مشقی سیٹ 3.3

1. $x = 50°$, $y = 60°$, $m\angle ABD = 110°$, $m\angle ACD = 110°$
2. 7.5 اکائی   3. 6.5 اکائی   4. $l(PG) = 5$ سم , $l(PT) = 7.5$ سم

مشقی سیٹ 3.4

1. 2 سم   2. 28°   3. $\angle QPR, \angle PQR$ 4. ضلع NA, ضلع FN

مشقی سیٹ 3.5

1. $\frac{XY}{LM} = \frac{YZ}{MN} = \frac{XZ}{LN}$, $\angle X \cong \angle L$, $\angle Y \cong \angle M$, $\angle Z \cong \angle N$
2. $l(QR) = 12$ سم , $l(PR) = 10$ سم

مجموعہ سوالات - 3

1. (i) D (ii) B (iii) B

5. ذوار بعۃ الاضلاع

مشقی سیٹ 5.1

1. $m\angle XWZ = 135^\circ$, $m\angle YZW = 45^\circ$, $l(WY) = 10$ سم
2. $x = 40^\circ$, $\angle C = 132^\circ$, $\angle D = 48^\circ$
3. 25 سم, 50 سم, 25 سم, 50 سم
4. $60^\circ, 120^\circ, 60^\circ, 120^\circ$
6. $\angle A = 70^\circ$, $\angle B = 110^\circ$, $\angle C = 70^\circ$, $\angle R = 110^\circ$

مشقی سیٹ 5.3

1. $BO = 4$ سم, $\angle ACB = 35^\circ$
2. $QR = 7.5$ سم, $\angle PQR = 105^\circ$, $\angle SRQ = 75^\circ$
3. $\angle IMJ = 90^\circ$, $\angle JIK = 45^\circ$, $\angle LJK = 45^\circ$ 4. ضلع = 14.5 سم, احاطہ = 58 سم
5. (i) غلط (ii) غلط (iii) صحیح (iv) صحیح (v) صحیح (vi) غلط

مشقی سیٹ 5.4

1. $\angle J = 127^\circ$, $\angle L = 72^\circ$ 2. $\angle B = 108^\circ$, $\angle D = 72^\circ$

مشقی سیٹ 5.5

1. $XY = 4.5$ سم, $YZ = 2.5$ سم, $XZ = 5.5$ سم

مجموعہ سوالات - 5

1. (i) D (ii) C (iii) D 2. 25 سم 3. $6.5\sqrt{2}$ سم
4. 24 سم, 32 سم, 24 سم, 32 سم 5. $PQ = 26$ سم 6. $\angle MPS = 65^\circ$

6. دائرہ

مشقی سیٹ 6.1

1. 20 سم 2. 5 سم 3. 32 اکائی 4. 9 اکائی

مشقی سیٹ 6.2

1. 12 سم 2. 24 سم

مجموعہ سوالات - 6

1. (i) A (ii) C (iii) A (iv) B (v) D (vi) C (vii) D 2. 2:1 4. 24 اکائی

7. محددی علم ہندسہ

مشقی سیٹ 7.1

1. نقطہ A : ربع II, نقطہ B : ربع III, نقطہ K : ربع I, نقطہ D : ربع I

نقطہ E : ربع I, نقطہ F : ربع IV, نقطہ G : ربع IV, نقطہ H : محور-Y

نقطہ M : محور-X, نقطہ N : محور-Y, نقطہ P : محور-Y, نقطہ O : ربع III

2. (i) ربع I (ii) ربع III (iii) ربع IV (iv) ربع II

مشقی سیٹ 7.2

1. مربع 2. $x = -7$ 3. $y = -5$ 4. $x = -3$ 5. 4 اکائی

6. (i) محور-Y (ii) محور-X (iii) محور-Y (iv) محور-X 7. (5, 0) محور پر-X, (0, 5) محور پر-Y

8. (−4,1), (−1.5, 1), (−1.5,5), (−4,5)

مجموعہ سوالات - 7

1. (i) C (ii) A (iii) B (iv) C (v) C (vi) B

2. (i) Q (2,2), R(4,−1) (ii) T(0, –1), M(3, 0), (iii) S نقطہ (iv) O نقطہ

3. (i) IV ربع (ii) III ربع (iii) II ربع (iv) II ربع (v) محور-Y (vi) محور-X

5. (i) 3 (ii) P(3,2), Q(3,−1), R (3,0) (iii) 0 6. دوخط $y = 5$, $y = -5$ 7. $|a|$

8. علم مثلث

مشقی سیٹ 8.1

1. (i) $\frac{QR}{PQ}$ (ii) $\frac{QR}{PQ}$ (iii) $\frac{QR}{PR}$ (iv) $\frac{PR}{QR}$

2. (i) $\frac{a}{c}$ (ii) $\frac{b}{a}$ (iii) $\frac{b}{c}$ (iv) $\frac{a}{b}$

3. (i) $\frac{MN}{LN}$ (ii) $\frac{LM}{LN}$ (iii) $\frac{LM}{MN}$ (iv) $\frac{MN}{LN}$

4. (i) $\frac{PQ}{PR}, \frac{RQ}{PR}, \frac{PQ}{RQ}$ (ii) $\frac{QS}{PS}, \frac{PQ}{PS}, \frac{QS}{PQ}$

مشقی سیٹ 8.2

1. $\sin\theta : \frac{12}{37}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \frac{21}{29}, \frac{8}{17}, \frac{1}{3}$; $\cos\theta : \frac{60}{61}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{20}{29}, \frac{15}{17}, \frac{4}{5}, \frac{2\sqrt{2}}{3}$

$\tan\theta : \frac{12}{35}, \frac{11}{60}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{2}, \frac{3}{4}$

2. (i) $\frac{11}{2}$ (ii) $\frac{93}{20}$ (iii) 5 (iv) $\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}$ (v) $\frac{3}{4}$ (vi) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 3. $\frac{3}{5}$ 4. $\frac{8}{17}$

مجموعہ سوالات - 8

1. (i) A (ii) D (iii) C (iv) D
2. $\sin T = \frac{12}{13}$, $\cos T = \frac{5}{13}$, $\tan T = \frac{12}{5}$, $\sin U = \frac{5}{13}$, $\cos U = \frac{12}{13}$, $\tan U = \frac{5}{12}$
3. $\sin Y = \frac{8}{17}$, $\cos Y = \frac{15}{17}$, $\tan Y = \frac{8}{15}$, $\sin Z = \frac{15}{17}$, $\cos Z = \frac{8}{17}$, $\tan Z = \frac{15}{8}$
4. $\sin \theta = \frac{7}{25}$, $\tan \theta = \frac{7}{24}$, $\sin^2 \theta = \frac{49}{625}$, $\cos^2 \theta = \frac{576}{625}$
5. (i) 70 (ii) 60 (iii) 50

9. سطح کا رقبہ اور حجم

1. 640 مربع سم, 1120 مربع سم 2. 20 اکائی 3. 81 مربع سم, 121.50 مربع سم 4. 3600 مربع سم
5. 20 میٹر 6. 421.88 مکعب سم 7. 1632.80 مربع سم, 4144.80 مربع سم 8. 21 سم

مشقی سیٹ 9.2

1. 5 سم 2. 39690 مکعب سم 3. 10 سم, 6 سم 4. ₹2640 5. 15 سم 6. 8 سم
7. 550 مربع سم 8. 2816 مربع سم, 9856 مکعب سم 9. 600 مکعب سم
10. 28.51 مکعب میٹر, 47.18 مربع میٹر

مشقی سیٹ 9.3

1. (i) 200.96 مربع سم, 267.95 مکعب سم (ii) 1017.36 مربع سم, 3052.08 مکعب سم
 (iii) 153.86 مربع سم, 179.50 مکعب سم
2. 157 مربع سم, 235.5 مربع سم 3. 14130 مکعب سم 4. 5544 مربع سم 5. 60 سم

مجموعہ سوالات - 9

1. 1980 مربع میٹر 2. 96801.6 مکعب سم 3. 12 میٹر, 13 میٹر 4. 6 سم 5. 1728 مکعب سم
6. 179.67 مکعب سم 7. 21 سم 8. 132 مربع سم, ₹6864 9. 4620 مربع سم, ₹32340

❑❑❑

مہاراشٹر راجیہ پاٹھیہ پستک نرمتی وابھیاس کرم سنشودھن منڈل، پونہ - ۴۱۱۰۰۴

उर्दू गणित इ. ९वी भाग-२

₹ 61.00