ریاضی حصّہ - II

نویں جماعت

سرکاری فیصلہ نمبر: ابھیاس – ۲۱۱۶/ پر.نمبر ۱۶/۴۳) ایس ڈی –۴ مورخہ ۲۵/اپریل ۲۰۱۶ء کے مطابق قائم کی گئی رابطہ کمیٹی کی نشست ۳/مارچ ۲۰۱۷ء میں اس کتاب کو درسی کتاب کے طور پر منظوری دی گئی۔

ریاضی

حصّہ – II

نویں جماعت

مہاراشٹر راجیہ پاٹھیہ پستک نرمتی وابھیاس کرم سنشودھن منڈل، پونہ - ۴۱۱۰۰۴

بازو میں دیا ہوا 'کیوآر کوڈ' نیز اس کتاب میں دیگر مقامات پر دیے ہوئے 'کیوآر کوڈ' اسمارٹ فون کے ذریعے اسکین کیے جاسکتے ہیں۔ اسکین کرنے پر ہمیں اس درسی کتاب کی درس وتدریس کے لیے مفید لنک/لنکس (URL) ملے گی۔

طبعِ اوّل : ۲۰۱۷ء
(2017)

ریاضی مضمون کی کمیٹی

- ڈاکٹر منگلا نارلیکر (صدر)
- ڈاکٹر شریمتی جے شری اترے (رکن)
- شری رما کانت سرودے (رکن)
- شری دادا سوسرڈے (رکن)
- شری سندیپ پنچ بھائی (رکن)
- شریمتی لتا تلےکر (رکن)
- شریمتی اجولا گوڈبولے (رکن سکریٹری)

ریاضی مضمون کی مجلس عاملہ

- شریمتی پوجا جادھو
- شری پرمود ٹھومبرے
- شری راجندر چودھری
- شری انا پاپریٹ
- شری شری پاد دیشپانڈے
- شری بنسی ہوالے
- شری اُمیش ریلے
- شری چندن کلکرنی
- شریمتی انیتا جاوے
- شریمتی بھاگیشری چوہان
- شری کلیان کڑیکر
- شری سندیش سوناونے
- شری سجیت شندے
- ڈاکٹر ہنومنت جگتاپ
- شری پرتاپ کاشد
- شری کاشی رام بویسانے
- شری پپو گاڑے
- شریمتی روہنی شرکے
- شری رام وہنیال کر
- جناب انصار شیخ
- شریمتی سورنا دیش پانڈے
- شری گنیش کولتے
- شری سریش داتے
- شری پرکاش جھینڈے
- شری شری کانت رتن پارکھی
- شری سوریہ کانت شہانے
- شری پرکاش کاپسے
- جناب سلیم ہاشمی
- شریمتی آریا بھڑے
- شری ملند بھاکرے
- شری گیانیشور ماشالکر
- شری لکشمن داونکر
- شری سدھیر پاٹل
- شری راجا رام بنڈگر
- شری پردیپ گوڈسے
- شری رویندر کھندارے
- شری ساگر سکوڑے

- شریمتی پراجکتی گوکھلے (مہمان رکن)
- شری وی۔ڈی۔گوڈبولے (مہمان رکن)
- شریمتی ترو بین پوپٹ (مہمان رکن)

Urdu Translators
Mr. Ansari Abdul Hameed Abdul Majeed
Mr. Momin Al-Nasir Abdus Samad

Co-ordinator (Urdu)
Khan Navedul Haque Inamul Haque
Special Officer for Urdu,
M.S. Bureau of Textbooks, Balbharati - Pune

Co-ordinator (Marathi)
Smt. Ujwala S. Godbole
I/C. Special Officer for Mathematics
M.S. Bureau of Textbooks, Balbharati - Pune

Urdu D.T.P. & Layout
Altaf Ameen (Sadan Graphics)
Malegaon-423203

Cover, Art work & Designing
Dhan Shri Mukashi, Pune

Computer Designing
Sandeep Koli, Mumbai

Production
Shri Sachchitanand Aphale (C.P.O)
Shri Sanjay Kamble (Production Officer)
Shri Prashant Harne (Asst. Production Officer)

Paper
70, GSM Creamvowe

Print Order
N/PB/2-017-18/50,000

Printer
BHAVANI INDUSTRIES, KOLHAPUR

Publisher
Shri Vivek Uttam Gosavi (Controller)
M.S. Bureau of Textbook Production,
Prabhadevi, Mumbai - 25

بھارت کا آئین

تمہید

ہم بھارت کے عوام متانت وسنجیدگی سے عزم کرتے ہیں کہ بھارت کو
ایک **مقتدر سماج وادی غیر مذہبی عوامی جمہوریہ** بنائیں
اور اس کے تمام شہریوں کے لیے حاصل کریں :

انصاف، سماجی ، معاشی اور سیاسی ؛

آزادی خیال، اظہار، عقیدہ ، دین اور عبادت ؛

مساوات بہ اعتبارِ حیثیت اور موقع ،

اور ان سب میں

اُخوّت کو ترقّی دیں جس سے فرد کی عظمت اور قوم کے اتحاد اور
سالمیت کا تیقّن ہو؛

**اپنی آئین ساز اسمبلی میں آج چھبّیس نومبر ۱۹۴۹ء کو یہ آئین
ذریعۂ ہٰذا اختیار کرتے ہیں،
وضع کرتے ہیں اور اپنے آپ پر نافذ کرتے ہیں۔**

راشٹر گیت

جَنَ گَنَ مَنَ - اَدِھ نایک جَیَہ ہے
بھارَت - بھاگیہ وِدَھاتا۔

پَنجاب، سِندھ، گُجراتَ، مَراٹھا
دراوِڑ، اُتکَل، بَنگ،

وِندھیہ، ہِماچَل، یَمُنا، گنگا،
اُچّھَل جَل دِھ تَرَنگ،

تَو شُبھَ نامے جاگے، تَو شُبھ آ شِس ماگے،
گا ہے تَو جَیَہ گاتھا،

جَنَ گَنَ منگل دَایَک جَیَہ ہے،
بھارَت - بھاگیہ وِدھاتا۔

جَیَہ ہے، جَیَہ ہے، جَیَہ ہے،
جَیَہ جَیَہ جَیَہ، جَیَہ ہے۔

عہد

بھارت میرا ملک ہے۔ سب بھارتی میرے بھائی اور بہنیں ہیں۔

مجھے اپنے وطن سے پیار ہے اور مَیں اس کے عظیم و گونا گوں وِرثے پر فخر محسوس کرتا ہوں۔ مَیں ہمیشہ اِس ورثے کے قابل بننے کی کوشش کروں گا۔

میں اپنے والدین، استادوں اور بزرگوں کی عزّت کروں گا اور ہر ایک سے خوش اخلاقی کا برتاؤ کروں گا۔

میں اپنے ملک اور اپنے لوگوں کے لیے خود کو وقف کرنے کی قسم کھاتا ہوں۔ اُن کی بہتری اور خوش حالی ہی میں میری خوشی ہے۔

پیش لفظ

عزیز طلبہ!

نویں جماعت میں آپ کا استقبال ہے۔

ابتدائی تعلیم کا نصاب مکمل کر کے آپ ثانوی سطح پر مطالعہ کی ابتدا کر رہے ہو۔ آٹھویں جماعت تک ریاضی کے لیے صرف ایک درسی کتاب تھی۔ اب ریاضی حصہ I اور ریاضی حصہ II، ان کتابوں کا مطالعہ کرنا ہے۔

آٹھویں جماعت تک ریاضی کی درسی کتاب میں خط، مثلث، ذوار بعتہ الاضلاع، دائرہ وغیرہ کی خصوصیت کی تصدیق کر چکے ہو۔ اب مزید کچھ خصوصیت کا آپ منطقی دلائل کے ذریعے مرحلہ وار ثابت کرنا سیکھیں گے۔ منطقی دلائل پیش کرنے کی مہارت کاروباری تمام شعبوں میں اہمیت کی حامل ہے۔ درسی کتاب میں یہ مہارت سیکھنے کا موقع ہے۔

درسی کتاب میں مذکور سرگرمیوں (عملی کام) سے متعلق اساتذہ سے، جماعت کے دوست یا سہیلیوں سے بحث ومباحثہ کیجیے اور ان سرگرمیوں پر عمل کر کے خصوصیت کے ثبوت کا مطالعہ کیجیے۔ ثبوت کے ہر مرحلے کی دی ہوئی وجوہات پر بحث ومباحثہ کیجیے اور اس خصوصیت کو سمجھ لیجیے۔

اس درسی کتاب میں اعلیٰ ریاضی کے مطالعہ کے لیے کارآمد 'علم مثلث اور محددی علم ہندسہ' جیسی اکائیوں کو شامل کیا گیا ہے۔ اسی طرح کاروبار اور لین دین میں کارآمد ومفید 'سطح کا رقبہ اور حجم' اکائیوں کا مطالعہ بھی آپ کریں گے۔

انٹرنیٹ کا استعمال کر کے مختلف عملی کام سمجھ لیجیے۔ درسی کتاب کا تفصیلی مطالعہ، عمل سے مربوط درس اور اعادہ، ان تین طریقوں سے ہی بلاشبہ ریاضی کا سفر آپ خوشی ومسرت سے مکمل کر سکیں گے۔ آیئے تو پھر اساتذہ سرپرست، دوست یا سہیلیاں اور انٹرنیٹ ان سب کو ہمراہ لے کر ریاضی کا مطالعہ کریں۔ اس مطالعہ کے لیے آپ کو نیک تمنائیں!

ڈاکٹر سنیل مگر

ڈائرکٹر

مہاراشٹر راجیہ پاٹھیہ پستک نرمتی

وابھیاس کرم سنشودھن منڈل، پونہ

پونہ

مورخہ : ۲۸/اپریل ۲۰۱۷ء اکشیہ ترتیہ

بھارتی شمسی تاریخ : ۸/ویشاکھ ۱۹۳۹

نویں جماعت ریاضی حصہ II نصاب سے طلبہ میں درج ذیل صلاحیتوں کا ارتقا متوقع ہے۔

زمرہ	اکائی	متوقع صلاحیتیں
1. علم ہندسہ	1.1 اقلیدس	● دیے ہوئے بیان سے استعمال کے قابل دستیاب معلومات (دیا ہوا ہے) اور اس کی بنا پر ثابت کرنے کے لیے بیان (ثابت کرنا ہے) اسے ٹھیک ڈھنگ سے پیش کرنا۔ ● منطقی دلائل پیش کر کے ثابت کرنا ہے بیان کو ثابت کرنے کی صلاحیت کو فروغ دینا۔
	1.2 متوازی خطوط اور زاویوں کی جوڑیاں	● متوازی خطوط اور تقاطع کے ذریعے بننے والے زاویوں کی مختلف جوڑیاں پہچاننا۔ ● زاویوں کی جوڑیوں کی خصوصیت سمجھنا اور ان کا استعمال بروقت کرنا۔
	1.3 مثلث کے زاویے اور ضلعوں کا مسئلہ	● دی ہوئی معلومات، 'دیا ہوا ہے' اور 'ثابت کرنا ہے' کی نوعیت میں لکھ کر ثبوت دینا۔
	1.4 مشابہ مثلث	● مشابہ مثلثوں کو پہچاننا، ان کے اضلاع کی نسبتیں لکھنا۔
	1.5 دائرہ	● متماثل مثلثوں کی آزمائشوں کا استعمال کر کے دائرہ کی خصوصیت ثابت کرنا۔ ● داخلی دائرہ، حائط دائرہ بنانا۔
	1.6 ہندسی عمل	● مثلث کی مخصوص باتیں دی ہوں تو مثلث بنانا۔
	1.7 ذوار بعتہ الاضلاع	● مخصوص ذوار بعتہ الاضلاع کی خصوصیات کا ثبوت لکھنا۔ ● ICT Tools کی مدد سے مثلث، ذوار بعتہ لاضلاع، دائرہ کی خصوصیات کی تصدیق کرنا۔
2. محددی علم ہندسہ	2.1 محددی علم ہندسہ	● مستوی میں واقع ہر نقطہ سے مربوط محددین کی مرتب جوڑی کا مطلب بتانا۔ ● محددین کا استعمال کر کے مخصوص نقطہ کو بیان کرنا۔ ● ICT Tools کا استعمال کر کے مستوی میں نقاط کے محددین معلوم کرنا۔
3. مساحت	3.1 سطح کا رقبہ اور حجم	● کرہ اور مخروط کی سطح کا رقبہ اور حجم معلوم کرنا۔
4. علم مثلث	4.1 علم مثلث	● مشابہ مثلثوں اور فیثا غورث کے مسئلہ کا استعمال کر کے مثلثیاتی نسبتیں بتانا اور ان کا استعمال کرنا۔

اساتذہ کے لیے ہدایات

نویں جماعت ریاضی حصہ – II کی درسی کتاب کا اساتذہ پہلے تفصیلی مطالعہ کریں۔ اس میں دی ہوئی تمام سرگرمیاں (عملی کام) اور تجربات سمجھ لیں۔ عملی کام کے دو حصے ہیں ایک ثبوت لکھنا اور دوسرا خصوصیات کا اور سیکھے ہوئے نتائج کا تجربے کے ذریعے تصدیق کرنا۔ یہ عملی کام کرنے کے لیے اور کتاب سے زیادہ تحریک دلانے کے لیے بحث و مباحثہ، سوال و جواب، اجتماعی سرگرمی جیسے مختلف طریقوں کا استعمال کرنا اساتذہ سے متوقع ہے۔ درسی کتاب کے عملی کام طلبہ سے کروائیں اور اس جیسے کئی عملی کام تیار کرنے کے لیے طلبہ کی رہنمائی کریں۔

مسئلوں کے ثبوت یاد کرنے کی بجائے ان کے منطقی دلائل پر غور کر کے اُن کی پیش کش کرنا زیادہ اہم ہے۔ منطقی دلائل سے غور وفکر کی قوت کو ابھارنے کے لیے مختلف مثالیں درسی کتاب میں شامل کی گئی ہیں۔ ایسی کئی مثالیں استاد اور طالب علم مل کر بنائیں۔ فکر انگیز مثالیں درسی کتاب میں تارے کی علامت لگا کر دی ہوئی ہیں۔ طلبہ مختلف انداز سے غور کر کے منطقی دلائل کے طریقے سے کوئی ثبوت دیں، عملی کام کریں یا مثالیں حل کریں تو اساتذہ ایسے طلبہ کی حوصلہ افزائی کریں۔

قدر پیمائی کرتے وقت آزادانہ جوابی سوالات اور سرگرمی شیٹ پر بھی اساتذہ توجہ دیں۔ قدر پیمائی کے ایسے طریقے کو فروغ دینے کی اساتذہ کوشش کریں۔ اسی کے ساتھ درسی کتاب میں نمونہ کے طور پر تجربات کی فہرست دی ہوئی ہے۔ نیز دستیاب وسائل سے آپ خود انواع و اقسام کے تجربات بنا سکتے ہیں۔ اسی طرح وسائل تعلیم بھی بنائے جا سکتے ہیں۔ درسی کتاب میں مختلف عملی کام کو تجربات کے ساتھ ہم آہنگ کیا گیا ہے۔ اس پر مبنی قدر پیمائی کے طریقے کا استعمال اگلی جماعت کی صلاحیت کو فروغ دینے میں یقیناً کارآمد ہوگا۔ ہمیں ایسی امید ہے۔

نمونہ تجربات کی فہرست

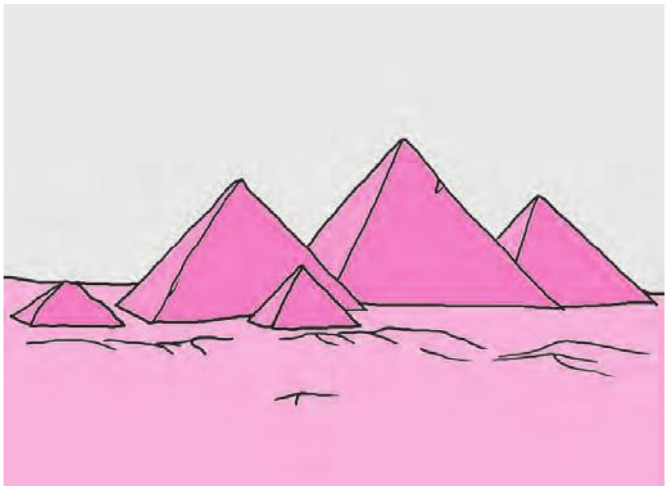
1. عددی خط پر دو نقاط کے درمیان فاصلہ معلوم کرنا۔
2. متوازی خطوط اور تقاطع کے ذریعے بننے والے زاویوں کی خصوصیت کو وسائل کا استعمال کر کے جانچنا۔
3. مختلف وسائل کے ذریعے مثلث کے اضلاع اور زاویوں کی خصوصیت کی جانچ کرنا۔
4. قائمۃ الزاویہ مثلث اور وسطانیہ کی خصوصیات کی تصدیق کرنا۔
5. مثلث بنانے کے لیے مثلثوں کی مختلف پیمائشیں لے کر تمام اقسام کے ہندسی عمل کرنا۔
6. مخروط کی خمدار سطح کے رقبہ کا اندازہ لگانے کے لیے ایک عملی کام دیا ہوا ہے۔ وہ عملی کام 'r' نصف قطر والے دائرہ کے لیے کرنا اور دائرہ کا رقبہ πr^2 ہے۔ اس کی تصدیق کرنا۔
7. کسی کمرے اور اس کی تمام چیزوں کی پیمائشوں کو دھیان میں رکھ کر پیمانے کے مطابق نقشہ، ترسیمی کاغذ پر بنانا۔
8. اسکول کے میدان پر X اور Y محور بنا کر طلبہ کے مقام کے محددین طے کرنے کے لیے عملی کام انجام دینا۔
9. مستطیلی منشور کی جسامت کے ڈبے کا حجم ضابطے کی مدد سے معلوم کرنا اور اسی ڈبے میں لبالب پانی بھر کر پانی کا حجم ناپنا۔ دونوں جوابوں کا موازنہ کرنا اور اسی طرح کئی سہ رخی اجسام والی چیزوں کے حجم کی تصدیق کرنا۔

فہرست

1 علم ہندسہ کے بنیادی تصورات Basic Concept of Geometry

آیئے ، سیکھیں

- نقطہ، خط اور مستوی
- مشروط بیانات
- نقطہ کے محدد اور فاصلہ
- ثبوت
- درمیانیت



کیا آپ نے بازو کی تصویر پہچان لی؟
مصر کے اہرام کی تصویر ہے۔ 3000 قبل مسیح میں اتنی عظیم تعمیر پہلے کے لوگوں نے کس طرح کی ہوگی؟ فن تعمیر اور علم ہندسہ ان علوم میں ترقی ہوئے بغیر اس قسم کی تعمیر ناممکن ہے۔

علم ہندسہ (جیومیٹری) اس کے نام سے ہی اس کے علم کی ابتدا سمجھ میں آتی ہے۔ جیومیٹری یونانی لفظ 'Geo' یعنی زمین اور Metron معنی پیائش۔ اس بنا پر زمین کی پیائش کی ضرورت محسوس ہونے سے اس مضمون کی ابتدا ہوئی ایسا قیاس ہے۔

کئی ممالک میں علم ہندسہ کی ترقی مختلف زمانوں اور مختلف تعمیر کے لیے ہوئی۔ ایسی کہانی مشہور ہے کہ 'تھیلیس' قدیم یونانی ریاضی داں مصر میں جا کر اہرام کے سائے کی لمبائی ناپ کر متشابہ مثلثوں کی خصوصیت کا استعمال کر کے اہرام کی اونچائی معلوم کی تھی۔ ایسا قیاس کیا جاتا ہے کہ فیثا غورث بھی تھیلیس کا شاگرد تھا۔

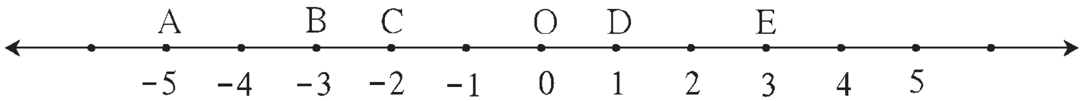
قدیم بھارتیوں کو بھی علم ہندسہ مضمون کا گہرا علم تھا۔ ویدک زمانہ میں بھارتی لوگ یدنیہ کنڈ کی تعمیر کے لیے علم ہندسہ کی خصوصیات کا استعمال کرتے تھے۔ دھاگے کی مدد سے کس طرح ناپا جاتا ہے اور مختلف شکل کس طرح بنانا چاہیے اس بات کا ذکر شلوستر میں ملتا ہے۔ بعد کے زمانے میں آریہ بھٹ، وراہ میر، برہم گپت، بھاسکراچاریہ وغیرہ ریاضی دانوں نے اس مضمون میں قیمتی اضافہ کیا۔

آیئے سمجھ لیں

علم ہندسہ کے بنیادی تصورات : نقطہ ، خط اور مستوی۔ (Basic concept in Geometry : Point, line and Plane)

جس طرح ہم اعداد کی تعریف نہیں کرتے ،اسی طرح نقطہ، خط اور مستوی کی تعریف نہیں کی جاتی ۔ یہ علم ہندسہ کے بنیادی تصورات ہیں ۔ خط اور مستوی نقاط کے سیٹ ہیں۔ خط یعنی مستقیم خط ہوتا ہے اسے ذہن میں رکھیے۔

ذیل کے عددی خط دیکھیے۔



شکل 1.1

یہاں نقطہ D عددی خط پر 1 ظاہر کرتا ہے۔ عدد 1 کو نقطہ D کا محدد کہتے ہیں۔ نقطہ B، عددی خط پر -3 عدد کو ظاہر کرتا ہے، اس لیے نقطہ B کا محدد -3 ہے۔ اسی طرح نقطہ A کا محدد -5 اور E کا محدد 3 ہے۔

نقطہ D سے نقطہ E، 2 اکائی فاصلہ پر واقع ہے یعنی E اور D ان دو نقاط کے درمیان فاصلہ 2 اکائی ہے۔ یہاں ہم اکائی ناپ کر دو نقاط کے درمیان کا فاصلہ معلوم کر سکتے ہیں۔ اس عددی خط پر نقطہ A اور B کے درمیان فاصلہ 2 اکائی ہے۔

اب نقاط کے محددین کا استعمال کر کے فاصلہ کس طرح معلوم کیا جاتا ہے، دیکھیں گے۔

دو نقاط کے درمیان فاصلہ معلوم کرنا یعنی ان نقاط کے محددین میں سے بڑے محدد سے چھوٹا محدد تفریق کرنا۔

نقطہ D کا محدد 1 ہے۔ E کا محدد 3 ہے اور ہم جانتے ہیں کہ $3 > 1$

اس لیے نقطہ E اور D کے درمیان فاصلہ $3 - 1$ یعنی 2 ہے۔

نقطہ E اور D کے درمیان فاصلہ کو $d(E,D)$ کی صورت میں لکھا جاتا ہے۔ یہ فاصلہ یعنی $l(ED)$، قطعہ ED کی لمبائی ہے۔

$$d(E, D) = 3 - 1 = 2$$
$$\therefore\ l(ED) = 2$$
اسی طرح
$$d(E, D) = l(ED) = 2$$

$$d(C, D) = 1 - (-2)$$
$$= 1 + 2 = 3$$
$$\therefore\ d(C, D) = l(CD) = 3$$

اب $d(A,B)$ معلوم کریں گے۔

نقطہ A کا محدد -5 ہے، نقطہ B کا محدد -3 ہے اور $-3 > -5$

$$\therefore\ d(A, B) = -3 - (-5) = -3+5 = 2 \quad \dots \text{(یہ مثبت عدد ہے)}$$

اوپر دی ہوئی تمام مثالوں سے سمجھ میں آتا ہے کہ دو مختلف نقاط کے درمیان فاصلہ مثبت عدد ہوتا ہے۔ اسی طرح اگر P، Q ایک ہی نقطہ ہو تو $d(P, Q) = 0$ اسے دھیان میں دکھیے۔

اسے دھیان میں رکھیں

- دو نقاط کے درمیان فاصلہ، ان کے محددین کے بڑے محدد میں سے چھوٹا محدد تفریق کرنے پر حاصل ہوتا ہے۔
- کسی بھی دو نقاط کے درمیان کا فاصلہ غیر منفی حقیقی عدد ہوتا ہے۔

آیئے سمجھ لیں

درمیانیت (Betweenness)

اگر P,Q,R ہم خطی نقاط ہوں تو ذیل میں دی ہوئی اشکال کے مطابق تین صورتیں ممکن ہوسکتی ہیں۔

شکل 1.2

(i) نقطہ P، نقاط R اور Q کے درمیان ہے۔

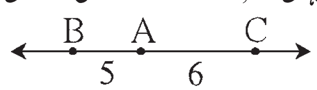
(ii) نقطہ R، نقاط P اور Q کے درمیان ہے۔

(iii) نقطہ Q، نقاط P اور R کے درمیان ہے۔

اگر $d(P, Q) + d(Q, R) = d(P, R)$ ہو تو اس طرح کہا جاتا ہے کہ نقطہ Q، نقاط P اور R کے درمیان واقع ہے اور اسے $P - Q - R$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

مثال (1) ایک عددی خط پر B,A اور C نقاط اس طرح واقع ہیں کہ $d(A, B) = 5$، $d(B, C) = 11$ اور $d(A, C) = 6$ ہو تو بتایئے کون سا نقطہ دیگر دو نقاط کے درمیان واقع ہے؟

حل : یہاں B,A اور C نقاط میں سے کون سا نقطہ دیگر دو نقاط کے درمیان ہے، اسے ہم ذیل کے مطابق بتا سکتے ہیں۔



شکل 1.3

$$d(B,C) = 11 \quad \ldots (I)$$

$$d(A,B) + d(A,C) = 5+6 = 11 \quad \ldots (II)$$

$\therefore\ d(B, C) = d(A, B) + d(A, C)$ ... [(I) اور (II) کی رو سے]

اس لیے نقطہ A، نقاط B اور C کے درمیان واقع ہے۔

مثال (2) ایک راستے پر مستقیم خط میں U , V اور A شہر واقع ہیں۔ U اور A شہروں کے درمیان فاصلہ 215 کلومیٹر، V اور A شہر کے درمیان فاصلہ 140 کلومیٹر اور U اور V کے درمیان فاصلہ 75 کلومیٹر ہے۔ تو بتایئے کون سا شہر کن دو شہروں کے درمیان واقع ہے؟

حل : $d(U,A) = 215; \quad d(V,A) = 140; \quad d(U,V) = 75$

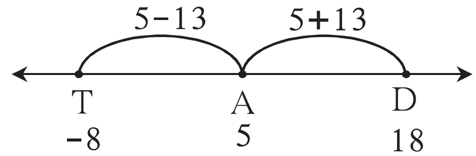
$$d(U,V) + d(V,A) = 75 + 140 = 215; \quad d(U,A) = 215$$

$$\therefore\ d(U,A) = d(U,V) + d(V,A)$$

اس لیے V شہر، U اور A شہروں کے درمیان واقع ہے۔

مثال **(3)** ایک عددی خط پر نقطہ A کا محدد 5 ہے۔اسی عددی خط پر نقطہ A سے 13 اکائی فاصلہ پر واقع نقطہ کا محدد معلوم کیجیے۔

حل : عددی خط پر نقطہ A سے 13 اکائی فاصلہ پر شکل کے مطابق نقطہ A سے بائیں جانب نقطہ T اور دائیں جانب نقطہ D اس طرح دو نقاط لیجیے۔



شکل 1.4

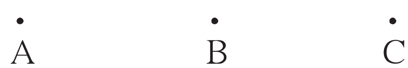
$-8 = 5 - 13 =$ نقطہ A کے بائیں جانب نقطہ T کا محدد

$18 = 5 + 13 =$ نقطہ A کے دائیں جانب نقطہ D کا محدد

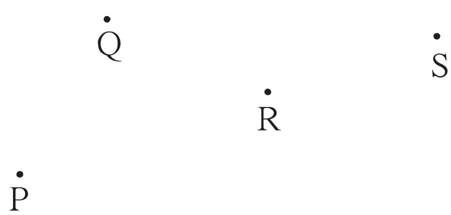
اس لیے نقطہ A سے 13 اکائی فاصلہ پر واقع نقاط کے محدد 8− اور 18 ہوں گے۔

تصدیق کیجیے۔ $d(A,D) = d(A,T) = 13$

عملی کام :



(1) نقاط B, A اور C ہم خطی نقاط ہیں؟ رسی کھینچ کر تصدیق کیجیے کہ وہ ایک خط میں واقع ہوں تو کون سا نقطہ دیگر دو نقاط کے درمیان ہے۔ اسے لکھیے۔

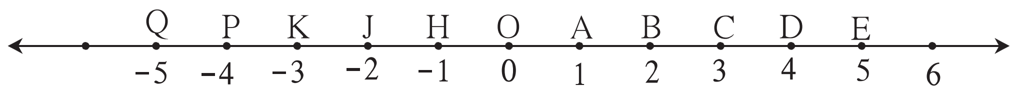


(2) بازو میں دی ہوئی شکل میں P, Q, R اور S چار نقاط دیئے ہوئے ہیں۔ان میں سے کون سے تین نقاط ہم خطی ہیں اور کون سے تین نقاط ہم خطی نہیں ہیں۔ جانچ کیجیے۔ جو تین نقاط ہم خطی ہیں ان کی درمیانیت لکھیے۔

(3) قواعد کے لیے طلبہ کو قطار میں کھڑے رہنے کے لیے کہا گیا ہے۔ ہر قطار کے طلبہ مستقیم خط میں ہیں یا نہیں کیسے آزمائیں گے؟

(4) روشنی کی شعاعیں خطِ مستقیم میں سفر کرتی ہیں یہ آپ کیسے تصدیق کریں گے؟ گذشتہ جماعت میں آپ نے جو سائنسی تجربہ کیا ہے اسے یاد کیجیے۔

(1) ذیل میں دیے ہوئے عددی خط کی مدد سے ذیل کے فاصلے معلوم کیجیے۔



شکل 1.5

(i) $d(B,E)$ (ii) $d(J, A)$ (iii) $d(P, C)$ (iv) $d(J, H)$

(v) $d(K, O)$ (vi) $d(O, E)$ (vii) $d(P, J)$ (viii) $d(Q, B)$

(2) نقطہ A کا محدد x اور نقطہ B کا محدد y ہے۔ تو ذیل کے تعلق سے $d(A, B)$ معلوم کیجیے۔

(i) $x = 1, y = 7$ (ii) $x = 6, y = -2$ (iii) $x = -3, y = 7$

(iv) $x = -4, y = -5$ (v) $x = -3, y = -6$ (vi) $x = 4, y = -8$

(3) ذیل میں دی ہوئی معلومات کے مطابق کون سا نقطہ دیگر دو نقاط کے درمیان ہے طے کیجیے۔ دیے ہوئے نقاط غیر ہم خطی ہوں تو اسے بھی لکھیے۔

(i) $d(P, R) = 7$, $d(P, Q) = 10$, $d(Q, R) = 3$

(ii) $d(R, S) = 8$, $d(S, T) = 6$, $d(R, T) = 4$

(iii) $d(A, B) = 16$, $d(C, A) = 9$, $d(B, C) = 7$

(iv) $d(L, M) = 11$, $d(M, N) = 12$, $d(N, L) = 8$

(v) $d(X, Y) = 15$, $d(Y, Z) = 7$, $d(X, Z) = 8$

(vi) $d(D, E) = 5$, $d(E, F) = 8$, $d(D, F) = 6$

(4) ایک عددی خط پر A، B اور C اس طرح نقاط واقع ہیں کہ $d(A,C) = 10$, $d(C,B) = 8$ تو $d(A,B)$ معلوم کیجیے۔ تمام ممکنات پر غور کیجیے۔

(5) X، Y اور Z ہم خطی نقاط ہیں۔ $d(X, Y) = 17$ ، $d(Y, Z) = 8$ ہو تو $d(X, Z)$ معلوم کیجیے۔

(6) شکل بنا کر ذیل کے سوالات کے جوابات لکھیے۔

(i) اگر A – B – C اور $l(AC) = 11$ ، $l(BC) = 6.5$ ہو تو $l(AB) = ?$

(ii) اگر R – S – T اور $l(ST) = 3.7$ ، $l(RS) = 2.5$ ہو تو $l(RT) = ?$

(iii) اگر X – Y – Z اور $l(XZ) = 3\sqrt{7}$ ، $l(XY) = \sqrt{7}$ ہو تو $l(YZ) = ?$

آئیے سمجھ لیں

نویں جماعت کے ریاضی حصہ 1 میں سیٹ باب میں ہم نے اجتماعی سیٹ، انقطاعی سیٹ کا مطالعہ کیا ہے۔اس کا استعمال کر کے قطعہ خط، شعاع اور خط کی وضاحت نقاط کے سیٹ کی صورت میں کریں گے۔

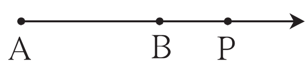
شکل 1.6

(1) قطعہ خط **(Line Segment)** : نقطہ A نقطہ B اور ان دونوں نقاط کے درمیان کے تمام نقاط کا اجتماعی سیٹ قطعہ خط AB ہوتا ہے۔

قطعہ خط AB کو مختصراً قطعہ AB یا لکھا جاتا ہے۔قطعہ (AB) کو قطعہ (BA) بھی کہتے ہیں۔نقطہ A اور نقطہ B یہ قطعہ AB کے اختتامی نقاط ہیں۔

قطعہ خط کے اختتامی نقاط کے درمیان کے فاصلہ کو قطعہ خط کی لمبائی کہتے ہیں۔ $l(AB) = d(A,B)$ ، $l(AB) = 5$ کو $AB = 5$ بھی لکھتے ہیں۔

(2) شعاع **AB (Ray AB)**



شکل 1.7

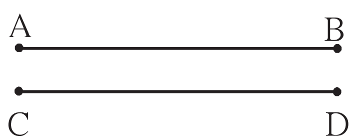
فرض کیجیے A اور B دو مختلف نقاط ہیں۔قطعہ AB پر واقع نقاط اور A – B – P ایسے تمام نقاط P کا اجتماعی سیٹ شعاع AB ہے۔یہاں نقطہ A کو شعاع AB کا مبداء کہتے ہیں۔

(3) خط **AB : (Line AB)**

شعاع AB کے نقاط کا سیٹ اور اس کے مخالف شعاع کے نقاط کا سیٹ مل کر جو اجتماعی سیٹ بنتا ہے وہ خط AB کے نقاط کا سیٹ ہوتا ہے۔

قطعہ AB کے نقاط کا سیٹ، خط AB کے نقاط کے سیٹ کا ضمنی سیٹ ہوتا ہے۔

(4) متماثل قطعاتِ خط **(Congruent Segments)**



شکل 1.8

اگر دیے ہوئے دو قطعات کی لمبائیاں مساوی ہو تو وہ قطعات متماثل ہوتے ہیں۔

اگر $l(AB) = l(CD)$ ہو تو قطعہ CD $\cong$ قطعہ AB

(5) قطعات کی متماثلت کی خصوصیات **(Properties of Congruent Segment)**

(i) عکسی خصوصیت (Reflexivity) ہر قطعہ خط، خود کے متماثل ہوتا ہے۔ قطعہ AB $\cong$ قطعہ AB

(ii) تشاکلی خاصیت (Symmetry) اگر قطعہ CD $\cong$ قطعہ AB ہو تو قطعہ AB $\cong$ قطعہ CD

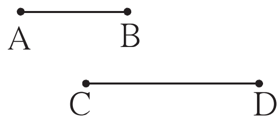
(iii) انتقالی عبوری خاصیت (Transitivity) اگر قطعہ CD $\cong$ قطعہ AB اور قطعہ EF $\cong$ قطعہ CD ہو تو قطعہ EF $\cong$ قطعہ AB۔

(6) قطعہ کا وسطی نقطہ **(Mid point of a Segment)**

شکل 1.9

اگر A – M – B اور قطعہ MB $\cong$ قطعہ AM ہو تو نقطہ M، قطعہ AB کا وسطی نقطہ کہلاتا ہے۔ہر قطعہ خط کا ایک اور صرف ایک ہی وسطی نقطہ ہوتا ہے۔

(7) قطعات خط کا موازنہ (Comparison of Segments) :



شکل 1.10

قطعہ AB کی لمبائی قطعہ CD سے کم ہو، یعنی

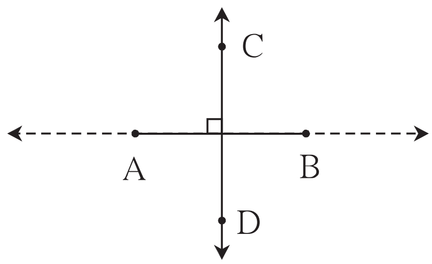
اگر $l(AB) < l(CD)$ ہو تو قطعہ AB < قطعہ CD یا

قطعہ CD > قطعہ AB اس طرح لکھتے ہیں۔

قطعات کا چھوٹا - بڑا پن اُن کی لمبائی پر منحصر ہوتا ہے۔

(8) قطعات یا شعاعوں کی عمودیت

(Perpendicularity of Segments or rays) :

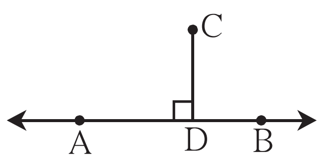


شکل 1.11

دو قطعات، دو شعاعیں یا ایک شعاع اور ایک قطعہ خط انھیں شامل کرنے والے خط اگر ایک دوسرے پر عمود ہوتے ہیں تو وہ دو قطعہ خط، وہ دو شعاعیں یا ایک شعاع اور ایک قطعہ خط ایک دوسرے پر عمود ہوتے ہیں۔

شکل 1.11 میں خط CD $\perp$ قطعہ AB، شعاع CD $\perp$ قطعہ AB

(9) نقطہ کا خط سے فاصلہ (Distance of a point from a line)



شکل 1.12

اگر خط AB $\perp$ قطعہ CD اور نقطہ D، خط AB پر واقع ہو تو قطعہ CD کی لمبائی کو نقطہ C کا خط AB سے فاصلہ کہتے ہیں۔ نقطہ D کو عمود کا پایہ (Foot) کہتے ہیں۔

اگر $l(CD) = a$ ہو تو نقطہ C، خط AB سے a فاصلہ پر ہے۔

مشقی سیٹ 1.2

1. ذیل کی جدول میں عمودی خط پر واقع نقاط کے محدد دیے ہوئے ہیں۔ اس بنا پر ذیل کے قطعہ خط متماثل ہیں یا نہیں طے کیجیے۔

نقطہ	A	B	C	D	E
محدد	-3	5	2	-7	9

(i) قطعہ DE اور قطعہ AB (ii) قطعہ AD اور قطعہ BC (iii) قطعہ AD اور قطعہ BE

2. نقطہ M، قطعہ AB کا وسطی نقطہ ہے اور AB = 8 ہو تو AM = ?

3. نقطہ P، قطعہ CD کا وسطی نقطہ ہے اور CP = 2.5 ہو تو قطعہ CD کی لمبائی معلوم کیجیے۔

4. اگر AB = 5 سم، BP = 2 سم اور AP = 3.4 سم ہو تو قطعات خط کا چھوٹا بڑا پن طے کیجیے۔

(5) شکل 1.13 کی بنا پر ذیل کے سوالات کے جوابات لکھیے۔

شکل 1.13

(i) شعاع RP، کی مخالف شعاع کا نام لکھیے۔

(ii) شعاع PQ اور شعاع RP کا انقطاعی سیٹ لکھیے۔

(iii) قطعہ PQ اور قطعہ QR کا اجتماعی سیٹ لکھیے۔

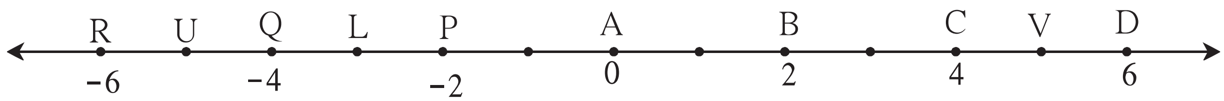
(iv) قطعہ QR کن شعاعوں کا ضمنی سیٹ ہے۔

(v) مبدا، R کی دو مخالف شعاعوں کی جوڑیاں لکھیے۔

(vi) مبدا، S کی کوئی دو مخالف شعاعوں کے نام لکھیے۔

(vii) شعاع SR اور شعاع ST کا انقطاعی سیٹ لکھیے۔

(6) ذیل کی شکل 1.14 کی بنا پر سوالات کے جوابات لکھیے۔



شکل 1.14

(i) نقطہ B سے ہم فاصلہ واقع نقاط کون سے ہیں۔

(ii) نقطہ Q سے ہم فاصلہ نقاط کی ایک جوڑی لکھیے۔

(iii) $d(U, V)$، $d(P, C)$، $d(V, B)$، $d(U,L)$ معلوم کیجیے۔

آیئے سمجھ لیں

مشروط بیان اور عکس (Conditional Statements and Converse)

جو بیان 'جب– تب' یا 'اگر–تو' کی صورت میں لکھے جاتے ہیں انھیں مشروط بیان کہتے ہیں۔ مشروط بیان میں جب سے شروع ہونے والے بیان کو مقدم (دیا ہوا ہے) اور تب سے شروع ہونے والے بیان کو 'تالی' (جوابی) کہتے ہیں۔

مثلاً : 'معین کے وتر ایک دوسرے کے عمودی ناصف ہوتے ہیں' یہ بیان ہے۔

مشروط بیان : جب دیا ہوا ذو اربعۃ الاضلاع معین ہو تو اس کے وتر ایک دوسرے کے عمودی ناصف ہوتے ہیں۔ اگر کوئی مشروط بیان دیا گیا ہو اور اس کے 'مقدم' اور 'تالی' حصہ کو تبدیل کر دیا گیا ہو تو حاصل ہونے والا نیا بیان اصل بیان کا عکس بیان (Converse) کہلاتا ہے۔

کوئی مشروط بیان صحیح ہو تو ضروری نہیں کہ اس کا عکس بیان بھی صحیح ہی ہو۔ ذیل کی مثال دیکھیے۔

مشروط بیان : جب کوئی ذواربعۃ الاضلاع معین ہوتو اس کے وتر ایک دوسرے کے عمودی ناصف ہوتے ہیں۔

عکس بیان : جب کسی ذواربعۃ الاضلاع کے وتر ایک دوسرے کے عمودی ناصف ہوں تب وہ ذواربعۃ الاضلاع معین ہوتا ہے۔

اس مثال میں اصل بیان اور اس کے عکس دونوں صحیح ہیں۔

مشروط بیان : اگر کوئی عدد مفرد عدد ہو تو، وہ عدد جفت یا طاق ہوتا ہے۔

عکس بیان : اگر کوئی عدد جفت یا طاق عدد ہو تو وہ مفرد عدد ہوتا ہے۔

اس میں اصل بیان درست ہے مگر عکس بیان درست نہیں۔

آئیے سمجھ لیں

ثبوت (Proofs)

ہم نے زاویہ، مثلث، ذواربعۃ الاضلاع وغیرہ شکلوں کی کئی خصوصیات کا مطالعہ کیا ہے۔ ان خصوصیات کو ہم نے تجرباتی طریقے سے سیکھا ہے۔ اس جماعت میں ہم 'علم ہندسہ' مضمون کو دوسرے نقطہ نظر سے دیکھنے والے ہیں۔ اس نقطہ نظر کا سہرا تیسری صدی قبل مسیح کے عظیم یونانی ریاضی داں اقلیدس کے سر جاتا ہے۔ علم ہندسہ کی اس زمانے میں جو معلومات تھی، اسے انھوں نے اچھے ڈھنگ سے مربوط کر کے جمع کیا۔ اس میں باضابطگی پیدا کی۔ انھوں نے خاص طور پر کچھ کلیات یا منظور بیانات کو مفروضہ (Postulate) یا تسلیم کردہ بیان کے طور پر قبول کیا، اور اس کی بنیاد پر منطقی دلائل سے نئی خصوصیت ثابت کر سکتے ہیں۔ ثابت کی ہوئی خصوصیات کو مسئلے (Theorems) کہتے ہیں۔

اقلیدس کے پیش کردہ مفروضات میں سے کچھ مفروضے ذیل میں دیے ہوئے ہیں۔

(1) ایک نقطہ سے بے شمار خطوط گزرتے ہیں۔

(2) دو متفرق نقاط سے ایک اور صرف ایک خط گزرتا ہے۔

(3) کسی بھی نقطہ کو مرکز مان کر دیے ہوئے نصف قطر کا دائرہ کھینچا جا سکتا ہے۔

(4) تمام قائمہ زاویے ایک دوسرے کے متماثل ہوتے ہیں۔

(5) دو خطوط اور ان کا ایک تقاطع ہوں تو تقاطع کے ایک جانب بننے والے داخلہ زاویوں کی جمع دو قائمہ زاویوں سے کم ہو تو وہ خط اسی سمت بڑھانے پر ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں۔

اقلیدس

ان میں سے کچھ مفروضات کی ہم نے عملی طور پر تصدیق کر چکے ہیں۔

کسی خصوصیت کا منطقی ثبوت دے سکیں تو اس خصوصیت کو صحیح مان لیا جاتا ہے۔ اس کے لیے دی ہوئی منطقی دلیل کو اس خصوصیت یعنی اس مسئلہ کا ثبوت (Proof) کہتے ہیں۔

کوئی مشروط بیان صحیح ہے ایسا ہمیں ثابت کرنا ہو تب اس کے 'مقدم' حصہ کے بیان کو 'دیا ہوا ہے' بیان کہتے ہیں۔ اور تالی حصہ کو 'ثابت کرنا ہے' کہتے ہیں۔

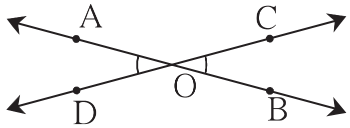
ثبوت کی راست ثبوت اور بالواسطہ ثبوت اس طرح دو قسمیں ہیں۔

ایک دوسرے کو قطع کرنے والے دو خطوط سے بنے ہوئے زاویوں کی خصوصیت کا راست ثبوت دیں گے۔

خصوصیت : دو خطوط ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں تب متقابلہ زاویے متماثل ہوتے ہیں۔

دیا ہوا ہے : خط AB اور خط CD ایک دوسرے کو نقطہ O پر قطع کرتے ہیں۔

$C-O-D$ ،$A-O-B$



شکل 1.15

ثابت کرنا ہے : (i) $\angle AOC = \angle BOD$

(ii) $\angle BOC = \angle AOD$

ثبوت : $\angle AOC + \angle BOC = 180^\circ$ ... (خطی جوڑی کے زاویے) ... (I)

$\angle BOC + \angle BOD = 180^\circ$ ... (خطی جوڑی کے زاویے) ... (II)

$\angle AOC + \angle BOC = \angle BOC + \angle BOD$ ... [بیان (I) اور (II) کی رو سے]

$\therefore \angle AOC = \angle BOD$ ... ($\angle BOC$ کا اخراج کرکے)

اسی طرح $\angle BOC = \angle AOD$ ثابت کیا جا سکتا ہے۔

بالواسطہ ثبوت (Indirect Proof)

اس طریقہ میں شروع میں تالی بیان غلط تسلیم کیا جاتا ہے۔اس کے سہارے صرف منطقی دلائل اور پہلے سے قبول شدہ صحیح بیانات کے سہارے مرحلہ وار ایک نتیجہ تک پہنچتے ہیں۔ یہ نتیجہ معلوم شدہ صحیح خصوصیت یا 'تالی' بیان سے،یعنی دی ہوئی معلومات کے برخلاف ہوتا ہے۔اس لیے تالی بیان غلط ہے، ایسا سمجھنا غلط ہے ایسا نتیجہ نکالتے ہیں۔یعنی تالی بیان صحیح ہے یہ قبول کیا جاتا ہے۔درج ذیل مثال کا مطالعہ کیجیے۔

بیان : دو سے بڑا مفرد عدد، طاق عدد ہوتا ہے۔

مشروط بیان : اگر p ، 2 سے بڑا مفرد عدد ہو تو p طاق عدد ہوتا ہے۔

دیا ہوا ہے : اگر p ، 2 سے بڑا مفرد عدد ہے۔یعنی p کا 1 اور p یہی دو عاد ہیں۔

ثابت کرنا ہے : p، طاق عدد ہے۔

ثبوت : فرض کیجیے p طاق عدد نہیں ہے۔

یعنی p جفت عدد ہے۔

اس لیے 2 ، p کا عاد ہے۔ ... (I)

لیکن p ، 2 سے بڑا مفرد عدد ہے ... (دیا ہوا ہے)

اس لیے p کے 1 اور p یہی دو عاد ہیں۔ ... (II)

بیان (I) اور (II) سے 'دیا ہوا ہے' کے متضاد آتا ہے۔

اس لیے فرض کیا ہوا بیان غلط ہے۔

اس لیے p ، 2 سے بڑا مفرد عدد ہو تو وہ طاق عدد ہوتا ہے، ثابت ہوا۔

مشقی سیٹ 1.3

.1 ذیل کے بیانات ''اگر ۔تب'' کی صورت میں لکھیے۔

(i) متوازی الاضلاع کے مقابل کے زاویے متماثل ہوتے ہیں۔

(ii) مستطیل کے وتر متماثل ہوتے ہیں۔

(iii) متساوی الساقین مثلث میں راس اور قاعدے کا وسطی نقطہ انھیں ملانے والا قطعہ خط قاعدے پر عمود ہوتا ہے۔

.2 ذیل کے بیانات کا عکس بیان لکھیے۔

(i) دو متوازی خطوط اور ان کا تقاطع دیا جائے تو حاصل ہونے والے متبادلہ زاویے متماثل ہوتے ہیں۔

(ii) دو خطوط کو ایک تقاطع سے قطع کریں تو داخلہ زاویوں کی ایک جوڑی متمم ہو تو وہ خطوط متوازی ہوتے ہیں۔

(iii) مستطیل کے وتر متماثل ہوتے ہیں۔

مجموعہ سوالات 1

.1 ذیل کے کثیر متبادل سوالوں کے جواب میں سے صحیح متبادل منتخب کیجیے۔

(i) ہر قطعہ خط کے کتنے وسطی نقاط ہوتے ہیں؟

(A) صرف ایک (B) دو (C) تین (D) کئی

(ii) دو متفرق خطوط ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں تب ان کے انقطاعی سیٹ میں کتنے نقاط ہوتے ہیں؟

(A) بے شمار (B) دو (C) ایک (D) ایک بھی نہیں

(iii) تین مختلف نقاط کو شامل کرنے والے کتنے خطوط ہوتے ہیں؟

(A) دو (B) تین (C) ایک یا تین (D) چھ

(iv) نقطہ A کا محدد -2 اور نقطہ B کا محدد 5 ہو تو $d(A, B) = ?$

(A) −2 (B) 5 (C) 7 (D) 3

(v) اگر P−Q−R، $d(P, Q) = 2$، $d(P, R) = 10$ ہو تو $d(Q, R) = ?$

(A) 12 (B) 8 (C) $\sqrt{96}$ (D) 20

.2 عددی خط پر P, Q, R نقاط کے محدد بالترتیب 3 , 5− اور 6 ہیں۔تو ذیل کے بیانات صحیح ہیں یا نہیں لکھیے۔

(i) $d(P,Q) + d(Q,R) = d(P,R)$ (ii) $d(P,R) + d(R,Q) = d(P,Q)$

(iii) $d(R,P) + d(P,Q) = d(R,Q)$ (iv) $d(P,Q) - d(P,R) = d(Q,R)$

.3 ذیل میں کچھ نقاط کے جوڑیوں کے محدد دیے گئے ہیں۔اس بنا پر ہر جوڑی کے درمیان کا فاصلہ معلوم کیجیے۔

(i) 3, 6 (ii) −9, −1 (iii) −4, 5 (iv) x, −2

(v) $x + 3$, $x - 3$ (vi) −25, −47 (vii) 80, −85

4. عددی خط پر نقطہ P کا محدد -7 ہے تو نقطہ P سے 8 اکائی فاصلہ پر واقع نقاط کے محدد معلوم کیجیے۔

5. دی ہوئی معلومات کے لحاظ ذیل کے سوالات کے جوابات لکھیے۔

(i) اگر A–B–C، $d(A, C) = 17$، $d(B, C) = 6.5$ ہوتو $d(A, B) = ?$

(ii) اگر P–Q–R، $d(P, Q) = 3.4$، $d(Q, R) = 5.7$ ہوتو $d(P, R) = ?$

6. عددی خط پر نقطہ A کا محدد 1 ہے نقطہ A سے 7 اکائی فاصلہ پر واقع نقاط کے محدد معلوم کیجیے۔

7. ذیل کے بیانات مشروط صورت میں لکھیے۔

(i) ہر معین مربع ہوتا ہے۔

(ii) خطی جوڑی کے زاویے ایک دوسرے کے متمم ہوتے ہیں۔

(iii) مثلث تین قطعہ خط سے بنی ہوئی شکل ہوتی ہے۔

(iv) صرف دو عاد والے عدد کو مفرد عدد کہتے ہیں۔

8. ذیل کے بیان کے عکس بیان لکھیے۔

(i) اگر کسی کثیر الاضلاع کے زاویوں کی پیمائشوں کا مجموعہ $180°$ ہو تو وہ شکل مثلث ہوتی ہے۔

(ii) دو زاویوں کی پیمائشوں کا مجموعہ $90°$ ہو تو وہ ایک دوسرے کے مکملہ زاویہ ہوتے ہیں۔

(iii) دو متوازی خطوط اور تقاطع کے قطع کرنے سے بننے والے نظیری زاویے متماثل ہوتے ہیں۔

(iv) کسی عدد کے ہندسوں کا مجموعہ 3 سے تقسیم ہوتا ہو تو وہ عدد 3 سے تقسیم پذیر ہے۔

9. مقابل کے بیانات میں 'دیا ہوا ہے' اور 'ثابت کرنا ہے' بیان لکھیے۔

(i) اگر مثلث کے تینوں اضلاع متماثل ہوں تو اس کے تینوں زاویے متماثل ہوتے ہیں۔

(ii) متوازی الاضلاع کے وتر ایک دوسرے کی تنصیف کرتے ہیں۔

10. ذیل کے بیانات کے لیے نامزدہ شکل بنا کر اس بنا پر 'دیا ہوا ہے' اور 'ثابت کرنا ہے' لکھیے۔

(i) دو متساوی الاضلاع مثلث، متشابہ مثلث ہوتے ہیں۔

(ii) اگر خطی جوڑی کے زاویے متماثل ہوں تو اس کا ہر زاویہ قائمہ زاویہ ہوتا ہے۔

(iii) مثلث کے دو ضلعوں پر کھینچے ہوئے ارتفاع اگر متماثل ہوں تو وہ دونوں ضلع متماثل ہوتے ہیں۔

❑ ❑ ❑

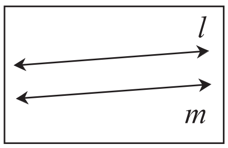
2 Parallel Lines متوازی خطوط

آیئے، سیکھیں

- متوازی خطوط اور تقاطع کے ذریعے بننے والے زاویوں کی خصوصیت
- متوازی خطوط کے خصوصیات کا استعمال
- متوازی خطوط کے لیے آزمائشیں

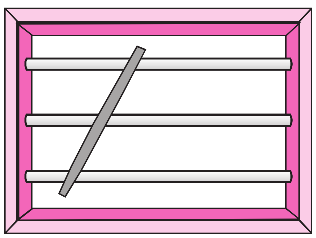
آیئے ذرا یاد کریں

متوازی خطوط : جو خطوط ایک ہی مستوی میں واقع ہوتے ہیں لیکن ایک دوسرے کو کبھی بھی قطع نہیں کرتے تو ان خطوط کو متوازی خطوط کہتے ہیں۔



بازو کی شکل دیکھیے۔

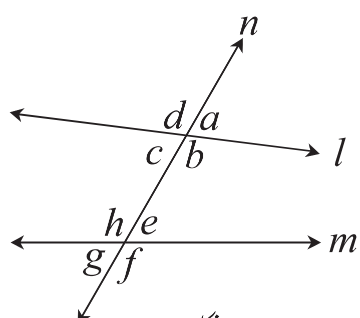
کھڑکی کی افقی متوازی سلاخ پر ایک لکڑی ترچھی پکڑ کر دیکھیے۔ کتنے زاویے بنے ہوئے دکھائی دیتے ہیں؟



دو خطوط اور ان کے تقاطع سے بننے والے زاویوں کی جوڑیاں یاد آتی ہیں؟

شکل 2.1 میں خط l اور خط m کا خط n تقاطع ہے یہاں 8 زاویے بن جاتے ہیں۔

ان کی جوڑیاں ذیل کے مطابق ہیں۔



شکل 2.1

نظیری زاویوں کی جوڑیاں

(i) $\angle d, \angle h$

(ii) $\angle a, \square$

(iii) $\angle c, \square$

(iv) $\angle b, \square$

داخلی متبادلہ زاویوں کی جوڑیاں

(i) $\angle c, \angle e$

(ii) $\angle b, \angle h$

خارجی متبادلہ زاویوں کی جوڑیاں

(i) $\angle d, \angle f$

(ii) $\angle a, \angle g$

تقاطع کے ایک جانب کے داخلہ زاویوں کی جوڑیاں

(i) $\angle c, \angle h$

(ii) $\angle b, \angle e$

کچھ اہم خصوصیات :

(1) دو خطوط ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں تب متقابلہ زاویے متماثل ہوتے ہیں۔

(2) خطی جوڑی کے زاویے ایک دوسرے کے متمم ہوتے ہیں۔

(3) جب نظیری زاویوں کی ایک جوڑی متماثل ہوتی ہے تب نظیری زاویوں کی بقیہ تمام جوڑیاں متماثل ہوتے ہیں۔

(4) جب متبادلہ زاویوں کی ایک جوڑی متماثل ہوتی ہے تب متبادلہ زاویوں کے دیگر تمام جوڑیاں متماثل ہوتی ہیں۔

(5) جب خط تقاطع کے ایک ہی جانب داخلہ زاویوں کی پیمائشوں کا مجموعہ $180°$ ہوتا ہے تب داخلہ زاویوں کی دوسری جوڑی کے زاویوں کی پیمائشوں کا مجموعہ بھی $180°$ ہوتا ہے۔

آیئے سمجھ لیں

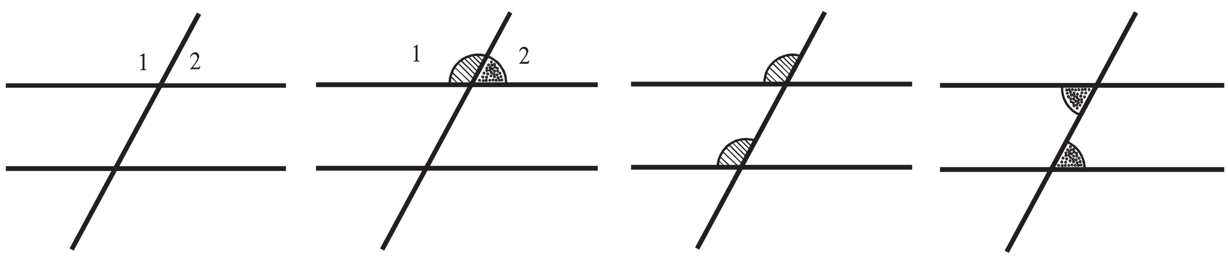
متوازی خطوط کی خصوصیات (Properties of Parallel Lines)

عملی کام : دو متوازی خطوط اور تقاطع کے ذریعے بننے والے زاویوں کی خصوصیات کی تصدیق کرنا۔

عمل : رنگین موٹے کاغذ کا ایک ٹکڑا لیجیے۔ اس پر دو متوازی خطوط بنایئے اور تقاطع کھینچیے ۔

ان تینوں خطوط پر سیدھی تیلیاں گوند سے چسپاں کیجیے۔ یہاں بنے ہوئے آٹھ زاویوں میں سے زاویہ 1 اور زاویہ 2 کی پیمائشوں کے رنگین کارڈ کے ٹکڑے کاٹ کر لیجیے۔ (نیچے کی شکل میں دکھائے ہوئے طریقے کے مطابق)

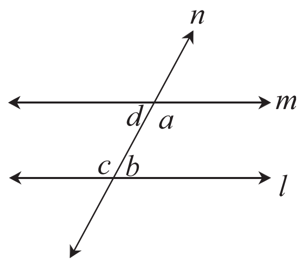
یہ ٹکڑے متعلقہ نظیری زاویے، متبادلہ زاویے اور داخلہ زاویے کی جانب رکھ کر خصوصیات کی تصدیق کیجیے۔



دو متوازی خطوط کے خط تقاطع کی وجہ سے بننے والے زاویوں کی، عملی کام سے تصدیق کردہ خصوصیات کو اب ہم ثابت کریں گے۔ ان خصوصیات کو ثابت کرنے کے لیے ہم اقلیدس کے موضوعات کا استعمال کریں گے۔

دو خطوط اور ان کا ایک تقاطع کھینچیں تو ایک جانب بننے والے داخلہ زاویوں کا دو قائمہ زاویوں سے کم ہوگا۔ تب وہ مستقیم خط اسی سمت میں بڑھانے پر ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں۔

داخلہ زاویوں کا مسئلہ (Interior angle of Theorem) :



شکل 2.2

مسئلہ : دو متوازی خطوط کو ایک تقاطع کے قطع کرنے پر، تقاطع کے کسی بھی ایک ہی جانب کے داخلہ زاویے ایک دوسرے کے متمم ہوتے ہیں۔

دیا ہوا ہے : خط m ‖ خط l اور خط n تقاطع ہے۔ اس لیے شکل کے مطابق $\angle a$، $\angle b$ اور $\angle c$، $\angle d$ داخلہ زاویے ہیں۔

ثابت کرنا ہے : $\angle a + \angle b = 180^\circ$

$\angle d + \angle c = 180^\circ$

ثبوت : $\angle a$ اور $\angle b$ کی پیمائشوں کے مجموعے کے تعلق سے تین ممکنات ہو سکتے ہیں۔

(i) $\angle a + \angle b < 180^\circ$ (ii) $\angle a + \angle b > 180^\circ$ (iii) $\angle a + \angle b = 180^\circ$

ان میں سے (i) $\angle a + \angle b < 180^\circ$ کو درست فرض کرنے پر

خط l اور خط m کو $\angle a$ اور $\angle b$ تقاطع کے جس جانب ہیں انھیں اس جانب بڑھانے پر ایک دوسرے کو قطع کریں گے۔ ... (اقلیدس کے موضوعات کے مطابق)

لیکن خط l اور خط m متوازی خطوط ہیں۔

$\therefore \angle a + \angle b < 180^\circ$ ... (یہ ناممکن ہے) (I)

اب فرض کیجیے $\angle a + \angle b > 180^\circ$ یہ درست ہے۔

$\therefore \angle a + \angle b > 180^\circ$

لیکن ، $\angle a + \angle d = 180^\circ$

اور ، $\angle c + \angle b = 180^\circ$ ... (خطی جوڑی کے زاویے)

$\therefore \angle a + \angle d + \angle b + \angle c = 180^\circ + 180^\circ = 360^\circ$

$\therefore \angle c + \angle d = 360^\circ - (\angle a + \angle b)$

اگر $\angle a + \angle b > 180^\circ$ ہو تو $[360^\circ - (\angle a + \angle b)] < 180^\circ$

$\therefore \angle c + \angle d < 180^\circ$

اس لیے اگر ایسا ہو تو $\angle c$ اور $\angle d$، تقاطع کے جس جانب ہیں اس سمت بڑھانے پر خط l اور خط m ایک دوسرے کو قطع کریں گے۔

(II) ... (یہ ناممکن ہے) ... $\therefore \angle c + \angle d < 180$

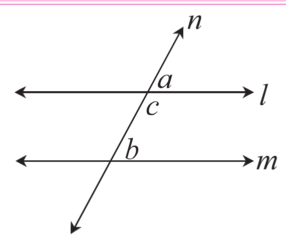
[بیان (I) اور (II) کی بنا پر] ... (یہ صرف ممکن ہے) ... $\angle a + \angle b > 180°$

$\angle c + \angle d = 180°$، اسی طرح $\therefore \angle a + \angle b = 180°$

دھیان میں رکھیے اس ثبوت میں ہم نے $\angle a + \angle b > 180°$ ، $\angle a + \angle b < 180°$ ان دونوں ممکنات کے تضاد کی وجہ سے مسترد کر دیا یعنی یہ ایک بالواسطہ ثبوت ہے۔

نظیری زاویوں اور متبادلہ زاویوں کی خصوصیت (Corresponding angles and Alternate Angles Theorem)

مسئلہ : دو متوازی خطوط اور ایک تقاطع کے ذریعے بننے والے نظیری زاویوں کی جوڑیوں کے زاویوں کی پیمائشیں مساوی ہوتی ہیں۔



شکل 2.3

دیا ہوا ہے : خط $m \parallel$ خط l اور خط n تقاطع ہے۔

ثابت کرنا ہے : $\angle a = \angle b$

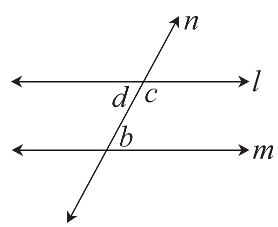
ثبوت : (خطی جوڑی کے زاویے) ... (I) ... $\angle a + \angle c = 180°$

(متوازی خطوط کے داخلہ زاویوں کی خصوصیت)... (II) ... $\angle b + \angle c = 180°$

[بیان (I) اور (II) کی بناء پر] ... $\angle a + \angle c = \angle b + \angle c$

$\therefore \angle a = \angle b$

مسئلہ : دو متوازی خطوط کو ایک تقاطع قطع کرتا ہے تو بننے والے متبادلہ زاویوں کی جوڑی کے زاویوں کی پیمائشیں مساوی ہوتی ہیں۔



شکل 2.4

دیا ہوا ہے : خط $m \parallel$ خط l، خط n، تقاطع ہے۔

ثابت کرنا ہے : $\angle d = \angle b$

ثبوت : (خطی جوڑی کے زاویے) ... (I) ... $\angle d + \angle c = 180°$

(متوازی خطوط کے داخلہ زاویوں کی خصوصیت) ... (II) ... $\angle c + \angle b = 180°$

[بیان (I) اور (II) کی بناء پر] ... $\angle d + \angle c = \angle c + \angle b$

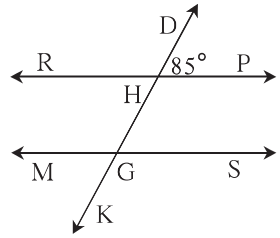
$\therefore \angle d = \angle b$

مشقی سیٹ 2.1

1. شکل 2.5 میں خط MS || خط RP اور خط DK ان کا تقاطع ہے $m\angle DHP = 85°$، ہو تو ذیل کے زاویوں کی پیمائشیں معلوم کیجیے۔

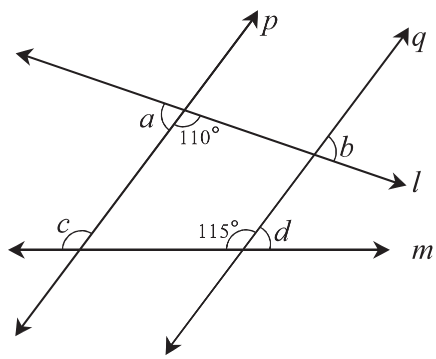
(i) $\angle RHD$ (ii) $\angle PHG$

(iii) $\angle HGS$ (iv) $\angle MGK$



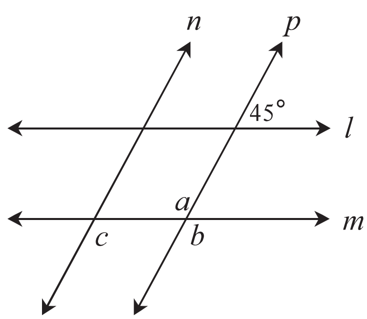
شکل 2.5

2. شکل 2.6 کا مشاہدہ کیجیے۔ خط q || خط p اور خط l اور خط m تقاطع ہیں۔ کچھ زاویوں کی پیمائشیں دی ہوئی ہیں۔ اس معلومات کی بناء پر $\angle a$، $\angle b$، $\angle c$ اور $\angle d$ کی پیمائشیں معلوم کیجیے۔



شکل 2.6

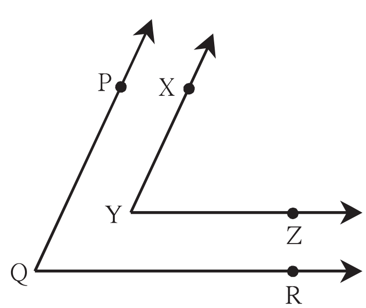
3. شکل 2.7 میں، خط m || خط l اور خط p || خط n ہے۔ ایک زاویے کی دی ہوئی پیمائش کی بناء پر $\angle a$، $\angle b$، $\angle c$ کی پیمائشیں معلوم کیجیے۔



شکل 2.7

4.* شکل 2.8 میں $\angle PQR$ اور $\angle XYZ$ کی ساقین ایک دوسرے کے متوازی ہیں۔

تو ثابت کیجیے کہ $\angle PQR \cong \angle XYZ$

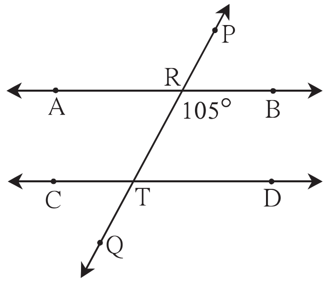


شکل 2.8

5. شکل 2.9 میں خط CD || خط AB اور خط PQ تقاطع ہوتو شکل میں دی ہوئی زاویہ کی پیائش کی بناء پر ذیل کے زاویوں کی پیائشیں معلوم کیجیے۔

(i) $\angle ART$ (ii) $\angle CTQ$

(iii) $\angle DTQ$ (iv) $\angle PRB$

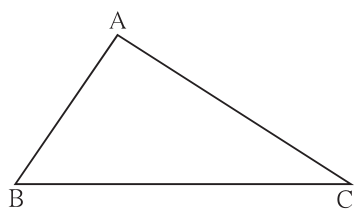


شکل 2.9

آیئے سمجھ لیں

متوازی خطوط کے خصوصیات کا استعمال

متوازی خطوط اوران کے تقاطع کے ذریعے بننے والے زاویوں کی خصوصیات کا استعمال کر کے مثلث کی ایک خصوصیت ثابت کریں گے۔



شکل 2.10

مسئلہ : کسی بھی مثلث کے تمام زاویوں کی پیائشوں کا مجموعہ 180° ہوتا ہے۔

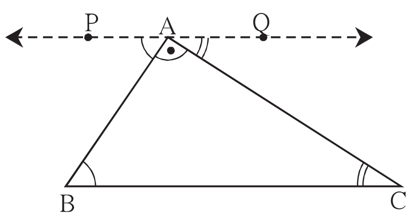
دیا ہوا ہے : ΔABC، ایک مثلث ہے۔

ثابت کرنا ہے : $\angle ABC + \angle ACB + \angle BAC = 180^\circ$

عمل : نقطہ A سے، قطعہ BC کے متوازی خط l کھینچیے ۔

اس پر نقاط P اور Q اس طرح لیجیے کہ P – A – Q

ثبوت : قطعہ BC || خطPQ اور خط AB تقاطع ہے۔



شکل 2.11

$\angle ABC = \angle PAB$ ... (I) (متبادلہ زاویے)

قطعہ BC || خط PQ اور خط AC تقاطع ہے۔

$\therefore \angle ACB = \angle QAC$ ... (II) ... (متبادلہ زاویے)

بیان (I) اور (II) کی بناء پر،

$\angle ABC + \angle ACB = \angle PAB + \angle QAC$ ... (III)

مساوات (III) کے طرفین میں $\angle BAC$ جمع کرنے پر

$$\angle ABC + \angle ACB + \angle BAC = \angle PAB + \angle QAC + \angle BAC$$

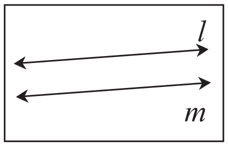
$$= \angle PAB + \angle BAC + \angle QAC$$

$$= \angle PAC + \angle QAC \ ... \quad (\because \angle PAB + \angle BAC = \angle PAC)$$

$$= 180^\circ$$ ... (خطی جوڑی کے زاویے)

یعنی مثلث کے تینوں زاویوں کی پیائشوں کا مجموعہ 180° ہوتا ہے۔

 آیئے، بحث کریں



شکل 2.12

بازو کی مستوی میں کیا خط l اور خط m ایک دوسرے کے متوازی ہیں؟ کس طرح طے کریں گے؟

 آیئے سمجھ لیں

متوازی خطوط کے لیے آزمائشیں (Test for parallel lines)

دو خطوط اور ان کے تقاطع کے ذریعے بننے والے زاویوں کی جانچ کر کے ہم طے کر سکتے ہیں کہ وہ دونوں خطوط متوازی ہیں یا نہیں۔

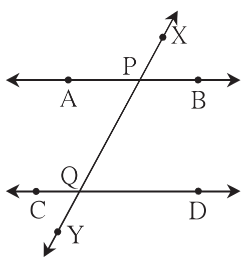
(i) تقاطع کے ایک جانب کے داخلہ زاویوں کی جوڑی متمم زاویوں کی ہو تو وہ خطوط متوازی ہوتے ہیں۔

(ii) متبادلہ زاویوں کی ایک جوڑی مساوی پیمائشوں کی ہو تو وہ خطوط متوازی ہوتے ہیں۔

(iii) نظیری زاویوں کی ایک جوڑی کی پیمائش مساوی ہو تو وہ خطوط متوازی ہوتے ہیں۔

متوازی خطوط کے داخلہ زاویوں کی آزمائش (Interior angles test)

مسئلہ : دو مختلف خطوط کو ایک تقاطع قطع کرتا ہے اور تقاطع کے ایک جانب کے داخلہ زاویوں کی پیمائشوں کا مجموعہ $180°$ ہو تو وہ خطوط متوازی ہوتے ہیں۔



شکل 2.13

دیا ہوا ہے : خط AB اور خط CD کا خط XY تقاطع ہے۔

$$\angle BPQ + \angle PQD = 180°$$

ثابت کرنا ہے : خط CD $\parallel$ خط AB

ثبوت : یہ آزمائش ہم بالواسطہ طریقے سے ثابت کریں گے۔

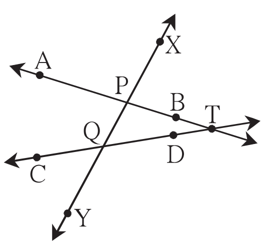
فرض کیجیے۔ 'ثابت کرنا ہے' بیان غلط ہے۔

اس لیے خط AB اور خط CD متوازی نہیں ہیں۔

(فرض کیجیے یہ بیان صحیح ہے)

فرض کیجیے خط AB اور خط CD ایک دوسرے کو نقطہ T پر قطع کرتے ہیں۔

اس لیے ΔPQT بنتا ہے۔



شکل 2.14

$$\angle TPQ + \angle PQT + \angle PTQ = 180° \quad \ldots \text{(مثلث کے زاویوں کا مجموعہ)}$$

$$\angle TPQ + \angle PQT = 180° \quad \ldots \text{(دیا ہوا ہے)، لیکن}$$

اس وجہ سے مثلث کے دو زاویوں کی پیمائشوں کا مجموعہ $180°$ ہے۔

لیکن مثلث کے تین زاویوں کی پیمائشوں کا مجموعہ $180°$ ہوتا ہے۔

$\therefore \ \angle PTQ = 0°$ حاصل ہوتا ہے۔

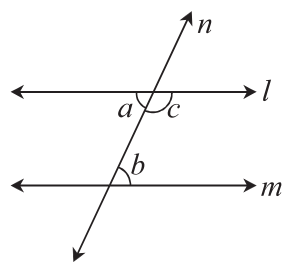
اس لیے خط PT اور خط QT، یعنی خط AB اور خط CD مختلف خطوط نہیں ہیں۔ ہمیں خط AB اور خط CD مختلف خطوط ہیں ایسا دیا ہوا ہے۔ یعنی 'دیا ہوا ہے' کے متضاد ہے۔

اس لیے ہمارا مفروضہ بیان غلط ہے۔ یعنی خط AB اور خط CD متوازی ہیں۔

اس بناء پر دو خطوط کو ایک تقاطع سے قطع کیا جائے تو ایک جانب حاصل ہونے والے داخلہ زاویوں کی جوڑی متمم ہو تب وہ خطوط متوازی ہوتے ہیں۔ یہ ثابت ہو جاتا ہے۔ اس خصوصیت کو متوازی خطوط کے داخلہ زاویوں کی خصوصیت کہتے ہیں۔

اب ہم اس خصوصیت کو مفروضہ کے طور پر مان کر دیگر دو آزمائشیں ثابت کریں گے۔

متبادلہ زاویوں کی آزمائش (Alternate angles test) :



شکل 2.15

مسئلہ : دو خطوط کو ایک تقاطع قطع کرتا ہے تو بننے والے متبادلہ زاویوں کی ایک جوڑی کی پیائش مساوی ہو تو وہ خطوط متوازی ہوتے ہیں۔

دیا ہوا ہے : خط l اور خط m کا خط n تقاطع ہے۔

$\angle a$ اور $\angle b$ متبادلہ زاویوں کی ایک جوڑی متماثل ہے۔

$\therefore \angle a = \angle b$

ثابت کرنا ہے : خط $l \parallel$ خط m

ثبوت : $\angle a + \angle c = 180°$ ... (خطی جوڑی کے زاویے)

$\angle a = \angle b$ ... (دیا ہوا ہے)

$\therefore \angle b + \angle c = 180°$

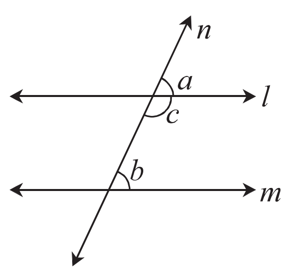
لیکن $\angle b$ اور $\angle c$ یہ تقاطع کے ایک جانب کے داخلہ زاویے ہیں

$\therefore$ خط $l \parallel$ خط m ... (داخلہ زاویے کی آزمائش کی بنا پر)

اس خصوصیت کو متوازی خطوط کے متبادلہ زاویوں کی آزمائش کہتے ہیں۔

نظیری زاویوں کی آزمائش (Corresponding angles Test)

مسئلہ : دو خطوط کو ایک تقاطع سے قطع کیا جائے تو بننے والے نظیری زاویوں کی ایک جوڑی متماثل ہو تو وہ متوازی خطوط ہوتے ہیں۔



شکل 2.16

دیا ہوا ہے : خطوط l اور m ان کا خط n تقاطع ہے۔ $\angle a$ اور $\angle b$ نظیری زاویوں کی جوڑی ہے۔

$$\therefore \angle a = \angle b$$

ثابت کرنا ہے : خط $l \parallel$ خط m

ثبوت : $\angle a + \angle c = 180°$ ... (خطی جوڑی کے زاویے)

$\angle a = \angle b$ ... (دیا ہوا ہے)

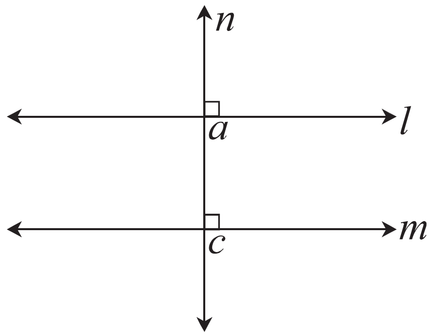
$\therefore \angle b + \angle c = 180°$

یعنی تقاطع کے ایک جانب کے داخلہ زاویہ متمم ہوتے ہیں۔

$\therefore$ خط $l \parallel$ خط m ... (داخلہ زاویے کی آزمائش)

اس خصوصیت کو متوازی خطوط کے نظیری زاویوں کی آزمائش کہتے ہیں۔

نتیجہ صریح 1 : اگر ایک مستوی میں دو خطوط ایک خط پر عمود ہوں تو تب وہ دونوں خطوط ایک دوسرے کے متوازی ہوتے ہیں۔



شکل 2.17

دیا ہوا ہے : خط $l \perp$ خط n اور خط $m \perp$ خط n

ثابت کرنا ہے : خط $l \parallel$ خط m

ثبوت : (دیا ہوا ہے) ... خط $l \perp$ خط n اور خط $m \perp$ خط n

$$\therefore \quad \angle a = \angle c = 90^\circ$$

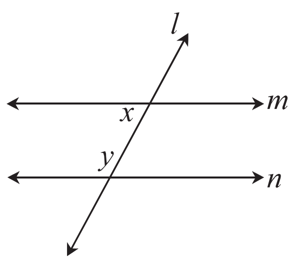
$\angle a$ اور $\angle c$، یہ خط l اور خط m کے خط n تقاطع کی وجہ سے بنے ہوئے نظیری زاویے ہیں۔

(متوازی خطوط کے نظیری زاویوں کی آزمائش) ... $\therefore$ خط $l \parallel$ خط m

نتیجہ صریح II : اگر ایک مستوی میں دو خطوط اسی مستوی میں واقع ایک تیسرے خط کے متوازی ہوں تو وہ خطوط ایک دوسرے کے متوازی ہوتے ہیں۔

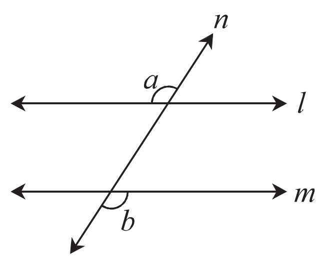
مشقی سیٹ 2.2

1. شکل 2.18 میں $y = 180^\circ$ اور $x = 71^\circ$ ہو تو بتائیے کیا خط m اور خط n متوازی ہیں؟ وجہ لکھیے۔



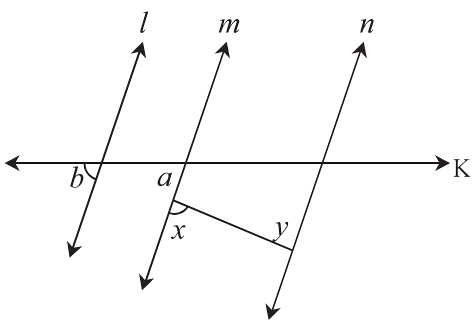
شکل 2.18

2. شکل 2.19 میں اگر $\angle a \cong \angle b$ ہو تو ثابت کیجیے خط $l \parallel$ خط m



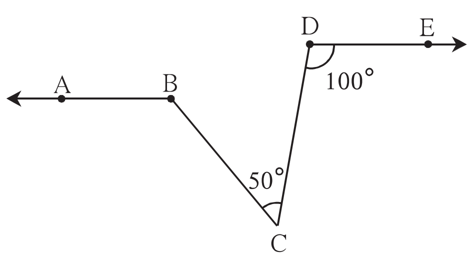
شکل 2.19

3. شکل 2.20 میں اگر $\angle a \cong \angle b$ اور $\angle x \cong \angle y$ ہو تو ثابت کیجیے خط $l \parallel$ خط n



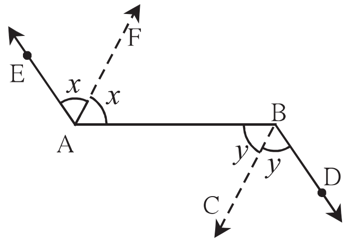
شکل 2.20

4. شکل 2.21 میں اگر شعاع DE $\parallel$ شعاع BA، $\angle C = 50^\circ$ اور $\angle D = 100^\circ$ ہو تو $\angle ABC$ کی پیمائش معلوم کیجیے۔
(ہدایت : نقطہ C سے خط AB کے متوازی خط کھینچیے)



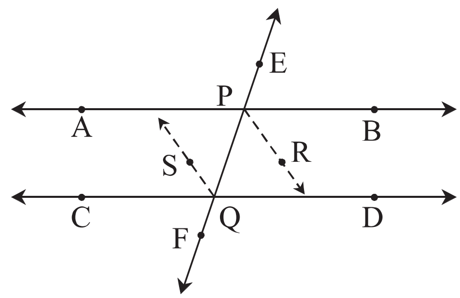
شکل 2.21

5. شکل 2.22 میں BD شعاع ∥ AE شعاع، شعاع AF، یہ $\angle EAB$ کی اور شعاع BC، یہ $\angle ABD$ کی ناصف ہیں۔تو ثابت کیجیے کہ BC خط ∥ AF خط



شکل 2.22

6. خط AB اور خط CD کو خط EF بالترتیب P اور Q نقاط پر قطع کرتا ہے۔شعاع PR اور شعاع QS یہ متوازی شعاعیں ہیں جو بالترتیب $\angle BPQ$ اور $\angle PQC$ کی ناصف ہیں۔تو ثابت کیجیے۔ کہ خط CD ∥ خط AB



شکل 2.23

مجموعہ سوالات 2

1. ذیل کے بیانات کی خالی جگہوں کو پر کرنے کے لیے دیے ہوئے متبادلات میں سے صحیح متبادل کا انتخاب کیجیے۔

(i) دو متوازی خطوط کو ایک تقاطع قطع کرتا ہو تو تقاطع کے ایک ہی جانب کے داخلہ زاویوں کی پیمائشوں کا مجموعہ .... ہوتا ہے۔

(A) $0°$ (B) $90°$ (C) $180°$ (D) $360°$

(ii) دو خطوط کو ایک تقاطع سے قطع کرتے ہیں تو................ زاویے بنتے ہیں۔

(A) 2 (B) 4 (C) 8 (D) 16

(iii) دو متوازی خطوط کو ایک تقاطع سے قطع کرتیہوں تو بننے والے زاویوں میں سے ایک زاویہ کی پیمائش $40°$ ہو تو اس کے نظیری زاویہ کی پیمائش .... ہے۔

(A) $40°$ (B) $140°$ (C) $50°$ (D) $180°$

(iv) ΔABC میں، $\angle A = 76°$، $\angle B = 48°$ ہو تو $\angle C$ کی پیمائش .... ہے۔

(A) $66°$ (B) $56°$ (C) $124°$ (D) $28°$

(v) دو متوازی خطوط کو ایک تقاطع سے قطع کرنے پر بننے والے متبادلہ زاویوں کی جوڑی میں ایک زاویہ کی پیمائش $75°$ ہو تو دوسرے زاویے کی پیمائش .... ہے۔

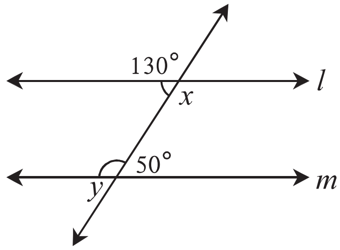
(A) $105°$ (B) $15°$ (C) $75°$ (D) $45°$

*2. شعاع PQ اور شعاع PR ایک دوسرے پر عمود ہیں۔نقطہ B، یہ $\angle QPR$ کے اندرون میں اور نقطہ A، $\angle RPQ$ کے بیرون میں واقع ہے۔ شعاع PB اور شعاع PA ایک دوسرے پر عمود ہیں۔اس بناء پر شکل بنایئے اور ذیل کے زاویوں کی جوڑیاں لکھیے۔

(i) متماثل زاویے (ii) متمم زاویے (iii) مکملہ زاویے

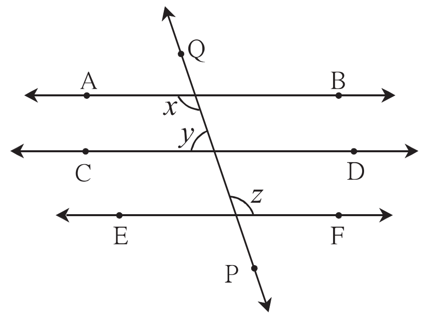
.3 اگرایک خط،ایک مستوی میں دومتوازی خطوط میں سے ایک خط پرعمود ہوتب وہ دوسرے خط پر بھی عمود ہوتا ہے۔ یہ ثابت کیجیے۔

.4 شکل 2.24 میں دکھائے ہوئے کے مطابق زاویوں کی پیمائش کی مدد سے $\angle x$ اور $\angle y$ کی قیمتیں معلوم کیجیے اور ثابت کیجیے کہ خط $m \parallel$ خط l



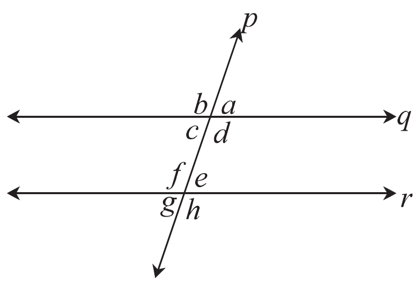
شکل 2.24

.5 شکل 2.25 میں خط EF $\parallel$ خط CD $\parallel$ خط AB خط اور خط QP ان کا تقاطع ہے۔ اگر $y : z = 3 : 7$ ہو تو x کی قیمت معلوم کیجیے۔



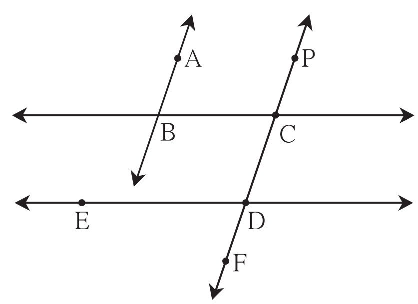
شکل 2.25

.6 شکل 2.26 میں، اگر خط $r \parallel$ خط q، خط P ان کا تقاطع ہے اور $a = 80°$ ہو تو f اور g کی قیمتیں معلوم کیجیے۔



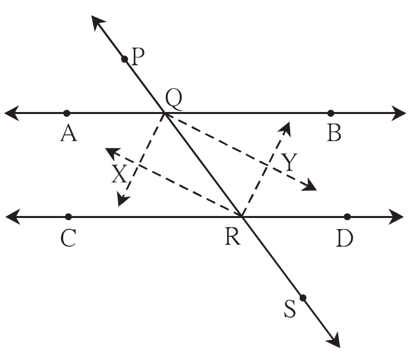
شکل 2.26

.7 شکل 2.27 میں اگر خط CF $\parallel$ خط AB اور خط ED $\parallel$ خط BC ہو تو ثابت کیجیے کہ $\angle ABC \cong \angle FDE$



شکل 2.27

.8 شکل 2.28 میں خط CD $\parallel$ خط AB اور خط PS ان کا تقاطع ہے۔ شعاع QX، شعاع QY، شعاع RX اور شعاع RY زاویوں کی ناصف ہوں تو دکھائیے کہ □ QXRY ایک مستطیل ہے۔



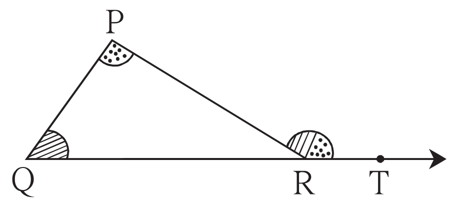
شکل 2.28

3 Triangle مثلث

آیئے، سیکھیں

- مثلث کے بعید داخلہ زاویوں کا مسئلہ
- مثلث کا وسطانیہ
- مثلثوں کی متماثلت
- قائمۃ الزاویہ مثلث کے وتر پر کھینچے گئے وسطانیہ کی خصوصیت
- متساوی الساقین مثلث کا مسئلہ
- عمودی ناصف کا مسئلہ
- $30°-60°-90°$ پیمائش کے مثلث کی خصوصیت
- زاویے کے ناصف کا مسئلہ
- متشابہ مثلث

عملی کام : ایک موٹی دفتی پر کسی بھی پیمائش کا $\triangle PQR$ بنایئے۔ شکل کے مطابق شعاع QR پر نقطہ T لیجیے۔ رنگین موٹے کارڈ شیٹ کے $\angle P$ اور $\angle Q$ کی پیمائش کے ٹکڑے کاٹ لیجیے۔ ان ٹکڑوں کو $\angle PRT$ میں رکھ کر دیکھیے۔ وہ مکمل طور پر سما جاتا ہے۔

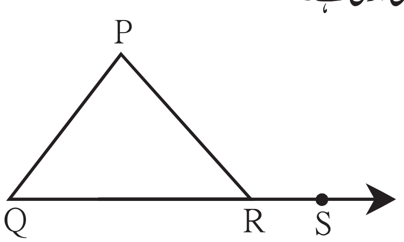


شکل 3.2

آیئے سمجھ لیں

مثلث کے بعید داخلہ زاویوں کا مسئلہ (Theorem of Remote Interior angles of a Triangle)

مسئلہ : مثلث کے ایک خارجہ زاویہ کی پیمائش، اس کے بعید داخلہ زاویوں کے پیمائشوں کے مجموعے کے مساوی ہوتی ہے۔



شکل 3.2

دیا ہوا ہے : $\triangle PQR$ کا، $\angle PRS$ مثلث کا خارجہ زاویہ ہے۔

ثابت کرنا ہے : $\angle PRS = \angle PQR + \angle QPR$

ثبوت : مثلث کے تینوں زاویوں کی پیمائشوں کا مجموعہ $180°$ ہوتا ہے۔

$\therefore \angle PQR + \angle QPR + \angle PRQ = 180^\circ$ ... (I)

$\angle PRQ + \angle PRS = 180^\circ$ ... (II) (خطی جوڑی کے زاویے)

اس لیے بیان (I) اور (II) کی بناء پر

$$\angle PQR + \angle QPR + \angle PRQ = \angle PRQ + \angle PRS$$

$\therefore \angle PQR + \angle QPR = \angle PRS$ ... ($\angle PRQ$ کا اخراج کرنے سے)

لہٰذا مثلث کے ایک خارجہ زاویہ کی پیمائش، اس کے بعید داخلہ زاویوں کی پیمائشوں کے مجموعہ کے مساوی ہوتی ہے۔

غور کیجیے

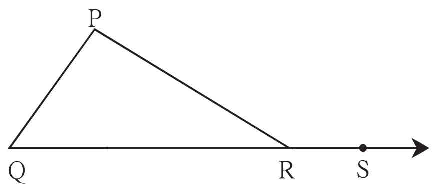
شکل 3.2 میں نقطہ R سے قطعہ PQ کے متوازی خط کھینچ کر کیا اس مسئلہ کا کوئی دوسرا ثبوت دے سکتے ہیں؟

آیئے سمجھ لیں

مثلث کے خارجہ زاویہ کا مسئلہ (Property of an Exterior angle of a Triangle)

a اور b ان دو اعداد کا مجموعہ $(a + b)$، عدد a سے بڑا اور b سے بھی بڑا ہوتا ہے۔ یعنی $a + b > a$ ،$a + b > b$

اس کا استعمال کر کے مثلث کے خارجہ زاویہ کی درج ذیل خصوصیت حاصل ہوتی ہے۔



$\triangle PQR$ میں، $\angle PRS$ خارجہ زاویہ ہو تو $\angle PRS > \angle Q$ ،$\angle PRS > \angle P$

$\therefore$ مثلث کا خارجہ زاویہ، اس کے ہر بعید داخلہ زاویہ سے بڑا ہوتا ہے۔

حل کردہ مثالیں :

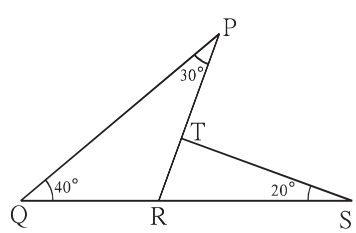
مثال (1) : ایک مثلث کے زاویوں کی پیمائشوں کی نسبت $5 : 6 : 7$ ہے۔ تو اس کے تمام زاویوں کی پیمائشیں معلوم کیجیے۔

حل : فرض کیجیے مثلث کے زاویوں کی پیمائشیں $5x, 6x$ اور $7x$ ہیں۔

$$5x + 6x + 7x = 180^\circ$$
$$18x = 180^\circ$$
$$x = 10^\circ$$
$$5x = 5 \times 10 = 50^\circ, \qquad 6x = 6 \times 10 = 60^\circ, \qquad 7x = 7 \times 10 = 70^\circ$$

مثلث کے زاویوں کی پیمائشیں بالترتیب 50° ، 60° اور 70° ہیں۔

مثال (2) : بازو کی شکل 3.4 کا مشاہدہ کر کے $\angle PRS$ اور $\angle RTS$ کی پیمائشیں معلوم کیجیے۔



شکل 3.4

حل : $\triangle PQR$ کا خارجہ زاویہ $\angle PRS$ ہے۔

بعید داخلہ زاویوں کے مسئلہ کی رُو سے،

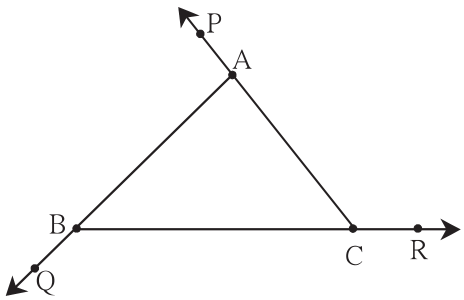
$$\angle PRS = \angle PQR + \angle QPR$$
$$= 40^\circ + 30^\circ$$
$$\angle PRS = 70^\circ$$

اب $\triangle RTS$ میں

$\angle TRS + \angle RTS + \angle TSR = \boxed{}$ ... (مثلث کے تینوں زاویوں کی پیمائشوں کا مجموعہ)

$$\therefore \boxed{} + \angle RTS + \boxed{} = 180^\circ$$
$$\therefore \angle RTS + 90^\circ = 180^\circ$$
$$\therefore \angle RTS = \boxed{}$$

مثال (3) : ثابت کیجیے کہ مثلث کے اضلاع ایک ہی سمت میں بڑھانے سے بننے والے خارجہ زاویوں کی پیمائشوں کا مجموعہ 360° ہوتا ہے۔



دیا ہوا ہے : $\angle PAB$ ، $\angle QBC$ اور $\angle ACR$ یہ تینوں $\triangle ABC$ کے خارجہ زاویے ہیں۔

ثابت کرنا ہے : $\angle PAB + \angle QBC + \angle ACR = 360^\circ$

ثبوت : اس مثال کا ثبوت ہم دو طریقوں سے دے سکتے ہیں۔

طریقہ (I)

$\triangle ABC$ میں اگر $\angle PAB$ خارجہ زاویہ ہو تو اس کے تعلق سے $\angle ABC$ اور $\angle ACB$ بعید داخلہ زاویے ہیں۔

$$\angle BAP = \angle ABC + \angle ACB \qquad \ldots (I)$$

اسی طرح

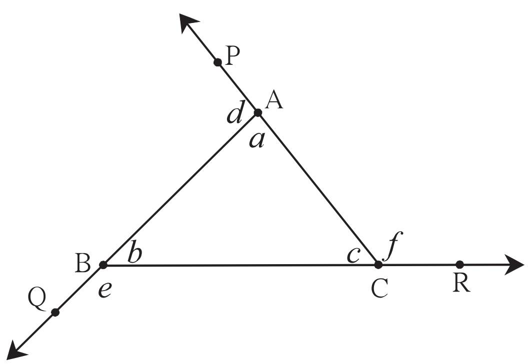
$$\angle ACR = \angle ABC + \angle BAC \qquad \ldots (II)$$ ... (بعید داخلہ زاویے)

اور ,
$$\angle CBQ = \angle BAC + \angle ACB \qquad \ldots (III)$$

مساوات (I)، (II)، (III) کے طرفین کی جمع کرنے پر

$$\angle BAP + \angle ACR + \angle CBQ$$
$$= \angle ABC + \angle ACB + \angle ABC + \angle BAC + \angle BAC + \angle ACB$$
$$= 2\angle ABC + 2\angle ACB + 2\angle BAC$$
$$= 2(\angle ABC + \angle ACB + \angle BAC)$$
$$= 2 \times 180^\circ$$ ... (مثلث کے داخلہ زاویوں کی پیمائشوں کا مجموعہ)
$$= 360^\circ$$

طریقہ (II)



شکل 3.6

$$\angle c + \angle f = 180^\circ$$ ... (خطی جوڑی کے زاویے)

اسی طرح،
$$\angle a + \angle d = 180^\circ$$

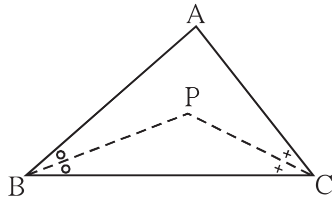
اور
$$\angle b + \angle e = 180^\circ$$

$$\therefore\ \angle c + \angle f + \angle a + \angle d + \angle b + \angle e = 180^\circ \times 3 = 540^\circ$$
$$\angle f + \angle d + \angle e + (\angle a + \angle b + \angle c) = 540^\circ$$
$$\therefore\ \angle f + \angle d + \angle e + 180^\circ = 540^\circ$$
$$\therefore f + d + e = 540^\circ - 180^\circ$$
$$= 360^\circ$$

مثال (4) : شکل 3.7 میں $\triangle ABC$ کے، $\angle B$ اور $\angle C$ کے ناصف اگر نقطہ P پر قطع کرتے ہوں تو

ثابت کیجیے کہ $\angle BPC = 90 + \frac{1}{2}\angle BAC$

خالی جگہ پر کر کے ثبوت مکمل کیجیے۔



شکل 3.7

ثبوت : $\triangle ABC$ میں،

$\angle BAC + \angle ABC + \angle ACB = \boxed{}$ .. (مثلث کے زاویوں کی پیمائشوں کا مجموعہ)

$\therefore \frac{1}{2}\angle BAC + \frac{1}{2}\angle ABC + \frac{1}{2}\angle ACB = \frac{1}{2} \times \boxed{}$ ... (طرفین کو $\frac{1}{2}$ سے ضرب کرنے پر)

$\therefore \frac{1}{2}\angle BAC + \angle PBC + \angle PCB = 90^\circ$

$\therefore \angle PBC + \angle PCB = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle BAC$ ... (I)

$\triangle BPC$ میں،

$\angle BPC + \angle PBC + \angle PCB = 180^\circ$ ... (مثلث کے داخلہ زاویوں کی پیمائشوں کا مجموعہ)

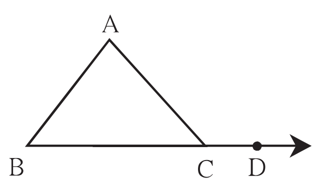
$\therefore \angle BPC + \boxed{} = 180^\circ$ ... [بیان (I) کی بناء پر]

$\therefore \quad \angle BPC = 180^\circ - (90^\circ - \frac{1}{2}\angle BAC)$

$\therefore \quad = 180^\circ - 90^\circ + \frac{1}{2}\angle BAC$

$= 90^\circ + \frac{1}{2}\angle BAC$

مشقی سیٹ 3.1



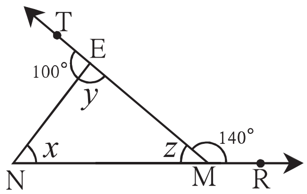
.1 شکل 3.8 میں $\triangle ABC$ کا $\angle ACD$ خارجہ زاویہ ہے۔ $\angle B = 40^\circ$، $\angle A = 70^\circ$ ہو تو $m\angle ACD$ کی پیمائش معلوم کیجیے۔

.2 $\triangle PQR$ میں، $\angle P = 70^\circ$، $\angle Q = 65^\circ$ ہو تو $\angle R$ کی پیمائش معلوم کیجیے۔

.3 مثلث کے زاویوں کی پیمائشیں x°، $(x-20)^\circ$ اور $(x-40)^\circ$ ہو تو ہر زاویے کی پیمائش معلوم کیجیے۔

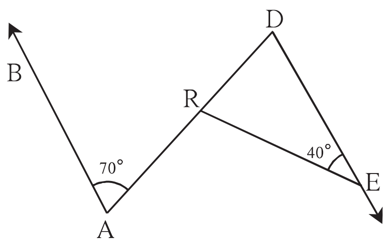
.4 مثلث کے تین زاویوں میں سے، ایک زاویہ، سب سے چھوٹے زاویہ کا دگنا اور دوسرا زاویہ، سب سے چھوٹے زاویہ کا تین گنا ہے۔ تو ان تینوں زاویوں کی پیمائشیں معلوم کیجیے۔

5. شکل 3.9 دیے ہوئے زاویوں کی پیمائشوں کی بنا پر x ، y اور z کی قیمتیں معلوم کیجیے۔



شکل 3.9

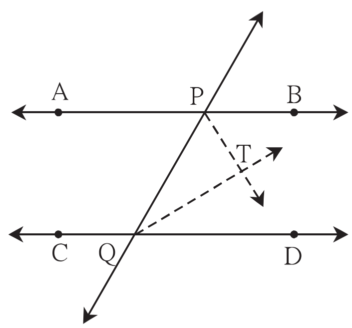
6. شکل 3.10 میں DE خط ∥ AB خط، دی ہوئی پیمائشوں کی بنا پر ∠DRE اور ∠ARE کی پیمائشیں معلوم کیجیے۔



شکل 3.10

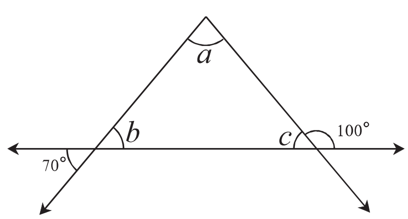
7. △ABC میں ∠A اور ∠B کے ناصف، نقطہ O پر قطع کرتے ہیں اگر ∠C = 70° ہو تو ∠AOB کی پیمائش معلوم کیجیے۔

8. شکل 3.11 میں CD خط ∥ AB خط اور خط PQ ان کا تقاطع ہے۔ شعاع PT اور شعاع QT بالترتیب ∠BPQ اور ∠PQD کے ناصف ہیں۔
تو ثابت کیجیے کہ ∠PTQ = 90°



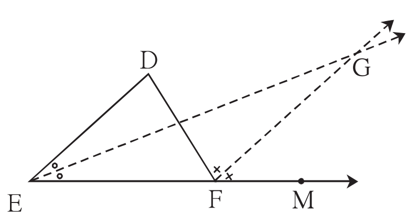
شکل 3.11

9. شکل 3.12 میں دی ہوئی معلومات کی مدد سے ∠a، ∠b اور ∠c کی پیمائشیں معلوم کیجیے۔



شکل 3.12

*10. شکل 3.13 میں، GF ضلع ∥ DE ضلع، شعاع EG اور شعاع FG بالترتیب ∠DEF اور ∠DFM کی ناصف ہیں تو
ثابت کیجیے (i) $\angle DEF = \frac{1}{2} \angle EDF$
(ii) EF = FG

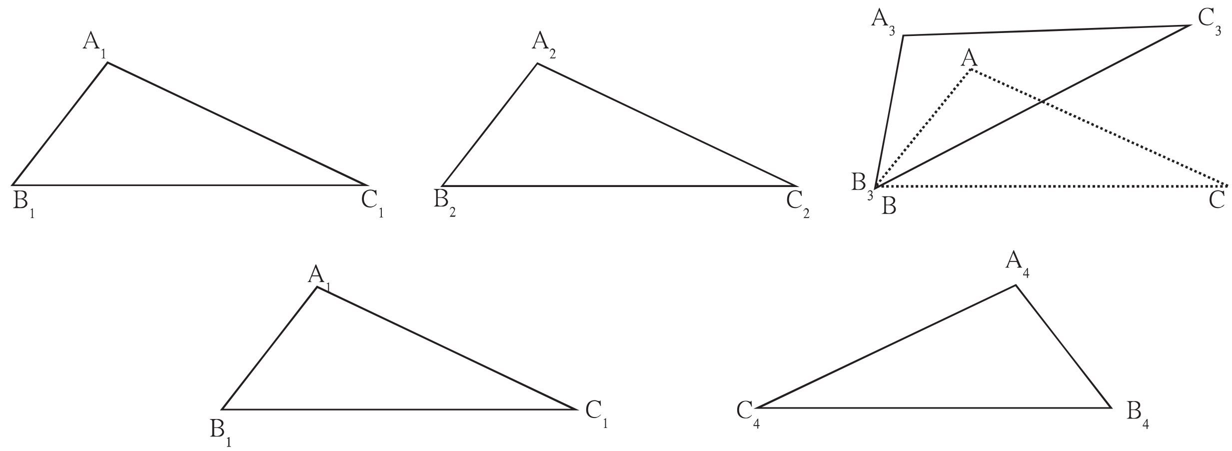


شکل 3.13

آئیے سمجھ لیں

مثلثوں کی متماثلت (Congruence of Triangles)

ایک قطعہ خط دوسرے پر رکھنے پر منطبق ہوتا ہو تب وہ دو قطعات متماثل ہوتے ہیں۔ اسی طرح ایک زاویہ کو اٹھا کر دوسرے زاویے پر رکھنے پر منطبق ہوتے ہوں تو وہ دو زاویے متماثل ہوتے ہیں۔ اس بات کو ہم جانتے ہیں۔ اسی طرح ایک مثلث کو اٹھا کر دوسرے مثلث پر رکھنے پر منطبق ہوتے ہیں تو وہ دو مثلث متماثل ہوتے ہیں۔ اگر $\triangle ABC$ اور $\triangle PQR$ متماثل ہو تب اسے $\triangle ABC \cong \triangle PQR$ کی صورت میں دکھایا جاتا ہے۔



عملی کام :

کسی بھی پیمائش کا ایک مثلث $\triangle ABC$ موٹی دفتی سے کاٹ لیجیے۔ اسے کارڈ شیٹ پر ایک جگہ رکھ کر اس کے اطراف سے پنسل گھما کر اس کی نقل بنائیے۔ اس مثلث کو $\triangle A_1B_1C_1$ نام دیجیے۔

اب اس دفتی کے مثلث کو ہٹا کر دوسرے جانب سرکا کر وہاں دوسری نقل بنائیے۔ اسے $\triangle A_2B_2C_2$ نام دیجیے۔ اس کے بعد اوپر کی شکل کے مطابق اس مثلث کو تھوڑا گھما کر ایک اور نقل بنائیے۔ اس نقل کو $\triangle A_3B_3C_3$ نام دیجیے۔ بعد میں مثلث نما دفتی کو اٹھا کر دوسری جانب اوندھا رکھ کر اسی کی نقل بنائیے اور نئے مثلث کو $\triangle A_4B_4C_4$ نام دیجیے۔

کیا آپ کے دھیان میں آگیا؟ $\triangle A_1B_1C_1$، $\triangle A_2B_2C_2$، $\triangle A_3B_3C_3$ اور $\triangle A_4B_4C_4$ یہ سب $\triangle ABC$ کے متماثل ہیں کیونکہ $\triangle ABC$ ہر ایک پر منطبق ہو جاتا ہے۔ $\triangle A_3B_3C_3$ کے لیے تصدیق کیجیے۔ لیکن اسے $\angle A$ کو $\angle A_3$، $\angle B$ کو $\angle B_3$ اور $\angle C$ کو $\angle C_3$ پر رکھنے پر $AB = A_3B_3$ ، $BC = B_3C_3$ اور $CA = C_3A_3$ بھی منطبق ہو جاتے ہیں۔ پھر $\triangle ABC \cong \triangle A_3B_3C_3$ کہہ سکتے ہیں۔

اس سے یہ بات سمجھ میں آتی ہے کہ دو مثلثوں کی متماثلت کی جانچ کے دوران ان کے زاویے اور ضلعے مخصوص ترتیب سے یعنی ایک سے ایک مطابقت رکھتے ہیں۔

اگر $\triangle ABC \cong \triangle PQR$ ہو تو $\angle A = \angle P$ ، $\angle B = \angle Q$ اور $\angle C = \angle R$ ... (I)

اور $AB = PQ,\ BC = QR,\ CA = RP$ ... (II) اس طرح کل چھ مساواتیں حاصل ہوتی ہیں۔

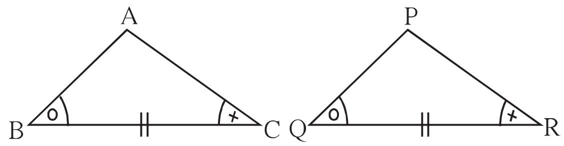
یعنی ان مثلثوں کے زاویوں اور ضلعوں کی ایک سے ایک مطابقت کی وجہ سے ان کے تین زاویے مساوی اور تین ضلعے مساوی ہیں۔

اوپر کے تمام چھے مساواتیں متماثل مثلث کے لیے صحیح ہیں۔اس لیے تین مخصوص مساواتیں مساوی معلوم ہونے پر تمام چھے مساواتیں صحیح ہو جاتی ہیں اور وہ دونوں مثلث متماثل ہوتے ہیں۔وہ کیسے آیئے دیکھتے ہیں۔

(1) جب ایک سے ایک مطابقت کے لحاظ سے $\triangle ABC$ کے دو زاویے، $\triangle PQR$ کے دو زاویوں کے مساوی ہوں اور ان زاویوں کا مشمولی ضلع مساوی ہوں تو وہ دو مثلث متماثل ہوتے ہیں۔

اس خصوصیت کو ’ زاویہ-ضلع-زاویہ ‘ آزمائش کہتے ہیں۔

اسے مختصراً زاضلزا آزمائش لکھتے ہیں۔

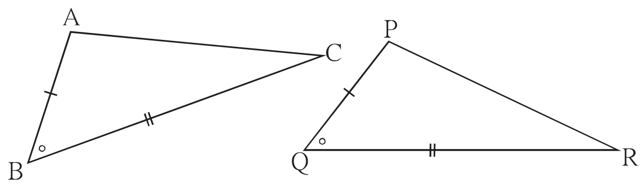


شکل 3.15

(2) جب ایک سے ایک مطابقت کے لحاظ سے $\triangle ABC$ کے دو اضلاع $\triangle PQR$ کے دو اضلاع کے مساوی ہوں اور $\triangle ABC$ کے ان دو اضلاع کے درمیان کا زاویہ $\triangle PQR$ کے دو نظیری اضلاع کے درمیان کے زاویہ کے مساوی ہوں تو وہ دو مثلث متماثل ہوتے ہیں۔

اس خصوصیت کو ’ضلع-زاویہ-ضلع‘ آزمائش کہتے ہیں۔

اور اسے مختصراً ضلزاضل آزمائش لکھتے ہیں۔

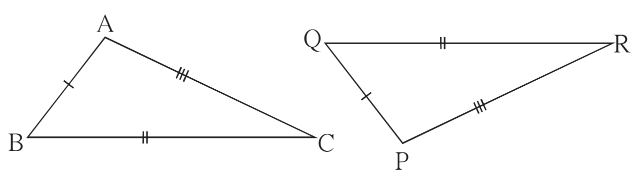


شکل 3.16

(3) جب $\triangle ABC$ کے تین اضلاع ایک سے ایک مطابقت کے لحاظ سے $\triangle PQR$ کے نظیری اضلاع کے مساوی ہوں تو وہ مثلث متماثل ہوتے ہیں۔

اس خصوصیت کو ’ضلع-ضلع-ضلع‘ آزمائش کہتے ہیں۔

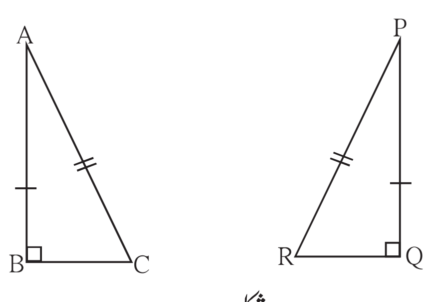
اور اسے مختصراً ضلضلضل آزمائش لکھتے ہیں۔



شکل 3.17

(4) $\triangle ABC$ اور $\triangle PQR$ دونوں قائمۃ الزاویہ مثلث ہیں۔ان مثلثوں میں $\angle B$ اور $\angle Q$ قائمہ زاویے ہیں اور دونوں مثلثوں کے وتر مساوی ہیں۔نیز $AB = PQ$ ہو تو وہ مثلث متماثل ہوتے ہیں۔

اس آزمائش کو وترضلع آزمائش کہتے ہیں۔



شکل 3.18

اسے دھیان میں رکھیں

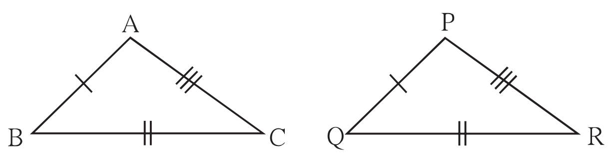
ہم نے مثلث کی کچھ پیمائشیں دی ہوں تو مثلث بنایا ہے۔(مثلاً دو زاویہ اور ان کا مشمولی ضلع، تین ضلعے، دو اضلاع اور ان کا مشمولی زاویہ) ان میں سے کوئی بھی معلومات دی جائے تو ایک ہی مثلث بنا سکتے ہیں، اس بات کا ہمیں تجربہ ہے۔ اس لیے دو مثلثوں میں ایک سے ایک مطابقت کے لحاظ سے یہ تین ارکان دیے ہوئے ہوں تو دونوں مثلث متماثل ہوتے ہیں۔ یہ بات سمجھ میں آتی ہے۔ پھر ایک سے ایک مطابقت کے لحاظ سے ان کے تینوں زاویے متماثل اور تینوں ضلعے بھی متماثل ہوتے ہیں۔

دو مثلث متماثل ہوں تو ایک سے ایک مطابقت کے لحاظ سے ان کے تینوں زاویے متماثل ہوتے ہیں۔ اور تینوں اضلاع مساوی ہوتے ہیں۔ اس کا استعمال علم ہندسہ کی کئی مثالوں میں ہوتا ہے۔

مشقی سیٹ 3.2

1. ذیل کے مثالوں میں مثلث کی جوڑیوں کے ارکان کو یکساں نشانات سے دکھائے ہوئے حصے متماثل ہیں اس معلومات کی مدد سے ہر جوڑی کے مثلث جس آزمائش کی بنا پر متماثل ہوتے ہیں وہ آزمائش شکل کے نیچے دی ہوئی خالی جگہ میں لکھیے۔

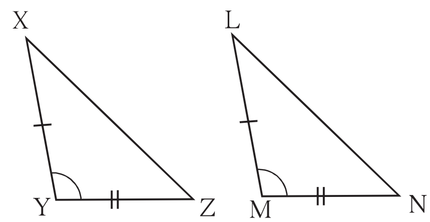
(i)



آزمائش ....

$\Delta ABC \cong \Delta PQR$

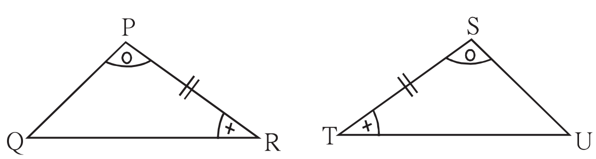
(ii)



آزمائش ....

$\Delta XYZ \cong \Delta LMN$

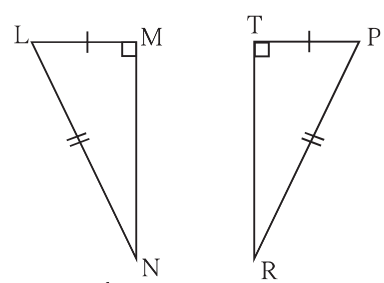
(iii)



آزمائش ....

$\Delta PRQ \cong \Delta STU$

(iv)

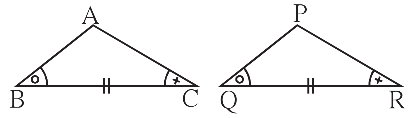


آزمائش ....

$\Delta LMN \cong \Delta PTR$

2. ذیل کے مثلثوں کی جوڑیوں میں ظاہر کی گئی معلومات کا مشاہدہ کیجیے۔ وہ مثلث کس آزمائش کے لحاظ سے متماثل ہیں۔ اسے لکھیے اور ان کے بقیہ متماثل ارکان بھی لکھیے۔

(i)



شکل 3.20

شکل میں دی ہوئی معلومات کے مطابق،

$\triangle PQR$ اور $\triangle ABC$ میں،

$\angle ABC \cong \angle PQR$

قطعہ $BC \cong$ قطعہ QR

$\angle ACB \cong \angle PRQ$

$\therefore \Delta ABC \cong \Delta PQR$ (آزمائش $\boxed{\quad}$)

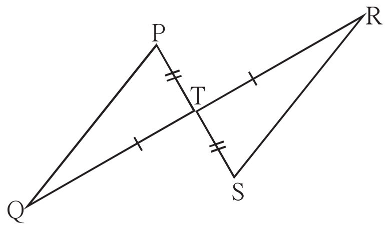
$\therefore \angle BAC \cong \boxed{\quad}$ ....

(متماثل مثلث کے نظیری زاویے)

قطعہ $AB \cong \boxed{\quad}$ اور $\boxed{\quad} \cong$ قطعہ PR

(متماثل مثلثوں کے نظیری اضلاع) ...

(ii)



شکل 3.21

شکل میں ہوئی معلومات کے مطابق،

$\triangle STR$ اور $\triangle PTQ$ میں،

قطعہ $PT \cong$ قطعہ ST

$\angle PTQ \cong \angle STR$ ... (متقابلہ زاویے)

قطعہ $TQ \cong$ قطعہ TR

$\therefore \Delta PTQ \cong \Delta STR$ ... آزمائش $\boxed{\quad}$

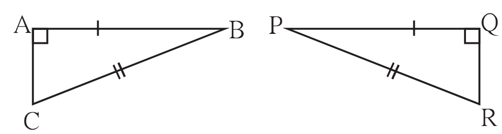
$\therefore \angle TPQ \cong \boxed{\quad}$ ⎫ .... (متماثل مثلثوں کے

اور $\boxed{\quad} \cong \angle TRS$ ⎭ نظیری زاویے)

ضلع $PQ \cong \boxed{\quad}$

(متماثل مثلثوں کے نظیری اضلاع) ...

(3) ذیل کی شکل میں دی گئی معلومات کی مدد سے ΔABC اور ΔPQR کی متماثلت کی آزمائش اور بقیہ متماثل ارکان لکھیے۔

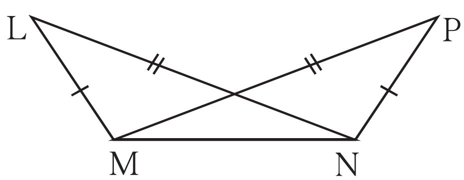


شکل 3.22

(4) ذیل کی شکل میں دی ہوئی معلومات کے مطابق

ΔLMN اور ΔPNM میں $LM = PN$،

$LN = PM$ ہو تو یہ مثلث کس آزمائش کے تحت متماثل ہیں لکھیے اور بقیہ متماثل ارکان بھی لکھیے۔

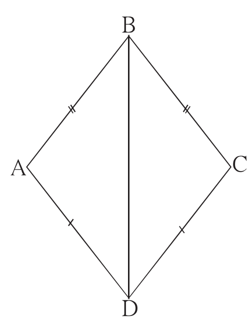


شکل 3.23

(5) شکل 3.24 میں، قطعہ $BC \cong$ قطعہ AB اور

قطعہ $CD \cong$ قطعہ AD ہو تو

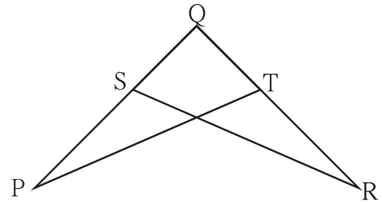
ثابت کیجیے کہ $\Delta ABD \cong \Delta CBD$



شکل 3.24

(6) شکل 3.25 میں $\angle R \cong \angle P$ ، قطعہ $QR \cong$ قطعہ PQ ہو تو

ثابت کیجیے $\Delta PQT \cong \Delta RQS$



شکل 3.25

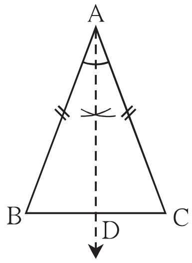
آیئے سمجھ لیں

متساوی الساقین مثلث کا مسئلہ (Isosceles triangle theorem)

مسئلہ : اگر ایک مثلث کے دو ضلعے متماثل ہوں تب ان ضلعوں کے مقابل کے زاویے متماثل ہوتے ہیں۔

دیا ہوا ہے : ΔABC میں، ضلع $AC \cong$ ضلع AB

ثابت کرنا ہے : $\angle ABC \cong \angle ACB$



شکل 3.26

عمل : ΔABC میں $\angle BAC$ کا ناصف کھینچیے جو ضلع BC کو جہاں قطع کرتا ہے اس نقطہ کا نام D دیجیے۔

ثبوت : ΔABD اور ΔACD میں

قطعہ $AB \cong$ قطعہ AC ... (دیا ہوا ہے)

$\angle BAD \cong \angle CAD$ .... (عمل)

قطعہ $AD \cong$ قطعہ AD .... (مشترک ضلع)

$\therefore \Delta ABD \cong \Delta ACD$ ... $\boxed{}$

$\therefore \angle ABD \cong \boxed{}$ ... (متماثل مثلثوں کے نظیری زاویے)

$\therefore \angle ABC \cong \angle ACB$ $\because$ B - D - C

نتیجہ صریح : مثلث کے تینوں اضلاع متماثل ہوں، تب اس کے تینوں زاویے متماثل ہوتے ہیں اور ہر زاویہ کی پیمائش 60° ہوتی ہے۔ (آپ اس نتیجہ صریح کا ثبوت لکھیے)

متساوی الساقین مثلث کے مسئلہ کا عکس (Converse of an Isosceles triangle theorem) :

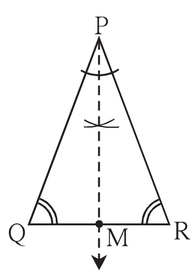
مسئلہ : اگر ایک مثلث کے دو زاویے متماثل ہوں تب ان زاویوں کے مقابل کے ضلعے متماثل ہوتے ہیں۔

دیا ہوا ہے : $\triangle PQR$ میں $\angle PQR \cong \angle PRQ$

ثابت کرنا ہے : ضلع $PR \cong$ ضلع PQ

عمل : $\angle P$ کا ناصف کھینچیے۔ جو ضلع QR کو جہاں قطع کرتا ہے۔ اس نقطہ کو M نام دیجیے۔

ثبوت : $\triangle PQM$ اور $\triangle PRM$ میں



شکل 3.27

$\angle PQM \cong \boxed{}$ ... (دیا ہوا ہے)

$\angle QPM \cong \angle RPM$ ... $\boxed{}$

قطعہ $PM \cong \boxed{}$ ... (مشترک ضلع)

$\therefore \Delta PQM \cong \Delta PRM$ ... آزمائش $\boxed{}$

$\therefore$ قطعہ $PR \cong$ قطعہ PQ متماثل مثلث کے نظیری اضلاع

نتیجہ صریح : مثلث کے تینوں زاویے متماثل ہوں تو اس کے تینوں اضلاع متماثل ہوتے ہیں۔ آپ اس نتیجہ صریح کا ثبوت لکھیے۔

اوپر دیے ہوئے دونوں مسئلوں کے بیانات ایک دوسرے کے عکس ہیں۔

غور کیجیے

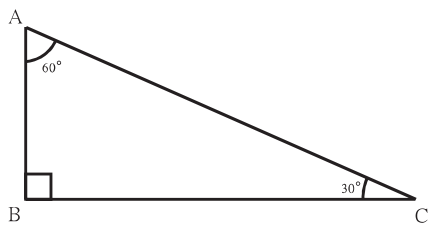
(1) کیا متساوی الساقین مثلث کے مسئلہ کا ثبوت، مختلف عمل کے ذریعے دے سکتے ہیں؟

(2) کیا متساوی الساقین مثلث کے مسئلہ کا ثبوت، کسی عمل کے بغیر دے سکتے ہیں؟

آیئے سمجھ لیں

30° – 60° – 90° پیمائش کے مثلث کی خصوصیات (Property of 30°–60°–90° triangle)

عملی کام I :



گروہ کے ہر طالب علم کو ایک ایسا قائمۃ الزاویہ مثلث بنانے کے لیے کہیں

جس کا ایک زاویہ 30° کا ہو۔

ہر طالب علم 30° پیمائش کے زاویے کے مقابل کے ضلع اور وتر کی لمبائی ناپ لے۔

گروہ کا ایک طالب علم تمام طلبہ کے بنائے ہوئے مثلثوں کے لیے ذیل کا جدول مکمل کرلے۔

مثلثوں کے نمبر شمار	مثلث 1	مثلث 2	مثلث 3	مثلث 4
30° زاویہ کے مقابل کا ضلع				
وتر کی لمبائی				

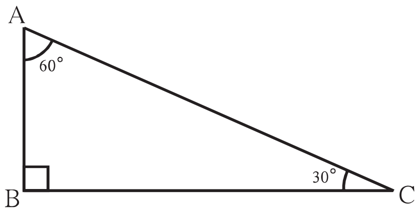
اوپر کے جدول کی بنا پر زاویوں کی پیمائشیں 30°، 60° اور 90° والے مثلث کے اضلاع کی کچھ خصوصیات حاصل ہوتی ہیں۔

عملی کام II : کمپاس بکس میں ایک گنیا کے زاویے 30°، 60° اور 90° ہوتے ہیں کیا ان کے اضلاع کے تعلق سے یہ خصوصیت حاصل ہوتی ہے؟ تصدیق کیجیے۔

اس عمل کی بنا پر ہمیں حاصل ہونے والی ایک اہم خصوصیت کو اب ہم ثابت کریں گے۔

مسئلہ : اگر قائمۃ الزاویہ کے حادہ زاویے 30° اور 60° کے ہوں تب 30° کے زاویے کے مقابل کا ضلع، وتر کا نصف ہوتا ہے۔

ذیل میں دیے ہوئے ثبوت کی خالی جگہ پُر کیجیے۔

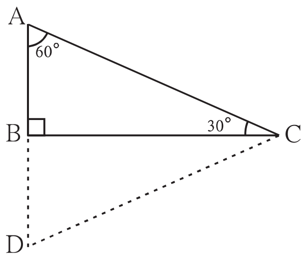


شکل 3.29

دیا ہوا ہے : قائمۃ الزاویہ ΔABC میں $\angle A = 60^\circ$ ، $\angle C = 30^\circ$، $\angle B = 90^\circ$

ثابت کرنا ہے : $AB = \frac{1}{2} AC$

عمل : قطعہ AB کو نقطہ D تک اس طرح بڑھائیے کہ $AB = BD$ اور قطعہ خط DC کھینچیے۔



شکل 3.30

ثبوت : ΔABC اور ΔDBC میں

قطعہ $AB \cong$ قطعہ DB ... $\boxed{}$

$\angle ABC \cong \angle DBC$ ... $\boxed{}$

قطعہ $BC \cong$ قطعہ BC ... $\boxed{}$

$\therefore \Delta ABC \cong \Delta DBC$ ... $\boxed{}$

$\therefore \angle BAC \cong \angle BDC$ ... (متماثل مثلثوں کے نظیری زاویے)

$\triangle ABC$ میں $\angle BAC = 60^\circ$ ، $\therefore \angle BDC = 60^\circ$

اب $\triangle ADC$ میں

$\angle DAC = \angle ADC = \angle ACD = 60^\circ$ ... (مثلث کے زاویوں کا مجموعہ 180°)

$\therefore$ $\triangle ADC$ ، یہ متساوی الاضلاع مثلث ہے۔

$\therefore AC = AD = DC$ ... (متساوی الساقین مثلث کے مسئلہ کے عکس کا نتیجہ صریح)

لیکن، (عمل) ... $AB = \frac{1}{2} AD$

$\therefore AB = \frac{1}{2} AC$ .... $(\because AD = AC)$

عملی کام : اوپر کی شکل 3.29 کی مدد سے خالی چوکون مکمل کر کے ذیل کے مسئلے کا ثبوت لکھیے

قائمۃ الزاویہ مثلث میں دیگر زاویے 30° ، 60° ہوں تو 60° زاویے کے مقابل کا ضلع، وتر $\times \frac{\sqrt{3}}{2}$ ہوتا ہے۔

اوپر کے مسئلے میں، ہم جانتے ہیں، $AB = \frac{1}{2} AC$

(فیثاغورث کے مسئلہ کی رُو سے) ... $AB^2 + BC^2 = \boxed{}$

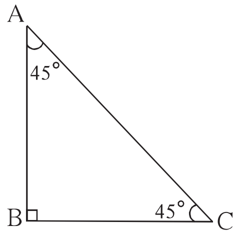
$\frac{1}{4} AC^2 + BC^2 = \boxed{}$

$\therefore BC^2 = AC^2 - \frac{1}{4} AC^2$

$\therefore BC^2 = \boxed{}$

$\therefore BC = \frac{\sqrt{3}}{2} AC$

عملی کام : قائمۃ الزاویہ مثلث کے زاویے جب 45°, 45°, 90° ہوں تب قائمہ زاویہ بنانے والا ہر ضلع، وتر × $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ہوتا ہے۔


شکل 3.31

$\triangle ABC$ میں، $\angle B = 90°$ اور $\angle A = \angle C = 45°$

$\therefore BC = AB$

فیثاغورث کے مسئلہ کی رُو سے،

$AB^2 + BC^2 = \boxed{}$

$AB^2 + \boxed{} = AC^2 \quad \ldots (\because BC = AB)$

$\therefore 2AB^2 = \boxed{}$

$\therefore AB^2 = \boxed{}$

$\therefore AB = \frac{1}{\sqrt{2}} AC$

اس مسئلہ کو 90°–45°–45° کے مثلث کا مسئلہ کہتے ہیں۔

اسے دھیان میں رکھیں

(1) قائمۃ الزاویہ مثلث کے زاویے 30°, 60° اور 90° ہوں تب 30° زاویے کے مقابل کا ضلع $\frac{\text{وتر}}{2}$ ہوتا ہے اور 60° کے زاویے کے مقابل کا ضلع وتر × $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ہوتا ہے۔ اس مسئلہ کو 90°–60°–30° کا مسئلہ کہتے ہیں۔

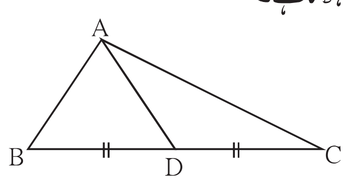
(2) قائمۃ الزاویہ مثلث کے زاویے 45°، 45° اور 90° ہوں تب قائمہ زاویہ بنانے والا ہر ضلع $\frac{\text{وتر}}{\sqrt{2}}$ ہوتا ہے۔ اس مسئلہ کو 90°–45°–45° کا مسئلہ کہتے ہیں۔

آیئے ذرا یاد کریں

مثلث کا وسطانیہ (Median of a triangle)

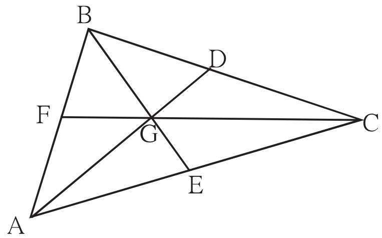
مثلث کے راس اور اس کے مقابل کے ضلع کے وسطی نقطہ کو ملانے والا قطعہ خط، اس مثلث کا وسطانیہ کہلاتا ہے۔

شکل میں نقطہ D، ضلع BC کا وسطی نقطہ ہے اس لیے قطعہ AD، یہ ΔABC کا وسطانیہ ہے۔


شکل 3.32

عملی کام I :

کوئی بھی ایک مثلث ABC بنایئے ۔اس مثلث کے BE, AD اور CF وسطانیے کھینچئے ۔ان کے نقطہ تراکز کو G نام دیجیے۔ AG اور GD کی لمبائی کا موازنہ تقسیم کار (Divider) کی مدد سے کیجیے۔ AG کی لمبائی، GD کے دگنا ہے۔اس کی تصدیق کیجیے۔

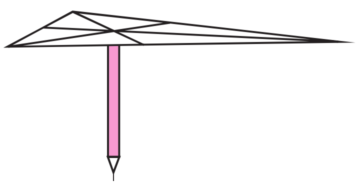


شکل 3.33

اسی طرح کیا BG کی لمبائی GE، کے دگنا اور CG کی لمبائی GF کی لمبائی کے دگنا ہوتی ہے؟اس کی بھی تصدیق کیجیے۔

اس بناپر ہندسی وسط (تینوں وسطانیوں کا نقطہ تراکز) ہر وسطانیہ کو 1 : 2 اس کی نسبت میں تقسیم کرتا ہے۔اس خصوصیت کو دھیان میں رکھیے۔

عملی کام II : ΔABC ،اس مثلث کو ایک موٹے کاغذ پر بنا کر کاٹ لیجیے۔اس کے تینوں وسطانیہ کھینچئے ۔ان کے نقطہ تراکز کو نقطہ G نام دیجیے۔اب ایک پنسل لیجیے جس کا نچلا حصہ ہموار ہو۔ہموار حصے کو اوپر کی جانب کر کے اسے کھڑا کیجیے۔مثلث کے نقطہ G کو پنسل کے ہموار حصے پر رکھ کر دیکھیے کہ توازن برقرار رہتا ہے۔تصدیق کیجیے۔



شکل 3.34

اس بناء پر وسطانیوں کے نقطہ تراکز یا 'ہندسی مرکز' کی اہم خصوصیت سمجھ میں آتی ہے۔

آیئے سمجھ لیں

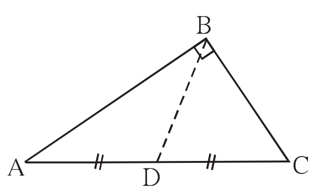
قائمۃ الزاویہ مثلث کے وتر کے وسطانیہ کی خصوصیت

عملی کام : فرض کیجیے شکل 3.35 میں ΔABC قائمۃ الزاویہ مثلث ہے۔

قطعہ BD وسطانیہ ہے۔

تقسیم کار کی مدد سے درج ذیل قطعات خط کی لمبائیاں ناپ کر لکھیے ۔

l(AD) =......... l(DC) =............ l(BD) = ...

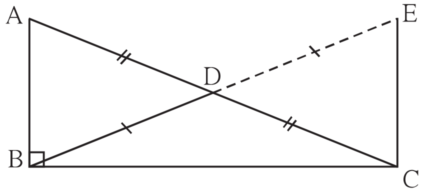


شکل 3.35

اس بناپر (BD) = $\frac{1}{2}$ (AC) خصوصیت حاصل ہوتی ہے۔

تصدیق کیجیے۔

اب ہم اس خصوصیت کو ثابت کریں گے۔



شکل 3.32

مسئلہ : قائمۃ الزاویہ مثلث میں، وتر پر کھینچے گئے وسطانیہ کی لمبائی وتر کا نصف ہوتی ہے۔

دیا ہوا ہے : قائمۃ الزاویہ $\triangle ABC$ میں قطعہ BD وسطانیہ ہے۔

ثابت کرنا ہے : $BD = \frac{1}{2}AC$

عمل : شعاع BD، پر ایک نقطہ E اس طرح لیجیے کہ $B - D - E$ ،

$l(BD) = l(DE)$ اور قطعہ EC کھینچیے ۔

ثبوت : ذیل میں ثبوت کے اہم مرحلے دکھائے گئے ہیں۔ درمیان کے مرحلے، بیانات اور وجوہات لکھ کر ثبوت مکمل کیجیے۔

$\Delta ADB \cong \Delta CDE$ ... (ضل زاضل آزمائش)

قطعہ AB ‖ قطعہ EC ... (متبادلہ زاویوں کی آزمائش)

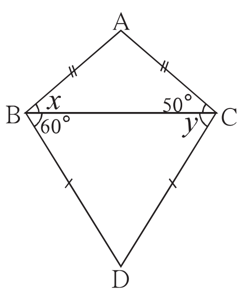
$\Delta ABC \cong \Delta ECB$ ... (ضل زاضل آزمائش)

$BD = \frac{1}{2}(AC)$

اسے دھیان میں رکھیں

کسی بھی قائمۃ الزاویہ مثلث میں، وتر پر کھینچے گئے وسطانیہ کی لمبائی وتر کا نصف ہوتی ہے۔

مشقی سیٹ 3.3

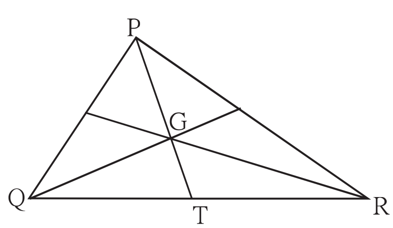


شکل 3.37

(1) شکل 3.37 میں دیئے گئے زاویوں کی پیمائشیں دیکھیے ۔ x اور y کی قیمتیں معلوم کیجیے۔ اسی طرح $\angle ABD$ اور $\angle ACD$ کی پیمائشیں معلوم کیجیے۔

(2) قائمۃ الزاویہ مثلث میں وتر کی لمبائی 15 ہو تب اس پر کھینچے گئے وسطانیہ کی لمبائی معلوم کیجیے۔

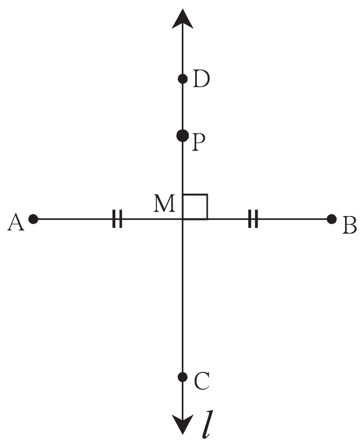
(3) قائمۃ الزاویہ مثلث ΔPQR میں، $\angle Q = 90°$، $QR = 5, PQ = 12$ اور QS، قطعہ PR کا وسطانیہ ہے۔ تب QS کی قیمت معلوم کیجیے۔



شکل 3.38

(4) شکل 3.38 میں ΔPQR کا نقطہ G ہندسی مرکز ہے۔ اگر $GT = 2.5$ سم ہو تو PG اور PT کی قیمتیں معلوم کیجیے۔

آیئے ذرا یاد کریں



شکل 3.39

عملی کام : مناسب لمبائی کا قطعہ AB کھینچیے۔ اس کے وسطی نقطے کو M نام دیجیے۔نقطہ M سے گذرنے والا اور قطعہ AB پر عمود ہو، ایسا خط l کھینچیے۔خط l، قطعہ AB کا عمودی ناصف ہے۔کیا یہ بات دھیان میں آ گئی؟

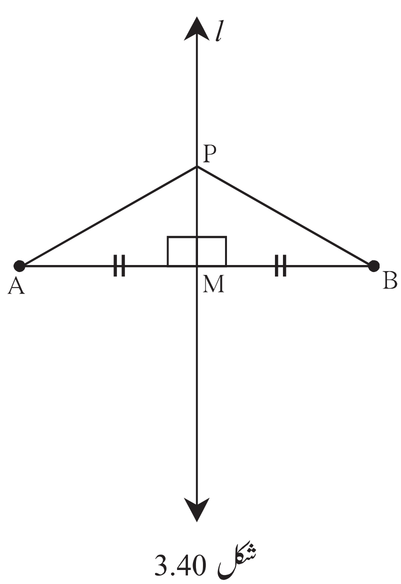
خط l پر کہیں بھی نقطہ p لیجیے۔PA اور PB کے فاصلوں کا موازنہ تقسیم کار کی مدد سے کیجیے۔کیا حاصل ہوا؟ PA = PB یہی حاصل ہوا نا؟ اس سے یہ بات سمجھ میں آتی ہے کہ قطعہ خط کے عمودی ناصف پر واقع کوئی بھی نقطہ، اس قطعہ خط کے اختتامی نقاط سے ہم فاصلہ ہوتا ہے۔

اب کمپاس کی مدد سے، نقطہ A اور B سے ہم فاصلہ نقاط C اور D جیسے کچھ نقاط لیجیے۔ تمام نقاط خط l پر ہی ہیں نا؟ اس بات سے کیا سمجھ میں آیا؟ قطعہ خط کے سروں سے ہم فاصلہ ہر نقطہ، عمودی ناصف پر واقع ہوتا ہے۔ یہ دو خصوصیات عمودی ناصف کے مسئلہ کے دو حصے ہیں، اب ہم انھیں ثابت کریں گے۔

آیئے سمجھ لیں

عمودی ناصف کا مسئلہ (Perpendicular bisector Theorem)

حصہ I : قطعہ خط کے عمودی ناصف پر واقع ہر نقطہ، اس قطعہ کے اختتامی نقاط سے مساوی فاصلہ پر ہوتا ہے۔



شکل 3.40

دیا ہوا ہے : خط l، قطعہ AB کا عمودی ناصف ہے، جو قطعہ AB کو نقطہ M پر قطع کرتا ہے۔

نقطہ P، خط l پر واقع کوئی ایک نقطہ ہے۔

ثابت کرنا ہے : $l(PA) = l(PB)$

عمل : قطعہ AP اور قطعہ BP کھینچیے۔

ثبوت : ΔPMA اور ΔPMB میں

قطعہ PM ≅ قطعہ PM ... (مشترک ضلع)

$\angle PMA \cong \angle PMB$ ... (ہر زاویہ قائمہ)

قطعہ AM ≅ قطعہ BM ... (نقطہ M وسطی نقطہ)

(ضلع زاضلع آزمائش) ... $\therefore\ \Delta PMA \cong \Delta PMB$

(متماثل مثلثوں کے نظیری اضلاع) ... $\therefore$ قطعہ PA $\cong$ قطعہ PB

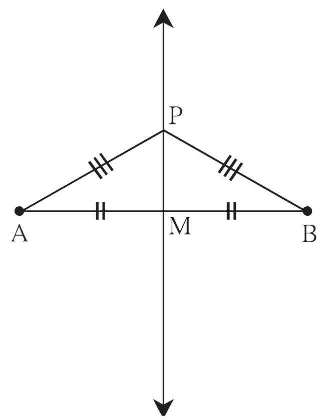
$\therefore\ l(PA) = l(PB)$

اس بنا پر قطعہ خط کے عمودی ناصف پر واقع ہر نقطہ، اس قطعہ کے اختتامی نقاط سے ہم فاصلہ ہوتا ہے۔

حصہ II : قطع خط کے اختتامی سروں سے ہم فاصلہ کوئی بھی نقطہ، اس قطعہ خط کے عمودی ناصف پر واقع ہوتا ہے۔

دیا ہوا ہے : نقطہ P، قطعہ AB کے اختتامی نقاط سے مساوی فاصلے پر واقع کوئی نقطہ ہے۔ یعنی PA = PB

ثابت کرنا ہے : نقطہ P، قطعہ AB کے عمودی ناصف پر واقع ہے۔



شکل 3.41

عمل : قطعہ AB کا وسطی نقطہ M لیجیے اور خط PM کھینچیے ۔

ثبوت : ΔPBM اور ΔPAM میں

$\boxed{\quad}$ ... قطعہ PA $\cong$ قطعہ PB

$\boxed{\quad}$ ... قطعہ AM $\cong$ قطعہ BM

(مشترک ضلع) ... قطعہ PM $\cong$ $\boxed{\quad}$

($\boxed{\quad}$ آزمائش) ... $\therefore \Delta PAM \cong \Delta PBM$

(متماثل مثلثوں کے نظیری زاویے) ... $\therefore\ \angle PMA \cong \angle PMB$

لیکن $\angle PMA + \boxed{\quad} = 180^\circ$

$\angle PMA + \angle PMA = 180^\circ \quad \ldots \quad (\because \angle PMB = \angle PMA)$

$2\angle PMA = \boxed{\quad}$

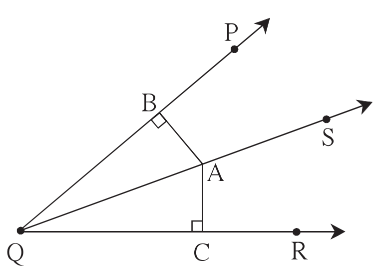
$\therefore\ \angle PMA = 90^\circ$

(1) ... قطعہ PM $\perp$ قطعہ AB

(2) ... اسی طرح، ضلع AB کا وسطی نقطہ M ہے۔ ... (عمل)

اس لیے خط PM، قطعہ AB کا عمودی ناصف ہے۔ یعنی نقطہ P، قطعہ AB کے عمودی ناصف پر واقع ہے۔

زاویہ کے ناصف کا مسئلہ (Angle Bisector Theorem)



شکل 3.42

حصہ I : زاویہ کے ناصف پر واقع ہر نقطہ، اس زاویہ کی ساقین سے ہم فاصلہ ہوتا ہے۔

دیا ہوا ہے : شعاع QS یہ $\angle PQR$ کی ناصف ہے۔

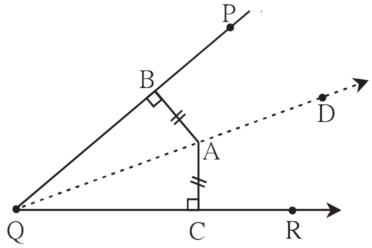
A، زاویہ کے ناصف پر واقع کوئی ایک نقطہ ہے۔ شعاع QP $\perp$ قطعہ AB،

شعاع QR $\perp$ قطعہ AC

ثابت کرنا ہے : قطعہ AC $\cong$ قطعہ AB

ثبوت : مثلثوں کی متماثلت کی مناسب وموزوں آزمائش کا استعمال کرکے ثبوت لکھیے۔

حصہ **II** : زاویہ کے ساقین سے مساوی فاصلہ پر واقع کوئی بھی نقطہ، اس زاویے کے ناصف پر ہوتا ہے۔



شکل 3.43

دیا ہوا ہے : $\angle PQR$ کے اندرون میں A ایک نقطہ اس طرح واقع ہے کہ،

قطعہ $QR \perp$ قطعہ AC

شعاع $QP \perp$ قطعہ AB

$AB = AC$

ثابت کرنا ہے : شعاع QA، $\angle PQR$ کی ناصف ہے یعنی

یعنی $\angle BQA = \angle CQA$

ثبوت : مثلث کی مناسب متماثلت کی آزمائش کا استعمال کرکے ثبوت لکھیے۔

آیئے ذرا یاد کریں

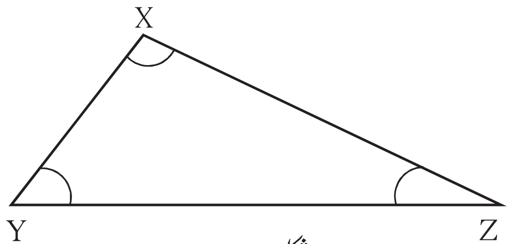
عملی کام I :

شکل کے مطابق، ضلع XY > ضلع XZ

ایسا $\triangle XYZ$ بنائیے۔

اب $\angle Z$ اور $\angle Y$ ناپیے۔

کون سا زاویہ بڑا ہے؟

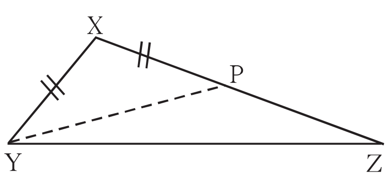


شکل 3.44

آیئے سمجھ لیں

مثلث میں ضلعوں اور زاویوں کی غیر مساویت کی خصوصیت :

مسئلہ : جب مثلث کے دو ضلعوں میں سے ایک ضلع، دوسرے ضلع سے بڑا ہوتا ہے تب بڑے ضلع کے مقابل کا زاویہ چھوٹے ضلع کے مقابل کے زاویے سے بڑا ہوتا ہے۔



شکل 3.45

دیا ہوا ہے : $\triangle XYZ$، میں ضلع XZ > ضلع XY

ثابت کرنا ہے : $\angle XYZ > \angle XZY$

عمل : ضلع XZ پر نقطہ P، اس طرح لیجیے کہ $l(XY) = l(XP)$، قطعہ YP کھینچیے ۔

ثبوت : ΔXYP میں،

$XY = XP$ ... (عمل)

$\therefore\ \angle XYP = \angle XPY$ ... (I) ... (متماثل اضلاع کے مقابل کے زاویے مساوی)

$\angle XPY$، $\triangle YPZ$ کا خارجہ زاویہ ہے۔

$\therefore\ \angle XPY > \angle PZY$ ... (خارجہ زاویہ کا مسئلہ)

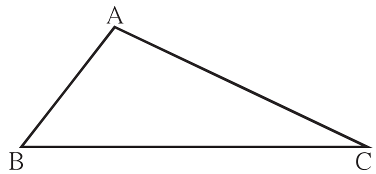
$\angle XYP > \angle PZY$ ... بیان (I) کی بنا پر

$\angle XYP + \angle PYZ > \angle PZY$ ... (اگر $a < b$ اور $c > 0$ ہو تو $a + c > b$)

$\therefore\ \angle XYZ > \angle PZY$ یعنی , $\angle XYZ > \angle XZY$

مسئلہ : مثلث کے دوزاویے غیر مساوی پیمائشوں کے ہوں تب بڑے زاویے کے مقابل کا ضلع، چھوٹے زاویے کے مقابل کے ضلع سے بڑا ہوتا ہے۔

اس مسئلہ کا ثبوت بالواسطہ طریقے سے دے سکتے ہیں۔ ذیل میں دیے ہوئے ثبوت کی خالی جگہ پر کیجیے اور ثبوت مکمل کیجیے۔



شکل 3.46

دیا ہوا ہے : ΔABC میں $\angle B > \angle C$

ثابت کرنا ہے : $AC > AB$

ثبوت : $\triangle ABC$ کے اضلاع AB اور AC کے لمبائیوں میں درج ذیل میں سے ایک اور صرف ایک ہی مفروضہ ممکن ہوسکتا ہے۔

(i) $AC < AB$ (ii) $\boxed{\quad}$ (iii) $\boxed{\quad}$

(1) فرض کیجیے ۔ $AC < AB$

مثلث کے غیر مساوی ضلعوں میں سے بڑے ضلع کے مقابل کا زاویہ، چھوٹے ضلع کے مقابل کے زاویے سے $\boxed{\quad}$ ہوتا ہے۔

$\therefore \angle C > \boxed{\quad}$

لیکن $\angle C < \angle B$ ... (دیا ہوا ہے)

یعنی یہاں تضاد پایا جاتا ہے۔

$\therefore \boxed{\quad} < \boxed{\quad}$ ... (یہ مفروضہ غلط ہے)

(2) اگر، $AC = AB$

ہو تو $\angle B = \angle C$

لیکن $\boxed{\quad} > \boxed{\quad}$ ... (دیا ہوا ہے)

یعنی یہاں دوبارہ تضاد پیدا ہوتا ہے۔

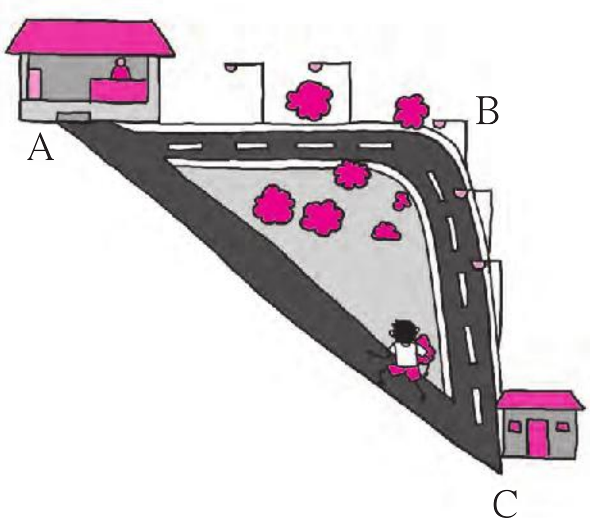
$\therefore \boxed{\quad} = \boxed{\quad}$ ... (یہ مفروضہ غلط ہے)

اب یہی ایک ممکنہ مفروضہ باقی رہتا ہے۔ ... $\therefore AC > AB$

$\therefore AC > AB$

آیئے ذرا یاد کریں

گذشتہ جماعت میں ہم نے ایک عملی کام کیا تھا۔ اس کی مدد سے مثلث کی ایک خصوصیت دیکھی تھی، اسے یاد کریں۔



بازو کی تصویر کے مطابق مقام A پر ایک دکان ہے۔ سمیر C مقام پر کھڑا تھا۔ دکان تک پہنچنے کے لیے اس نے $C \rightarrow B \rightarrow A$ اس پکی سڑک کی بجائے $C \rightarrow A$ راستہ اختیار کیا۔ کیونکہ اس کے دھیان میں یہ بات آئی تھی کہ یہ راستہ کم لمبائی کا ہے۔ یعنی مثلث کی کون سی خصوصیت اس کے دھیان میں آئی تھی؟

مثلث کے کوئی بھی دو ضلعوں کا مجموعہ تیسرے ضلع سے بڑا ہوتا ہے۔ اس خصوصیت کو اب ہم ثابت کریں گے۔

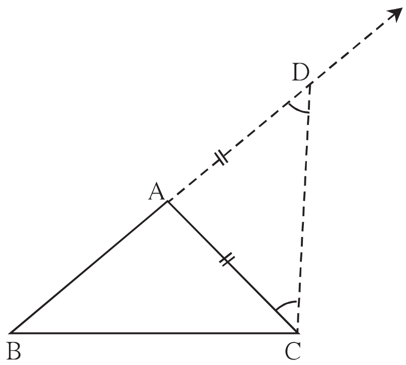
مسئلہ : مثلث کے کسی بھی دوضلعوں کی لمبائی کا مجموعہ، تیسرے ضلع کی لمبائی سے بڑا ہوتا ہے۔

دیا ہوا ہے : $\triangle ABC$ کوئی ایک مثلث ہے۔

ثابت کرنا ہے : $AB + AC > BC$

$AB + BC > AC$

$AC + BC > AB$



شکل 3.47

عمل : شعاع BA پر نقطہ D اس طرح لیجیے کہ $AD = AC$

ثبوت : $\triangle ACD$ میں $AC = AD$ ... (عمل)

$\therefore \angle ACD = \angle ADC$ ... (متماثل اضلاع کے مقابل کے زاویے)

$\therefore \angle ACD + \angle ACB > \angle ADC$ ...(اگر $a > b$ اور $c>0$ ہو تو $a + c > b$)

$\therefore \angle BCD > \angle ADC$

$\therefore$ ضلع $BD >$ ضلع BC ... (مثلث کے بڑے زاویے کے مقابل کا ضلع بڑا)

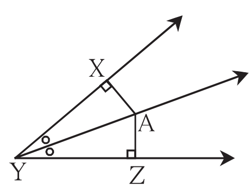
$\therefore BA + AD > BC$ ...($\because BD = BA + AD$)

$BA + AC > BC$ ... ($\because AD = AC$)

اسی طرح $AB + BC > AC$

اور $BC + AC > AB$ ثابت کر سکتے ہیں۔

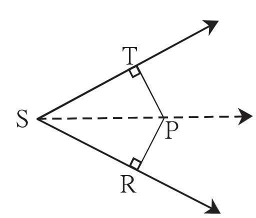
مشقی سیٹ 3.4



شکل 3.48

(1) شکل 3.48 میں، نقطہ A، یہ $\angle XYZ$ کے ناصف پر واقع ہے۔
اگر $AX = 2$ سم ہو تو AZ معلوم کیجیے۔

(2)



شکل 3.48

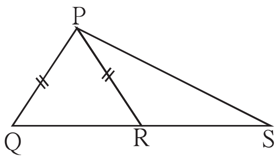
شکل 3.49 میں $\angle RST = 56°$، ST شعاع $\perp$ PT قطعہ،
SR شعاع $\perp$ PR قطعہ اور PT قطعہ $\cong$ PR قطعہ ہو تو $\angle RSP$ معلوم کیجیے۔ وجہ لکھیے۔

(3) $\triangle PQR$ میں $PQ = 10$ سم، $QR = 12$ سم، $PR = 8$ سم ہو تو مثلث کا سب سے بڑا اور سب سے چھوٹا زاویہ معلوم کیجیے۔

(4) $\triangle FAN$ میں، $\angle F = 80°$, $\angle A = 40°$ ہو تو مثلث کا سب سے بڑے اور سب سے چھوٹے ضلع کے نام وجہ کے ساتھ لکھیے؟

(5) ثابت کیجیے کہ متساوی الاضلاع مثلث ''متساوی الزاویہ مثلث'' ہوتا ہے۔

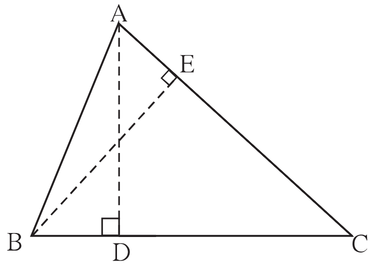
(6) △ABC میں، ∠BAC کا ناصف، ضلع BC پر عمود ہو تو ثابت کیجیے کہ △ABC، متساوی الساقین مثلث ہیں۔



شکل 3.50

(7) شکل 3.50 میں اگر قطعہ PQ ≅ قطعہ PR ہو تو دکھایئے کہ

PQ قطعہ > PS قطعہ



شکل 3.51

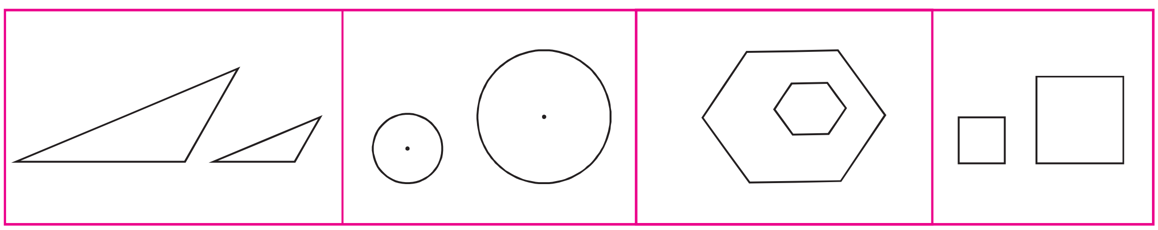
(8) شکل 3.51 میں ΔABC کے قطعہ AD اور قطعہ BD ارتفاع ہیں اور

AE = BD ہو تو ثابت کیجیے قطعہ BE ≅ قطعہ AD

آیئے سمجھ لیں

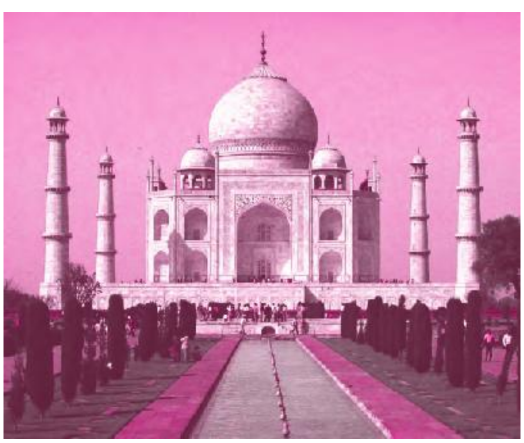
متشابہ مثلث (Similar Triangles)

مقابل کے اشکال کا مشاہدہ کیجیے۔



ہر حصہ میں دکھائی ہوئی دو-دو شکلوں کی جسامت (Shape) ایک جیسی ہے۔ لیکن وہ شکلیں چھوٹی بڑی ہیں، یعنی وہ متماثل نہیں ہیں۔

ایسی ایک جیسی دکھائی دینے والی شکلیں، یعنی ایسی ہو بہو نظر آنے والی شکلیں متشابہ شکلیں کہلاتی ہیں۔



کسی فوٹو، اس فوٹو کی مدد سے نکالا گیا بڑا فوٹو اس میں متشابہت پائی جاتی ہے۔ اسی طرح راستہ اور راستے کا نقشہ میں متشابہت پائی جاتی ہے۔

دو شکلوں کے درمیان اضلاع کی متناسبت، متشابہ اشکال کی اہم خصوصیت ہے۔ متشابہ شکلوں میں اگر زاویے ہوں تب وہ متماثل ہوتے ہیں، اُسی پیائش کے رہنا ضروری ہے۔ دو راستوں میں جو زاویہ ہے، وہی زاویہ ان کے نقشہ میں نہ ہو تو وہ نقشہ غلط فہمی پیدا کر سکتا ہے۔

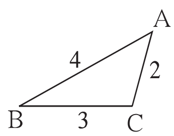
ITC Tools or Links

موبائیل یا کمپیوٹر پر کوئی فوٹو دیکھیے، اسے چھوٹا یا بڑا بنانے کے لیے آپ کیا کرتے ہیں؟ اسے یاد کیجیے۔

اسی طرح کسی فوٹو کا مخصوص حصہ دیکھنے کے لیے آپ کون سا عمل کرتے ہیں۔ یاد کیجیے۔

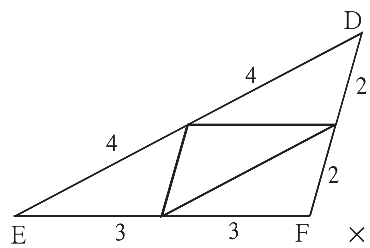
اب ہم متشابہ مثلث کی خصوصیت ایک عمل کے ذریعے سمجھنے کی کوشش کریں گے۔

عملی کام : 4 سم، 3 سم اور 2 سم ضلعوں والا ایک مثلث کاغذ پر بنائیے۔ اس مثلث کو ایک موٹے کاغذ پر رکھیے۔ اس کے اطراف پنسل گھما کر اس قسم کے 14 مثلث کاٹ کر تیار کیجیے۔ کاغذ کے یہ مثلثی ٹکڑے متماثل ہیں اس بات کو دھیان میں رکھیں۔ انھیں ذیل کے مطابق ترتیب دے کر تین مثلث بنائیے۔



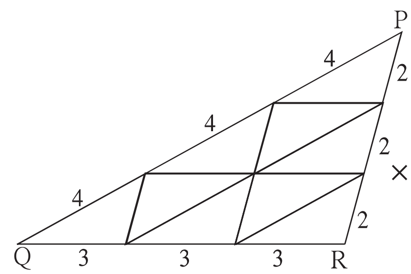
شکل 3.52

مثلث کی تعداد 1



شکل 3.53

مثلث کی تعداد 4



شکل 3.54

مثلث کی تعداد 9

ΔABC اور ΔDEF، یہ $ABC \leftrightarrow DEF$ مطابقت کے لحاظ سے متشابہ ہیں۔

$\angle A \cong \angle D, \angle B \cong \angle E, \angle C \cong \angle F$

اور

$$\frac{AB}{DE} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}; \quad \frac{BC}{EF} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}; \quad \frac{AC}{DF} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

یعنی نظیری ضلعے تناسب میں ہیں۔

اسی طرح $\triangle DEF$ اور $\triangle PQR$ پر غور کیجیے۔

$DEF \leftrightarrow PQR$ اس مطابقت کے لحاظ سے کیا ان کے زاویے متماثل اور ضلع تناسب میں ہیں؟

آیئے سمجھ لیں

مثلثوں کی تشابہت

$\triangle ABC$ اور $\triangle PQR$ میں اگر $\angle C = \angle R$ ،$\angle B = \angle Q$ ،$\angle A = \angle P$ (i)

اور $\dfrac{AC}{PR} = \dfrac{BC}{QR} = \dfrac{AB}{PQ}$ (ii) ہوتو $\triangle ABC$ اور $\triangle PQR$ متشابہ مثلث ہیں۔

'$\triangle ABC$ اور $\triangle PQR$، متشابہ ہیں' اسے '$\triangle ABC \cong \triangle PQR$' لکھتے ہیں۔

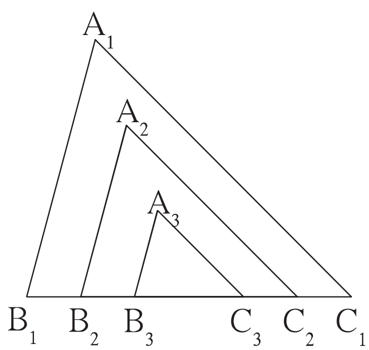
متشابہ مثلثوں کے نظیری زاویے اور نظیری ضلعوں کے درمیان باہمی تعلق ذیل کے عملی کام سے سمجھ لیں۔

عملی کام : $\triangle A_1B_1C_1$ نام کا کوئی ایک مثلث دبیز کاغذ (کارڈشیٹ) پر بنایئے اور اسے کاٹ لیجیے۔ $\angle A_1$، $\angle B_1$ اور $\angle C_1$ کی پیمائش ناپیے۔

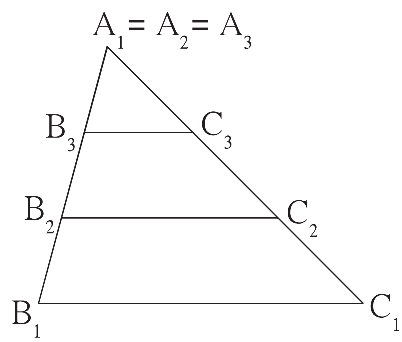
اسی طرح دبیز کاغذ پر $\triangle A_2B_2C_2$ اور $\triangle A_3B_3C_3$ نام کے مزید دو مثلث بنایئے اس طرح کہ $\angle A_1 = \angle A_2 = \angle A_3$ ،

$\angle B_1 = \angle B_2 = \angle B_3$ اور $\angle C_1 = \angle C_2 = \angle C_3$، لیکن $B_1C_1 > B_2C_2 > B_3C_3$

اب ان دو مثلثوں کو کاٹ کر باز و میں رکھیے۔ تینوں مثلثوں کے اضلاع کی لمبائی ناپیے۔ ان مثلثوں کو ذیل کے دونوں طریقے کے مطابق ترتیب دیجیے۔



شکل 3.55



شکل 3.56

$\dfrac{A_1C_1}{A_2C_2}$ ، $\dfrac{B_1C_1}{B_2C_2}$ ، $\dfrac{A_1B_1}{A_2B_2}$ ان نسبتوں کی جانچ کیجیے۔ وہ مساوی ہیں، یہ تصدیق کیجیے۔

اسی طرح $\dfrac{A_1B_1}{A_3B_3}$ ، $\dfrac{B_1C_1}{B_3C_3}$ ، $\dfrac{A_1C_1}{A_3C_3}$ کیا یہ نسبتیں بھی مساوی ہیں، معلوم کیجیے۔

اس عملی کام سے یہ بات ذہن نشین کیجیے کہ جن مثلثوں کے نظیری زاویے مساوی پیمائش کے ہوتے ہیں، ان کے نظیری اضلاع کی نسبتیں بھی مساوی ہوتی ہیں۔ یعنی ان کے نظیری اضلاع یکساں تناسب میں ہوتے ہیں۔

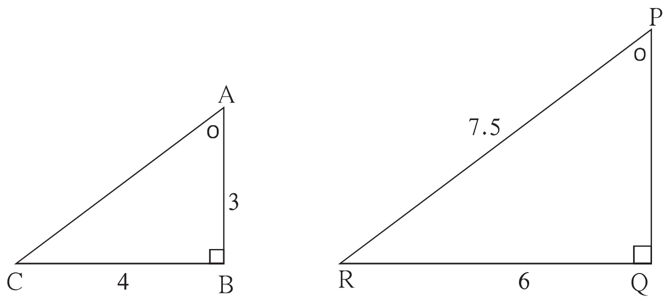
ہم نے دیکھا کہ $\triangle ABC$ اور $\triangle PQR$ میں اگر (i) $\angle A=\angle P$ ،$\angle B=\angle Q$ ،$\angle C=\angle R$ ہوتب (ii) $\dfrac{AC}{PR} = \dfrac{BC}{QR} = \dfrac{AB}{PQ}$

یعنی اگر نظیری زاویے مساوی ہوں تب نظیری اضلاع یکساں تناسب میں ہوتے ہیں۔ اس اصول کو تھوڑی محنت سے ثابت کر سکتے ہیں۔ ہم اسے کئی مثالوں میں استعمال کرنے والے ہیں۔

- دو مثلثوں کے نظیری زاویے مساوی ہوں تب، وہ دونوں مثلث متشابہ ہوتے ہیں۔
- دو مثلث متشابہ ہوتے ہیں تب ان کے نظیری اضلاع تناسب میں ہوتے ہیں اور نظیری زاویے متماثل ہوتے ہیں۔

مثال : شکل 3.57 میں $\triangle ABC$ اور $\triangle PQR$ دکھائے ہوئے ہیں۔

ان دو مثلثوں میں دی ہوئی معلومات کا مشاہدہ کیجیے۔اس بناء پر جن کی لمبائی نہیں دی ہوئی ہو، ان اضلاع کی لمبائیاں معلوم کیجیے۔



شکل 3.57

حل : ہر مثلث کے تمام داخلہ کے زاویوں کی پیمائشوں کا مجموعہ 180° ہوتا ہے۔

دی ہوئی معلومات کے مطابق،

$\angle A = \angle P$ اور $\angle B = \angle Q$ ، $\therefore \angle C = \angle R$

اس لیے $\triangle ABC$ اور $\triangle PQR$ متشابۃ الزاویہ ہیں۔

$\therefore$ ان کے اضلاع یکساں تناسب میں ہیں۔

$$\therefore \frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{AC}{PR}$$

$$\therefore \frac{3}{PQ} = \frac{4}{6} = \frac{AC}{7.5}$$

$$\therefore 4 \times PQ = 18$$

$$\therefore PQ = \frac{18}{4} = 4.5$$

اسی طرح ، $6 \times AC = 7.5 \times 4$

$$\therefore AC = \frac{7.5 \times 4}{6} = \frac{30}{6} = 5$$

مشقی سیٹ 3.5

(1) اگر $\Delta XYZ \sim \Delta LMN$ ہو تب ان کے متماثل نظیری زاویے لکھیے اور نظیری اضلاع کی نسبت لکھیے۔

(2) $\triangle XYZ$ میں XY=4 سم، YZ = 6 سم، XZ = 5 سم، اگر $\triangle XYZ \sim \triangle PQR$ ہو اور PQ = 8 سم ہو تو $\triangle PQR$ کے بقیہ اضلاع کی لمبائیاں معلوم کیجیے۔

(3) متشابہ مثلثوں کی جوڑی کی کچی (رف) شکل بنائیے۔مثلثوں کے نام دیجیے۔ان کے نظیری زاویوں کو یکساں نشانات سے دکھائیے۔اور مثلثوں کے نظیری اضلاع کی لمبائیوں کو تناسب میں ہیں، اسے بتانے والے اعداد سے ظاہر کیجیے۔

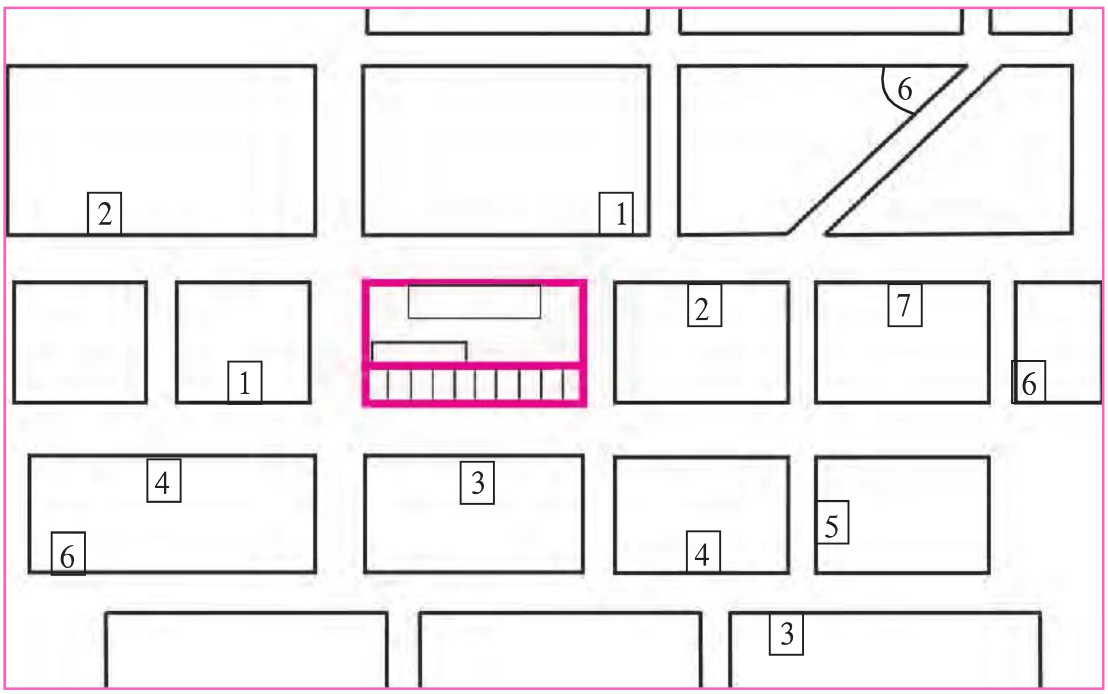
آیئے ذرا یاد کریں

آپ کو نقشہ بناتے وقت راستے پر فاصلہ مناسب پیمانے میں دکھانا ہے۔ جیسے میٹر 100 = 1 سم یا میٹر 50 = 1 سم۔

کیا آپ نے مثلث کی خصوصیت پر غور کیا؟ مثلث کے بڑے زاویے کے مقابل کا ضلع بڑا ہوتا ہے۔ ذرا یاد کیجیے۔

عملی کام :

آپ کے اسکول یا گھر کے اطراف کے 500 میٹر علاقہ کے راستے کا نقشہ تیار کرنا ہے۔ راستے کے دو مقام کے درمیان کا فاصلہ آپ کیسے ناپیں گے؟ عام طور پر 2 میٹر فاصلہ، آپ کتنے قدم چل کر طے کرتے ہیں؟ وہ دیکھیے۔ فرض کیجیے، دو میٹر فاصلہ میں تین قدم چلا جائے، تب اس تناسب سے 90 قدم یعنی 60 میٹر، اس طرح فرضی طور پر مقام طے کیجیے۔ مختصراً، اطراف کے تمام راستوں پر چل کر آپ کو مختلف فاصلے طے کرنا ہوگا۔ بعد میں جہاں راستے ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں وہاں جو زاویہ بنتا ہے اس کی پیمائش کا اندازہ لگایئے۔ راستے کی ناپی ہوئی لمبائی کے لیے مناسب پیمانہ لے کر نقشہ تیار کیجیے۔ اطراف کے دکانیں، چھوٹی دکانیں (ٹپریاں)، عمارتیں، بس اسٹینڈ، آٹو رکشا اسٹینڈ وغیرہ ظاہر کرنے کی کوشش کیجیے۔ ذیل میں نقشہ کا ایک نمونہ دیا ہوا ہے۔



فہرست : 1. کتابوں کی دکان 2. بس اسٹینڈ 3. اسٹیشنری دکان 4. بینک
5. میڈیکل اسٹور 6. ہوٹل 7. سائیکل کی دکان

(1) ذیل میں دیے ہوئے کثیر متبادل سوالوں کے جواب میں سے صحیح جواب منتخب کیجیے۔

(i) ایک مثلث کے دو اضلاع 5 سم اور 1.5 سم ہوں تب مثلث کے تیسرے ضلع کی لمبائی .... نہیں ہوگی.

(A) 3.7 سم (B) 4.1 سم (C) 3.8 سم (D) 3.4 سم

(ii) $\triangle PQR$ میں جب $\angle R > \angle Q$ ہو تو .... ہوگا۔

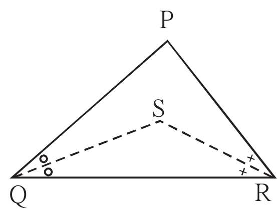
(A) $QR > PR$ (B) $PQ > PR$ (C) $PQ < PR$ (D) $QR < PR$

(iii) ΔTPQ میں $\angle T = 65°$، $\angle P = 95°$ ہو تب درج ذیل بیانات میں سے صحیح بیان کون سا ہے؟

(A) $PQ < TP$ (B) $PQ < TQ$ (C) $TQ < TP < PQ$ (D) $PQ < TP < TQ$

(2) $\triangle ABC$ متساوی الساقین مثلث ہے۔ جس میں $AB = AC$ ہے اور قطعہ BD اور CE دو وسطانیے ہیں تو دکھائیے کہ $BD = CE$

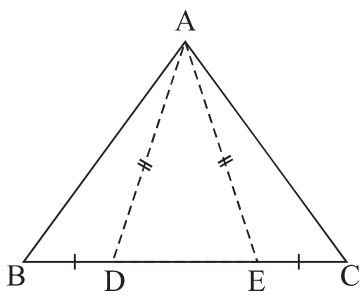
(3) $\triangle PQR$ میں اگر $PQ > PR$ ہے $\angle Q$ اور $\angle R$ کے ناصف ایک دوسرے کو نقطہ S پر قطع کرتے ہیں۔ تو دکھائیے کہ $SQ > SR$



شکل 3.58

(4) شکل 3.59 میں $\triangle ABC$ کے ضلع BC پر نقطہ D اور E نقاط اس طرح واقع ہیں کہ $BD = CE$، اسی طرح $AD = AE$ تو دکھائیے کہ

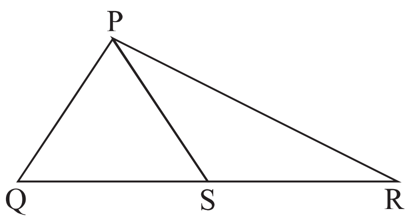
$$\triangle ABD \cong \triangle ACE$$



شکل 3.59

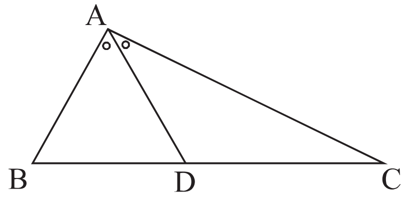
(5) شکل 3.60 میں $\triangle PQR$ کے ضلع QR پر نقطہ S کوئی ایک نقطہ ہے۔ ثابت کیجیے کہ

$$PQ + QR + RP > 2PS$$



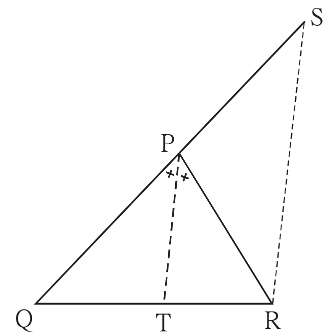
شکل 3.60

(6) شکل 3.61 میں $\triangle ABC$ کے $\angle BAC$ کا ناصف قطعہ BC کو نقطہ D پر قطع کرتا ہے۔ ثابت کیجیے کہ $AB > BD$



شکل 3.61

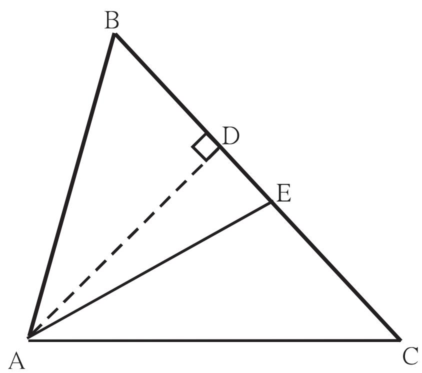
(7) شکل 3.62 میں قطعہ PT، یہ $\angle QPR$ کا ناصف ہے نقطہ R سے، قطعہ PT کے متوازی خط، شعاع QP کو نقطہ S پر قطع کرتا ہے۔ تو ثابت کیجیے کہ $PS = PR$



شکل 3.62

(8) شکل 3.63 میں BC قطعہ $AD \perp$ قطعہ، قطعہ AE، یہ $\angle CAB$ کا ناصف ہے اور E – D – C ہو تو دکھائیے کہ

$$m\angle DAE = \frac{1}{2}\ (m\angle C - m\angle B)$$



شکل 3.63

غور کیجیے

ہم نے سیکھا کہ دو مثلث متشابہ زاویہ ہوں تب اُن کے نظیری اضلاع یکساں تناسب میں ہوتے ہیں۔ دو ذو اربعۃ الاضلاع متشابہ زاویہ ہوں تب کیا ان کے نظیری اضلاع یکساں تناسب میں ہوتے ہیں؟

مختلف شکلیں بنا کر تصدیق کیجیے۔

اس خصوصیت کو دیگر کثیر الاضلاع سے متعلق جانچیے۔

4 مثلث بنانا Constractions of triangles

آیئے ، سیکھیں

مثلث کے ارکان کی ذیل کے مطابق معلومات دی جائے تو مثلث بنانا۔

- قاعدہ، قاعدے کا کوئی ایک زاویہ اور بقیہ دو اضلاع کی لمبائیوں کا مجموعہ
- قاعدہ، قاعدے کا کوئی ایک زاویہ اور باقی ماندہ دو اضلاع کی لمبائیوں کا فرق
- مثلث کا احاطہ اور قاعدے پر کے زاویے

آیئے ذرا یاد کریں

گزشتہ جماعت میں ہم نے ذیل کے مثلث بنانے کا عمل سیکھا ہے۔

★ تمام اضلاع کی لمبائی دی ہو تو مثلث بنانا۔

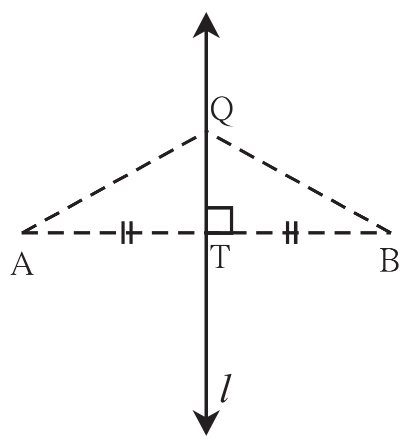
★ قاعدہ اور اسے شامل کرنے والے زاویے دیے ہوں تو مثلث بنانا۔

★ دو اضلاع اور ان میں شامل زاویہ دیا ہو تو مثلث بنانا۔

★ وتر اور ایک ضلع دیا ہو تو مثلث بنانا۔

عمودی ناصف کا مسئلہ :

- دیے ہوئے قطعہ خط کے عمودی ناصف پر واقع ہر نقطہ، اس قطعہ خط کے اختتامی نقاط سے مساوی فاصلہ پر ہوتا ہے۔
- قطعہ خط کے اختتامی نقاط سے مساوی فاصلہ پر واقع ہر نقطہ، قطعہ خط کے سروں سے ہم فاصلہ ہوتا ہے۔



شکل 4.1

آیئے سمجھ لیں

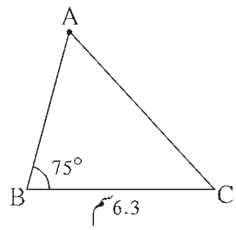
مخصوص مثلث بنانا (Construction of triangles)

مثلث کی بنانے کے لیے تین اہم ارکان کی ضرورت ہوتی ہے۔ تین زاویے اور تین اضلاع میں سے صرف 2 ارکان اور اس کے علاوہ اس مثلث کے تعلق سے کوئی معلومات دی جائے تب اس معلومات اور دیے ہوئے دو ارکان کا استعمال کر کے مثلث کس طرح بنایا جاتا ہے، اسے دیکھیں گے۔

کوئی نقطہ، دو مختلف خطوط پر واقع ہو تو وہ نقطہ، ان خطوط کا نقطہ تقاطع ہوتا ہے۔ اس خصوصیت کا ذیل کے ہندسی عمل میں کئی مرتبہ استعمال ہوا ہے۔

ہندسی عمل I

مثلث کا قاعدہ، قاعدہ پر کا ایک زاویہ اور باقی ماندہ دو اضلاع کی لمبائیوں کا مجموعہ دیا ہو تو مثلث بنانا۔



4.2 کچی شکل

مثال : ΔABC اس طرح بنائیے۔ جس میں سم $BC = 6.3$، $\angle B = 75°$ اور سم $AB+AC = 9$

حل : پہلے ہم مطلوبہ مثلث کی کچی شکل بنائیں گے۔

وضاحت : کچی شکل میں دکھائے ہوئے کے مطابق سم $BC = 6.3$ کا قطعہ کھینچیے۔ نقطہ B پر قطعہ BC سے 75° زاویہ بنانے والی شعاع پر نقطہ D اس طرح لیجیے کہ سم $BD = AB + AC = 9$

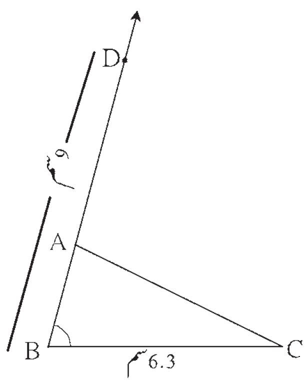
شعاع BD پر نقطہ A معلوم کرنا ہے۔

$$BA+AD = BA+AC = 9$$

$$\therefore \ AD = AC$$

$\therefore$ اس لیے نقطہ A، قطعہ CD کے عمودی ناصف پر ہے۔

اس لیے شعاع BD اور قطعہ CD کا عمودی ناصف کے نقطہ تقاطع یعنی A ہے۔



4.3 کچی شکل

ہندسی عمل کے مراحل :

(1) 6.3 سم لمبائی کا قطعہ BC کھینچیے ۔

(2) نقطہ B سے 75° کا زاویہ بنانے والی شعاع BP کھینچیے ۔

(3) شعاع BP، پر نقطہ D اس طرح لیجیے کہ سم $d(B, D) = 9$

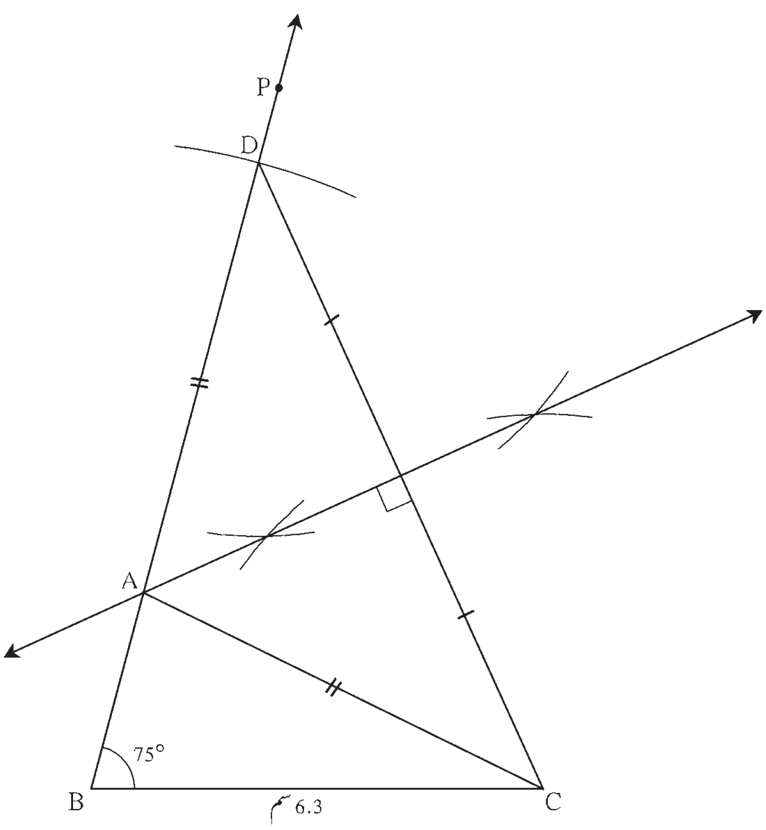
(4) قطعہ DC کھینچیے ۔

(5) قطعہ DC کا عمودی ناصف کھینچیے ۔

(6) قطعہ DC کا عمودی ناصف اور شعاع BP کے نقطہ تقاطع کو A نام دیجیے۔

(7) قطعہ AC کھینچیے ۔

ΔABC مطلوبہ مثلث ہے۔



4.4 پکی شکل

مشقی سیٹ 4.1

.1 ΔPQR بنائیے۔جس میں سم $QR = 4.2$ قاعدہ، $m\angle Q = 40°$ اور سم $PQ + PR = 8.5$

.2 ΔXYZ بنائیے۔جس میں سم $YZ = 6$ قاعدہ، سم $XY + XZ = 9$ اور $m\angle XYZ = 50°$

.3 ΔABC بنائیے۔جس میں سم $BC = 6.2$ قاعدہ، $m\angle ACB = 50°$ اور سم $AB+AC = 9.8$

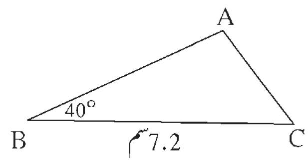
.4 ΔABC بنائیے۔جس میں سم $BC = 5.2$ قاعدہ، $m\angle ACB = 45°$ اور ΔABC کا احاطہ 10 سم ہے۔

ہندسی عمل II

مثلث کا قاعدہ، باقی ماندہ دو اضلاع کی لمبائیوں کا فرق اور قاعدہ پر کا کوئی ایک زاویہ دیا ہوا ہو تو مثلث بنانا۔

مثال : ΔABC میں سم $BC = 7.5$، $m\angle ACB = 40°$،

سم $AB - AC = 3$ ہو تو ΔABC بنائیے۔



کچی شکل 4.5

حل : پہلے ہم مطلوبہ شکل کی کچی شکل بنائیں گے۔

وضاحت : $AB - AC = 3$ اس لیے $AB > AC$، قطعہ BC کھینچیے ۔قطعہ BC سے °40 زاویہ بنانے والی شعاع BL کھینچیے ۔اس شعاع پر نقطہ A معلوم کرنا ہے۔

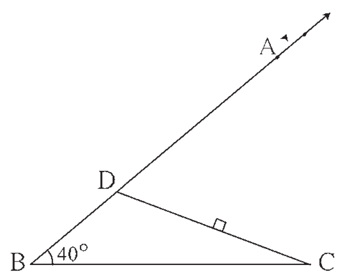
نقطہ D شعاع BL اس طرح لیجیے کہ $BD = 3$ اور $B-D-A$

$BD = AB - AD = 3$ اور (دیا ہوا ہے) $AB - AC = 3$

$AD = AC$

اس لیے نقطہ A قطعہ DC کے عمودی ناصف پر واقع ہے۔

اس لیے نقطہ A شعاع BL اور قطعہ DC کے عمودی ناصف کا نقطہ تقاطع ہے۔



کچی شکل 4.6

ہندسی عمل کے مراحل :

(1) 7.5 سم لمبائی کا قطعہ BC کھینچیے ۔

(2) نقطہ B سے °40 زاویہ بنانے والی شعاع BL کھینچیے ۔

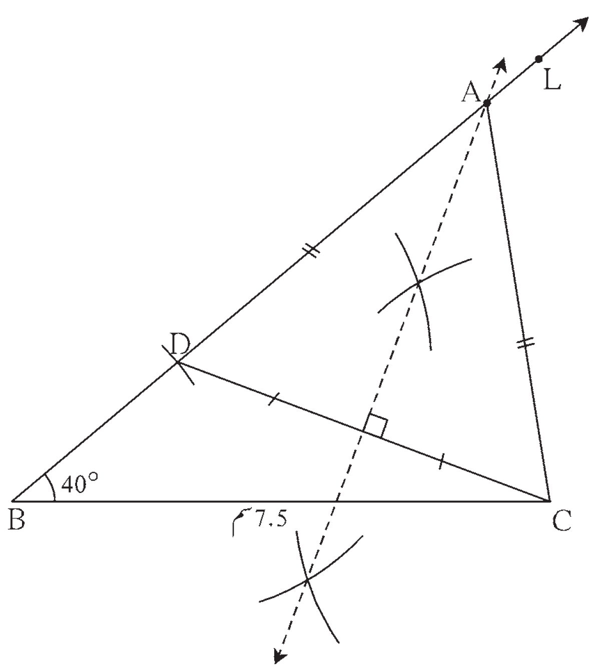
(3) شعاع BL پر نقطہ D اس طرح لیجیے کہ سم $BD = 3$

(4) قطعہ CD پر اس کا عمودی ناصف کھینچیے ۔

(5) قطعہ CD کا عمودی ناصف، شعاع BL کو جہاں قطع کرتا ہے، اس نقطہ کا نام A دیجیے۔

(6) قطعہ AC کھینچیے ۔

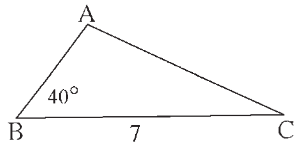
ΔABC مطلوبہ مثلث ہے۔



پکی شکل 4.7

مثال 2. ΔABC میں سم $BC = 7$ ضلع، $\angle B = 40°$ اور سم $AC - AB = 3$ ہوتو ΔABC بنائیے۔

حل : کچی شکل بنائیں گے۔



کچی شکل 4.8

سم $BC = 7$ کھینچیے ۔ $AC > AB$

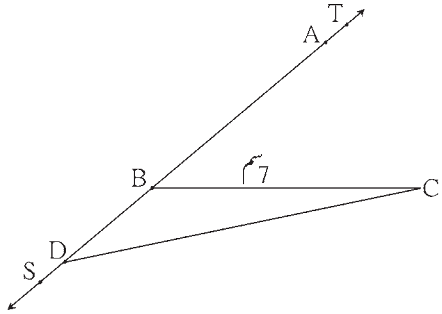
قطعہ BC کے نقطہ B سے 40° کا زاویہ بنانے والی شعاع BT کھینچ سکتے ہیں۔اس شعاع پر نقطہ A واقع ہے شعاع BT کی مخالف شعاع پر نقطہ D اس طرح لیجیے کہ سم $BD = 3$

اب $AD = AB + BD = AB + 3 = AC$

کیونکہ دیا ہوا ہے۔سم $AC - AB = 3$

$\therefore \quad AD = AC$

اس لیے نقطہ A قطعہ CD کے عمودی ناصف پر واقع ہے۔



کچی شکل 4.9

ہندسی عمل کے مراحل :

(1) 7 سم لمبائی کا قطعہ BC کھینچیے ۔

(2) نقطہ B سے 40° زاویہ بنانے والی شعاع BT کھینچیے ۔

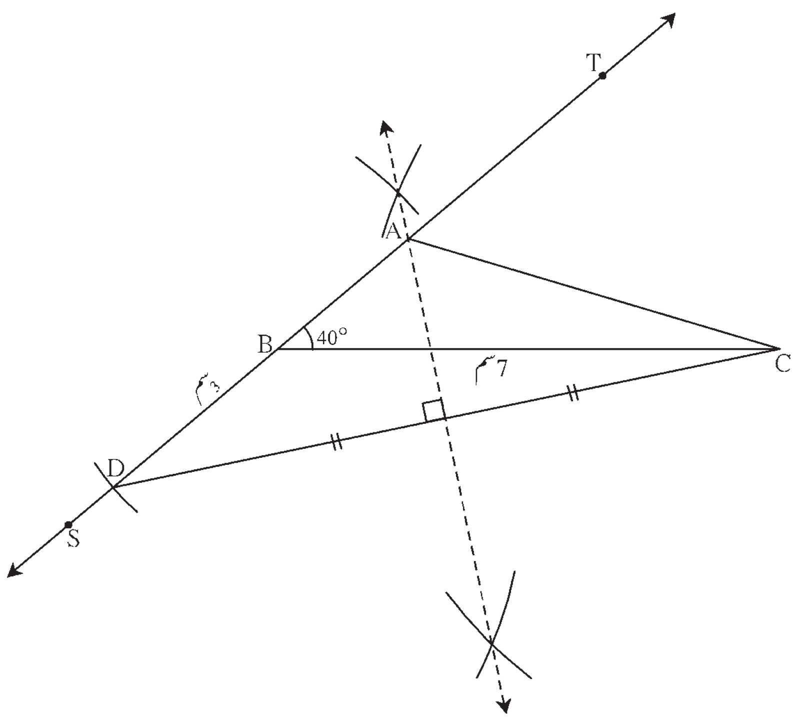
(3) شعاع BT کے مخالف شعاع BS پر نقطہ D اس طرح لیجیے کہ سم $BD = 3$

(4) قطعہ DC کا عمودی ناصف کھینچیے ۔

(5) قطعہ DC کا عمودی ناصف، شعاع BT کو جہاں قطع کرتا ہے،اس نقطہ کو A نام دیجیے۔

(6) قطعہ AC کھینچیے ۔

ΔABC مطلوبہ مثلث ہے۔



پکی شکل 4.10

مشقی سیٹ 4.2

1) ΔXYZ بنائیے۔جس میں سم $YZ = 7.4$ ، $m\angle XYZ=45°$ اور سم $XY - XZ = 2.7$

2) ΔPQR بنائیے۔جس میں سم $QR = 6.5$ ، $m\angle PQR=60°$ اور سم $PQ - PR = 2.5$

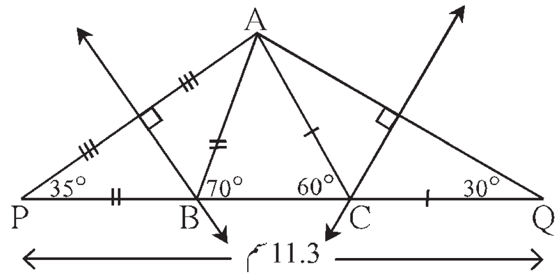
3) ΔABC بنائیے۔جس میں سم $BC = 6$ ، $m\angle ABC=100°$ اور سم $AC - AB = 2.5$

ہندسی عمل III

مثلث کا احاطہ اور قاعدہ پر کے دونوں زاویے دیے ہوں تو مثلث بنانا۔

مثال : ΔABC میں سم $AB + BC + AC = 11.3$ ، $\angle B = 70°$ ، $\angle C = 60°$ ہو تب ΔABC بنائیے۔

حل : کچی شکل بنائیں گے۔



کچی شکل 4.11

وضاحت : اس شکل میں قطعہ BC پر نقاط P اور Q اس طرح لیا کہ

$$PB = AB,\ CQ = AC$$

$$PQ = PB + BC + CQ = AB + BC + AC = 11.3 \text{ سم}$$

اب ΔPAB میں، $PB = BA$ ..... (عمل)

(بعید داخلہ زاویوں کا مسئلہ) ... $\triangle ABC = 70°$ کا خارجہ زاویہ = $\angle APB + \angle PAB$ اور $\angle APB = \angle PAB$ $\therefore$

$\therefore\ \angle APB = \angle PAB = 35°$ اسی طرح , $\angle CQA = \angle CAQ = 30°$

اب مثلث ΔPAQ بنایا جا سکتا ہے کیونکہ اس کے دو زاویے اور ان کو شامل کرنے والا ضلع PQ معلوم ہے۔

پھر $BA = BP$، اس لیے نقطہ B قطعہ AP کے عمودی ناصف پر ہے۔ اور $CA = CQ$

اس لیے نقطہ C قطعہ AQ کے عمودی ناصف پر ہے۔

$\therefore$ AP اور AQ کے عمودی ناصف کھینچیے ۔ یہ خط PQ کو جہاں قطع کرتے ہیں وہاں بالترتیب B اور C نقطہ حاصل ہوتا ہے۔

ہندسی عمل کے مراحل :

(1) 11.3 سم لمبائی کا قطعہ PQ کھینچیے ۔

(2) نقطہ P پر 35° پیمائش کا زاویہ بنانے والی شعاع کھینچیے ۔

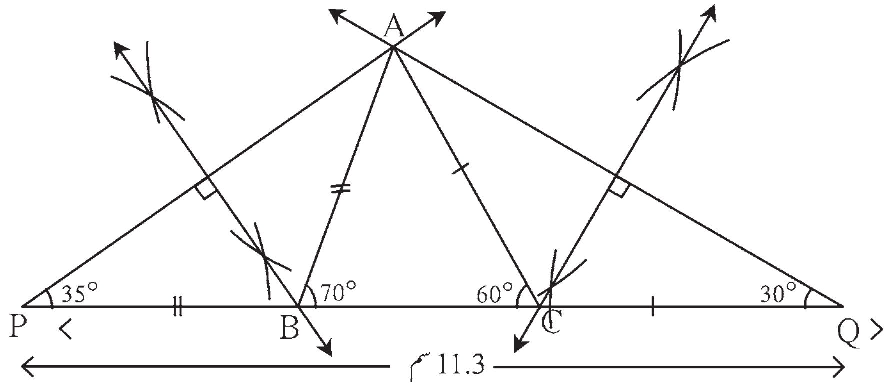
(3) نقطہ Q پر 30° پیمائش کا زاویہ بنانے والی شعاع کھینچیے ۔

(4) دونوں شعاعوں کے نقطہ تقاطع کو A نام دیجیے۔

(5) قطعہ AP اور AQ کا عمودی ناصف کھینچیے ۔ وہ خط PQ کو جن نقاط پر قطع کرتے ہیں انھیں بالترتیب B اور C نام دیجیے۔

(6) قطعہ AB اور قطعہ AC کھینچیے ۔

ΔABC مطلوبہ مثلث ہے۔



پکی شکل 4.12

مشقی سیٹ 4.3

1. ΔPQR اس طرح بنائیے کہ $\angle Q = 70°$، $\angle R = 80°$ اور $PQ + QR + PR = 9.5$ سم
2. ΔXYZ اس طرح بنائیے کہ $\angle Y = 58°$، $\angle X = 46°$ اور مثلث کا احاطہ 10.5 سم ہے۔
3. ΔLMN اس طرح بنائیے کہ $\angle M = 60°$، $\angle N = 80°$ اور $LM + MN + NL = 11$ سم

مجموعہ سوالات 4

1. ΔXYZ اس طرح بنائیے کہ $XY + XZ = 10.3$ سم، $YZ = 4.9$ سم، $\angle XYZ = 45°$
2. ΔABC اس طرح بنائیے کہ $\angle B = 70°$، $\angle C = 60°$ اور $AB + BC + CA = 11.2$
3. ایسا مثلث بنائیے۔ جس مثلث کا احاطہ 14.4 سم ہے اور جس کے اضلاع کی نسبت $4 : 3 : 2$ ہے۔
4. ΔPQR اس طرح بنائیے کہ $PQ - PR = 2.4$ سم، $QR = 6.4$ سم اور $\angle PQR = 55°$

ITC Tools or Links

دیے ہوئے مثلث کو کمپیوٹر پر 'جیو جیرا' سافٹ ویئر کی مدد سے بنائیے اور لطف اٹھائیے۔ ہندسی عمل 3 کو سافٹ ویئر میں مختلف طریقوں سے بنا کر دکھایا گیا ہے۔ اس طریقہ کا بھی عملی مطالعہ کیجیے۔