गणित भाग-II

नौवीं कक्षा

शासन निर्णय क्रमांक : अभ्यास-२११६/(प्र.क्र.४३/१६) एसडी-४ दिनांक २५.४.२०१६ के अनुसार समन्वय समिति का गठन किया गया । दि. ३.३.२०१७ को हुई इस समिति की बैठक में यह पाठ्यपुस्तक निर्धारित करने हेतु मान्यता प्रदान की गई ।

गणित

भाग-II

नौवीं कक्षा

महाराष्ट्र राज्य पाठ्यपुस्तक निर्मिती व अभ्यासक्रम संशोधन मंडळ, पुणे - ४११ ००४

संलग्न 'क्यू आर कोड' तथा इस पुस्तक में अन्य स्थानों पर दिए गए 'क्यू आर कोड' स्मार्ट फोन का प्रयोग कर स्कैन कर सकते हैं । स्कैन करने के उपरांत आपको इस पाठ्यपुस्तक के अध्ययन-अध्यापन के लिए उपयुक्त लिंक/लिंक्स (URL) प्राप्त होंगी ।

प्रथमावृत्ति : 2017

© **महाराष्ट्र राज्य पाठ्यपुस्तक निर्मिती व अभ्यासक्रम संशोधन मंडळ, पुणे – ४११००४**

इस पुस्तक का सर्वाधिकार महाराष्ट्र राज्य पाठ्यपुस्तक निर्मिती व अभ्यासक्रम संशोधन मंडळ के अधीन सुरक्षित है । इस पुस्तक का कोई भी भाग महाराष्ट्र राज्य पाठ्यपुस्तक निर्मिती व अभ्यासक्रम संशोधन मंडळ के संचालक की लिखित अनुमति के बिना प्रकाशित नहीं किया जा सकता ।

गणित विषयतज्ञ समिति

डॉ. मंगला नारळीकर (अध्यक्ष)
डॉ. जयश्री अत्रे (सदस्य)
श्री रमाकांत सरोदे (सदस्य)
श्री दादासो सरडे (सदस्य)
श्री संदीप पंचभाई (सदस्य)
श्रीमती लता टिळेकर (सदस्य)
श्रीमती उज्ज्वला गोडबोले (सदस्य-सचिव)

गणित विषय – राज्य अभ्यासगट सदस्य

श्रीमती पूजा जाधव
श्री प्रमोद ठोंबरे
श्री राजेंद्र चौधरी
श्री आण्णापा परीट
श्री श्रीपाद देशपांडे
श्री बन्सी हावळे
श्री उमेश रेळे
श्री चंदन कुलकर्णी
श्रीमती अनिता जावे
श्रीमती बागेश्री चव्हाण
श्री कल्याण कडेकर
श्री संदेश सोनावणे
श्री सुजित शिंदे
डॉ. हनुमंत जगताप
श्री प्रताप काशिद
श्री काशिराम बाविसाने
श्री पप्पु गाडे
श्रीमती रोहिणी शिर्के
श्री राम व्हन्याळकर
श्री अन्सार शेख
श्रीमती सुवर्णा देशपांडे
श्री गणेश कोलते
श्री सुरेश दाते
श्री प्रकाश झेंडे
श्री श्रीकांत रत्नपारखी
श्री सूर्यकांत शहाणे
श्री प्रकाश कापसे
श्री सलीम हाश्मी
श्रीमती आर्या भिडे
श्री मिलिंद भाकरे
श्री ज्ञानेश्वर माशाळकर
श्री लक्ष्मण दावणकर
श्री सुधीर पाटील
श्री राजाराम बंडगर
श्री प्रदीप गोडसे
श्री रवींद्र खंदारे
श्री सागर सकुडे

श्रीमती प्राजक्ती गोखले (निमंत्रित सदस्य)
श्री वि. दि. गोडबोले (निमंत्रित सदस्य)
श्रीमती तरूबेन पोपट (निमंत्रित सदस्य)

प्रमुख संयोजक : **उज्ज्वला श्रीकांत गोडबोले**
प्र. विशेषाधिकारी गणित, पाठ्यपुस्तक मंडळ, पुणे
मुखपृष्ठ एवं सजावट : धनश्री मोकाशी, पुणे
संगणकीय आरेखन : संदीप कोळी, मुंबई
चित्रकार : धनश्री मोकाशी

भाषांतरकार : श्री प्रेमवल्लभ ओझा
श्री सुनील श्रीवास्तव
समीक्षक : श्री लीलाराम बोपचे
श्री धीरज बी. शर्मा
विषयतज्ञ : श्रीमती संगीता संझगिरी
श्री अरविंदकुमार आर. तिवारी
श्रीमती वृंदा कुलकर्णी
श्रीमती मंजुला त्रिपाठी मिश्रा
भाषांतर संयोजन : **डॉ अलका पोतदार**
विशेषाधिकारी, हिंदी
संयोजन सहायक : **सौ. संध्या विनय उपासनी**
विषय सहायक हिंदी

निर्मिति : **सच्चितानंद आफळे**
मुख्य निर्मिति अधिकारी
संजय कांबळे, निर्मिति अधिकारी
प्रशांत हरणे, सहा. निर्मिति अधिकारी
अक्षरांकन : **रासी ग्राफिक्स**, मुंबई
कागज : ७० जी.एस.एम.क्रिमव्होव
मुद्रणादेश : N/PB/2017-18/70,000
मुद्रक : SHIV OFFSET, SANGLI

प्रकाशक

विवेक उत्तम गोसावी, नियंत्रक
पाठ्यपुस्तक निर्मिती मंडळ, प्रभादेवी, मुंबई २५

भारत का संविधान

उद्देशिका

हम, भारत के लोग, भारत को एक **संपूर्ण प्रभुत्व-संपन्न समाजवादी पंथनिरपेक्ष लोकतंत्रात्मक गणराज्य** बनाने के लिए, तथा उसके समस्त नागरिकों को :

सामाजिक, आर्थिक और राजनैतिक **न्याय,**
विचार, अभिव्यक्ति, विश्वास, धर्म
और उपासना की **स्वतंत्रता,**
प्रतिष्ठा और अवसर की **समता**

प्राप्त कराने के लिए,
तथा उन सब में

व्यक्ति की गरिमा और राष्ट्र की एकता
और अखंडता सुनिश्चित करने वाली **बंधुता**

बढ़ाने के लिए

दृढ़संकल्प होकर **अपनी इस संविधान सभा में** आज तारीख 26 नवंबर, 1949 ई. (मिति मार्गशीर्ष शुक्ला सप्तमी, संवत् दो हजार छह विक्रमी) **को एतद् द्वारा इस संविधान को अंगीकृत, अधिनियमित और आत्मार्पित करते हैं ।**

राष्ट्रगीत

जनगणमन – अधिनायक जय हे
भारत – भाग्यविधाता ।
पंजाब, सिंधु, गुजरात, मराठा,
द्राविड, उत्कल, बंग,
विंध्य, हिमाचल, यमुना, गंगा,
उच्छल जलधितरंग,
तव शुभ नामे जागे, तव शुभ आशिस मागे,
गाहे तव जयगाथा,
जनगण मंगलदायक जय हे,
भारत – भाग्यविधाता ।
जय हे, जय हे, जय हे,
जय जय जय, जय हे ।।

प्रतिज्ञा

भारत मेरा देश है । सभी भारतीय मेरे भाई–बहन हैं ।

मुझे अपने देश से प्यार है । अपने देश की समृद्‌ध तथा विविधताओं से विभूषित परंपराओं पर मुझे गर्व है ।

मैं हमेशा प्रयत्न करूँगा/करूँगी कि उन परंपराओं का सफल अनुयायी बनने की क्षमता मुझे प्राप्त हो ।

मैं अपने माता–पिता, गुरुजनों और बड़ों का सम्मान करूँगा/करूँगी और हर एक से सौजन्यपूर्ण व्यवहार करूँगा/करूँगी ।

मैं प्रतिज्ञा करता/करती हूँ कि मैं अपने देश और अपने देशवासियों के प्रति निष्ठा रखूँगा/रखूँगी । उनकी भलाई और समृद्‌धि में ही मेरा सुख निहित है ।

प्रस्तावना

विद्‌यार्थी मित्रो,

नौवीं कक्षा में आप सभी का स्वागत !

प्राथमिक शिक्षण का अभ्यासक्रम पूर्ण कर आप माध्यमिक स्तर का अध्ययन आरंभ कर रहे हैं ।

आठवीं कक्षा के अध्ययन तक एक ही पाठ्‌यपुस्तक थी, अब गणित भाग I तथा गणित भाग II ऐसी दो पाठ्‌यपुस्तकों का अध्ययन करना है ।

आठवीं कक्षा गणित की पाठ्‌यपुस्तक में रेखा, त्रिभुज, चतुर्भुज, वृत्त आदि के गुणधर्मों की जाँच की । अब और कुछ गुणधर्मो को तर्कशुद्‌ध सोपानों से सिद्‌ध करना सीखने वाले हैं । तार्किक पद्‌धति से प्रस्तुत करना यह कौशल व्यवहार तथा सभी क्षेत्रों में महत्त्वपूर्ण है । पाठ्‌यपुस्तक में यह कौशल तनावमुक्त प्राप्त कर सकते हैं ।

पाठ्‌यपुस्तक में दी गई कृतियों के संबंध में शिक्षकों से, कक्षा में अपने मित्र सहयोगी से चर्चा करें तथा उन कृतियों से प्राप्त गुणधर्म को सिद्‌ध करने का अध्ययन करें । उपपत्ति के प्रत्येक चरण में दिए गए कारणों की चर्चा करें तथा उस गुणधर्म को समझ कर कीजिए ।

इस पाठ्‌यपुस्तक में उच्च गणित के अध्ययन हेतु उपयोगी घटक त्रिकोणमिति तथा निर्देशांक भूमिति जैसे घटकों को समाविष्ट किया गया है । उसी प्रकार व्यवहार में उपयोग में आने वाले पृष्ठफल, घनफल का अध्ययन भी हम यहा करने वाले हैं ।

इंटरनेट का उपयोग कर कई कृति समझें । पाठ्‌यपुस्तक का गहन वाचन कृतियुक्त अध्ययन तथा प्रश्नसंग्रह इन तीन सूत्रों से गणित की मात्रा आनंदपूर्वक तय होगी, इसमें कोई संदेह नहीं ।

तो फिर चलिए ! अब शिक्षक, पालक, मित्र-मैत्रीण, सहयोगी इंटरनेट इन सभी को लेकर गणित का अध्ययन करें । इस अध्ययन के लिए आप सभी को शुभकामनाएँ ।

(डॉ. सुनिल मगर)
संचालक
महाराष्ट्र राज्य पाठ्‌यपुस्तक निर्मिती व
अभ्यासक्रम संशोधन मंडळ, पुणे

पुणे
दिनांक : २८ एप्रिल २०१७
भारतीय सौर दिनांक : अक्षय तृतीया
वैशाख १९३९

कक्षा नौवीं गणित भाग II अभ्यासक्रम से निम्नलिखित क्षमताएँ विद्‌यार्थियों में विकसित होंगी ।

क्षेत्र	घटक	क्षमता कथन
1. भूमिति	1.1 युक्लिड की भूमिति	• दिए गए कथन में उपयोग करने योग्य जानकारी (दत्त) तथा उसके आधार पर सिद्ध करने वाले (साध्य) को उचित रूप से प्रस्तुत कर सकना । • तर्कसंगत प्रस्तुति कर साध्य कथन को सिद्ध करने की क्षमता विकसित होना ।
	1.2 समांतर रेखा तथा कोणों की जोडियाँ	• समांतर रेखा तथा तिर्यक रेखा के कारण बनने वाले विभिन्न कोणों की जोड़ियाँ पहचान सकना । • कोणों की जोड़ियों के गुणधर्म समझना तथा उपयोग कर सकना । • दी गई जानकारी को दत्त तथा साध्य के रूप में लिखकर उपपत्ति लिख सकना ।
	1.3 त्रिभुजों के कोण तथा भुजाओं का प्रमेय	• समरूप त्रिभुज पहचानकर उनकी भुजाओं का अनुपात लिख सकना ।
	1.4 समरूप त्रिभुज	• समरूप त्रिभुजों की कसौटियों का उपयोग कर वृत्त के गुणधर्म सिद्ध कर सकना ।
	1.5 वृत्त	• अंतर्वृत्त, परिवृत्त की रचना कर सकना ।
	1.6 भूमितीय रचना	• त्रिभुज की विशिष्ट जानकारी दिए जाने पर त्रिभुज की रचना कर सकना ।
	1.7 चतुर्भुज	• विशिष्ट चतुर्भुजों के गुणधर्म की सिद्धता लिख सकना । • ICT Tools की सहायता से त्रिभुज, चतुर्भुज, वृत्त के गुणधर्मों की जाँच कर सकना ।
2. निर्देशांक भूमिति	2.1 निर्देशांक भूमिति	• प्रतल में स्थित प्रत्येक बिंदु से संबंधित बिंदु के निर्देशांकों की जोड़ी का अर्थ बता सकना । • निर्देशांकों का उपयोग कर विशिष्ट बिंदु का वर्णन कर सकना । • ICT Tools का उपयोग कर प्रतल पर के बिंदु के निर्देशांकों को खोज सकना ।
3. महत्त्वमापन	3.1 पृष्ठफल तथा घनफल	• गोले तथा शंकु का पृष्ठफल तथा घनफल ज्ञात कर सकना ।
4. त्रिकोणमिति	4.1 त्रिकोणमिति	• समरूप त्रिभुज तथा पायथागोरस के प्रमेय की सहायता से त्रिकोणमिति के अनुपात बता सकना तथा उनका उपयोग कर सकना ।

शिक्षकों के लिए सूचना

सर्वप्रथम शिक्षकों ने कक्षा नौवीं भाग II इस पाठ्यपुस्तक का गहन वाचन करना अपेक्षित है । उसमें दी गई सभी कृतियों तथा प्रात्यक्षिकों को समझ लें । कृतियों के दो भाग हैं । पहला सिद्ध करना (उपपत्ति लिखना) और दूसरा गुणधर्म तथा सीखे हुए निष्कर्षों की जाँच प्रात्यक्षिकों द्वारा करना । इन कृतियों को करने तथा पाठ्यपुस्तक अधिक उद्बोधक इस हेतु चर्चा, प्रश्नोत्तर तथा सामूहिक उपक्रम जैसे विभिन्न पद्धतियों का उपयोग करना यह शिक्षकों से अपेक्षित है । पाठ्यपुस्तक में दी गई कृति विद्यार्थी करें तथा उसी तरह की कृति तैयार करने में विद्यार्थियों का मार्गदर्शन करें ।

प्रमेय की उपपत्ति याद करने के बजाय उसपर तर्कसंगत विचार कर प्रस्तुत करना (लिखना) अधिक महत्त्वपूर्ण है । इन तर्कसंगत विचारशक्ति को गति देने वाले विभिन्न उदाहरणों के पाठ्यपुस्तक में समाविष्ट किया गया है । आव्हानात्मक उदाहरणों को पाठ्यपुस्तक में तारांकित किया गया हैं । यदि विद्यार्थी अलग से विचार कर तर्कशुद्ध पद्धति से उदाहरण हल करता है तो उस विद्यार्थी को शिक्षकों ने प्रोत्साहन देना चाहिए ।

मूल्यमापन करते समय शिक्षकों द्वारा मुक्त प्रश्न तथा कृतिपत्रिका का भी उपयोग करना अपेक्षित है । शिक्षकों को इस प्रकार की मूल्यमापन पद्धति को विकसित करने के लिए प्रयत्न करना चाहिए । इसी प्रकार पाठ्यपुस्तक में नमूने के तौर पर प्रात्यक्षिकों की सूची दी है ।

इसके अतिरिक्त उपलब्ध साहित्य से आप स्वयं विभिन्न प्रात्यक्षिक तैयार कर सकते हैं, उसी प्रकार साहित्य निर्मिति भी कर सकते हैं । पाठ्यपुस्तक की विभिन्न कृतियों को प्रात्यक्षिक में अंतर्भूत किया गया है । उसपर आधारित मूलयमापन पद्धति का उपयोग अगली कक्षाओं में क्षमता विकसित करने के लिए निश्चित तौर पर होगा, ऐसी हमें आशा है ।

प्रात्यक्षिकों की सूची

(1) संख्या रेखा पर दो बिंदुओं के बीच की दूरी ज्ञात करना ।

(2) समांतर रेखा तथा तर्यक रेखा के कारण बनने वाले गुणधर्मों की जाँच साहित्य का उपयोग करके करना ।

(3) विभिन्न साहित्यों के आधार पर त्रिभुज की भुजाओं तथा कोणों के गुणधर्मों को जाँचना ।

(4) समकोण त्रिभुज तथा माध्यिका के गुणधर्मों की जाँच करना ।

(5) त्रिभुज की रचना के लिए विभिन्न माप लेकर सभी प्रकार की भूमितीय रचना करना ।

(6) शंकु के वक्रपृष्ठफल का अंदाज लेने के लिए एक कृति दी गई है । वह कृति ‘r’ त्रिज्या वाले वृत्त के लिए करना और साथ ही जाँच करें की वृत्त का क्षेत्रफल πr^2 है ।

(7) किसी कमरे (कक्ष) में रखीं सभी वस्तुओं का माप ध्यान में रखकर पैमानायुक्त मानचित्र आलेख कागज पर बनाना ।

(8) विद्यालय के मैदान में x तथा y अक्ष बनाकर विद्यार्थियों के स्थान का निर्देशांक निर्धारित करने की कृति करना ।

(9) लंब वृत्ताकार बेलन के डिब्बे का घनफल सूत्र की सहायता से ज्ञात करना । उसी डिब्बे पर ऊपर तक पानी पूर्णतः भरकर पानी का घनफल मापना । दोनों उत्तरों की तुलना करना । इसी प्रकार अनेक त्रिमितीय आकार वाले वस्तुओं के घनफल की जाँच करना ।

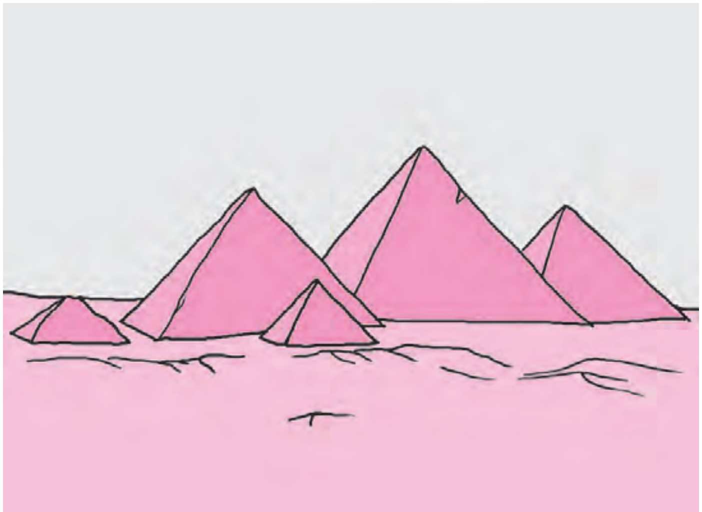
अनुक्रमणिका

	प्रकरण	पृष्ठ
1.	भूमिति के मूलभूत संबोध	1 से 12
2.	समांतर रेखाएँ	13 से 23
3.	त्रिभुज	24 से 50
4.	त्रिभुजों की रचनाएँ	51 से 56
5.	चतुर्भुज	57 से 75
6.	वृत्त	76 से 87
7.	निर्देशांक भूमिति	88 से 99
8.	त्रिकोणमिति	100 से 113
9.	पृष्ठफल तथा घनफल	114 से 123
•	उत्तर सूची	124 से 128

1 भूमिति के मूलभूत संबोध

आओ, सीखें

- बिंदु, रेखा तथा प्रतल
- बिंदु के निर्देशांक तथा दूरी
- मध्यता
- सशर्त कथन
- उपपत्ति



क्या आप इस चित्र को पहचानते हैं? यह इजिप्त के पिरामिड का चित्र है । इ.स.पूर्व 3000 वर्ष में इतना विशाल निर्माण लोगों ने कैसे किया होगा ? वास्तु विज्ञान और भूमिति के क्षेत्र में विकास हुए बिना ऐसी रचना नहीं की जा सकती ।

भूमिति नाम से ही इस विषय का उद्‌गम समझ में आता है । 'भू' अर्थात भूमि तथा मिति अर्थात मापन – इस आधार पर भूमि (जमीन) के मापन की आवश्यकता के कारण इस विषय की निर्मित हुई होगी ।

कई देशों में भूमिति का विकास विविध कालखंडों में विविध निर्माणों के लिए हुआ ऐसा कहा जाता है कि थेल्स नामक आद्‌य ग्रीक गणितज्ञ जब इजिप्त गए तब उन्होंने पिरामिड की छाया का मापन कर एवं समरूप त्रिभुजों के गुणधर्म का उपयोग करके पिरामिड की ऊँचाई निश्चित की थी । ऐसा कहा जाता है कि पाइथागोरस थेल्स का विद्‌यार्थी था ।

प्राचीन भारतीयों को भी भूमिति का समग्र ज्ञान था । वैदिक काल में भारत के लोग यज्ञकुंड का निर्माण करने के लिए भूमितीय गुणधर्मों का उपयोग करते थे । रस्सी की सहायता से मापन कैसे करें तथा विविध आकार कैसे बनाएँगे इनका उल्लेख शुल्वसूत्र में मिलता है । बाद के कालखंड में आर्यभट्ट, वराहमिहीर, ब्रह्मगुप्त भास्कराचार्य आदि गणितज्ञों ने इस विषय में महत्वपूर्ण योगदान दिया है ।

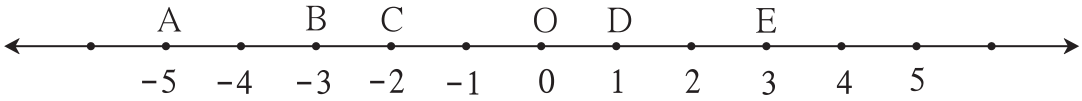
आओ, जानें

भूमिति के मूलभूत संबोध : बिंदु, रेखा तथा प्रतल
(Basic concepts in geometry : point, line and plane)

जिस प्रकार हम संख्या को परिभाषित नहीं कर पाते उसी प्रकार बिंदु, रेखा तथा प्रतल को भी परिभाषित नहीं किया जा सकता । भूमिति में यह मूलभूत संबोध है । रेखा तथा प्रतल बिंदुओं का समुच्चय है । ध्यान रहे, यहाँ रेखा का अर्थ है सरल रेखा ।

बिंदुओं के निर्देशांक तथा दूरी (Co-ordinates of points and distance)

नीचे दी गई संख्या रेखा देखिए ।



आकृति 1.1

आकृति में बिंदु D यह संख्या रेखा पर 1 दर्शाता है अर्थात 1 यह बिंदु D का **निर्देशांक** है । बिंदु B यह संख्या रेखा पर −3 दर्शाता है अतः बिंदु B का निर्देशांक −3 है । इसी प्रकार A का निर्देशांक −5 तथा E का निर्देशांक 3 है ।

बिंदु D से बिंदु E, 2 इकाई की दूरी पर है अर्थात E तथा D के बीच की दूरी 2 इकाई है । यहाँ इकाई गिनकर हम दो बिंदुओं के बीच की दूरी ज्ञात कर सकते हैं ।इस संख्या रेखा परबिंदु A तथा B के बीच दूरी भी 2 इकाई है ।

अब हम देखेंगे कि बिंदुओं के निर्देशांक का उपयोग करके दूरी कैसे ज्ञात करते हैं ।

दो बिंदुओं के बीच की दूरी ज्ञात करना अर्थात दिए गए बिंदुओं के निर्देशांकों में बड़े निर्देशांक में से छोटे निर्देशांक को घटाना ।

बिंदु D का निर्देशांक 1 है, बिंदु E का निर्देशांक 3 है तथा $3 > 1$ हम जानते हैं ।

अतः बिंदु E तथा D के बीच की दूरी $3-1$ अर्थात 2 है ।

बिंदु E तथा D के बीच की दूरी d (E,D) द्वारा दर्शाते हैं । यह दूरी अर्थात l(ED), रेख ED कि लंबाई है ।

$d(E, D) = 3 - 1 = 2$

$\therefore\ l(ED) = 2$

$d(E, D) = l(ED) = 2$

इसी प्रकार $d(D, E) = 2$

$d(C, D) = 1 - (-2)$

$= 1 + 2 = 3$

$\therefore\ d(C, D) = l(CD) = 3$

इसी प्रकार $d(D, C) = 3$

d(A,B) ज्ञात कीजिए । A का निर्देशांक −5 है, B का निर्देशांक −3 है तथा $-3 > -5$

$\therefore\ d(A, B) = -3 - (-5) = -3+5 = 2$

उपर्युक्त सभी उदाहरणों से स्पष्ट है कि दो भिन्न बिंदुओं के बीच की दूरी धनात्मक होती है ।

इसी प्रकार यदि P, Q एक ही बिंदु हों तो $d(P, Q) = 0$ इसे ध्यान में रखें ।

इसे ध्यान में रखें

- दो बिंदुओं के बीच की दूरी दिए गए निर्देशाकों में बड़े निर्देशांक में से छोटा निर्देशांक घटाने पर प्राप्त होती है ।
- किन्हीं दो बिंदुओं के बीच की दूरी ऋणेत्तर वास्तविक संख्या होती है ।

आओ, जानें

मध्यता (Betweenness)

यदि P, Q, R एकरेखीय भिन्न बिंदु हो तो निम्नानुसार तीन संभावनाएँ प्राप्त होती हैं ।

आकृति 1.2

(i) बिंदु Q यह P तथा R के मध्य है ।

(ii) बिंदु R यह P तथा Q के मध्य है ।

(iii) बिंदु P यह R तथा Q के मध्य है ।

यदि d (P, Q) + d (Q, R) = d (P, R) हो तो Q यह बिंदु P तथा R के मध्य है ऐसा कहा जाता है । इस मध्यता को P – Q – R द्‌वारा दर्शाया जाता है।

उदा. (1) किसी संख्या रेखा पर A, B तथा C बिंदु इस प्रकार हैं कि d (A, B) = 5, d (B,C) = 11 तथा d (A, C) = 6 तो इनमें से कौन-सा बिंदु अन्य दो बिंदुओं के मध्य में होगा ?

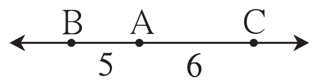
हल : यहाँ A, B तथा C इनमें से कौन-सा बिंदु अन्य दो बिंदुओं के मध्य में है यह निम्नलिखित प्रकार से निश्चित कर सकते हैं ।

d(B,C) = 11 . . . . (I)

d(A,B) + d(A,C)= 5+6 = 11 . . . . (II)

$\therefore$ d (B, C) = d (A, B) + d (A, C) . . . . (I) तथा (II) से

अर्थात बिंदु A यह बिंदु B तथा बिंदु C के मध्य में है ।



आकृति 1.3

उदा. (2) किसी रास्ते पर सरल रेखा में U, V तथा A शहर हैं । U तथा A के बीच की दूरी 215 किमी, V तथा A के बीच की दूरी 140 किमी तथा U तथा V के बीच की दूरी 75 किमी है । ज्ञात कीजिए कि कौन-सा शहर किन दो शहरों के मध्य स्थित है ?

हल : d (U,A) = 215; d (V,A) = 140; d (U,V) = 75

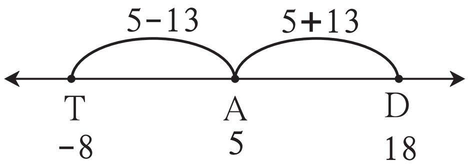
d (U,V) + d (V,A) = 75 + 140 = 215; d (U,A) = 215

$$\therefore d\,(U,A) = d\,(U,V) + d\,(V,A)$$

$\therefore$ शहर V यह शहर U तथा A शहरों के मध्य स्थित है ।

उदा. (3) किसी संख्यारेखा पर A बिंदु का निर्देशांक 5 है । उसी रेखा पर A से 13 इकाई की दूरी पर स्थित बिंदुओं के निर्देशांक ज्ञात कीजिए ।

हल : संख्या रेखा पर A से 13 इकाई की दूरी पर आकृति में दर्शाए अनुसार A के बाईं ओर T तथा दाईं ओर D ऐसे दो बिंदु लीजिए।



आकृति 1.4

बिंदु A के बाईं ओर स्थित बिंदु T का निर्देशांक $5 - 13 = -8$ होगा ।

बिंदु A के दाईं ओर स्थित बिंदु D का निर्देशांक $5 + 13 = 18$ होगा ।

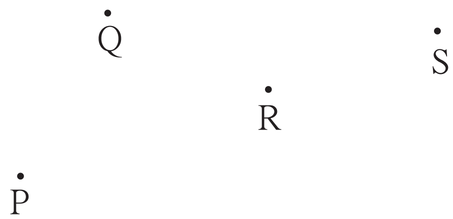
$\therefore$ बिंदु A से 13 इकाई की दूरी पर स्थित बिंदुओं के निर्देशांक -8 तथा 18 हैं।

जाँच कीजिए : $d(A,D) = d(A,T) = 13$

कृति :

(1) दी गई आकृति में A, B, C बिंदु एकरेखीय बिंदु है क्या ? धागे की सहायता से धागा खींचकर जाँच कीजिए । यदि बिंदु एक रेखा में हों तो बताइए कौन-सा बिंदु, अन्य दो बिंदुओं के मध्य में है ?

(2) दिए गए चार बिंदुओं P, Q, R, S में से कौन-से तीन बिंदु एकरेखीय हैं और कौन-से तीन बिंदु अरेखीय हैं । जाँच कीजिए । एकरेखीय तीन बिंदुओं के बीच की मध्यता लिखिए ।

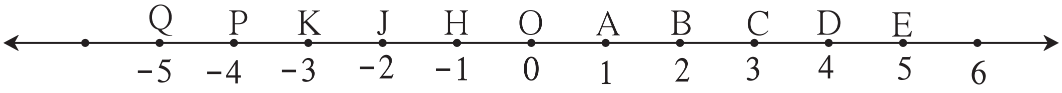


(3) व्यायाम के लिए विद्यार्थियों को सीधी कतार में खड़े रहने के लिए कहा गया है । प्रत्येक कतार के विद्यार्थी सरल रेखा में हैं इसकी जाँच कैसे करेंगे ?

(4) प्रकाश की किरण एक सरल रेखा में जाती हैं इसकी जाँच आपने कैसे की? पूर्व कक्षाओं में किया गया विज्ञान का प्रयोग याद कीजिए ।

प्रश्नसंग्रह 1.1

1. नीचे दी गई संख्या रेखा के आधार पर दूरियाँ ज्ञात कीजिए ।



आकृति 1.5

(i) d(B,E) (ii) d(J, A) (iii) d(P, C) (iv) d(J, H)

(v) d(K, O) (vi) d(O, E) (vii) d(P, J) (viii) d(Q, B)

2. बिंदु A का निर्देशांक x तथा बिंदु B का निर्देशांक y है तो निम्नलिखित प्रश्नों में d(A, B) ज्ञात कीजिए ।

(i) $x = 1, y = 7$ (ii) $x = 6, y = -2$ (iii) $x = -3, y = 7$

(iv) $x = -4, y = -5$ (v) $x = -3, y = -6$ (vi) $x = 4, y = -8$

3. नीचे दी गई जानकारी के आधार पर बताइए कौन-सा बिंदु अन्य दो बिंदुओं के मध्य है । यदि बिंदु एकरेखीय न हो तो वैसा लिखिए ।

(i) d(P, R) = 7, d(P, Q) = 10, d(Q, R) = 3

(ii) d(R, S) = 8, d(S, T) = 6, d(R, T) = 4

(iii) d(A, B) = 16, d(C, A) = 9, d(B, C) = 7

(iv) d(L, M) = 11, d(M, N) = 12, d(N, L) = 8

(v) d(X, Y) = 15, d(Y, Z) = 7, d(X, Z) = 8

(vi) d(D, E) = 5, d(E, F) = 8, d(D, F) = 6

4. संख्या रेखा पर A, B, C बिंदु ऐसे है कि d(A,C) = 10, d(C,B) = 8 तो d(A, B) ज्ञात कीजिए । सभी विकल्पों पर विचार कीजिए ।

5. X, Y, Z एकरेखीय बिंदु है, d(X,Y) = 17, d(Y,Z) = 8 तो d(X,Z) ज्ञात कीजिए ।

6. आकृति बनाकर प्रश्नों के उत्तर लिखिए ।

(i) यदि A-B-C तथा l(AC) = 11, l(BC) = 6.5, तो l(AB) = ?

(ii) यदि R-S-T तथा l(ST) = 3.7, l(RS) = 2.5, तो l(RT) = ?

(iii) यदि X-Y-Z तथा l(XZ) = $3\sqrt{7}$, l(XY) = $\sqrt{7}$, तो l(YZ) = ?

7. तीन अरेखीय बिंदुओं से कौन-सी आकृति बनती है ?

आओ, जानें

नौवीं कक्षा के गणित भाग I के समुच्चय इस प्रकरण में हमने संघ समुच्चय तथा प्रतिच्छेदन समुच्चय का अध्ययन किया है । इनका उपयोग करके रेखाखंड, किरण तथा रेखा का वर्णन, बिंदु सम्मुच्चय के रूप में करेंगे ।

(1) **रेखाखंड (Line segment) :**

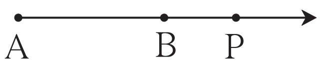
बिंदु A, बिंदु B तथा इन दो बिंदुओं के मध्य स्थित समस्त बिंदुओं का संघ समुच्चय ही रेखाखंड AB होता है ।
रेखाखंड AB को संक्षेप में रेख AB भी लिखते हैं ।
रेख AB अर्थात रेख BA ।

आकृति 1.6

बिंदु A तथा बिंदु B रेख AB के अंतःबिंदु हैं । रेखाखंड के अंतःबिंदुओं के बीच की दूरी को रेखाखंड की लंबाई कहते हैं । l(AB) = d (A,B) l(AB) = 5 इसे AB = 5 ऐसा भी लिखते हैं ।

(2) **किरण AB (Ray AB) :**

माना A तथा B दो भिन्न बिंदु हैं । रेख AB पर के सभी बिंदु तथा A – B– P ऐसे समस्त बिंदु P का संघ समुच्चय ही किरण AB है । यहाँ बिंदु A को किरण का आरंभ बिंदु कहते हैं ।



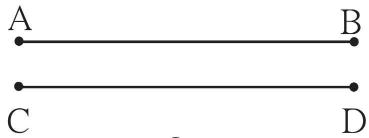
आकृति 1.7

(3) **रेखा AB (Line AB) :**

किरण AB का बिंदु समुच्चय तथा उसकी विपरीत किरण का बिंदु समुच्चय मिलकर जो संघ समुच्चय बनता है । वही रेखा AB का बिंदु समुच्चय है ।
रेख AB का बिंदु समुच्चय, रेखा AB के बिंदु समुच्चय का उप समुच्चय है ।

(4) **सर्वांगसम रेखाखंड (Congruent segments) :**

यदि दिए गए दो रेखाखंडों की लंबाई समान हो तो वे रेखाखंड सर्वांगसम होते हैं ।
यदि l(AB) = l(CD) तो रेख AB ≅ रेख CD



आकृति 1.8

(5) **रेखाखंडों की सर्वांगसमता के गुणधर्म (Properties of congruent segements) :**

(i) परावर्तकता (Reflexivity) रेख AB ≅ रेख AB

(ii) सममिति (Symmetry) यदि रेख AB ≅ रेख CD तो रेख CD ≅ रेख AB

(iii) संक्रमकता (Transitivity यदि रेख AB ≅ रेख CD तथा रेख CD ≅ रेख EF तो रेख AB ≅ रेख EF

(6) **रेखाखंड का मध्यबिंदु (Midpoint of a segment) :**

यदि A–M–B तथा रेख AM ≅ रेख MB, तो बिंदु M को रेख AB का मध्यबिंदु कहते हैं । प्रत्येक रेखाखंड का केवल एक ही मध्यबिंदु होता है ।

आकृति 1.9

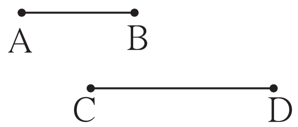
(7) **रेखाखंडों की तुलना (Comparison of segments) :**

रेख AB की लंबाई रेख CD से कम हो अर्थात

यदि l(AB) < l(CD) हो तो रेख AB < रेख CD

या रेख CD > रेख AB ऐसा लिखते हैं ।

रेखाखंडों का क्रमसंबंध उनकी लंबाई पर आधारित होता है ।



आकृति 1.10

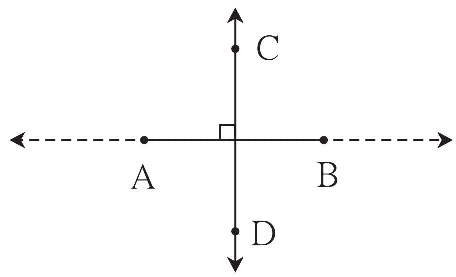
(8) **रेखाखंडों की या किरणों की लंबता**

(Perpendicularity of segments or rays) :

दो रेखाखंड, दो किरण या एक किरण तथा एक रेखाखंड को समाविष्ट करने वाली रेखा परस्पर लंब हो तो हम कह सकते हैं कि दोनों रेखाखंड, वे दो किरण अथवा एक किरण और एक रेखाखंड परस्पर लंब हैं ।

आकृति 1.11 में रेख AB ⊥ रेखा CD,

रेख AB ⊥ किरण CD ।



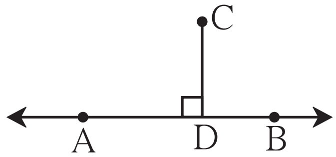
आकृति 1.11

(9) **बिंदु की रेखा से दूरी (Distance of a point from a line) :**

यदि रेख CD ⊥ रेखा AB तथा बिंदु D यह रेखा AB पर हो तो रेख CD की लंबाई बिंदु C की रेखा AB से दूरी कहलाती हैं ।

बिंदु D को लंब CD का **लंबपाद** कहते हैं ।

यदि l(CD) = a, तो बिंदु C रेखा AB से a दूरी पर हैं । ऐसा कहते हैं ।



आकृति 1.12

प्रश्नसंग्रह 1.2

1. नीचे दी गई सारिणी में संख्यारेखा पर स्थित बिंदुओं के निर्देशांक दिए गए हैं । सारिणी के आधार पर बताइए कि दिए गए रेखाखंड सर्वांगसम है या नहीं ?

बिंदु	A	B	C	D	E
निर्देशांक	–3	5	2	–7	9

(i) रेख DE तथा रेख AB (ii) रेख BC तथा रेख AD (iii) रेख BE तथा रेख AD

2. बिंदु M यह रेख AB का मध्यबिंदु है तथा AB = 8 तो AM = कितना ?

3. बिंदु P यह रेख CD का मध्यबिंदु है तथा CP = 2.5 तो रेख CD की लंबाई ज्ञात कीजिए ।

4. यदि AB = 5 सेमी, BP = 2 सेमी तथा AP = 3.4 सेमी तो रेखाखंडों में क्रमसंबंध निश्चित कीजिए ।

5. आकृति 1.13 के आधार पर निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर लिखिए ।

आकृति 1.13

(i) किरण RP के विपरीत किरण का नाम लिखिए ।

(ii) किरण PQ तथा किरण RP का प्रतिच्छेदन समुच्चय लिखिए ।

(iii) रेख PQ तथा रेख QR का संघ समुच्चय लिखिए ।

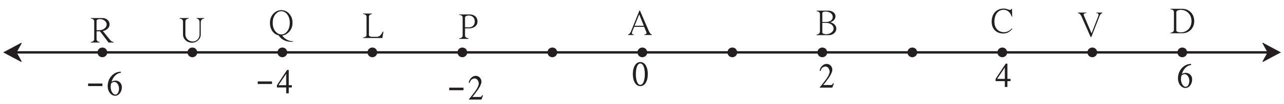
(iv) रेख QR यह कौन-कौन-से किरणों का उपसमुच्चय है ?

(v) R आरंभबिंदुवाली विपरीत किरणों की जोड़ी लिखिए ।

(vi) S आरंभबिंदुवाले किन्हीं दो किरणों के नाम लिखिए ।

(vii) किरण SP तथा किरण ST का प्रतिच्छेदन समुच्चय लिखिए ।

6. नीचे दी गई आकृति 1.14 के आधार पर प्रश्नों के उत्तर लिखिए ।



आकृति 1.14

(i) बिंदु B से समदूरस्थ बिंदु कौन-से हैं ?

(ii) बिंदु Q से समदूरस्थ बिंदुओं की एक जोड़ी लिखिए ।

(iii) d (U,V), d (P,C), d (V,B), d (U, L) ज्ञात कीजिए ।

आओ, जानें

सशर्त कथन और विलोम (Conditional statements and converse)

जो कथन यदि-तो के रूप में लिखे जाते हैं उन्हें सशर्त कथन कहते हैं । सशर्त कथनों में 'यदि' से आरंभ होने वाले कथन को 'पूर्वार्ध' और 'तो' से आरंभ होने वाले कथन को 'उत्तरार्ध' कहते हैं ।

उदाहरणार्थ : समचर्तुभुज के विकर्ण परस्पर लंबसमद्विभाजक होते हैं ।

सशर्त कथन : यदि दिया गया चतुर्भुज समचर्तुभुज हो तो उसके विकर्ण परस्पर लंबसमद्विभाजक होते हैं ।

विलोम (Converse) : दिए गए सशर्त कथन के पूर्वार्ध और उत्तरार्ध की अदला-बदली करने पर प्राप्त कथन को मूल कथन का **विलोम** (Converse) कहते हैं ।

दिया गया सशर्त कथन सत्य हो तो उसका विलोम भी सत्य होगा यह जरूरी नहीं है । नीचे दिए गए उदाहरण देखिए ।

सशर्त कथन : यदि कोई चतुर्भुज समचर्तुभुज हो तो उसके विकर्ण परस्पर लंबसमद्‌विभाजक होते हैं ।

विलोम : यदि किसी चतुर्भुज के विकर्ण परस्पर लंबसमद्‌विभाजक हो तो वह चतुर्भुज समचर्तुभुज होता है । उपर्युक्त उदाहरण में मूल कथन तथा उसका विलोम दोनों भी सत्य है ।

सशर्त कथन : यदि कोई संख्या अभाज्य संख्या हो तो वह संख्या सम या विषम होती है ।

विलोम : यदि कोई संख्या सम या विषम हो तो वह संख्या अभाज्य संख्या होती है ।

इस उदाहरण में दिया गया मूल कथन सत्य है परंतु विलोम असत्य है ।

आओ, जानें

उपपत्ति (Proofs)

हमने कोण, त्रिभुज, चतुर्भुज इन आकृतियों के गुणधर्मों का अध्ययन किया है । यह गुणधर्म हमने प्रात्यक्षिक पद्‌धति से सीखे हैं । इस कक्षा में हम भूमिति विषय को अलग दृष्टिकोण से देखने वाले हैं । इसका श्रेय ईसापूर्व तीसरी शताब्दी में हुए ग्रीक गणितज्ञ युक्लिड को जाता है । उस कालखंड में भूमिति संबंधी जो जानकारी उपलब्ध थी उसका उन्होंने सुसंगत संकलन किया और उसमें सुसूत्रता लाई । उन्होंने प्रमुखता से ऐसा दर्शाया कि यदि कुछ स्वयंसिद्‌ध तथा सर्वमान्य कथनों को **अभिगृहीत** (Postulates) के रूप में स्वीकार किया जाए तो उसके आधार पर तर्कशुद्‌ध रचना द्‌वारा नवीन गुणधर्म सिद्‌ध किए जा सकते हैं । सिद्‌ध किए गए गुणधर्मों को **प्रमेय** (Theorems) कहते हैं ।

युक्लिड द्‌वारा बताए गए अभिगृहीत में से कुछ अभिगृहीत निम्नलिखित प्रकार से हैं ।

(1) एक बिंदु से होकर असंख्य रेखाएँ जाती हैं ।

(2) दो भिन्न बिंदुओं से एक और केवल एक रेखा जाती है ।

(3) किसी भी बिंदु को केंद्र मानकर दी गई त्रिज्या का वृत्त बनाया जा सकता है ।

(4) सभी समकोण परस्पर सर्वांगसम होते हैं ।

(5) दो रेखा तथा उनकी तिर्यक रेखा खींचने पर, तिर्यक रेखा के एक ही ओर बनने वाले अंतः कोणों का योग, दो समकोणों से कम हो तो वे रेखाएँ उसी दिशा में आगे बढ़ाने पर परस्पर प्रतिच्छेदित करती हैं ।

युक्लिड

उपर्युक्त में से कुछ अभिगृहीतों की हमने कृति द्‌वारा जाँच की हैं ।

कोई गुणधर्म यदि तर्कसंगत रूप से सिद्‌ध होता है तो वह गुणधर्म सत्य माना जाता है । इसके लिए किए गए तर्कसंगत विन्यास को उस गुणधर्म की अर्थात प्रमेय की **उपपत्ति** (Proof)कहते हैं ।

कोई सशर्त कथन सत्य है ऐसा सिद्‌ध करना हो तो कथन के पूर्वार्ध को **दत्त** तथा उत्तरार्ध को **साध्य** कहते हैं ।

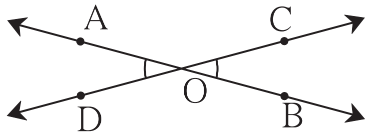
उपपत्ति के **प्रत्यक्ष** तथा **अप्रत्यक्ष** ऐसे दो प्रकार होते हैं ।

एक-दूसरे को प्रतिच्छेदित करने वाली दो रेखाओं द्‌वारा बनने वाले कोणों के गुणधर्म की प्रत्यक्ष उपपत्ति दी गई है ।

प्रमेय : परस्पर प्रतिच्छेदित करने वाली दो रेखाओं द्‌वारा निर्मित शीर्षाभिमुख कोणों के माप समान होते हैं ।

दत्त : रेखा AB तथा रेखा CD परस्पर बिंदु O पर प्रतिच्छेदित करती है । A – O – B, C – O – D

साध्य : (i) $\angle AOC = \angle BOD$
(ii) $\angle BOC = \angle AOD$



आकृति 1.15

उपपत्ति : $\angle AOC + \angle BOC = 180^\circ$ . . . . (I) रैखिक युगल कोण
$\angle BOC + \angle BOD = 180^\circ$ . . . . (II) रैखिक युगल कोण
$\angle AOC + \angle BOC = \angle BOC + \angle BOD$ . . . . कथन (I) एवं (II) से
$\therefore \angle AOC = \angle BOD$. . . . . . . $\angle BOC$ को दोनों पक्षों से घटाने पर
इसी प्रकार $\angle BOC = \angle AOD$ सिद्‌ध कर सकते हैं ।

अप्रत्यक्ष उपपत्ति (Indirect proof) :

इस पद्‌धति में शुरू में साध्य असत्य है ऐसा मानकर चलते हैं । केवल तर्क तथा पहले मान्य सत्य के आधार पर क्रमानुसार एक निष्कर्ष तक पहुँचते हैं । यह निष्कर्ष पता होने पर सत्य गुणधर्म से या दत्त से असंगत होता है । इसलिए साध्य को असत्य मानना गलत है ऐसा निष्कर्ष निकलता है अर्थात साध्य सत्य है ऐसा स्वीकार किया जाता है । निम्नलिखित उदाहरण का अध्ययन कीजिए ।

कथन : दो से बड़ी अभाज्य संख्या विषम होती है ।

सशर्त कथन : यदि p यह 2 से बड़ी अभाज्य संख्या है तो p यह विषम संख्या है ।

दत्त : p यह 2 से बड़ी अभाज्य संख्या है अर्थात p का 1 तथा p ऐसे दो विभाजक हैं ।

साध्य : p एक विषम संख्या है ।

उपपत्ति : माना p विषम संख्या नहीं है ।
अर्थात p सम संख्या है ।
$\therefore$ 2 यह p का विभाजक है । ..... (I)
परंतु p से 2 से बड़ी अभाज्य संख्या है । ....(दत्त)
$\therefore$ p के 1 तथा p ऐसे दो ही विभाजक हैं । ..... (II)
कथन (I) तथा (II) दत्त से असंगत है ।
अतः माना गया कथन गलत है ।
अर्थात, p यह 2 से बड़ी अभाज्य संख्या हो तो वह संख्या विषम है यह सिद्‌ध हुआ ।

प्रश्नसंग्रह 1.3

1. निम्नलिखित कथनों को यदि-तो के रूप में लिखिए ।
   (i) समांतर चतुर्भुज के सम्मुख कोण सर्वांगसम होते हैं ।
   (ii) आयत के विकर्ण सर्वांगसम होते हैं ।
   (iii) समद्विबाहु त्रिभुज मे शीर्षबिंदु तथा आधार के मध्यबिंदु को जोड़ने वाला रेखाखंड आधार पर लंब होता है ।
2. नीचे दिए गए कथनों के विलोम लिखिए ।
   (i) दो समांतर रेखाएँ तथा उनकी तिर्यक रेखा दी गई हो तो एकांतर कोण सर्वांगसम होते हैं ।
   (ii) दो रेखाओं को एक तिर्यक रेखा द्वारा प्रतिच्छेदित करने पर बनने वाले अंतः कोणों की एक जोड़ी संपूरक हो तो वे रेखाएँ परस्पर समांतर होती हैं ।
   (iii) आयत के विकर्ण सर्वांगसम होते हैं ।

प्रकीर्ण प्रश्नसंग्रह 1

1. निम्नलिखित वैकल्पिक प्रश्नों के लिए दिए गए उत्तरों में से योग्य विकल्प चुनकर लिखिए ।
   (i) प्रत्येक रेखाखंड के कितने मध्यबिंदु होते हैं ?
   (A) केवल एक (B) दो (C) तीन (D) अनेक
   (ii) दो भिन्न रेखाएँ परस्पर प्रतिच्छेदित करती हो तो उनके प्रतिच्छेदन समुच्चय में कितने बिंदु होते हैं ?
   (A) अनंत (B) दो (C) केवल एक (D) एक भी नहीं
   (iii) तीन भिन्न बिंदुओं को समाविष्ट करने वाली कितनी रेखाएँ होती हैं ?
   (A) दो (B) तीन (C) एक या तीन (D) छह
   (iv) बिंदु A का निर्देशांक −2 तथा B का निर्देशांक 5 हो तो d(A,B) = कितना ?
   (A) −2 (B) 5 (C) 7 (D) 3
   (v) यदि P-Q-R तथा d(P,Q) = 2, d(P,R) = 10, तो d(Q,R) = कितना ?
   (A) 12 (B) 8 (C) $\sqrt{96}$ (D) 20
2. संख्यारेखा पर बिंदु P,Q,R के निर्देशांक क्रमशः 3, −5 तथा 6 है तो निम्नलिखित कथन सत्य है अथवा असत्य लिखिए ।
   (i) $d(P,Q) + d(Q,R) = d(P,R)$ (ii) $d(P,R) + d(R,Q) = d(P,Q)$
   (iii) $d(R,P) + d(P,Q) = d(R,Q)$ (iv) $d(P,Q) - d(P,R) = d(Q,R)$
3. नीचे कुछ बिंदुओं की जोड़ियों के निर्देशांक दिए गए हैं । इसके आधार पर प्रत्येक जोड़ी की दूरी ज्ञात कीजिए ।
   (i) 3, 6 (ii) −9, −1 (iii) −4, 5 (iv) x, −2
   (v) $x + 3$, $x - 3$ (vi) −25, −47 (vii) 80, −85

4. संख्या रेखा पर बिंदु P का निर्देशांक -7 है तो P से 8 इकाई की दूरी पर स्थित बिंदुओं के निर्देशांक लिखिए ।

5. दी गई जानकारी के आधार पर नीचे दिए गए प्रश्नों के उत्तर लिखिए ।

(i) यदि A-B-C तथा $d(A,C) = 17$, $d(B,C) = 6.5$ तो $d(A,B) = ?$

(ii) यदि P-Q-R तथा $d(P,Q) = 3.4$, $d(Q,R) = 5.7$ तो $d(P,R) = ?$

6. संख्या रेखा पर बिंदु A का निर्देशांक 1 है । A से 7 इकाई की दूरी पर स्थित बिंदुओं के निर्देशांक लिखिए ।

7. निम्नलिखित कथन सशर्त रूप में लिखिए ।

(i) प्रत्येक समचर्तुभुज यह वर्ग होता है ।

(ii) रैखिक युगल कोण परस्पर संपूरक होते हैं ।

(iii) त्रिभुज यह तीन रेखाखंडों द्‌वारा निर्मित आकृति होती है ।

(iv) केवल दो ही विभाजक हो ऐसी संख्या को अभाज्य संख्या कहते हैं ।

8. निम्नलिखित कथनों के विलोम लिखिए ।

(i) किसी बहुभुजाकृति के कोणों के मापों का योग 180^0 हो तो वह आकृति त्रिभुज की होती है ।

(ii) दो कोणों के मापों का योग 90^0 हो तो वे परस्पर कोटिपूरक कोण होते हैं ।

(iii) दो समांतर रेखाओं को एक तिर्यक रेखा प्रतिच्छेदित करें तो बनने वाले संगत कोण सर्वांगसम होते हैं ।

(iv) किसी संख्या में उसके अंकों के योगफल से भाग जाता हो तो वह संख्या 3 से विभाज्य होती है ।

9. निम्नलिखित कथनों मे दत्त तथा साध्य लिखिए ।

(i) यदि त्रिभुज की तीनों भुजाएँ सर्वांगसम हों तो उस त्रिभुज के तीनों कोण सर्वांगसम होते हैं ।

(ii) समांतर चतुर्भुज के विकर्ण परस्पर समद्‌विभाजित होते हैं ।

10*. निम्नलिखित कथनों के लिए नाम निर्देशित आकृति बनाकर दत्त तथा साध्य लिखिए ।

(i) दो समबाहु त्रिभुज समरूप होते हैं ।

(ii) यदि रैखिक युगल कोण सर्वांगसम हों तो उनमें से प्रत्येक कोण समकोण होता हैं ।

(iii) त्रिभुज की दो भुजाओं पर खींचे गए शीर्षलंब यदि सर्वांगसम हों तो वे दोनों भुजाएँ सर्वांगसम होती हैं ।

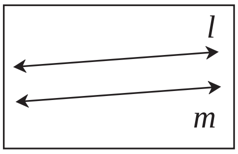
2 समांतर रेखाएँ

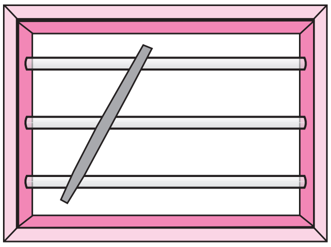
आओ, सीखें

- समांतर रेखा तथा तिर्यक रेखा द्वारा निर्मित कोणों के गुणधर्म
- समांतर रेखाओं की कसौटियाँ
- समांतर रेखाओं के गुणधर्मों का उपयोग

थोड़ा याद करें

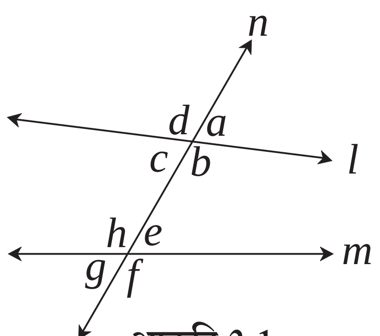
समांतर रेखा : एक ही प्रतल में स्थित परंतु परस्पर प्रतिच्छेदित न करने वाली रेखाओं को समांतर रेखाएँ कहते हैं ।





साथ में दी गई आकृति के अनुसार खिड़की के क्षैतिज समांतर दंडों पर एक लकड़ी तिरछी पकड़ कर देखिए कितने कोण बनते हैं ?

- दो रेखा तथा उनकी तिर्यक रेखा द्वारा निर्मित कोणों की जोड़ियाँ ध्यान में आती हैं क्या ?
  आकृति 2.1 में रेखा l तथा रेखा m की रेखा n तिर्यक रेखा है । यहाँ कुल आठ कोण निर्मित होते हैं । उनकी जोड़ियाँ निम्नलिखित हैं ।



आकृति 2.1

संगत कोणों की जोड़ियाँ

(i) $\angle d$, $\angle h$

(ii) $\angle a$, ☐

(iii) $\angle c$, ☐

(iv) $\angle b$, ☐

एकांतर कोणों की जोड़ियाँ

(i) $\angle c$, $\angle e$

(ii) $\angle b$, $\angle h$

बाह्य एकांतर कोणों की जोड़ियाँ

(i) $\angle d$, $\angle f$

(ii) $\angle a$, $\angle g$

तिर्यक रेखा के एक ही ओर बनने वाली अंत:कोणों की जोड़ियाँ

(i) $\angle c$, $\angle h$

(ii) $\angle b$, $\angle e$

कुछ महत्त्वपूर्ण गुणधर्म :

(1) परस्पर प्रतिच्छेदित करने वाली दो रेखाओं द्वारा निर्मित शीर्षाभिमुख कोण सर्वांगसम होते हैं ।

(2) रैखिक युगल कोण परस्पर संपूरक कोण होते हैं ।

(3) यदि संगत कोणों की एक जोड़ी सर्वांगसम होती है तो संगत कोणों की अन्य जोड़ियाँ भी सर्वांगसम होती हैं ।

(4) यदि एकांतर कोणों की एक जोड़ी सर्वांगसम होती है तो एकांतर कोणों की अन्य जोड़ियाँ भी सर्वांगसम होती हैं ।

(5) यदि तिर्यक रेखा के एक ही ओर निर्मित अंतःकोणों का योगफल 180° होता है तो अंतःकोणों की अन्य जोड़ियों के मापों का योगफल भी 180° होता है ।

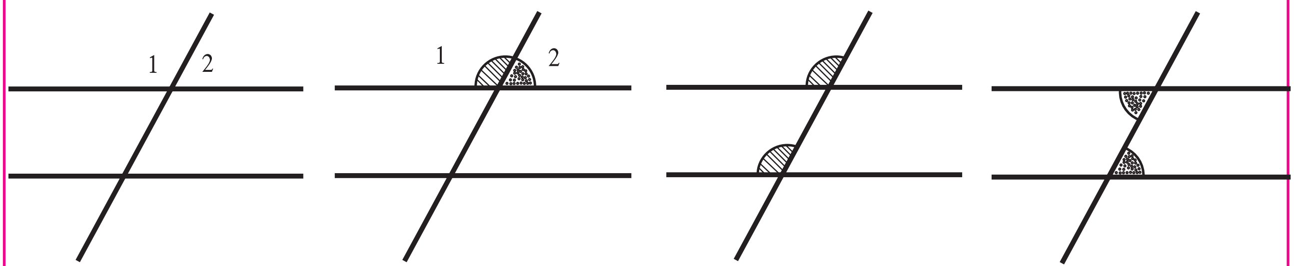
आओ, जानें

समांतर रेखाओं के गुणधर्म (Properties of parallel lines)

कृति :

दो समांतर रेखाएँ तथा उनकी तिर्यक रेखा द्‌वारा बनने वाले कोणों के गुणधर्मों की जाँच ।

मोटे रंगीन कागज का एक टुकड़ा लीजिए । उसपर दो समांतर रेखाएँ तथा उनकी एक तिर्यक रेखा खींचिए । इन तीनों रेखाओं पर साधी लकड़ी के टुकड़े गोंद से चिपकाएँ । यहाँ बनने वाले 8 कोणों में से कोण 1 तथा कोण 2 के कोणों के माप के बराबर रंगीन पत्रिका के टुकड़े काटें (साथ की आकृति में दर्शाएनुसार) वे टुकड़े संबंधित संगत कोण, एकांतर कोण एवं अंतःकोणों पर रखकर गुणधर्मों की जाँच कीजिए ।



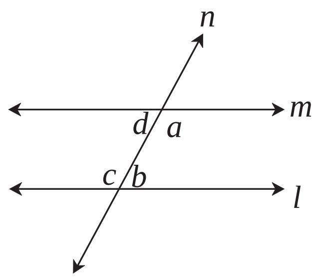
दो समांतर रेखा और उनकी तिर्यक रेखा द्‌वारा निर्मित कोणों के गुणधर्मों की कृति द्‌वारा जाँचकर की । इन गुणधर्मों को सिद्‌ध करने के लिए हम युक्लिड के निम्न अभिगृहीत का उपयोग करने वाले हैं ।

युक्लिड का अभिगृहीत (Eclid's Popstutate) : दो रेखाएँ और उनकी तिर्यक रेखा द्‌वारा एक ही ओर बने अंतःकोणों के मापों का योग दो समकोणों से कम हो तो उन सरल रेखाओं को उस दिशा में आगे बढ़ाने पर परस्पर प्रतिच्छेदित करती हैं ।

अंतःकोणों का प्रमेय (Interior angle theorem)

प्रमेय : दो समांतर रेखाओं को किसी तिर्यक रेखा द्‌वारा प्रतिच्छेदित करने पर तिर्यक रेखा के एक ही ओर स्थित अंतःकोण परस्पर संपूरक होते हैं ।

दत्त : रेखा $l \parallel$ रेखा m तथा रेखा n तिर्यक रेखा है ।
आकृति में दर्शाएनुसार $\angle a$, $\angle \text{b}$
तथा $\angle \text{c}$, $\angle \text{d}$ अंतःकोण हैं ।



आकृति 2.2

साध्य : $\angle a + \angle \text{b} = 180^\circ$
$\angle \text{d} + \angle \text{c} = 180^\circ$

उपपत्ति : $\angle a$ तथा $\angle \text{b}$ के मापों के योग के संबंध में तीन संभावनाएँ हैं ।

(i) $\angle a + \angle \text{b} < 180^\circ$ (ii) $\angle a + \angle \text{b} > 180^\circ$ (iii) $\angle a + \angle \text{b} = 180^\circ$

इसमें से माना (i) $\angle a + \angle \text{b} < 180^\circ$ यह सत्य है ।

तिर्यक रेखा m के जिस ओर $\angle a$ तथा $\angle \text{b}$ स्थित है उसी दिशा में आगे बढ़ाने पर रेखा l तथा रेखा m को वे परस्पर प्रतिच्छेदित करेगी............(युक्लिड के अभिगृहीत द्‌वारा)

परंतु रेखा l तथा रेखा m परस्पर समांतर रेखा है । ....(दत्त)

$\therefore \angle a + \angle \text{b} < 180^\circ$ यह असंभव है । ....(I)

अब माना $\angle a + \angle \text{b} > 180^\circ$ यह संभव है ।

$\therefore \angle a + \angle \text{b} > 180^\circ$

परंतु $\angle a + \angle \text{d} = 180^\circ$

तथा $\angle \text{c} + \angle \text{b} = 180^\circ$ . . . . . (रैखिक युगल कोण)

$\therefore \angle a + \angle \text{d} + \angle \text{b} + \angle \text{c} = 180^\circ + 180^\circ = 360^\circ$

$\therefore \angle \text{c} + \angle \text{d} = 360^\circ - (\angle a + \angle \text{b})$

यदि $\angle a + \angle \text{b} > 180^\circ$ हो तो $[360^\circ - (\angle a + \angle \text{b})] < 180^\circ$

$\therefore \angle \text{c} + \angle \text{d} < 180^\circ$

$\therefore$ ऐसा हो तो $\angle c$ तथा $\angle d$ तिर्यक रेखा के जिस ओर है उसी दिशा में
रेखा l तथा रेखा m आगे बढ़ाने पर परस्पर प्रतिच्छेदित करेंगी ।

$\therefore \angle c + \angle d < 180^\circ$ यह संभव नहीं है ।

अर्थात $\angle a + \angle b > 180^\circ$ यह भी संभव नहीं है । ...... (II)

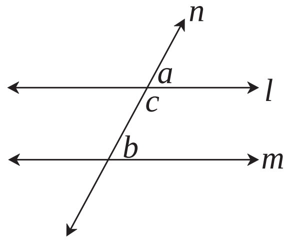
$\therefore \angle a + \angle b = 180^\circ$ यही एक संभावना शेष रहती है । ......(I) तथा (II) से

$\therefore \angle a + \angle b = 180^\circ$ इसी प्रकार $\angle c + \angle d = 180^\circ$

ध्यान रहे कि इस उपपत्ति में हमने $\angle a + \angle b > 180^\circ$, $\angle a + \angle b < 180^\circ$ इन दोनों संभावनाओं की विसंगति के कारण अस्वीकार किया है अर्थात यह एक अप्रत्यक्ष उपपत्ति है ।

संगत तथा एकांतर कोणों के गुणधर्म (Corresponding angle and alternate angle theorem)

प्रमेय : दो समांतर रेखाओं को किसी तिर्यक रेखा द्‌वारा प्रतिच्छेदित करने पर निर्मित संगत कोणों के माप समान होते हैं ।



आकृति 2.3

दत्त : रेखा $l \parallel$ रेखा m
रेखा n तिर्यक रेखा है ।

साध्य : $\angle a = \angle b$

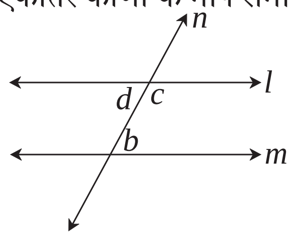
उपपत्ति : $\angle a + \angle c = 180^\circ$ . . . . . . (I) रैखिक युगल कोण

$\angle b + \angle c = 180^\circ$ . . . . . . (II) समांतर रेखाओं के अंतःकोणों के गुणधर्म

$\angle a + \angle c = \angle b + \angle c$ . . . कथन (I) तथा (II) से

$\therefore \angle a = \angle b$

प्रमेय : दो समांतर रेखाओं को किसी तिर्यक रेखा द्‌वारा प्रतिच्छेदित करने पर निर्मित एकांतर कोणों के माप समान होते हैं ।



आकृति 2.4

दत्त : रेखा $l \parallel$ रेखा m
रेखा n तिर्यक रेखा है ।

साध्य : $\angle d = \angle b$

उपपत्ति : $\angle d + \angle c = 180^\circ$ . . . . (I) रैखिक युगल कोण

$\angle c + \angle b = 180^\circ$ . . . . (II) समांतर रेखाओं के अंतःकोणों के गुणधर्म

$\angle d + \angle c = \angle c + \angle b$ . . . . कथन (I) तथा (II) से

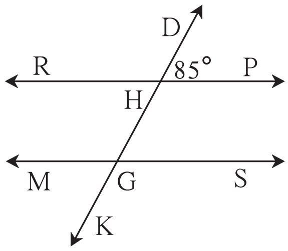
$\therefore \angle d = \angle b$

प्रश्नसंग्रह 2.1

1. आकृति 2.5 में रेखा RP || रेखा MS तथा रेखा DK उनकी तिर्यक रेखा है । $\angle DHP = 85°$ तो निम्नलिखित कोणों के माप ज्ञात कीजिए ।

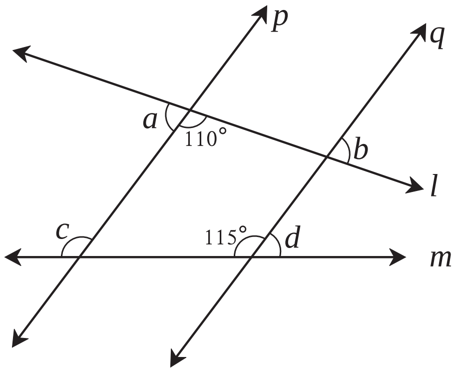
(i) $\angle RHD$ (ii) $\angle PHG$

(iii) $\angle HGS$ (iv) $\angle MGK$

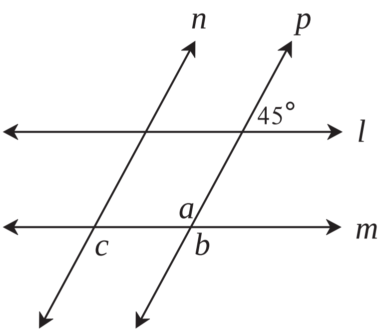


आकृति 2.5

2. आकृति 2.6 देखिए । रेखा p || रेखा q तथा रेखा l तथा रेखा m उनकी तिर्यक रेखाएँ हैं । कुछ कोणों के माप दर्शाए गए हैं । इस आधार पर $\angle a$, $\angle$b, $\angle$c, $\angle$d के माप ज्ञात कीजिए ।



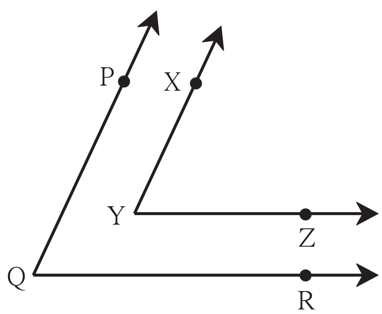
आकृति 2.6



आकृति 2.7

3. आकृति 2.7 में रेखा l || रेखा m तथा रेखा n || रेखा p है । दिए गए कोण के माप के आधार पर $\angle a$, $\angle$b, $\angle$c के माप ज्ञात कीजिए ।

4*. आकृति 2.8 में, $\angle PQR$ तथा $\angle XYZ$ की भुजाएँ परस्पर समांतर हैं । तो सिद्ध कीजिए कि $\angle PQR \cong \angle XYZ$

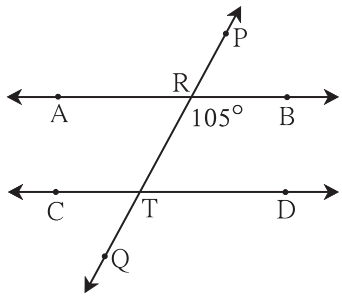


आकृति 2.8

5. आकृति 2.9 में, रेखा AB || रेखा CD और रेखा PQ तिर्यक रेखा है तो आकृति में दर्शाए गए मापों के आधार पर निम्नलिखित कोणों के माप ज्ञात कीजिए ।

(i) $\angle ART$ (ii) $\angle CTQ$

(iii) $\angle DTQ$ (iv) $\angle PRB$



आकृति 2.9

आओ, जानें

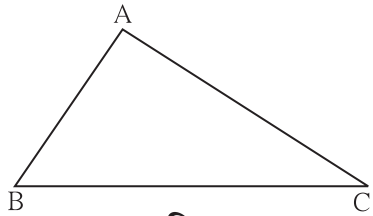
समांतर रेखाओं के गुणधर्मों का उपयोग

समांतर रेखा तथा उनकी तिर्यक रेखा के द्‌वारा निर्मित कोणों के गुणधर्म का उपयोग करके त्रिभुज का एक गुणधर्म सिद्‌ध करेंगे ।

प्रमेय : किसी भी त्रिभुज के तीनों कोणों के मापों का योगफल 180° होता है ।

दत्त : Δ ABC कोई एक त्रिभुज है ।

साध्य : $\angle ABC + \angle ACB + \angle BAC = 180^\circ$



आकृति 2.10

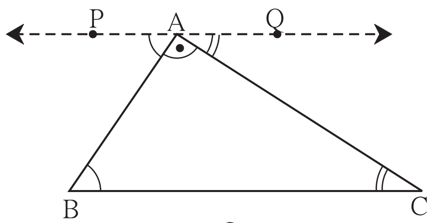
रचना : A बिंदु से जाने वाली रेख BC के समांतर रेखा *l* खींचिए ।
उसपर P तथा Q बिंदु इस प्रकार लीजिए कि P-A-Q

उपपत्ति : रेखा PQ || रेख BC तथा रेख AB उनकी तिर्यक रेखा है ।

$\therefore \angle ABC = \angle PAB$.......(एकांतर कोण).....I

रेखा PQ || रेख BC तथा रेख AC उनकी तिर्यक रेखा है ।

$\therefore \angle ACB = \angle QAC$.......(एकांतर कोण).....II



आकृति 2.11

कथन I तथा II से,

$\angle ABC + \angle ACB = \angle PAB + \angle QAC$ . . . III

समीकरण III के दोनों पक्षों में $\angle BAC$ जोड़ने पर

$\angle ABC + \angle ACB + \angle BAC = \angle PAB + \angle QAC + \angle BAC$

$= \angle PAB + \angle BAC + \angle QAC$

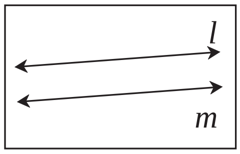
$= \angle PAC + \angle QAC$ ...($\because \angle PAB + \angle BAC = \angle PAC$)

$= 180^\circ$ ...(रैखिक युगल कोण)

अर्थात त्रिभुज के तीनों कोणों के मापों का योगफल 180° होता है ।

आओ, चर्चा करें

संलग्न आकृति 2.12 के प्रतल में रेखा l तथा रेखा m परस्पर समांतर है या नहीं कैसे निश्चित करोगे ?



आकृति 2.12

आओ, जानें

समांतर रेखाओं की कसौटियाँ (Tests for parallel lines)

दो रेखाओं तथा उनकी तिर्यक रेखा द्‌वारा निर्मित कोणों की जाँच कर, वे रेखाएँ समांतर हैं या नहीं निश्चित कर सकते हैं।

(1) तिर्यक रेखा के एक ही ओर बने अंत:कोणों की जोड़ी संपूरक कोणों की जोड़ी हो तो वे रेखाएँ समांतर होती है ।

(2) एकांतर कोणों की एक जोड़ी समान हो तो वे रेखाएँ परस्पर समांतर होती हैं ।

(3) संगत कोणों की एक जोड़ी समान हो तो वे रेखाएँ परस्पर समांतर होती हैं ।

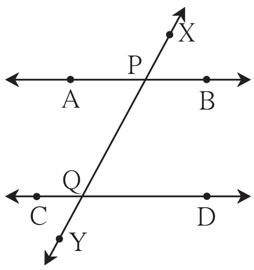
समांतर रेखाओं की अंत:कोण कसौटी (Interior angles test)

प्रमेय : दो भिन्न रेखाओं को किसी तिर्यक रेखा द्‌वारा प्रतिच्छेदित करने पर उसकी तिर्यक रेखा के एक ही ओर बने अंत:कोणों का योगफल $180°$ हो तो वे रेखाएँ परस्पर समांतर होती हैं ।

दत्त : रेखा XY यह रेखा AB तथा रेखा CD की तिर्यक रेखा है ।

$\angle BPQ + \angle PQD = 180°$

साध्य : रेखा AB || रेखा CD



आकृति 2.13

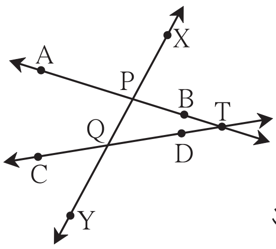
उपपत्ति : यह कसौटी हम अप्रत्यक्ष पद्‌धति से सिद्‌ध करेंगे ।

माना साध्य का कथन असत्य है ।

माना यह कथन सत्य है कि रेखा AB तथा रेखा CD परस्पर समांतर नहीं ।

$\therefore$ रेखा AB तथा रेखा CD बिंदु T पर प्रतिच्छेदित करती हैं ।

जिसके कारण Δ PQT बनता है ।



आकृति 2.14

$\angle TPQ + \angle PQT + \angle PTQ = 180°$ ... त्रिभुज के तीनों कोणों के मापों का योग 180 होता है

परंतु $\angle TPQ + \angle PQT = 180°$ . . . . दत्त

इस कारण त्रिभुज के दोनों कोणों का योगफल $180°$ है ।

परंतु त्रिभुज के तीनों कोणों के मापों का योगफल $180°$ होता है ।

$\therefore$ $\angle PTQ = 0°$ प्राप्त होता है ।

∴ रेखा PT तथा रेखा QT अर्थात रेखा AB तथा रेखा CD भिन्न रेखाएँ नहीं होंगी ।
परंतु दत्त के अनुसार रेखा AB तथा रेखा CD भिन्न रेखाएँ हैं ।
अर्थात दत्त से विसंगति प्राप्त हुई ।

∴ माना गया कथन गलत है अर्थात रेखा AB तथा रेखा CD परस्पर समांतर हैं ।

इस आधार पर दो रेखाओं को किसी तिर्यक रेखा द्वारा प्रतिच्छेदित करने पर उनकी तिर्यक रेखा के एक ही ओर बने अंतःकोणों की जोड़ी संपूरक हो तो वे रेखाएँ परस्पर समांतर होती हैं । यह सिद्ध होता है । इस गुणधर्म को समांतर रेखाओं की **अंतःकोण कसौटी** कहते हैं ।

इस कसौटी को अभिगृहीत मानकर अन्य दो कसौटियाँ सिद्ध करेंगे ।

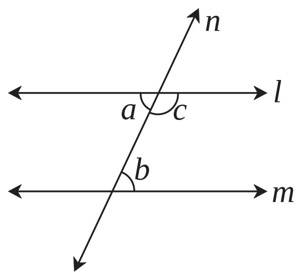
एकांतर कोण कसौटी (Alternate angles test)

प्रमेय : दो रेखाओं को किसी तिर्यक रेखा द्वारा प्रतिच्छेदित करने पर बने एकांतर कोणों की एक जोड़ी सर्वांगसम हो तो वे रेखाएँ परस्पर समांतर होती हैं ।

दत्त : रेखा l तथा रेखा m की तिर्यक रेखा n है ।
$\angle a$ तथा $\angle b$ एकांतर कोणों की एक जोड़ी सर्वांगसम है ।
$\therefore \angle a = \angle b$

साध्य : रेखा l || रेखा m

उपपत्ति : $\angle a + \angle c = 180°$ . . . . . रैखिक युगल कोण
$\angle a = \angle b$ . . . . दत्त
$\therefore \angle b + \angle c = 180°$
परंतु $\angle b$ तथा $\angle c$ तिर्यक रेखा के एक ही ओर बने अतःकोण है ।
$\therefore$ रेखा l || रेखा m . . . . (अंतःकोण कसौटी से)
इस गुणधर्म को समांतर रेखाओं की **एकांतर कोण कसौटी** कहते हैं ।



आकृति 2.15

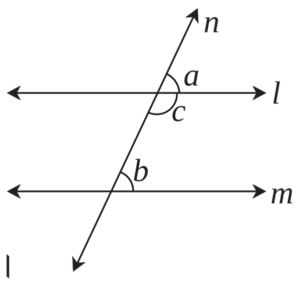
संगत कोण कसौटी (Corresponding angles Test)

प्रमेय : दो रेखाओं को किसी तिर्यक रेखा द्वारा प्रतिच्छेदित करने पर बनने वाले संगत कोणों की एक जोड़ी सर्वांगसम हो तो वे रेखाएँ परस्पर समांतर होती हैं ।

दत्त : रेखा l तथा रेखा m की तिर्यक रेखा n है ।
$\angle a$ तथा $\angle b$ संगत कोणों की जोड़ी है ।
$\therefore \angle a = \angle b$

साध्य : रेखा l || रेखा m

उपपत्ति : $\angle a + \angle c = 180°$ . . . . रैखिक युगल कोण
$\angle a = \angle b$ . . . . दत्त
$\therefore \angle b + \angle c = 180°$
अर्थात तिर्यक रेखा के एक ही ओर बने अंतःकोण परस्पर संपूरक है ।
$\therefore$ रेखा l || रेखा m . . . . अंतःकोण कसौटी
इस गुणधर्म को समांतर रेखाओं की **संगत कोण कसौटी** कहते हैं ।



आकृति 2.16

उपप्रमेय I यदि कोई रेखा उसी प्रतल की अन्य दो रेखाओं पर लंब हो तो वे दो रेखाएँ परस्पर समांतर होती हैं ।

दत्त : रेखा $n \perp$ रेखा l तथा रेखा $n \perp$ रेखा m

साध्य : रेखा $l \parallel$ रेखा m

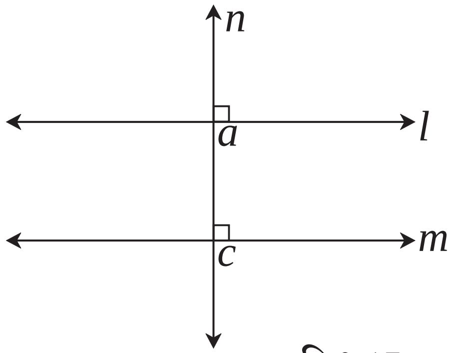
उपपत्ति : रेखा $n \perp$ रेखा l तथा रेखा $n \perp$ रेखा m दिया गया है ।

$\therefore \ \angle a = \angle c = 90°$

$\angle a$ तथा $\angle c$ यह रेखा l तथा रेखा m ली

तिर्यक रेखा n द्वारा निर्मित संगत कोण है ।

$\therefore$ रेखा $l \parallel$ रेखा m . . . . समांतर रेखाओं की संगत कोण कसौटी

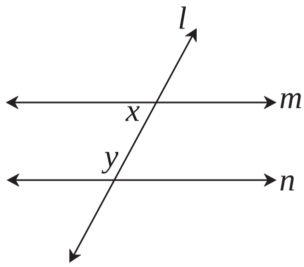


आकृति 2.17

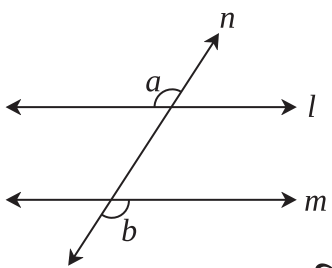
उपप्रमेय II सिद्‌ध कीजिए कि किसी भी प्रतल में दो रेखाएँ उसी प्रतल की तीसरी रेखा के समांतर हों तो वे रेखाएँ परस्पर समांतर होती हैं ।

प्रश्नसंग्रह 2.2

1. आकृति 2.18 में $y = 108°$ तथा $x = 71°$ तो रेखा m तथा रेखा n समांतर होगी, कारण लिखिए ।



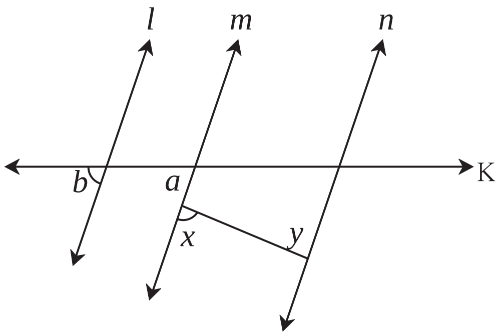
आकृति 2.18



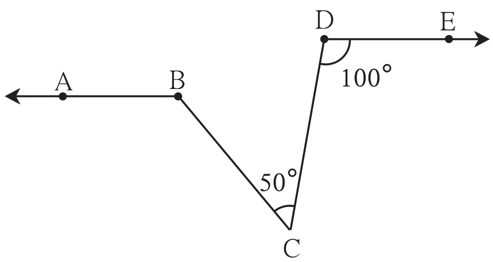
आकृति 2.19

2. आकृति 2.19 में यदि $\angle a \cong \angle b$ तो सिद्‌ध कीजिए कि रेखा $l \parallel$ रेखा m

3. आकृति 2.20 में यदि $\angle a \cong \angle b$ और $\angle x \cong \angle y$ तो सिद्‌ध कीजिए कि रेखा $l \parallel$ रेखा n



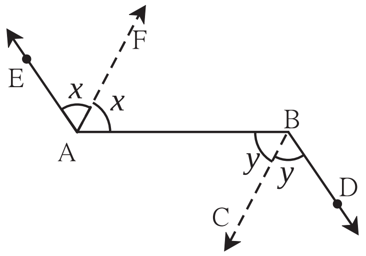
आकृति 2.20



आकृति 2.21

4. आकृति 2.21 में यदि किरण BA $\parallel$ किरण DE, $\angle C = 50°$ तथा $\angle D = 100°$ तो $\angle ABC$ का माप ज्ञात कीजिए ।

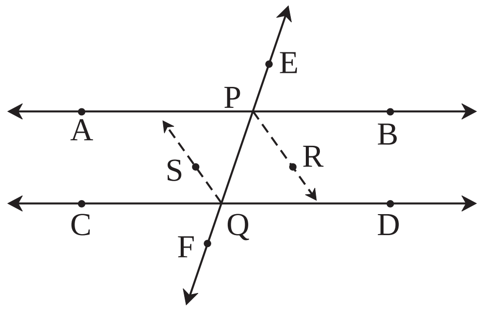
(सूचना : बिंदु C से किरण BA के समांतर रेखा खींचिए ।)

5\. 

आकृति 2.22

आकृति 2.22 में किरण AE || किरण BD किरण AF तथा किरण BC क्रमशः $\angle EAB$ तथा $\angle ABD$ की समद्विभाजक है तो सिद्ध कीजिए कि रेखा AF || रेखा BC

6\. रेखा EF यह रेखा AB तथा रेखा CD को क्रमशः बिंदु P तथा Q पर प्रतिच्छेदित करती है । किरण PR तथा किरण QS परस्पर समांतर किरणें हैं तथा क्रमशः $\angle BPQ$ तथा $\angle PQC$ के समद्विभाजक है, तो सिद्ध कीजिए कि रेखा AB || रेखा CD



आकृति 2.23

प्रकीर्ण प्रश्नसंग्रह 2

1\. निम्नलिखित कथनों के रिक्त स्थानों की पूर्ति करने के लिए अचूक विकल्प चुनकर लिखिए ।

(i) दो समांतर रेखाओं को किसी तिर्यक रेखा द्वारा प्रतिच्छेदित करने पर तिर्यक रेखा के एक ही ओर बने अंतःकोणों के मापों का योगफल . . . . . . होता है ।
(A) 0° (B) 90° (C) 180° (D) 360°

(ii) दो रेखाओं को किसी तिर्यक रेखा द्वारा प्रतिच्छेदित करने पर . . . . कोण निर्मित होते हैं ।
(A) 2 (B) 4 (C) 8 (D) 16

(iii) दो समांतर रेखाओं को किसी तिर्यक रेखा द्वारा प्रतिच्छेदित करने पर बनने वाले कोणों में से किसी एक कोण का माप 40° हो तो उसके संगत कोण का माप . . . . होता है ।
(A) 40° (B) 140° (C) 50° (D) 180°

(iv) Δ ABC में $\angle A = 76^\circ$, $\angle B = 48^\circ$, तो $\angle C$ का माप . . . . है ।
(A) 66° (B) 56° (C) 124° (D) 28°

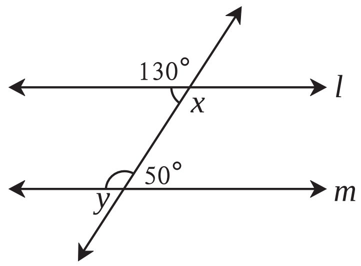
(v) दो समांतर रेखाओं को किसी तिर्यक रेखा द्वारा प्रतिच्छेदित करने पर बनने वाले एकांतर कोणों की जोड़ी में से यदि एक कोण का माप 75° हो तो दूसरे कोण का माप . . . . होता है ।
(A) 105° (B) 15° (C) 75° (D) 45°

2*. किरण PQ तथा किरण PR परस्पर लंब है । बिंदु B यह $\angle QPR$ के अंतःभाग में तथा बिंदु A यह $\angle RPQ$ के बाह्यभाग में है । किरण PB तथा किरण PA परस्पर लंब है । इस आधार पर आकृति बनाइए तथा निम्नलिखित कोणों की जोड़ियाँ लिखिए ।

(i) कोटीपूरक (ii) संपूरक कोण (iii) सर्वांगसम कोण

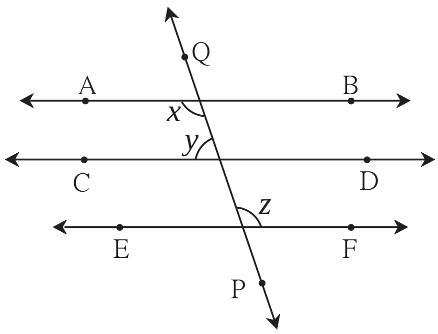
3. सिद्ध कीजिए कि कोई रेखा किसी एक प्रतल की दो समांतर रेखाओं में से एक रेखा पर लंब हो तो वह रेखा दूसरी रेखा पर भी लंब होती है ।

4. आकृति 2.24 में दिए गए कोणों के मापों के आधार पर $\angle x$ तथा $\angle y$ के माप ज्ञात करें तथा सिद्ध कीजिए कि रेखा l || रेखा m



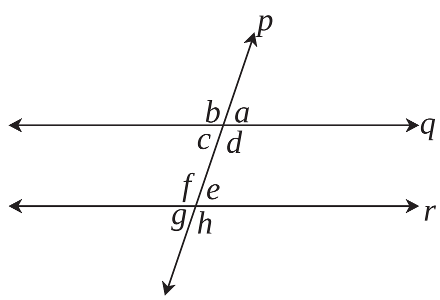
आकृति 2.24

5. रेखा AB || रेखा CD || रेखा EF तथा रेखा QP उनकी तिर्यक रेखा है । यदि $y : z = 3 : 7$ तो x का मान ज्ञात कीजिए ।(आकृति 2.25 देखिए)



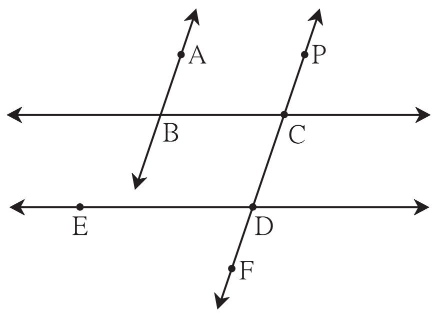
आकृति 2.25

6. आकृति 2.26 में यदि रेखा q || रेखा r, तथा रेखा p उसकी तिर्यक रेखा हो और $a = 80°$ तो f तथा g ज्ञात कीजिए ।



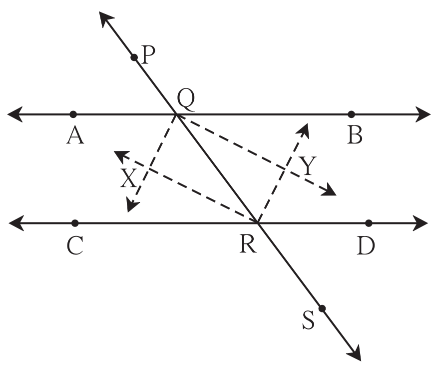
आकृति 2.26

7. आकृति 2.27 में यदि रेखा AB || रेखा CF तथा रेखा BC || रेखा ED तो सिद्ध कीजिए कि $\angle ABC = \angle FDE$



आकृति 2.27

8. आकृति 2.28 में रेखा AB || रेखा CD तथा रेखा PS उसकी तिर्यक रेखा है । किरण QX, किरण QY, किरण RX तथा किरण RY यह कोणों की समद्विभाजक हो तो सिद्ध कीजिए कि □ QXRY एक आयत है ।



आकृति 2.28

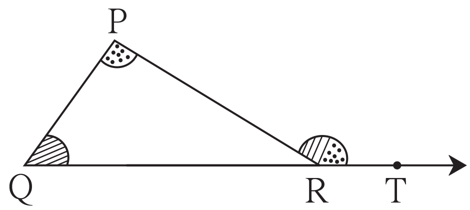
3 त्रिभुज

आओ, सीखें

- त्रिभुज के दूरस्थ अंतःकोणों का प्रमेय
- त्रिभुजों की सर्वांगसमता
- समद्विबाहु त्रिभुज का प्रमेय
- $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$ मापवाले त्रिभुज का गुणधर्म
- त्रिभुज की माध्यिका
- समकोण त्रिभुज में कर्ण पर खींची गई माध्यिका का गुणधर्म
- लंबसमद्विभाजक का प्रमेय
- कोणसमद्विभाजक का प्रमेय
- समरूप त्रिभुज

कृति

किसी मोटे कागज पर किसी भी माप का Δ PQR बनाइए । आकृति में दर्शाए अनुसार किरण QR पर बिंदु T लें । रंगीन मोटे पेपर के$\angle$P तथा $\angle$Q मापवाले टुकड़े काटें । उन टुकड़ों को रखने पर $\angle$PRT ढँक जाता है । इस बात का अनुभव कीजिए ।



आकृति 3.1

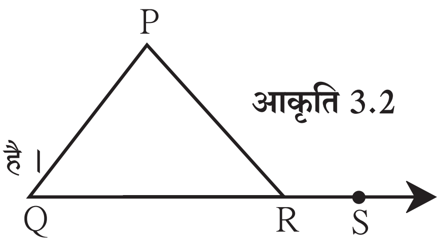
आओ, जानें

त्रिभुज के दूरस्थ अंतःकोणों का प्रमेय (Theorem of remote interior angles of a triangle)

प्रमेय : त्रिभुज के बहिष्कोण का माप उसके दूरस्थ अंतःकोणों के मापों के योगफल के बराबर होता है ।

दत्त : $\angle$PRS यह Δ PQR का बहिष्कोण है ।

साध्य : $\angle PRS = \angle PQR + \angle QPR$



आकृति 3.2

उपपत्ति : त्रिभुज के तीनों अंतःकोणों के मापों का योगफल 180° होता है ।

$\therefore \angle PQR + \angle QPR + \angle PRQ = 180^\circ$---(I)

$\angle PRQ + \angle PRS = 180^\circ$---(II). . . . (रैखिक युगल कोण)

$\therefore$ कथन I तथा II से

$\angle PQR + \angle QPR + \angle PRQ = \angle PRQ + \angle PRS$

$\therefore \angle PQR + \angle QPR = \angle PRS$ ------(दोनों पक्षों में से$\angle$PRQघटाने पर)

$\therefore$ त्रिभुज के बहिष्कोण का माप उसके दूरस्थ अंतःकोणों के मापों के योगफल के बराबर होता है ।

थोड़ा, सोचें

आकृति 3.3 में बिंदु R से रेख PQ के समांतर रेखा खींच कर इस प्रमेय की अलग उपपत्ति दी जा सकती है क्या ?

आओ, जानें

त्रिभुज के बहिष्कोण के प्रमेय का गुणधर्म (Property of an exterior angle of triangle)

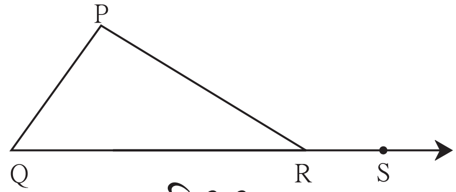
दो संख्याओं a तथा b का योगफल $(a + b)$, यह a तथा b दोनों से बड़ा होता है ।

अर्थात $a + b > a, a + b > b$

उपर्युक्त विधान का उपयोग करने पर त्रिभुज के बहिष्कोण का गुणधर्म प्राप्त होता हैं ।

Δ PQR मे $\angle PRS$ बहिष्कोण हो तो

$\angle PRS > \angle P$, $\angle PRS > \angle Q$



आकृति 3.3

$\therefore$ त्रिभुज का बहिष्कोण का माप उसके प्रत्येक दूरस्थ अंत:कोण से बड़ा होता है ।

हल किए गए उदाहरण

उदा. (1) किसी त्रिभुज के कोणों के मापों का अनुपात 5 : 6 : 7 हो तो सभी कोणों के माप ज्ञात कीजिए ।

हल : माना उन कोणों के माप $5x$, $6x$, $7x$ है ।

$5x + 6x + 7x = 180^\circ$ ...(त्रिभुज के तीनों कोणों के मापों का योगफल 180 होता हैं ।)

$18x = 180^\circ$

$x = 10^\circ$

$5x = 5 \times 10 = 50^\circ$, $6x = 6 \times 10 = 60^\circ$, $7x = 7 \times 10 = 70^\circ$

त्रिभुज के कोणों के माप 50°, 60°, 70° है ।

उदा. (2) संलग्न आकृति 3.4 का निरीक्षण कर $\angle PRS$ तथा $\angle RTS$ के माप ज्ञात कीजिए ।

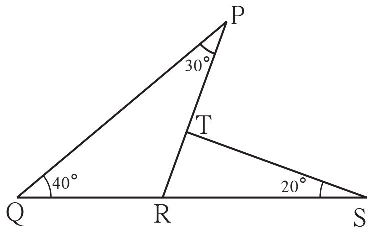
हल : $\angle PRS$ यह Δ PQR का बहिष्कोण है ।

दूरस्थ अंत:कोण के प्रमेय के आधार पर,

$\angle PRS = \angle PQR + \angle QPR$

$= 40^\circ + 30^\circ$

$\angle PRS = 70^\circ$



आकृति 3.4

Δ RTS में

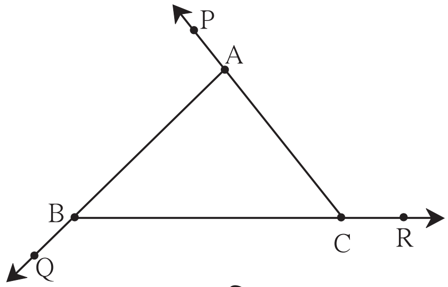
$\angle TRS + \angle RTS + \angle TSR = \square$ .... (त्रिभुज के तीनों कोणों के मापों का योगफल)

$\therefore \square + \angle RTS + \square = 180^\circ$

$\therefore \angle RTS + 90^\circ = 180^\circ$

$\therefore \angle RTS = \square$

उदा. (3) सिद्ध कीजिए कि त्रिभुज की भुजाओं को एक ही दिशा में बढ़ाने पर बनने वाले बहिष्कोणों के मापों का योगफल 360° होता है ।



आकृति 3.5

दत्त : $\angle PAB$, $\angle QBC$ तथा $\angle ACR$ यह Δ ABC के बहिष्कोण हैं ।

साध्य : $\angle PAB + \angle QBC + \angle ACR = 360^\circ$.

उपपत्ति : इस प्रमेय की उपपत्ति दो विधियों से लिख सकते हैं

विधि I

Δ ABC में बहिष्कोण $\angle PAB$ को ध्यान में रखने पर

$\angle ABC$ तथा $\angle ACB$ उसके दूरस्थ अंतःकोण होंगे ।

$\angle BAP = \angle ABC + \angle ACB$ ---- (I)

उसी प्रकार $\angle ACR = \angle ABC + \angle BAC$ ---- (II)

तथा $\angle CBQ = \angle BAC + \angle ACB$ ---- (III)

} ...(दूरस्थ अंतःकोण प्रमेय के अनुसार)

कथन (I), (II), (III) दोनों पक्षों को जोड़ने पर

$\angle BAP + \angle ACR + \angle CBQ$

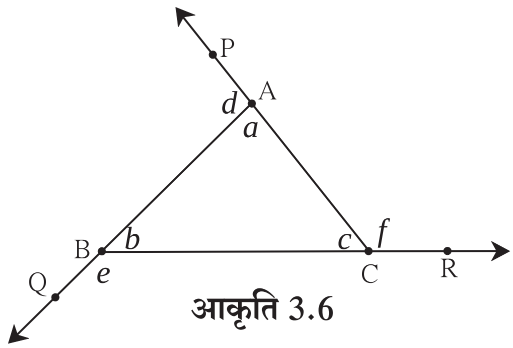
$= \angle ABC + \angle ACB + \angle ABC + \angle BAC + \angle BAC + \angle ACB$

$= 2\angle ABC + 2\angle ACB + 2\angle BAC$

$= 2(\angle ABC + \angle ACB + \angle BAC)$

$= 2 \times 180^\circ$ . . . . . (त्रिभुज के अंतःकोणों का योगफल)

$= 360^\circ$



आकृति 3.6

विधि II

$\angle c + \angle f = 180^\circ$ . . . . रैखिक युगल कोण

उसी प्रकार $\angle a + \angle d = 180^\circ$

तथा $\angle b + \angle e = 180^\circ$

$\therefore \angle c + \angle f + \angle a + \angle d + \angle b + \angle e = 180^\circ \times 3 = 540^\circ$

$\angle f + \angle d + \angle e + (\angle a + \angle b + \angle c) = 540^\circ$

$\therefore \quad \angle f + \angle d + \angle e + 180^\circ = 540^\circ$

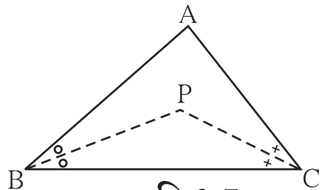
$\therefore f + d + e = 540^\circ - 180^\circ$

$= 360^\circ$

उदा. (4) आकृति 3.7 में Δ ABC के $\angle B$ तथा $\angle C$ के समद्‌विभाजक परस्पर बिंदु P पर प्रतिच्छेदित करते हैं तो सिद्‌ध कीजिए कि

$\angle BPC = 90 + \frac{1}{2} \angle BAC$

रिक्त स्थानों की पूर्ति करते हुए उपपत्ति पूर्ण कीजिए ।



आकृति 3.7

उपपत्ति : Δ ABC में,

$\angle BAC + \angle ABC + \angle ACB = \boxed{}$ ...... (त्रिभुज के अंतःकोणों के मापों का योगफल)

$\therefore \frac{1}{2}\angle BAC + \frac{1}{2}\angle ABC + \frac{1}{2}\angle ACB = \frac{1}{2} \times \boxed{}$ ...(दोनों पक्षों में $\frac{1}{2}$ से गुणा करने पर)

$\therefore \frac{1}{2}\angle BAC + \angle PBC + \angle PCB = 90^\circ$

$\therefore \angle PBC + \angle PCB = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle BAC$ ......(I)

Δ BPC में

$\angle BPC + \angle PBC + \angle PCB = 180^\circ$ ...... (त्रिभुज के अंतःकोणों के मापों का योगफल)

$\therefore \angle BPC + \boxed{} = 180^\circ$ ...... (कथन I से)

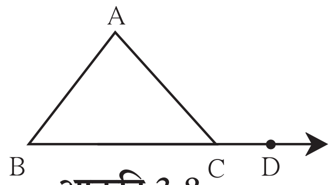
$\therefore \quad \angle BPC = 180^\circ - (90^\circ - \frac{1}{2}\angle BAC)$

$= 180^\circ - 90^\circ + \frac{1}{2}\angle BAC$

$\angle BPC = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle BAC$

प्रश्नसंग्रह 3.1

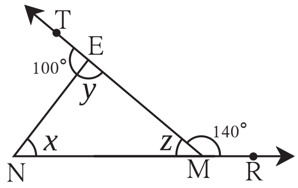
1. आकृति 3.8 में $\angle ACD$ यह Δ ABC का बहिष्कोण है ।
   $\angle B = 40^\circ$, $\angle A = 70^\circ$
   तो m $\angle ACD$ ज्ञात कीजिए ।



आकृति 3.8

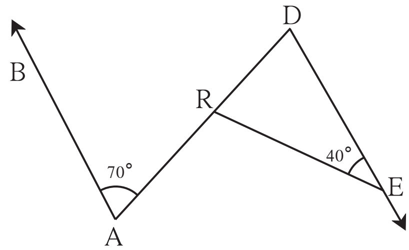
2. Δ PQR मे $\angle P = 70^\circ$, $\angle Q = 65^\circ$ तो $\angle R$ का माप ज्ञात कीजिए ।
3. त्रिभुज के कोणों के माप x°, $(x-20)^\circ$, $(x-40)^\circ$ हों तो, प्रत्येक कोण का माप ज्ञात कीजिए ।
4. त्रिभुज के तीन कोणों में से एक कोण सबसे छोटे कोण का दुगुना तथा दूसरा कोण सबसे छोटे कोण का तीन गुना हो तो, तीनों कोणों के माप ज्ञात कीजिए ।

5. आकृति 3.9 में दिए गए कोणों के मापों के आधार पर x, y, z के मान ज्ञात कीजिए ।



आकृति 3.9

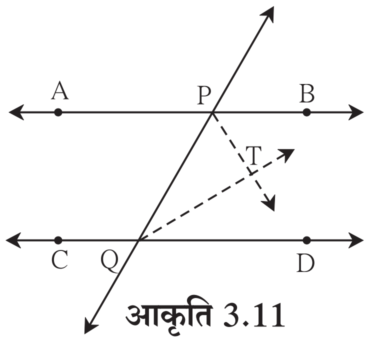
6. आकृति 3.10 में रेखा AB || रेखा DE है । दिए गए मापों के आधार पर ∠DRE तथा ∠ARE के माप ज्ञात कीजिए ।



आकृति 3.10

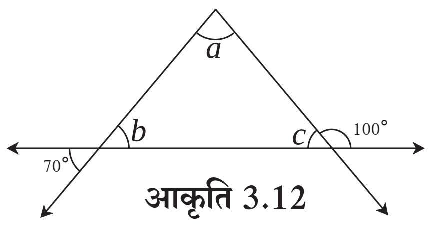
7. Δ ABC में ∠A तथा ∠B के समद्विभाजक परस्पर बिंदु O पर प्रतिच्छेदित करते हैं । यदि ∠C = 70° हो तो ∠AOB का माप ज्ञात कीजिए ।

8. आकृति 3.11 में रेखा AB || रेखा CD तथा रेखा PQ उनकी तिर्यक रेखा है । किरण PT तथा किरण QT क्रमशः ∠BPQ तथा ∠PQD के समद्विभाजक हैं, तो सिद्ध कीजिए कि ∠PTQ = 90°



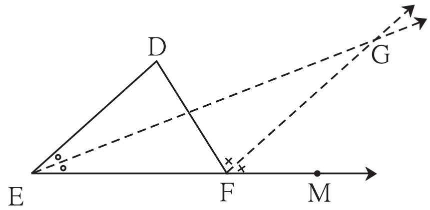
आकृति 3.11

9. आकृति 3.12 में दी गई जानकारी के आधार पर $\angle a, \angle b$ तथा $\angle c$ के माप ज्ञात कीजिए ।



आकृति 3.12

10*. आकृति 3.13 में रेख DE || रेख GF है । किरण EG तथा किरण FG क्रमशः ∠DEF तथा ∠DFM के समद्विभाजक है । तो सिद्ध कीजिए कि
(i) ∠DEF = ∠EDF (ii) EF = FG

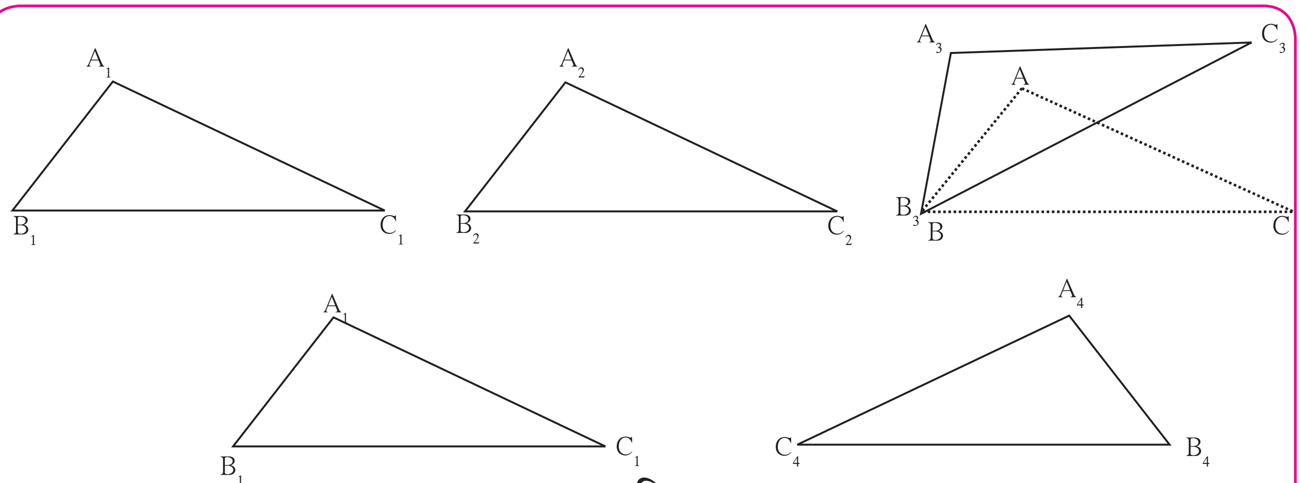


आकृति 3.13

आओ, जानें

त्रिभुजों की सर्वांगसमता (Congruence of triangles)

किसी एक रेखाखंड को दूसरे रेखाखंड पर रखने पर यदि वे एक-दूसरे को पूर्णतः ढँक लेते हैं तो दोनों रेखाखंड सर्वांगसम कहलाते हैं । उसी प्रकार किसी कोण को उठाकर दूसरे कोण पर रखने पर भी परस्पर पूर्णतः ढँक लेते हैं तो वे कोण सर्वांगसम होते हैं । उसी प्रकार एक त्रिभुज को उठाकर दूसरे त्रिभुज पर रखने पर वे परस्पर पूणर्तः ढँक लेते हैं तो वे दोनों त्रिभुज सर्वांगसम है ऐसा कहा जाता हैं । यदि Δ ABC तथा Δ PQR सर्वांगसम हों तो उसे $\Delta ABC \cong \Delta PQR$ इस प्रकार दर्शाते हैं ।



आकृति 3.14

कृति : किसी कार्डबोर्ड पर किसी भी माप का एक Δ ABC बनाकर काटें ।

उसे मोटे कागज पर रखकर उसके चारों ओर पेंसिल द्वारा आकृति बना लें । इस त्रिभुज को $\Delta A_1B_1C_1$ नाम दें । अब उस कार्डबोर्ड को खिसकाकर दूसरी आकृति बनाएँ ।

उसे $\Delta A_2B_2C_2$ नाम दें । तत्पश्चात कार्डबोर्ड को उठाकर दूसरी जगह उल्टा रखकर आकृति बनाएँ । उसे $\Delta A_3B_3C_3$ नाम दें । बाद में कार्डबोर्ड को उठाकर सीधे रखिए और उस त्रिभुज को $\Delta A_4B_4C_4$ नाम दें ।

क्या अब जान गए कि $\Delta A_1B_1C_1$, $\Delta A_2B_2C_2$, $\Delta A_3B_3C_3$ तथा $\Delta A_4B_4C_4$ सभी Δ ABC के सर्वांगसम हैं ?

क्योंकि इनमें से प्रत्येक त्रिभुज Δ ABC के साथ पूर्णतः ढँक जाता है । $\Delta A_3B_3C_3$ की जाँच करते हैं, उन्हें मिलाते समय $\angle A$ यह $\angle A_3$ पर, $\angle B$ यह $\angle B_3$ पर तथा $\angle C$ यह $\angle C_3$ पर रखने पर ही $\Delta ABC \cong \Delta A_3B_3C_3$ कहा सकता है ।

तब $AB = A_3B_3$, $BC = B_3C_3$, $CA = C_3A_3$ यह भी प्राप्त होता है ।

इस आधार पर दो त्रिभुजों की सर्वांगसमता जाँचने पर कोण तथा भुजा विशिष्ट क्रम से अर्थात किसी एकैकी संगति लिखना पड़ता है। इसे ध्यान में रखें ।

यदि $\Delta ABC \cong \Delta PQR$ हो तो $\angle A = \angle P$, $\angle B = \angle Q$, $\angle C = \angle R$ . . . . (I)

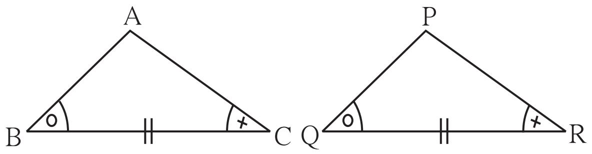
तथा AB = PQ, BC = QR, CA = RP . . . . . . (II) ऐसे छह समीकरण प्राप्त होते हैं ।

दो त्रिभुजों की सर्वांगसमता की जाँच करते समय उसके कोणों तथा भुआओं को विशिष्ट क्रम से अर्थात एकैकी संगति में लिखना होता है । इसे ध्यान में रखें ।

उपर्युक्त सभी छह समीकरण सर्वांगसम त्रिभुजों के लिए सत्य होते हैं ।

अब हम देखेंगे कि तीन विशिष्ट समीकरण समान होने पर छह समीकरण किस प्रकार सत्य होते हैं ।

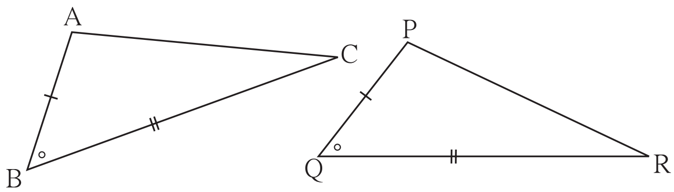
(1) यदि ΔABC तथा ΔPQR में एकैकी संगति के अनुसार एक त्रिभुज के दो कोण तथा उनमें समाविष्ट भुजा दूसरे त्रिभुज के दो कोण तथा उनमें समाविष्ट भुजा के समान हो तो वे त्रिभुज सर्वांगसम त्रिभुज होते हैं ।



इस गुणधर्म को कोण-भुजा-कोण कसौटी कहते हैं । इसे **को-भु-को कसौटी** ऐसे लिखते हैं ।

आकृति 3.15

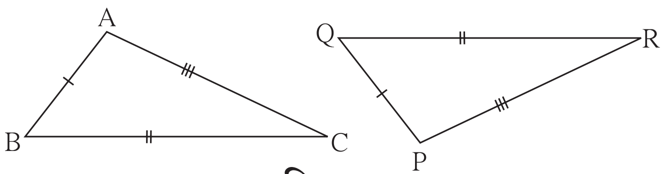
(2) यदि ΔABC तथा ΔPQR में एकैकी संगति के अनुसार एक त्रिभुज की दो भुजाएँ तथा उनमें समाविष्ट कोण दूसरे त्रिभुज की दो भुजाओं तथा उनमें समाविष्ट कोण के समान हो तो वे त्रिभुज सर्वांगसम त्रिभुज होते हैं।



आकृति 3.16

इस गुणधर्म को भुजा-कोण-भुजा कसौटी कहते हैं । तथा **भु-को-भु कसौटी** ऐसे लिखते हैं ।

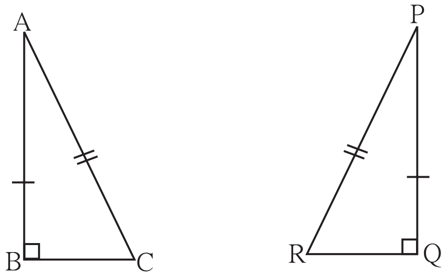
(3) यदि ΔABC तथा ΔPQR में एकैकी संगति के अनुसार एक त्रिभुज की तीनों भुजाएँ दूसरे त्रिभुज की तीनों से सर्वागसम भुजाओं के हों तो वे दोनों त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं ।



आकृति 3.17

इस गुणधर्म को भुजा-भुजा-भुजा कसौटी कहते हैं । तथा **भु-भु-भु कसौटी** ऐसे लिखते हैं ।

(4) समकोण Δ ABC तथा Δ PQR में एकैंकी संगति के अनुसार $\angle B$ तथा $\angle Q$ समकोण हो, दोनों त्रिभुज के कर्ण समान हों ओर $AB = PQ$ हो तो वे दोनों त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं ।



इस कसौटी को **कर्ण-भुजा कसौटी** कहते हैं ।

आकृति 3.18

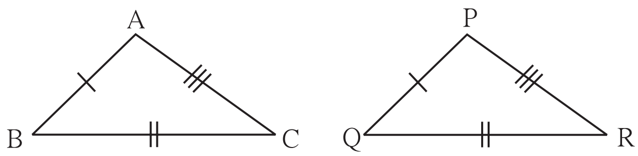
इसे ध्यान में रखें

कुछ घटक दिए जाने पर हम त्रिभुज की रचना कर सकते हैं । (उदा. दो कोण तथा उनमें समाविष्ट भुजा, तीन भुजाएँ, दो भुजा तथा उनमें समाविष्ट कोण) इनमें से किसी एक जानकारी के आधार पर त्रिभुज की रचना कर सकते हैं । दो त्रिभुजों में उपर्युक्त तीन संगत घटक समान हैं तो वे दोनों त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं । तब उनकी तीनों संगत भुजाएँ तथा तीनों संगत कोण सर्वांगसम होते हैं । सर्वांगसम त्रिभुजों की संगत भुजाएँ तथा संगत कोण सर्वांगसम होते हैं, इस गुणधर्म का उपयोग भूमिति के अनेक उदाहरणों में होता हैं ।

प्रश्नसंग्रह 3.2

1. नीचे दिए गए प्रत्येक उदाहरण में त्रिभुजों की जोड़ियों के सर्वांगसम घटक एक जैसे चिह्न से दर्शाए गए हैं । प्रत्येक जोड़ी के त्रिभुज किस कसौटी के आधार पर सर्वांगसम हैं रिक्त स्थानों में वह कसौटी लिखिए ।

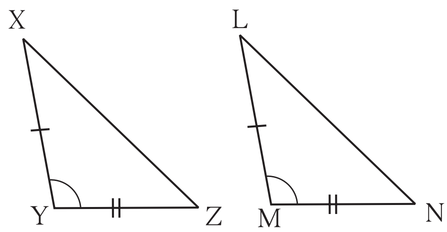
(i)



. . . . कसौटी से

Δ ABC $\cong$ Δ PQR

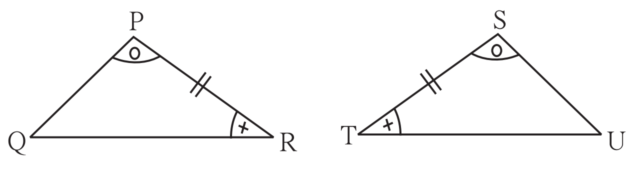
(ii)



. . . . कसौटी से

Δ XYZ $\cong$ Δ LMN

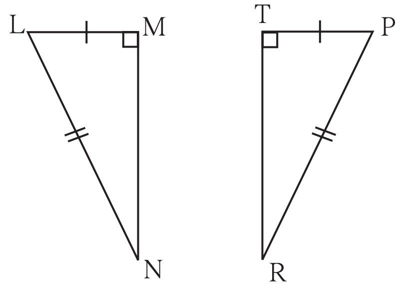
(iii)



. . . . कसौटी से

Δ PRQ $\cong$ Δ STU

(iv)



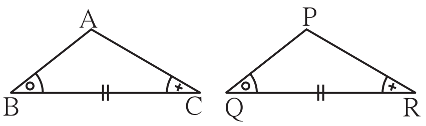
. . . . कसौटी से

Δ LMN $\cong$ Δ PTR

आकृति 3.19

2. नीचे दिए गए त्रिभुजों की जोड़ियों में दर्शाई गई जानकारी का निरीक्षण कीजिए । वे त्रिभुज किस कसौटी के आधार पर सर्वांगसम हैं । शेष सर्वांगसम घटक भी लिखिए ।

(i)



आकृति 3.20

आकृति में दर्शाई गई जानकारी के आधार पर,

Δ ABC तथा Δ PQR में

$\angle ABC \cong \angle PQR$

रेख BC $\cong$ रेख QR

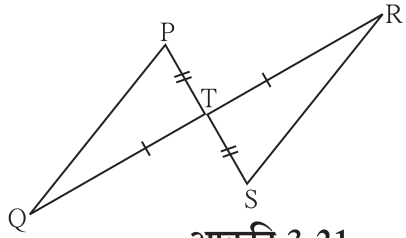
$\angle ACB \cong \angle PRQ$

$\therefore$ Δ ABC $\cong$ Δ PQR .... ☐ कसौटी

$\therefore \angle BAC \cong$ ☐ ....सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत कोण

रेखAB $\cong$ ☐ तथा ☐ $\cong$ रेख PR .....सर्वांगसम त्रिभुज की संगत भुजाएँ

(ii)



आकृति 3.21

आकृति में दर्शाई गई जानकारी के आधार पर,

Δ PTQ तथा Δ STR में

रेख PT $\cong$ रेख ST

$\angle PTQ \cong \angle STR$ .... शीर्षाभिमुख कोण

रेख TQ $\cong$ रेख TR

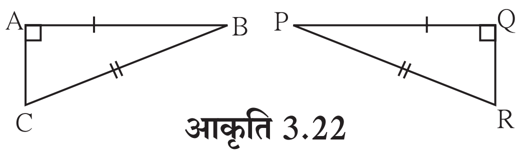
$\therefore$ Δ PTQ $\cong$ Δ STR .... ☐ कसौटी

$\therefore \angle TPQ \cong$ ☐ } ..... सर्वांगसम त्रिभुज के संगत कोण

व ☐ $\cong \angle TRS$

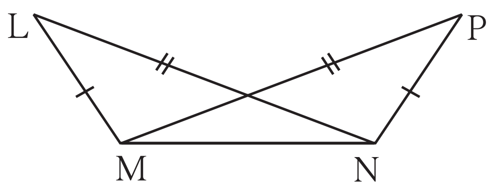
रेख PQ $\cong$ ☐ सर्वांगसम त्रिभुज की संगत भुजाएँ

3. नीचे दी गई आकृति में Δ ABC तथा Δ PQR की सर्वांगसमता की कसौटी लिखकर शेष सर्वांगसम घटकों के नाम लिखिए ।



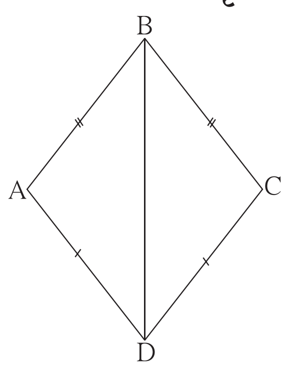
आकृति 3.22

4. नीचे दी गई आकृति में दर्शाए अनुसार Δ LMN तथा Δ PNM में LM = PN, LN = PM हो तो त्रिभुजों की सर्वांगसमता की कसौटी लिखिए । शेष सर्वांगसम घटकों के नाम भी लिखिए ।



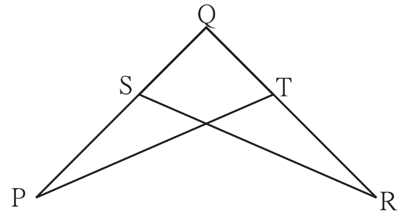
आकृति 3.23

5. आकृति 3.24 में रेख AB $\cong$ रेख BC तथा रेख AD $\cong$ रेख CD तो सिद्ध कीजिए कि Δ ABD $\cong$ Δ CBD



आकृति 3.24

6. आकृति 3.25 में ∠P ≅ ∠R
रेख PQ ≅ रेख QR
तो सिद्ध कीजिए कि,
Δ PQT ≅ Δ RQS



आकृति 3.25

आओ, जानें

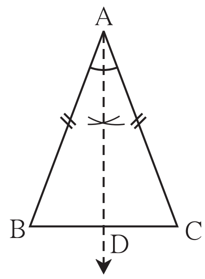
समद्विबाहु त्रिभुज का प्रमेय (Isosceles triangle theorem)

प्रमेय : यदि त्रिभुज की दो भुजाएँ सर्वांगसम होती उन भुजाओं के सम्मुख के कोण भी सर्वांगसम होते हैं ।

दत्त : Δ ABC में भुजा AB ≅ भुजा AC

साध्य : ∠ABC ≅ ∠ACB

रचना : Δ ABC मे ∠BAC का समद्विभाजक खींचिए जो भुजा BC को बिंदु D पर प्रतिच्छेदित करता हैं ।



आकृति 3.26

उपपत्ति : Δ ABD तथा Δ ACD में

रेख AB ≅ रेख AC .... दत्त

∠BAD ≅ ∠CAD........रचना

रेख AD ≅ रेख AD .... सामान्य भुजा

∴ Δ ABD ≅ Δ ACD ...... □

∴ ∠ABD ≅ □ ....सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत कोण

∴ ∠ABC ≅ ∠ACB ∵ B - D - C

उपप्रमेय : त्रिभुज की तीनों भुजाएँ सर्वांगसम हो तो उसके तीनों कोण भी सर्वांगसम होते हैं तथा प्रत्येक कोण का माप 60° होता है । (इस प्रमेय की उपपत्ति लिखिए ।)

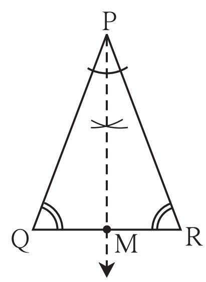
समद्विबाहु त्रिभुज के प्रमेय का विलोम (Converse of an isosceles triangle theorem)

प्रमेय : यदि त्रिभुज के दो कोण सर्वांगसम हो तो उन कोणों की सम्मुख भुजाएँ भी सर्वांगसम होती हैं ।

दत्त : Δ PQR में ∠PQR ≅ ∠PRQ

साध्य : भुजा PQ ≅ भुजा PR

रचना : ∠P का समद्विभाजक खींचिए जो भुजा QR को बिंदु M पर प्रतिच्छेदित करता है ।



आकृति 3.27

उपपत्ति : Δ PQM तथा Δ PRM में

∠PQM ≅ □........ दत्त

∠QPM ≅ ∠RPM........□

रेख PM ≅ □ .... सामान्य भुजा

∴ Δ PQM ≅ Δ PRM ...... □ कसौटी

∴ रेख PQ ≅ रेख PR.......सर्वांगसम त्रिभुज की संगत भुजा

उपप्रमेय : त्रिभुज के तीनों कोण सर्वांगसम हो तो उसकी तीनों भुजाएँ भी सर्वांगसम होती हैं ।
(इस उपप्रमेय की उपपत्ति लिखिए ।)
उपर्युक्त दोनों प्रमेयों के कथन परस्पर विलोम हैं ।
उपर्युक्त दोनों उप प्रमेय के कथन परस्पर विलोम हैं ।

थोड़ा सोचें

(1) समद्विबाहु त्रिभुज के प्रमेय की उपपत्ति अलग रचना करके लिख सकते हैं क्या ?
(2) समद्विबाहु त्रिभुज के प्रमेय की उपपत्ति बिना रचना करके लिख सकते हैं क्या ?

आओ, जानें

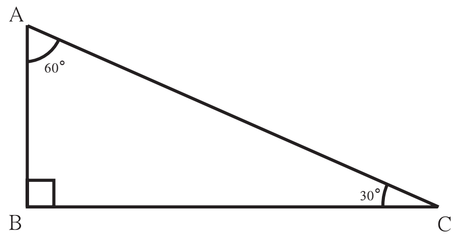
$30° - 60° - 90°$ मापवाले त्रिभुज का गुणधर्म (Property of $30° - 60° - 90°$ triangle)

कृति I

समूह के प्रत्येक विद्यार्थी को एक समकोण त्रिभुज की रचना करनी है, जिसका एक कोण $30°$ हो ।

प्रत्येक विद्यार्थी को $30°$ के सामने की भुजा एवं कर्ण की लंबाई मापनी है ।

समूह के एक विद्यार्थी को सभी विद्यार्थियों द्वारा ज्ञात की गई जानकारी तालिका में लिखनी है ।



आकृति 3.28

त्रिभुज क्रमांक	1	2	3	4
$30°$ के कोण की सम्मुख भुजा की लंबाई				
कर्ण की लंबाई				

उपर्युक्त तालिका के आधार पर $30°$, $60°$ तथा $90°$ माप वाले त्रिभुज का कोई गुणधर्म प्राप्त होता है क्या ?

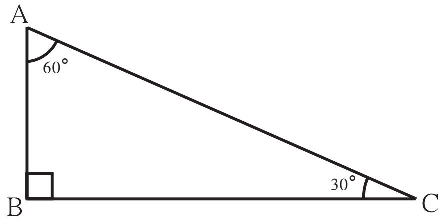
कृति II

कंपास पेटी में एक गोनिया के कोणों के माप $30°$,$60°$ तथा $90°$ होते हैं । उनकी भुजाओं के संदर्भ में यह गुणधर्म प्राप्त होता है क्या, इसकी जाँच कीजिए ।

इस कृति से प्राप्त एक महत्वपूर्ण गुणधर्म अब हम सिद्ध करेंगे ।

प्रमेय : यदि किसी समकोण त्रिभुज के न्यूनकोण 30° तथा 60° हो तो 30° की सम्मुख भुजा लंबाई में कर्ण की आधी होती है ।

(नीचे दी गई उपपत्ति में रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए ।)



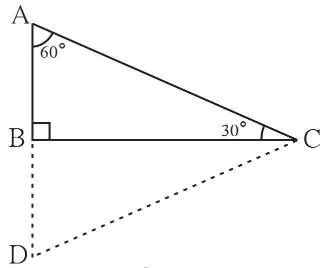
आकृति 3.29

दत्त : समकोण Δ ABC में

$\angle B = 90^\circ$, $\angle C = 30^\circ$, $\angle A = 60^\circ$

साध्य : $AB = \frac{1}{2} AC$

रचना : AB रेखाखंड को D तक बढ़ाएँ । बिंदु D इस प्रकार लें कि AB = BD, रेख DC खींचिए ।



आकृति 3.30

उपपत्ति : Δ ABC तथा Δ DBC में

रेख AB $\cong$ रेख DB .... ________

$\angle ABC \cong \angle DBC$ .... ________

रेख BC $\cong$ रेख BC .... ________

$\therefore \Delta ABC \cong \Delta DBC$ ..... ________

$\therefore \angle BAC \cong \angle BDC$ .... सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत कोण

Δ ABC में $\angle BAC = 60^\circ$ $\therefore \angle BDC = 60^\circ$

अब Δ ADC में,

$\angle DAC = \angle ADC = \angle ACD = 60^\circ$ ... ($\because$ त्रिभुज के कोणों के मापों का योगफल 180°)

$\therefore \Delta$ ADC यह समबाहु त्रिभुज होगा ।

$\therefore$ AC = AD = DC .... 'समद्विबाहु त्रिभुज के प्रमेय के विलोम का उपप्रमेय'

परंतु $AB = \frac{1}{2} AD$........ रचना $\therefore AB = \frac{1}{2} AC$ .... ($\because$ AD = AC)

कृति

उपर्युक्त आकृति 3.29 के आधार पर रिक्त स्थानों की पूर्ति कर प्रमेय की उपपत्ति पूर्ण कीजिए ।

समकोण त्रिभुज में अन्य कोण 30°, 60° हो तो 60° की सम्मुख भुजा $\frac{\sqrt{3}}{2} \times$ कर्ण होती है ।

उपर्युक्त प्रमेय में $AB = \frac{1}{2} AC$ यह हमने देखा है ।

$AB^2 + BC^2 =$ ________ ... (पायथागोरस की प्रमेय से)

$\frac{1}{4} AC^2 + BC^2 =$ ________ ...$[(AB)^2 = (\frac{1}{2} AC)^2]$

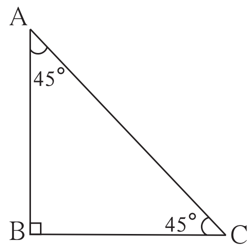
$\therefore BC^2 = AC^2 - \frac{1}{4} AC^2$

$\therefore BC^2 =$ ________

$\therefore BC = \frac{\sqrt{3}}{2} AC$

कृति :

यदि समकोण त्रिभुज के कोण $45°, 45°, 90°$ हो तो समकोण बनाने वाली प्रत्येक भुजा की लंबाई $\frac{1}{\sqrt{2}} \times$ कर्ण होती है।



आकृति 3.31

Δ ABC में, $\angle B = 90°$ तथा $\angle A = \angle C = 45°$

$\therefore$ BC = AB

पायथागोरस के प्रमेय के अनुसार,

$AB^2 + BC^2 = \square$

$AB^2 + \square = AC^2 \ldots (\because BC = AB)$

$\therefore 2AB^2 = \square$

$\therefore AB^2 = \square$

$\therefore AB = \frac{1}{\sqrt{2}} AC$

इस गुणधर्म को $45° - 45° - 90°$ के त्रिभुज का प्रमेय कहते हैं।

इसे ध्यान में रखें

(1) त्रिभुज के कोण $30°, 60°$ तथा $90°$ हो तो $30°$ की सम्मुख भुजा कर्ण की आधी $\left(\frac{\text{कर्ण}}{2}\right)$ होती है।

तथा $60°$ के कोण की सम्मुख भुजा $\frac{\sqrt{3}}{2}$ कर्ण होती है।

इस प्रमेय को $30°-60°-90°$ का प्रमेय कहते हैं।

(2) त्रिभुज के कोण $45°, 45°$ तथा $90°$ हो तो समकोण बनाने वाली प्रत्येक भुजा $\frac{\text{कर्ण}}{\sqrt{2}}$ होती है।

इस प्रमेय को $45°-45°-90°$ का प्रमेय कहते हैं।

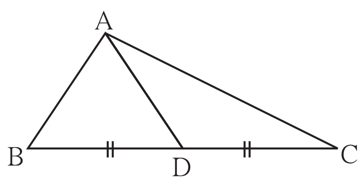
थोड़ा याद करें

त्रिभुज की माध्यिका

त्रिभुज के शीर्षबिंदु तथा उसकी सम्मुख भुजा के मध्यबिंदु को जोड़ने वाले रेखाखंड को उस त्रिभुज की माध्यिका कहते हैं।

आकृति में बिंदु D यह भुजा BC का मध्यबिंदु है।

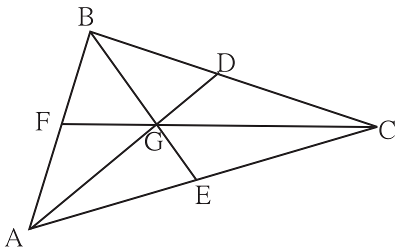
$\therefore$ रेख AD, Δ ABC की माध्यिका है।



आकृति 3.32

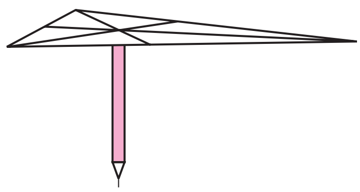
कृति I : किसी एक त्रिभुज ABC की रचना कीजिए । इस त्रिभुज की माध्यिकाएँ AD, BE, तथा CF खींचिए उनके संगामी बिंदु को G नाम दें । विभाजक की सहायता से AG तथा GD की लंबाई की तुलना कीजिए । AG की लंबाई GD की दुगुनी है । इसकी जाँच कीजिए । इसी प्रकार BG की लंबाई GE की दुगुनी है क्या, इसकी भी जाँच कीजिए ।

इस आधार पर प्राप्त गुणधर्म को ध्यान में रखिए कि माध्यिकाओं का संगामी बिंदु माध्यिकाओं को 2 : 1 के अनुपात में विभाजित करता है ।



आकृति 3.33

कृति II: कार्डबोर्ड पर Δ ABC की रचना करके उसे काट लीजिए । उसकी तीनों माध्यिकाएँ खींचिए । उनके संगमत संगामी बिंदु को G नाम दें । समतल आधार वाली एक पेंसिल लीजिए । समतल भाग को ऊपर करके उसे पकड़ें । त्रिभुज का बिंदु G पेंसिल के समतल भाग पर क्षैतिज दिशा में रखकर उसका संतुलन देखिए और उसकी जाँच कीजिए ।



आकृति 3.34

आओ, जानें

समकोण त्रिभुज मे कर्ण पर खींची गई माध्यिका का गुणधर्म

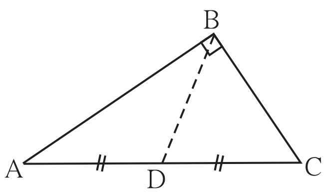
कृति : माना आकृति 3.35 में Δ ABC समकोण त्रिभुज है । रेख BD माध्यिका है ।

निम्नलिखित रेखाखंडों की लंबाई नापिए ।

l(AD) =......... l(DC) =............ l(BD) = ...

इस तरह (BD) = $\frac{1}{2}$ (AC) यह गुणधर्म मिलता है ।

इसकी जाँच कीजिए । इस गुणधर्म को सिद्ध भी कीजिए ।



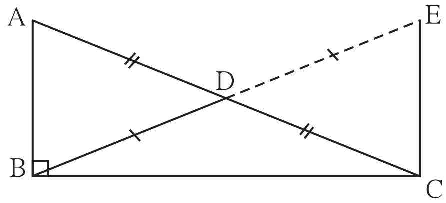
आकृति 3.35

प्रमेय : समकोण त्रिभुज में कर्ण पर खींची गई माध्यिका कर्ण की आधी होती है ।

दत्त : समकोण Δ ABC की माध्यिका रेख BD है ।

साध्य : BD = $\frac{1}{2}$AC

रचना : किरण BD पर बिंदु E इस प्रकार लें कि B - D - E तथा l(BD) = l(DE), रेख EC का माप ज्ञात कीजिए ।



आकृति 3.36

उपपत्ति : (उपपत्ति में मुख्य सोपान दर्शाए गए हैं ।
बीच के सोपान, कथन तथा कारण इस रूप में लिखकर उपपत्ति पूर्ण कीजिए ।)

Δ ADB $\cong$ Δ CDE ...... भुकोभु कसौटी

रेखा AB || रेखा EC ....एकांतर कोण कसौटी

Δ ABC $\cong$ Δ ECB ...... भुकोभु कसौटी

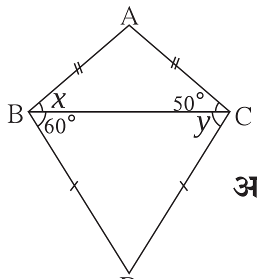
BD = $\frac{1}{2}$(AC)

इसे ध्यान में रखें

किसी भी समकोण त्रिभुज में कर्ण पर खींची गई माध्यिका लंबाई में कर्ण की आधी होती है ।

प्रश्नसंग्रह 3.3

1. आकृति 3.37 में दी गई जानकारी देखें । x तथा y के मान ज्ञात कीजिए । इसी प्रकार $\angle$ABD तथा $\angle$ACD के भी माप ज्ञात कीजिए ।

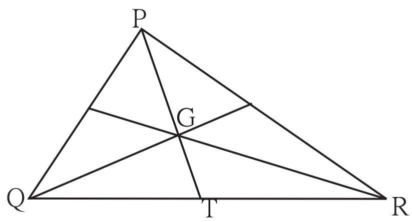


आकृति 3.37

2. समकोण त्रिभुज में कर्ण की लंबाई 15 हो तो उस पर खींची गई माध्यिका की लंबाई ज्ञात कीजिए ।

3. Δ PQR में $\angle$Q = 90°, PQ = 12, QR = 5 तथा QS भुजा PR पर माध्यिका हो तो QS ज्ञात कीजिए।

4. आकृति 3.38 में बिंदु G यह Δ PQR की माध्यिकाओं का संगामी बिंदु है ।
यदि GT = 2.5 सेमी, तो PG तथा PT की लंबाई ज्ञात कीजिए ।



आकृति 3.38

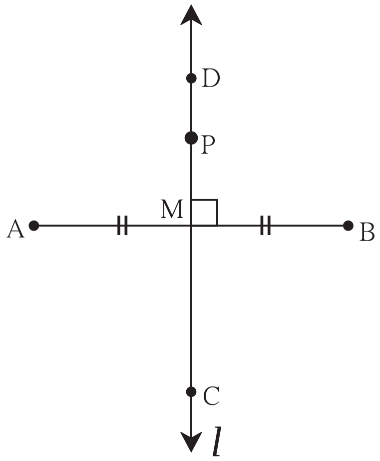
थोड़ा याद करें

कृति : सुविधाजनक लंबाईवाली रेख AB खींचिए । उसके मध्यबिंदु को M नाम दें । बिंदु M से जाने वाली रेखा l खींचिए जो रेख AB पर लंब हो । रेखा l रेख AB की लंबसमद्विभाजक रेखा है, यह ध्यान में आया क्या ?

रेखा l पर कहीं भी एक बिंदु P लीजिए । PA तथा PB इन दूरियों की तुलना विभाजक से करें । क्या पता चला PA = PB ? इससे पता चलता है कि रेखाखंड के लंबसमद्विभाजक का प्रत्येक बिंदु रेखाखंड के अंतःबिंदुओं से समदूरस्थ होता है ।

अब कंपास की सहायता से बिंदु A तथा B से समान दूरी पर स्थित बिंदु C तथा D ऐसे कुछ बिंदु लीजिए। सभी बिंदु रेखा l पर ही हैं न ? इससे ध्यान में आता है कि रेखाखंड के अंतःबिंदु से समान दूरी पर स्थित बिंदु, उस रेखाखंड के लंबसमद्विभाजक पर होता है ।

उपर्युक्त दोनों गुणधर्म लंबसमद्विभाजक के प्रमेय के दो भाग है । अब इसे सिद्ध करेंगे ।



आकृति 3.39

आओ, जानें

लंबसमद्विभाजक का प्रमेय (Perpendicular bisector theorem)

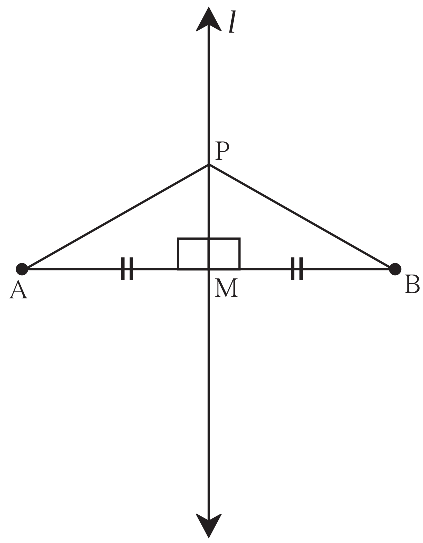
भाग I : रेखाखंड के लंबसमद्विभाजक पर स्थित प्रत्येक बिंदु उस रेखाखंड के अंतःबिंदुओं से समान दूरी पर होता है ।

दत्त : रेखा l रेख AB की लंबसमद्विभाजक रेखा है,
जो रेख AB को बिंदु M पर प्रतिच्छेदित करती है ।
बिंदु P रेखा l पर स्थित कोई एक बिंदु है ।

साध्य : l (PA) = l (PB)

रचना : रेख AP तथा रेख BP खींचिए ।

उपपत्ति : Δ PMA तथा Δ PMB में
रेख PM $\cong$ रेख PM .... (सामान्य भुजा)
$\angle$PMA $\cong$ $\angle$PMB ....(प्रत्येक समकोण)
रेख AM $\cong$ रेख BM .... (M मध्यबिंदु है)



आकृति 3.40

$\therefore$ Δ PMA $\cong$ Δ PMB ...... (भुकोभु कसौटी)

$\therefore$ रेख PA $\cong$ रेख PB.......(सर्वांगसम त्रिभुजों की संगत भुजाएँ)

$\therefore$ l (PA) = l (PB)

इससे सिद्‌ध होता है कि किसी रेखाखंड के लंबसमद्‌विभाजक पर स्थित प्रत्येक बिंदु उसके अंत:बिंदुओं से समदूरस्थ होते हैं ।

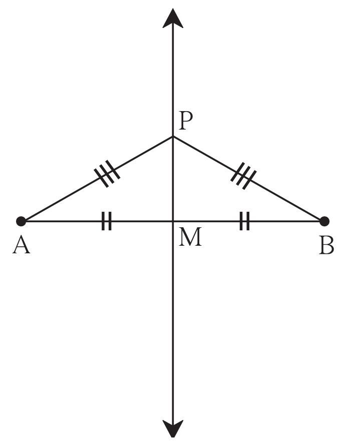
भाग II : रेखाखंड के अंत:बिंदुओं से समदूरस्थ कोई भी बिंदु उस रेखाखंड के लंबसमद्‌विभजक पर होता है ।

दत्त : रेखाखंड AB के अंत:बिंदुओं से समान दूरी पर स्थित कोई बिंदु P है ।

अर्थात PA = PB

साध्य : बिंदु P रेख AB के लंबसमद्‌विभाजक पर है ।

रचना : रेख AB का मध्यबिंदु M लेकर रेखा PM खींची है ।



आकृति 3.41

उपपत्ति : Δ PAM तथा Δ PBM में

रेख PA $\cong$ रेख PB .... ____

रेख AM $\cong$ रेख BM .... ____

रेख PM $\cong$ ____ .... सामान्य भुजा

$\therefore$ Δ PAM $\cong$ Δ PBM ...... ____ कसौटी

$\therefore$ $\angle$PMA $\cong$ $\angle$PMB.......सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत कोण

परंतु $\angle$PMA + ____ = 180°

$\angle$PMA + $\angle$PMA = 180° .... ($\because$ $\angle$PMB = $\angle$PMA)

2 $\angle$PMA = ____

$\therefore$ $\angle$PMA = 90°

$\therefore$ रेख PM $\perp$ रेख AB ......(1)

इसी प्रकार, रेख AB का M यह मध्यबिंदु है । ......(2) (रचना)

$\therefore$ रेखा PM यह रेख AB की लंबसमद्‌विभाजक रेखा है अर्थात बिंदु P, रेख AB के लंबसमद्‌विभाजक पर है ।

कोण समद्‌विभाजक का प्रमेय (Angle bisector theorem)

भाग I : कोण के समद्‌विभाजक पर स्थित प्रत्येक बिंदु उस कोण की भुजाओं से समदूरस्थ होते हैं ।

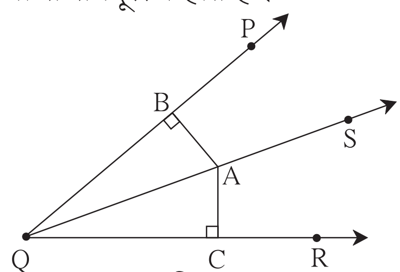
दत्त : किरण QS यह $\angle$PQR का समद्‌विभाजक है ।

कोण के समद्‌विभाजक पर कोई बिंदु A स्थित है ।

रेख AB $\perp$ किरण QP रेख AC $\perp$ किरणQR

साध्य : रेख AB $\cong$ रेख AC

उपपत्ति : त्रिभुजों की सर्वांगसमता की उचित कसौटी का उपयोग कर उपपत्ति लिखिए ।



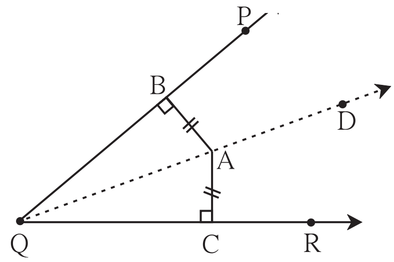
आकृति 3.42

भाग II : कोण की भुजाओं से समान दूरी पर स्थित प्रत्येक बिंदु उस कोण के समद्विभाजक पर होता है ।

दत्त : $\angle PQR$ के अंतःभाग में कोई बिंदु A इस प्रकार है कि
रेख $AC \perp$ रेख QR
रेख $AB \perp$ किरण QP
$AB = AC$

साध्य : किरण QA यह $\angle PQR$ का समद्विभाजक है ।
अर्थात $\angle BQA = \angle CQA$

उपपत्ति : त्रिभुजों की सर्वांगसमता की उचित कसौटी का उपयोग कर उपपत्ति लिखिए ।

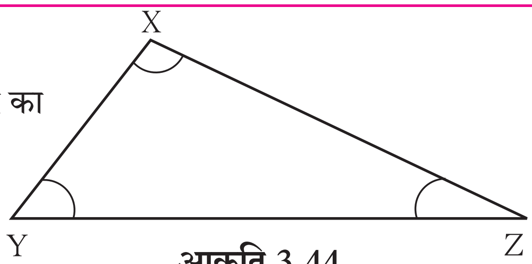


आकृति 3.43

थोड़ा याद करें

कृति

आकृति में दर्शाए अनुसार भुजा XZ > भुजा XY इस प्रकार का Δ XYZ बनाएँ ।
$\angle Z$ तथा $\angle Y$ मापिए । कौन-सा कोण बड़ा है ?



आकृति 3.44

आओ, जानें

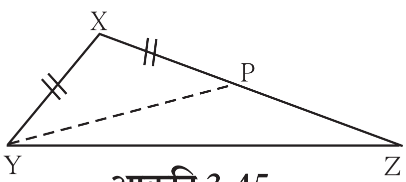
त्रिभुज की भुजाओं तथा कोणों में असमानता का गुणधर्म

प्रमेय : यदि त्रिभुज की दो भुजाओं में एक भुजा दूसरी से बड़ी हो तो बड़ी भुजा का सम्मुख कोण छोटी भुजा के सम्मुख कोण से बड़ा होता है ।

दत्त : Δ XYZ में भुजा XZ > भुजा XY

साध्य : $\angle XYZ > \angle XZY$

रचना : भुजा XZ पर बिंदु P इस प्रकार लें कि
$l(XY) = l(XP)$, रेख YP खींचें ।



आकृति 3.45

उपपत्ति : Δ XYP में

$XY = XP$ ....रचना

$\therefore$ $\angle XYP = \angle XPY$.....समान भुजाओं के सम्मुख कोण समान .....(I)

$\angle XPY$ यह Δ YPZ का बहिष्कोण है ।

$\therefore$ $\angle XPY > \angle PZY$ ....बहिष्कोण का प्रमेय

$\angle XYP > \angle PZY$ ....कथन (I) से

$\angle XYP + \angle PYZ > \angle PZY$ (यदि $a > b$ तथा $c > 0$ तो $a + c > b$)

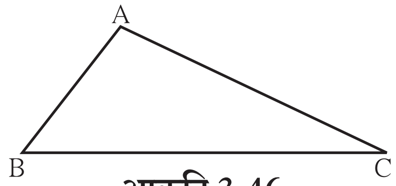
$\angle XYZ > \angle PZY$ अर्थात $\angle XYZ > \angle XZY$

प्रमेय : त्रिभुज के दो कोणों के माप असमान हो तो बड़े कोण की सम्मुख भुजा छोटे कोण की सम्मुख भुजा से बड़ी होती है ।

इस प्रमेय को अप्रत्यक्ष पद्धति से सिद्ध करते हैं । नीचे दी गई उपपत्ति में रिक्त स्थानों की पूर्ति कर उपपत्ति पूर्ण कीजिए ।

दत्त : ΔABC में $\angle B > \angle C$

साध्य : $AC > AB$



आकृति 3.46

उपपत्ति : Δ ABC की भुजाओं AB तथा भुजा AC की लंबाई में निम्नलिखित में एक और केवल एक संभावना होती है ।

(i) $AC < AB$ (ii) ______ (iii) ______

(i) $AC < AB$ होने पर

त्रिभुज की असमान भुजाओं में बड़ी भुजा का सम्मुख कोण छोटी भुजा के सम्मुख कोण से ______ होता है ।

$\therefore \angle C >$ ______

परंतु $\angle C < \angle B$ .... (दत्त)

यह असंगत है ।

$\therefore$ ______ < ______ यह गलत है ।

(ii) यदि $AC = AB$

तो $\angle B = \angle C$

परंतु ______ > ______ ...... दत्त

पुनः यहाँ विसंगति निर्माण हो रही है ।

$\therefore$ ______ = ______ यह असंगत है ।

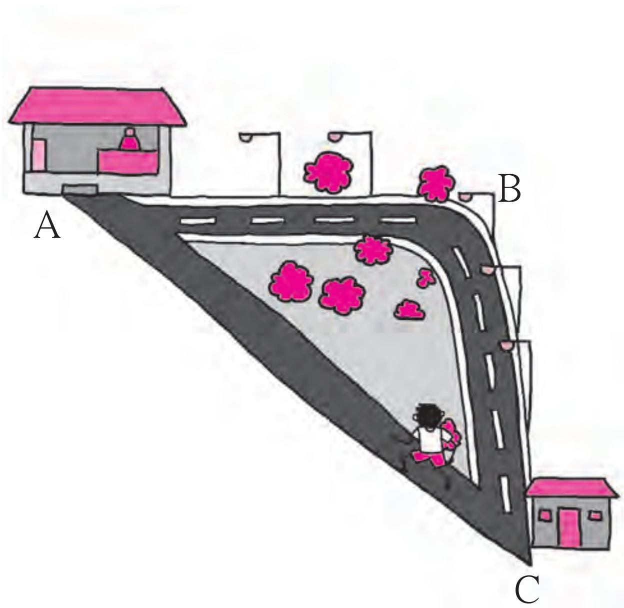
$\therefore AC > AB$ यही एक संभावना बचती है ।

$\therefore AC > AB$

थोड़ा याद करें

पिछली कक्षा में हमने एक कृति की थी । जिसके आधार पर हमने त्रिभुज का एक गुणधर्म देखा था । उसे याद कीजिए ।

संलग्न चित्र में दर्शाए अनुसार स्थान A पर एक दुकान है । समीर C स्थान पर खड़ा है । दुकान में पहुँचने के लिए उसने $C \rightarrow B \rightarrow A$ इस पक्की सड़क की बजाय $C \rightarrow A$ मार्ग चुना क्योंकि उसे लगा कि यह मार्ग कम लंबाई का है । उसे त्रिभुज के किस गुणधर्म का ध्यान आया होगा ?



त्रिभुज के किन्हीं दो भुजाओं का योग तीसरी भुजा से अधिक होता है । अब इस गुणधर्म को सिद्ध करेंगे ।

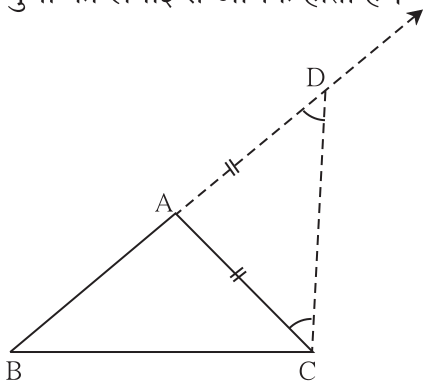
प्रमेय : त्रिभुज की किन्हीं दो भुजाओं की लंबाइयों का योगफल तीसरी भुजा की लंबाई से अधिक होता है ।

दत्त : Δ ABC किसी एक प्रकार का एक त्रिभुज है ।

साध्य : AB + AC > BC

AB + BC > AC

AC + BC > AB



रचना : किरण BA पर बिंदु D इस प्रकार लें कि AD = AC

उपपत्ति : Δ ACD में, AC = AD ..... रचना

$\therefore$ $\angle$ACD = $\angle$ADC ...... (सर्वांगसम भुजाओं के सम्मुख कोण)

आकृति 3.47

$\therefore$ $\angle$ACD + $\angle$ACB > $\angle$ADC

$\therefore$ $\angle$BCD > $\angle$ADC

$\therefore$ भुजा BD > भुजा BC ....(त्रिभुज में बड़े कोण की सम्मुख भुजा बड़ी होती है)

$\therefore$ BA + AD > BC ....($\because$ BD = BA + AD)

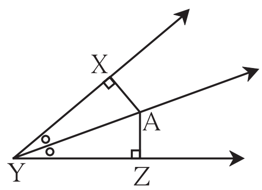
BA + AC > BC .... ($\because$ AD = AC)

इसी प्रकार हम सिद्‌ध कर सकते हैं कि, AB + BC > AC

तथा BC + AC > AB

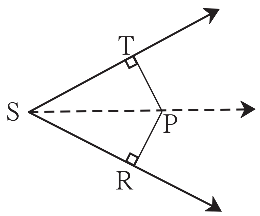
प्रश्नसंग्रह 3.4

1. आकृति 3.48 में, बिंदु A, $\angle$XYZ के समद्‌विभाजक पर है । यदि AX = 2 सेमी तो AZ की लंबाई ज्ञात कीजिए ।



आकृति 3.48

2. आकृति 3.49 में $\angle$RST = 56°, रेख PT $\perp$ किरण ST, रेख PR $\perp$ किरण SR तथा रेख PR $\cong$ रेख PT हो तो $\angle$RSP का माप ज्ञात कीजिए । कारणसहित लिखिए ।



आकृति 3.49

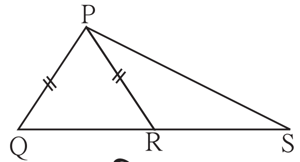
3. Δ PQR में PQ = 10 सेमी, QR = 12 सेमी, PR = 8 सेमी तो इस त्रिभुज के सबसे बड़े कोण तथा सबसे छोटे कोण को पहचानें और लिखें ।

4. Δ FAN में $\angle$F = 80°, $\angle$A = 40° तो त्रिभुज की सबसे बड़ी तथा सबसे छोटी भुजा का नाम कारण सहित लिखिए ।

5. सिद्‌ध कीजिए कि समबाहु त्रिभुज के सभी कोण न्यून कोण होते हैं ।

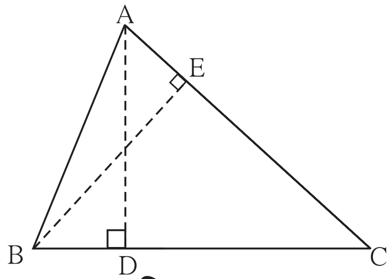
6. Δ ABC में $\angle$BAC की समद्विभाजक भुजा BC पर लंब हो तो सिद्ध कीजिए कि Δ ABC समद्विबाहु त्रिभुज है ।

7. आकृति 3.50 में यदि रेख PR $\cong$ रेख PQ तो सिद्ध कीजिए कि रेख PS > रेख PQ



आकृति 3.50

8. आकृति 3.51 में रेख AD तथा रेख BE, Δ ABC के शीर्षलंब है । AE = BD है तो सिद्ध कीजिए कि रेख AD $\cong$ रेख BE

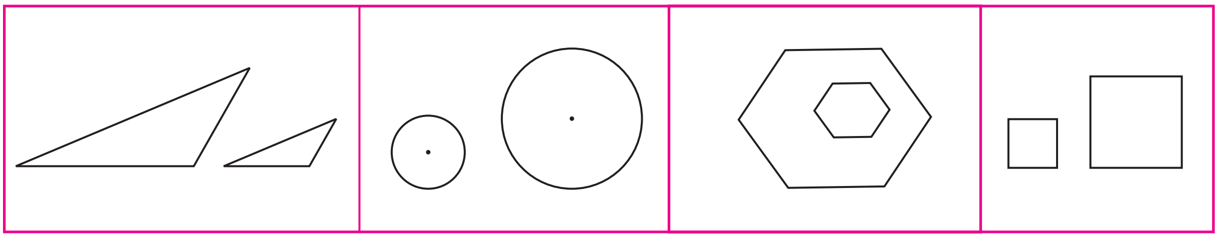


आकृति 3.51

आओ, जानें

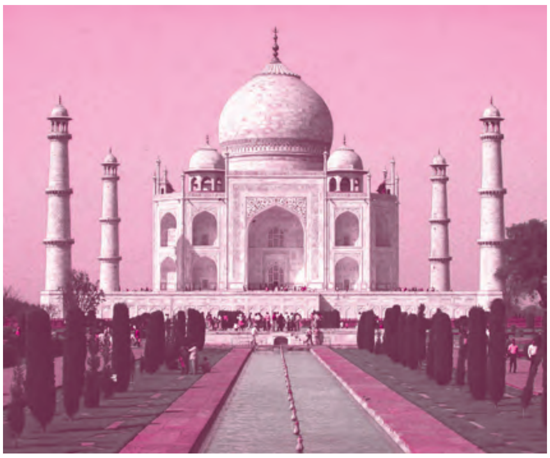
समरूप त्रिभुज (Similar triangles)

नीचे दी गई आकृतियों का निरीक्षण कीजिए ।



प्रत्येक भाग में दिखाई गई दो-दो आकृतियों का आकार समान हैं । परंतु वे आकृतियाँ छोटी-बड़ी है अर्थात वे सर्वांगसम नहीं हैं ।

ऐसी समान दिखने वाली आकृतियों के रूप समान हैं अर्थात ऐसी समानरूपवाली आकृतियों को समरूप आकृतियाँ कहते हैं ।



कोई फोटो, उस फोटो के आधार पर बनाया गया बड़ा फोटो इनमें समरूपता दिखती है । उसी प्रकार रास्ते तथा उन रास्तों के मानचित्र में समरूपता दिखाई देती है ।

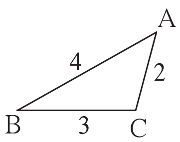
दो आकृतियों में भुजाओं का समान अनुपात ही समरूप आकृतियों का महत्त्वपूर्ण गुणधर्म है । यदि समान आकृतियों में कोण हों तो वे सर्वांगसम तथा उसी माप के होने चाहिए । दो रास्तों के बीच जो कोण हो वही मानचित्र में भी होना चाहिए अन्यथा वह मानचित्र गलत निर्देशन करेगा ।

ICT Tools or Links

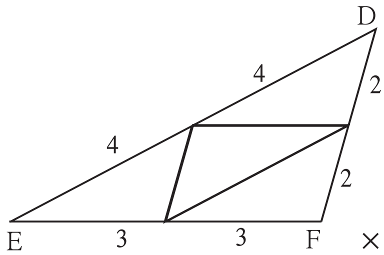
मोबाइल अथवा संगणक पर कोई फोटो खींचिए । याद रखिए कि उसे बड़ा-छोटा करते समय हम क्या करते हैं । उसी प्रकार किसी फोटो का कोई भाग देखने के लिए आप कौन-सी कृति करते हैं ? उसे याद करें ।

अब हम समरूप त्रिभुजों का गुणधर्म एक कृति द्‌वारा समझेंगे ।

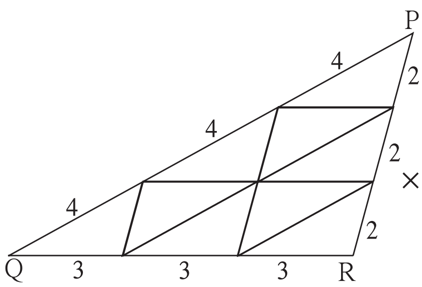
कृति : 4 सेमी, 3 सेमी तथा 2 सेमी भुजावाला एक त्रिभुज कागज पर खींचिए । उस त्रिभुज को एक मोटे कागज पर रखिए । उसके सभी ओर पेंसिल घुमाकर 14 त्रिभुज बनाकर तथा काट लीजिए ।
यह ध्यान रहें कागज के भुजाकार टुकड़े सर्वांगसम हैं । नीचे दर्शाई गई आकृति के अनुसार उन त्रिभुजाकार टुकड़ों को रखकर तीन त्रिभुज बनाएँ ।



आकृति 3.52



आकृति 3.53



आकृति 3.54

त्रिभुजों की संख्या 1   त्रिभुजों की संख्या 4   त्रिभुजों की संख्या : 9

Δ ABC तथा Δ DEF में ABC $\leftrightarrow$ DEF इस संगति के अनुसार समरूप हैं ।

$\angle A \cong \angle D,\ \angle B \cong \angle E,\ \angle C \cong \angle F$

तथा $\frac{AB}{DE} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$; $\frac{BC}{EF} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$; $\frac{AC}{DF} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, अर्थात संगत भुजाएँ समानुपात में हैं ।

इसी प्रकार Δ DEF और Δ PQR पर विचार कीजिए । DEF $\leftrightarrow$ PQR इस संगति के अनुसार क्या उसके कोण सर्वांगसम तथा भुजाएँ समानुपात में हैं ?

आओ, जानें

त्रिभुजों की समरूपता

Δ ABC तथा Δ PQR में यदि (i) $\angle A = \angle P$, $\angle B = \angle Q$, $\angle C = \angle R$ तथा

(ii) $\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{AC}{PR}$; तो Δ ABC और Δ PQR समरूप हैं, ऐसा कहा जाता है ।

'Δ ABC तथा Δ PQR समरूप हैं' इसे '$\Delta ABC \sim \Delta PQR$' इस प्रकार लिखते हैं ।

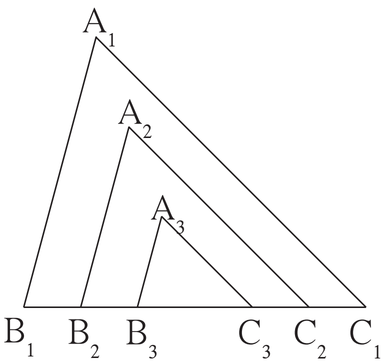
नीचे दी गई कृति से समरूप त्रिभुजों के संगत कोण एवं संगत भुजाओं का संबंध समझ सकते हैं ।

कृति : मोटे कागज पर किसी भी माप का $\Delta A_1B_1C_1$ बनाइए और काट लें । $\angle A_1, \angle B_1, \angle C_1$ मापिए ।

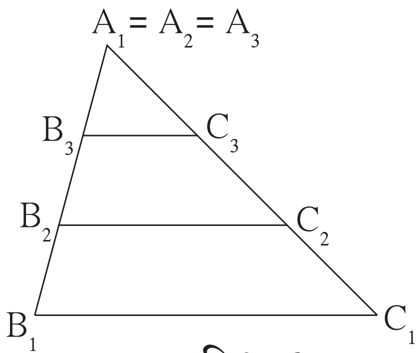
इसी प्रकार मोटे कागज पर $\Delta A_2B_2C_2$ तथा $\Delta A_3B_3C_3$ इस प्रकार बनाएँ कि

$\angle A_1 = \angle A_2 = \angle A_3$, $\angle B_1 = \angle B_2 = \angle B_3$, $\angle C_1 = \angle C_2 = \angle C_3$

एवं $B_1C_1 > B_2C_2 > B_3C_3$ अब वें दो त्रिभुजों को काटकर उसे एक तरफ रखें । अब इन त्रिभुजों की रचना, निम्नखित दोनों प्रकार से कीजिए । तीनों त्रिभुजों की भुजाओं की लंबाई नापिए ।



आकृति 3.55



आकृति 3.56

$\frac{A_1B_1}{A_2B_2}, \frac{B_1C_1}{B_2C_2}, \frac{A_1C_1}{A_2C_2}$ अनुपात की जाँच कीजिए । तीनों समान हैं जाँच करें ।

इसी प्रकार $\frac{A_1C_1}{A_3C_3}, \frac{B_1C_1}{B_3C_3}, \frac{A_1B_1}{A_3B_3}$ यह अनुपात भी समान हैं क्या, इसे देखेंगे ।

इस कृति को देखे कि जिस त्रिभुजों के संगत कोणों के माप समान है उनकी संगत भुजाएँ भी समान अनुपात में होती हैं अर्थात संगत भुजाओं का अनुपात एक ही होता है ।

हमने देखा कि Δ ABC तथा Δ PQR में यदि (i) $\angle A = \angle P$, $\angle B = \angle Q$, $\angle C = \angle R$, तो

(ii) $\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{AC}{PR}$ अर्थात यदि संगत कोण समान हो तो संगत भुजा एकही अनुपात में होती हैं ।

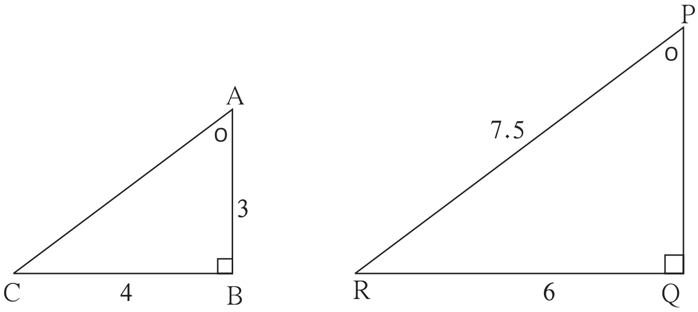
इस नियम को थोड़ा परिश्रम लेकर सिद्ध कर सकते हैं ।

हम इसे अनेक उदाहरण में अयोग करेंगे ।

इसे ध्यान में रखें

- दो त्रिभुजों के संगत कोण समान हों तो वे त्रिभुज समरूप त्रिभुज होते हैं ।
- दो त्रिभुज समरूप हो तो उनकी संगत भुजाएँ समानुपाती में तथा संगत कोण सर्वांगसम होते हैं ।

उदा. आकृति 3.57 में Δ ABC तथा Δ PQR दर्शाए गए हैं । उन त्रिभुजों में दर्शाई गई जानकारी का निरीक्षण कीजिए । जिन भुजाओं की लंबाई नहीं दी गई है, उन्हें ज्ञात कीजिए ।



आकृति 3.57

हल : प्रत्येक त्रिभुज के तीनों कोणों के मापों का योगफल180° होता है ।

दी गई जानकारी के अनुसार

$\angle A = \angle P$ तथा $\angle B = \angle Q$ $\quad \therefore \angle C = \angle R$

$\therefore$ Δ ABC तथा Δ PQR समरूप त्रिभुज है ।

$\therefore$ उनकी संगत भुजाएँ समानुपात में होगी ।

$$\therefore \frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{AC}{PR}$$

$$\therefore \frac{3}{PQ} = \frac{4}{6} = \frac{AC}{7.5}$$

$$\therefore 4 \times PQ = 18$$

$$\therefore PQ = \frac{18}{4} = 4.5$$

इसी प्रकार $6 \times AC = 7.5 \times 4$

$$\therefore AC = \frac{7.5 \times 4}{6} = \frac{30}{6} = 5$$

प्रश्नसंग्रह 3.5

1. यदि Δ XYZ ~ Δ LMN तो उनके सर्वांगसम संगत कोणों के नाम लिखिए । संगत भुजाओं के अनुपात भी लिखिए ।
2. Δ XYZ मे XY = 4 सेमी, YZ = 6 सेमी, XZ = 5 सेमी, यदि Δ XYZ ~ Δ PQR तथा PQ = 8 सेमी हो तो Δ PQR की शेष भुजाओं की लंबाई ज्ञात कीजिए ।
3. समरूप त्रिभुजों की जोड़ी की कच्ची आकृति बनाइए । उन्हें नाम दें । उनके सर्वांगसम कोण समान चिह्नों से दर्शाएँ । त्रिभुजों की संगत भुजाओं की लंबाइयाँ समानुपात में हों ऐसी संख्याएँ दर्शाइए ।

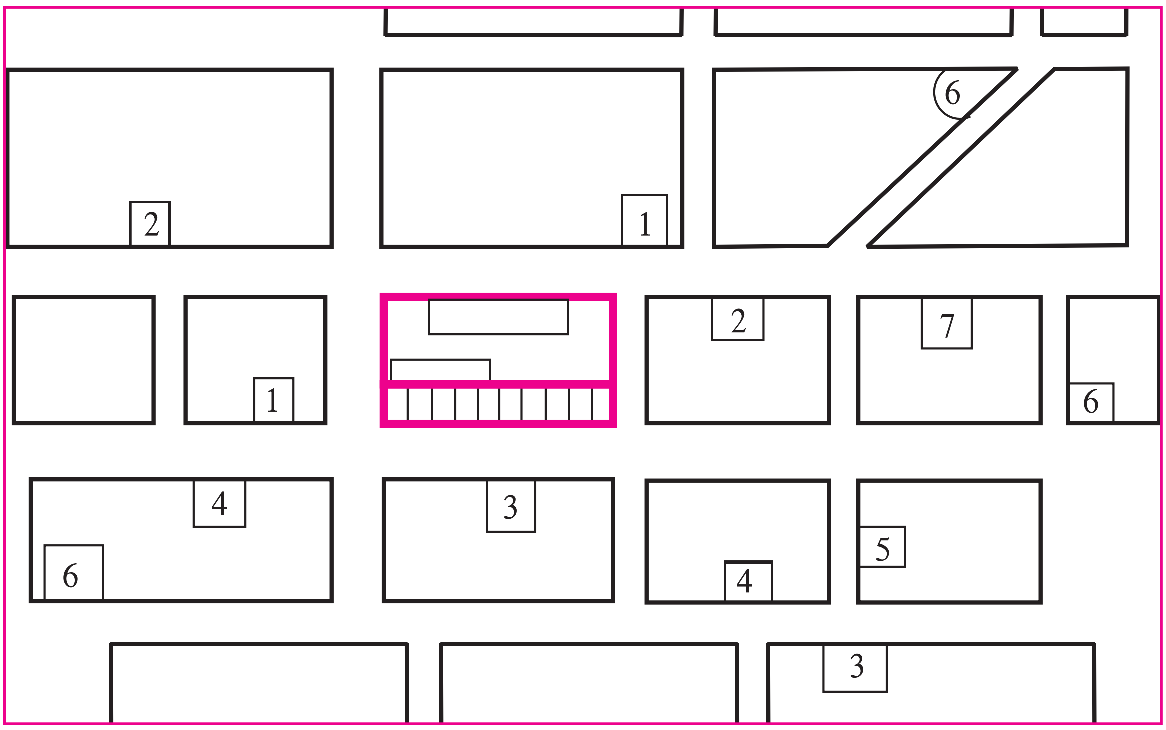
थोड़ा याद करें

मानचित्र बनाते समय मार्ग की दूरी दिखाने के लिए उचित पैमाना लेते हैं । जैसे 1 सेमी = 100 मी या 1 सेमी = 50 मी । क्या त्रिभुजों के गुणधर्म पर विचार किया? ध्यान रहें त्रिभुज के बड़े कोण की सम्मुख भुजा बड़ी होती है ।

उपक्रम :

अपने विद्यालय अथवा घर के चारों ओर के 500 मीटर परिसर के मार्ग का मानचित्र बनाएँ ।

मार्ग पर स्थित दो स्थानों का अंतर कैसे मापेंगे ? सामान्यतः 2 मीटर दूरी पर आपको कितने कदम (steps) चलने पड़ते हैं यह देखें । दो मीटर दूरी पर तीन कदम चलना पड़ा हो तो 90 कदम चलने पर 60 मीटर दूरी तय होगी ऐसा मानेंगे । संक्षेप में परिसर के सभी मार्ग पर चलकर अलग-अलग दूरी निश्चित करनी होगी । तत्पश्चात् जहाँ परस्पर प्रतिच्छेदित करती हैं । उस स्थान पर बनने वाले कोण माप का अनुमान कीजिए । मार्ग की मापी गई लंबाई के लिए उचित पैमाना लेकर मानचित्र बनाएँ । परिसर की दुकानें, टपरी, इमारतें, बस स्टॉप, रिक्सा स्टैंड आदि दर्शाने की कोशिश कीजिए । नीचे मानचित्र का एक नमूना सारिणी के साथ दिया गया है ।



सूची : 1. पुस्तकों की दुकान 2. बस स्टैंड 3. स्टेशनरी की दुकान 4. बैंक 5. दवाइयों की दुकान 6. उपहार गृह 7. साइकिल की दुकान

प्रकीर्ण प्रश्नसंग्रह 3

1. निम्नलिखित बहुवैकल्पिक प्रश्नों के उत्तर दिए गए उत्तर में से सही उत्तर का विकल्प चुनिए ।

   (i) किसी त्रिभुज की दो भुजाएँ 5 सेमी तथा 1.5 सेमी हो तो त्रिभुज की तीसरी भुजा की लंबाई . . . . नहीं होगी ।

   (A) 3.7 सेमी (B) 4.1 सेमी (C) 3.8 सेमी (D) 3.4 सेमी

   (ii) Δ PQR में यदि $\angle R > \angle Q$ तो . . . . होगा ।

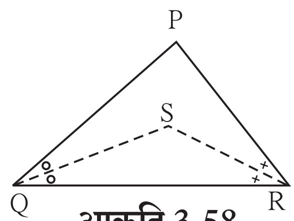
   (A) $QR > PR$ (B) $PQ > PR$ (C) $PQ < PR$ (D) $QR < PR$

   (iii) Δ TPQ में $\angle T = 65^\circ$, $\angle P = 95^\circ$ तो निम्नलिखित में से कौन-सा कथन सत्य है ?

   (A) $PQ < TP$ (B) $PQ < TQ$ (C) $TQ < TP < PQ$ (D) $PQ < TP < TQ$

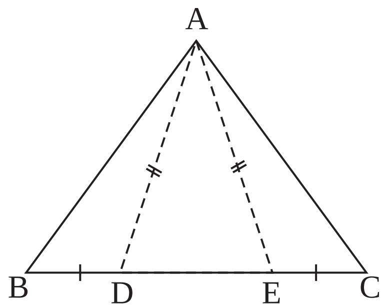
2. समद्विबाहु Δ ABC में AB = AC है । BD तथा CE दो माध्यिकाएँ हैं तो सिद्ध कीजिए कि BD = CE

3. Δ PQR में यदि $PQ > PR$ तथा $\angle Q$ तथा $\angle R$ के समद्विभाजक बिंदु S पर प्रतिच्छेदित करते हैं तो सिद्ध कीजिए कि $SQ > SR$



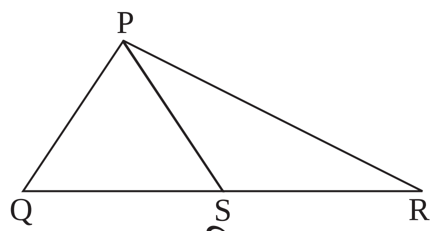
आकृति 3.58

4. आकृति 3.59 में Δ ABC की भुजा BC पर बिंदु D तथा E इस प्रकार हैं कि BD = CE तथा AD = AE तो सिद्ध कीजिए कि $\Delta ABD \cong \Delta ACE$



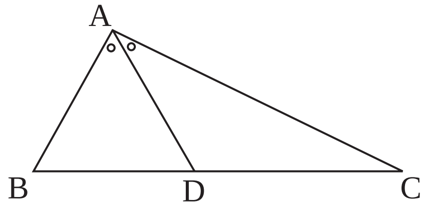
आकृति 3.59

5. आकृति 3.60 में Δ PQR में कोई बिंदु S यह भुजा QR पर स्थित है तो सिद्ध कीजिए कि $PQ + QR + RP > 2PS$



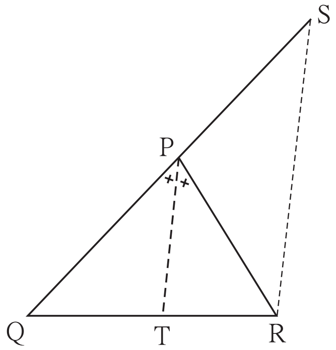
आकृति 3.60

6. आकृति 3.61 में Δ ABC के कोण $\angle BAC$ की समद्विभाजक BC को बिंदु D पर प्रतिच्छेदित करती है तो सिद्ध कीजिए कि AB > BD



आकृति 3.61

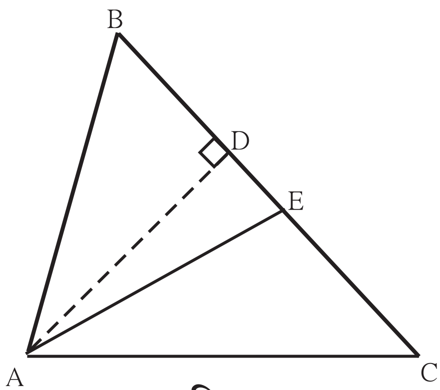
7. आकृति 3.62 में रेख PT यह $\angle QPR$ की समद्विभाजक है । बिंदु R से रेख PT के समांतर खींची गई रेखा, किरण QP को बिंदु S पर प्रतिच्छेदित करती है तो सिद्ध कीजिए कि PS = PR



आकृति 3.62

8. आकृति 3.63 में रेख AD $\perp$ रेख BC
रेख AE, यह $\angle CAB$ का समद्विभाजक है ।
E-D-C है
तो सिद्ध कीजिए कि

$$m\angle DAE = \frac{1}{2}\,(m\angle C - m\angle B)$$



आकृति 3.63

थोड़ा, सोचें

हमने यह सीखा कि यदि दो त्रिभुज समरूप हो तो उनकी संगत भुजाएँ समान अनुपात में होती हैं । क्या दो चतुर्भुजों समरूप हो तो उसकी संगत भुजाएँ समान अनुपात में होगी ? आकृति बनाकर जाँच कीजिए ।
अन्य बहुभुजाकृतियों के लिए भी इस गुणधर्म की जाँच कीजिए ।

4 त्रिभुजों की रचनाएँ

आओ, सीखें

दिए गए त्रिभुज के घटकों की जानकारी के आधार पर त्रिभुज बनाना ।

- आधार, आधार से संलग्न एक कोण तथा शेष दो भुजाओं की लंबाइयों का योग
- आधार, आधार से संलग्न एक कोण तथा शेष दो भुजाओं की लंबाइयों का अंतर
- परिमिति तथा आधार के कोण

थोड़ा याद करें

पिछली कक्षा में हम निम्नलिखित त्रिभुज की रचना सीख चुके हैं ।

✻ सभी भुजाओं की लंबाई दी गई हो तो त्रिभुज की रचना करना ।

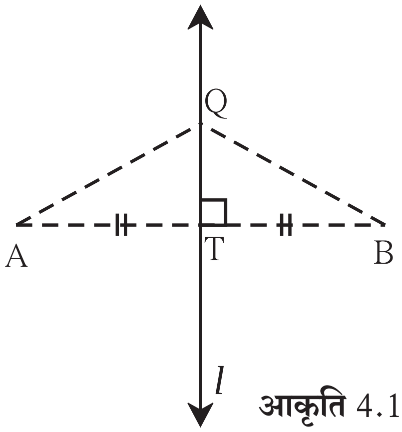
✻ आधार तथा उसे समाविष्ट करने वाले कोण दिए गए हों तो त्रिभुज की रचना करना ।

✻ दो भुजाएँ तथा उनमें समाविष्ट कोण दिए गए हों तो त्रिभुज की रचना करना ।

✻ कर्ण तथा एक भुजा दी गई हो तो समकोण त्रिभुज की रचना करना ।

लंबसमद्विभाजक का प्रमेय

- दिए गए रेखाखंड के अंत:बिंदु उनके लंबसमद्विभाजक पर स्थित प्रत्येक बिंदु से समदूरस्थ होते हैं ।
- रेखाखंड के अंत:बिंदु से समान अंतर पर स्थित प्रत्येक बिंदु रेखाखंड के अंत:बिंदु से समदूरस्थ होते हैं ।



आकृति 4.1

आओ, जानें

त्रिभुज की रचना (Constructions of triangles)

त्रिभुज की रचना करने के लिए तीन मुद्दे आवश्यक हैं । तीन कोण तथा तीन भुजा इनमें से केवल दो मुद्दे दिए गए हों और इसके अतिरिक्त उस त्रिभुज से संबंधित कुछ और जानकारी दी गई हो तब उस जानकारी और दिए गए दो मुद्दों का उपयोग कर त्रिभुज कैसे बनाएगे देखते हैं ।

कोई बिंदु दो भिन्न रेखाओं पर हो तो वह बिंदु उन रेखाओं का प्रतिच्छेदन बिंदु होता है इस गुणधर्म का उपयोग नीचे दी गई रचनाओं में अनेक बार किया गया है ।

रचना I

ऐसे त्रिभुज की रचना करना जिसका आधार, अन्य दो भुजाओं की लंबाइयों का योगफल तथा आधार का कोई एक कोण दिया हो ।

उदा. Δ ABC की रचना कीजिए जिसमें BC = 6.3 सेमी, $\angle B = 75°$ तथा AB + AC = 9 सेमी

हल : सर्वप्रथम अभीष्ट त्रिभुज की कच्ची आकृति बनाएँ ।

स्पष्टीकरण : कच्ची आकृति में दिखाए अनुसार

BC = 6.3 सेमी लंबाईवाला रेखाखंड खींचिए । रेखाखंड BC के बिंदु B से 75° का कोण बनाने वाले किरण पर बिंदु D इस प्रकार लें कि

BD = AB + AC = 9 सेमी

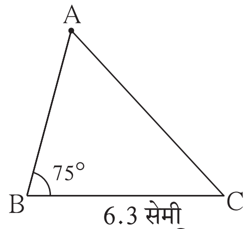
किरण BD पर बिंदु A को खोजना है ।

BA + AD = BA + AC = 9

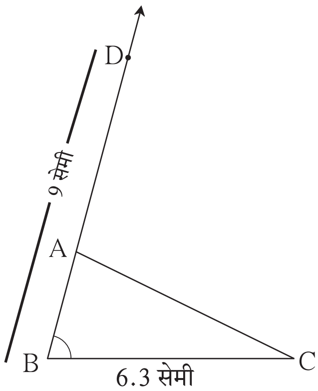
$\therefore$ AD = AC

$\therefore$ बिंदु A यह रेख CD के लंबसमद्विभाजक पर स्थित है ।

$\therefore$ बिंदु A यह किरण BD तथा रेख CD के लंबसमद्विभाजक का प्रतिच्छेदन बिंदु है ।



कच्ची आकृति 4.2



कच्ची आकृति 4.3

रचना के सोपान

(1) 6.3 सेमी लंबाईवाली रेख BC खींचें ।

(2) बिंदु B से 75° का कोण बनाने वाली किरण BP खींचिए ।

(3) किरण BP पर बिंदु D इस प्रकार लीजिए कि d(B,D) = 9 सेमी

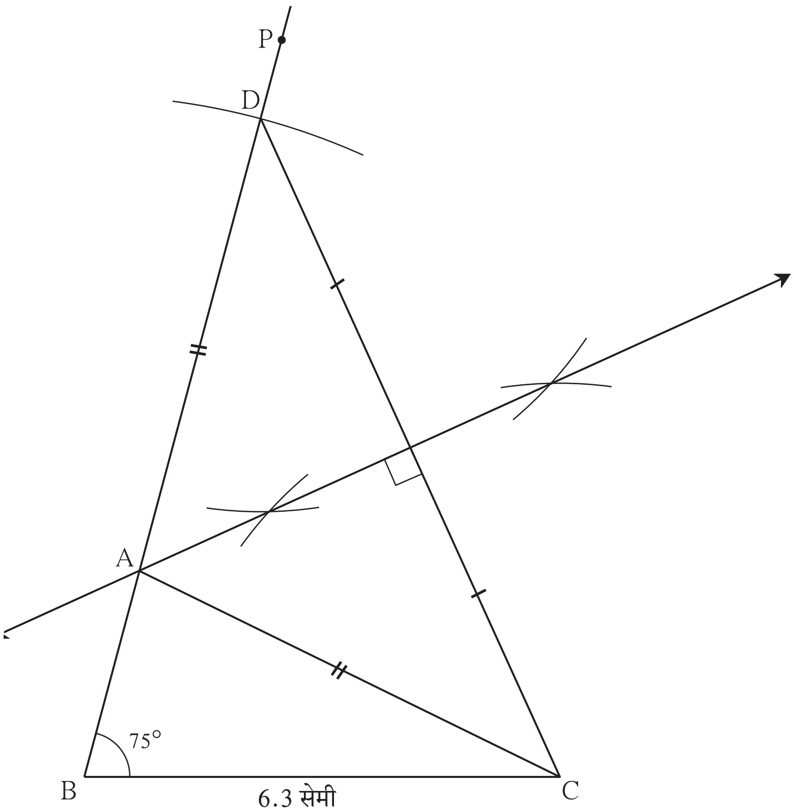
(4) रेख DC खींचिए ।

(5) रेख DC का लंबसमद्विभाजक खींचिए ।

(6) रेख DC के लंबसमद्विभाजक तथा किरण BP के प्रतिच्छेदन बिंदु को A नाम दीजिए ।

(7) रेख AC खींचिए ।

Δ ABC यह अभीष्ट त्रिभुज है ।



पक्की आकृति 4.4

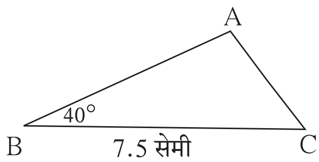
1. Δ PQR की रचना ऐसी कीजिए जिसका आधार QR = 4.2 सेमी, $m\angle Q = 40^\circ$ तथा PQ + PR = 8.5 सेमी
2. Δ XYZ की रचना ऐसी कीजिए जिसका आधार YZ = 6 सेमी, XY + XZ = 9 सेमी $m\angle XYZ = 50^\circ$
3. Δ ABC की रचना ऐसी कीजिए जिसका आधार BC = 6.2 सेमी, $m\angle ACB = 50^\circ$, AB + AC = 9.8 सेमी
4. Δ ABC की रचना ऐसी कीजिए जिसका आधार BC = 5.2 सेमी, $\angle ACB = 45^\circ$ तथा Δ ABC की परिमिति 10 सेमी हो ।

रचना II

त्रिभुज का आधार तथा शेष दो भुजाओं की लंबाइयों का अंतर और आधार का एक कोण दिया गया हो तो त्रिभुज की रचना करना ।

उदा. (1) ΔABC में BC = 7.5 सेमी, $m\angle ABC = 40^\circ$, AB − AC = 3 सेमी तो ΔABC की रचना कीजिए ।

हल : सर्वप्रथम त्रिभुज की कच्ची आकृति बनाइए ।



कच्ची आकृति 4.5

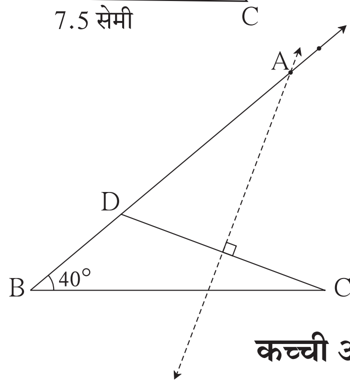
स्पष्टीकरण : AB − AC = 3 सेमी $\therefore$ AB > AC

रेखाखंड BC खींचे । रेख BC से 40° का कोण बनाने वाली किरण BL खींचिए । इस किरण पर बिंदु A प्राप्त करने के लिए किरण BL पर बिंदु D इस प्रकार लिया कि BD = 3 सेमी तथा B−D−A और BD = AB −AD = 3 तथा AB − AC = 3 दिया गया है ।

$\therefore$ AD = AC

$\therefore$ A बिंदु रेख DC के लंबसमद्विभाजक पर है ।

$\therefore$ बिंदु A किरण BL तथा रेख DC के लंबसमद्विभाजक का प्रतिच्छेदन बिंदु है ।



कच्ची आकृति 4.6

रचना के सोपान

(1) 7.5 सेमी लंबाईवाला रेख BC खींचिए ।

(2) बिंदु B से 40° का कोण बनाने वाली किरण BL खींचिए ।

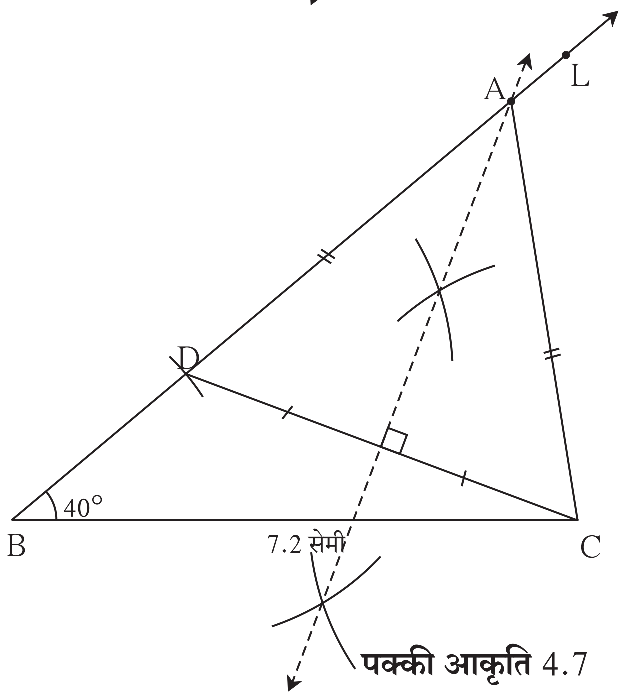
(3) किरण BL पर बिंदु D इस प्रकार लीजिए कि BD = 3 सेमी ।

(4) रेख CD खींचकर उसका लंब समद्विभाजक खींचिए ।

(5) किरण BL को रेख CD का लंबसमद्विभाजक जिस स्थान पर प्रतिच्छेदित करता है, उसे A नाम दीजिए ।

(6) रेख AC खींचिए ।

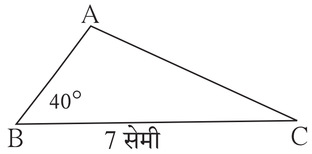
Δ ABC यह अभीष्ट त्रिभुज है ।



पक्की आकृति 4.7

उदा. 2 Δ ABC में भुजा BC = 7 सेमी, $\angle B = 40^\circ$ तथा AC − AB = 3 सेमी तो Δ ABC की रचना कीजिए ।

हल : त्रिभुज की कच्ची आकृति खींचिए ।



कच्ची आकृति 4.8

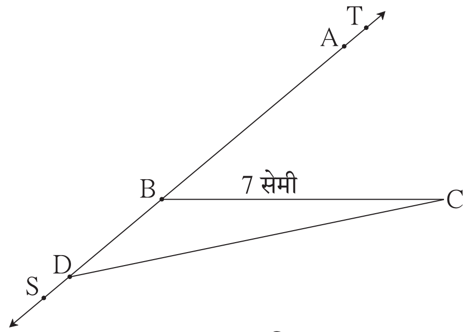
BC = 7 सेमी खींचें । AC > AB रेखाखंड BC के बिंदु B से 40° का कोण बनाने वाली किरण BT खींचते हैं । बिंदु A इसी किरण पर स्थित है । किरण BT के विपरीत किरण पर बिंदु D इस प्रकार से लीजिए कि BD = 3 सेमी ।

अब AD = AB + BD = AB + 3 = AC

(क्योंकि AC − AB = 3 सेमी दिया गया है ।)

$\therefore$ AD = AC

$\therefore$ बिंदु A रेख CD के लंबसमद्विभाजक पर है ।



कच्ची आकृति 4.9

रचना के सोपान

(1) 7 सेमी लंबाई का रेखाखंड BC खींचिए ।

(2) बिंदु B से 40° का कोण बनाने वाली किरण BT खींचें ।

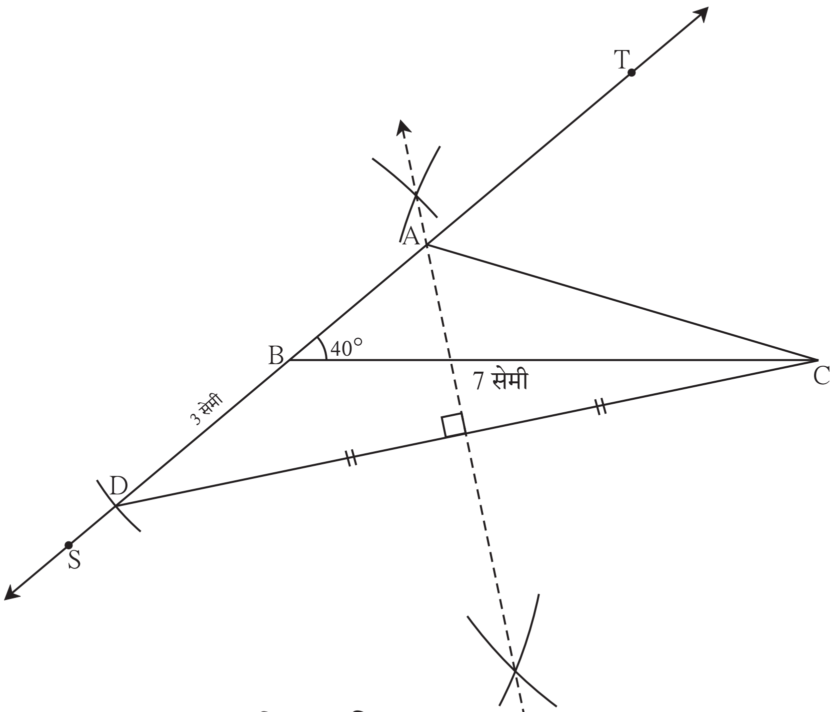
(3) किरण BT के विपरीत किरण BS पर बिंदु D इस प्रकार लीजिए कि BD = 3 सेमी

(4) रेख DC का लंबसमद्विभाजक खींचिए ।

(5) रेख DC का लंबसमद्विभाजक किरण BT को जिस बिंदु पर प्रतिच्छेदित करता है उस बिंदु को A नाम दीजिए ।

(6) रेख AC खींचिए ।

Δ ABC यह अभीष्ट त्रिभुज है ।



पक्की आकृति 4.10

प्रश्नसंग्रह 4.2

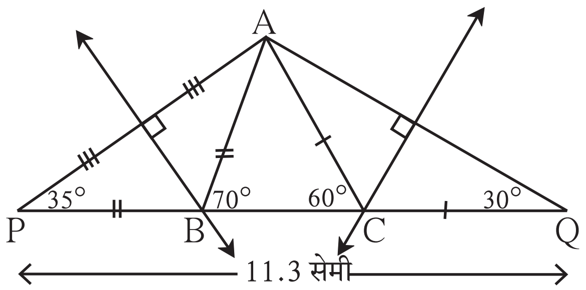
1. Δ XYZ की रचना कीजिए जिसमें YZ = 7.4 सेमी । $m\angle XYZ = 45^\circ$ तथा XY − XZ = 2.7 सेमी ।
2. Δ PQR की रचना कीजिए जिसमें QR = 6.5 सेमी । $m\angle PQR = 60^\circ$ तथा PQ − PR = 2.5 सेमी ।
3. Δ ABC की रचना कीजिए जिसमें BC = 6 सेमी । $m\angle ABC = 100^\circ$ तथा AC − AB = 2.5 सेमी ।

रचना III

त्रिभुज की रचना करना जिसकी परिमिति तथा आधार के दोनों कोणों के माप दिए गए हों ।

उदा. Δ ABC में AB + BC + CA = 11.3 सेमी, $\angle B = 70^\circ$, $\angle C = 60^\circ$ तो Δ ABC कि रचना करें ।

हल : त्रिभुज की कच्ची आकृति बनाइए ।



कच्ची आकृति 4.11

स्पष्टीकरण : इस आकृति में रेख BC पर बिंदु P तथा Q इस प्रकार लीजिए कि

PB = AB, CQ = AC

$\therefore$ PQ = PB + BC + CQ = AB + BC +AC = 11.3 सेमी

अब ΔPBA में PB = BA

$\therefore$ $\angle APB = \angle PAB$ तथा $\angle APB + \angle PAB$ = बहिष्कोण ABC = 70°. . . . (दूरस्थ अंतःकोण प्रमेय से)

$\therefore$ $\angle APB = \angle PAB = 35^\circ$ इसी प्रकार $\angle CQA = \angle CAQ = 30^\circ$

अब हम Δ PAQ की रचना कर सकते हैं ।

क्योंकि इस त्रिभुज के दो कोण तथा उसमे समाविष्ट भुजा PQ ज्ञात है ।

$\because$ BA = BP

$\therefore$ बिंदु B के रेख AP के लंबसमद्‌विभाजक पर स्थित है तथा CA = CQ

$\therefore$ बिंदु C रेख AQ को लंबसमद्‌विभाजक पर स्थित है रेख AP तथा रेख AQ के लंबसमद्‌विभाजक खींचें ।

दोनो समद्‌विभाजक में रेख PQ को जिन बिंदुओं पर प्रतिच्छेदित करती है वहाँ क्रमशः बिंदु B तथा बिंदु C प्राप्त होते हैं ।

रचना के सोपान

(1) 11.3 सेमी लंबाई वाला रेखाखंड PQ खींचिए ।

(2) बिंदु P से 35° माप का कोण बनाने वाली किरण खींचिए ।

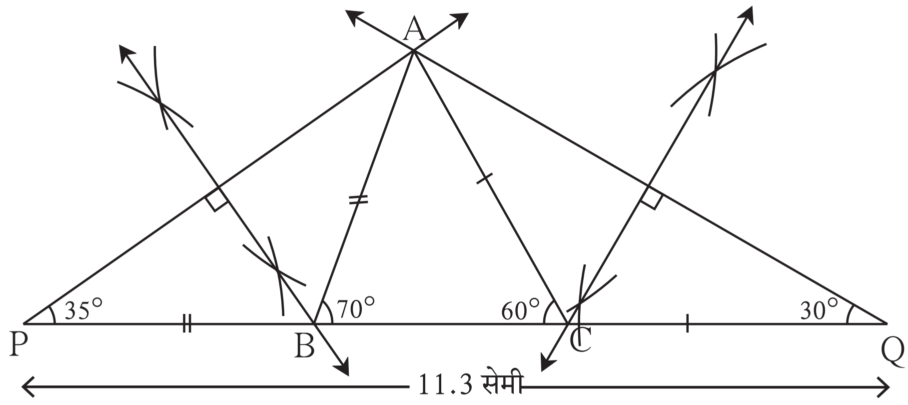
(3) बिंदु Q से 30° माप का कोण बनाने वाली किरण खींचिए ।

(4) दोनों किरणों के प्रतिच्छेदन बिंदु को A नाम दीजिए ।

(5) रेख AP तथा रेख AQ के लंबसमद्‌विभाजक खींचिए । वे रेखा PQ को जिन बिंदुओं पर प्रतिच्छेदित करते हैं उन्हें क्रमशः B और C नाम दीजिए ।

(6) रेख AB और रेख AC खींचिए ।

Δ ABC यह अभीष्ट त्रिभुज है ।



पक्की आकृति 4.12

प्रश्नसंग्रह 4.3

1. Δ PQR की रचना इस प्रकार करें कि $\angle Q = 70^\circ$, $\angle R = 80^\circ$ तथा PQ + QR + PR = 9.5 सेमी ।
2. Δ XYZ की रचना इस प्रकार करें कि $\angle Y = 58^\circ$, $\angle X = 46^\circ$ तथा त्रिभुज की परिमिति 10.5 सेमी हो ।
3. Δ LMN की रचना इस प्रकार करें कि $\angle M = 60^\circ$, $\angle N = 80^\circ$ तथा LM + MN + NL = 11 सेमी ।

प्रकीर्ण प्रश्नसंग्रह 4

1. Δ XYZ की रचना कीजिए जिसमें XY + XZ = 10.3 सेमी, YZ = 4.9 सेमी, $\angle XYZ = 45^\circ$
2. Δ ABC की रचना कीजिए जिसमें $\angle B = 70^\circ$, $\angle C = 60^\circ$, AB + BC + AC = 11.2 सेमी
3. किसी त्रिभुज की परिमिति 14.4 सेमी है और भुजाओं का अनुपात 2:3:4 हो, तो त्रिभुज की रचना कीजिए ।
4. Δ PQR की रचना कीजिए जिसमें PQ – PR = 2.4 सेमी, QR = 6.4 सेमी तथा $\angle PQR = 55^\circ$

ICT Tools or Links

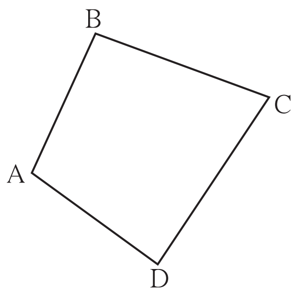
संगणक पर त्रिभुज की रचना जिओजिब्रा इस सॉफ्टवेअर की सहायता से करके देखें और इसका आनंद लें । रचना क्रमांक 3, इस सॉफ्टवेअर में अलग प्रकार से करके दिखाया गया है इस विधि का भी अध्ययन कीजिए ।

5 चतुर्भुज

आओ, सीखें

- समांतर चतुर्भुज
- समांतर चतुर्भुज की कसौटियाँ
- समचर्तुभुज
- आयत
- वर्ग
- समलंब चतुर्भुज
- त्रिभुज की दो भुजाओं के मध्यबिंदुओं का प्रमेय

थोड़ा याद करें



आकृति 5.1

1. □ABCD के संदर्भ में निम्नलिखित जोड़ियाँ लिखिए ।

संलग्न भुजाओं की जोड़ियाँ :		संलग्न कोणों की जोड़ियाँ :	
(1) ... , ...	(2) ... , ...	(1) ... , ...	(2) ... , ...
(3) ... , ...	(4) ... , ...	(3) ... , ...	(4) ... , ...

सम्मुख भुजाओं की जोड़ियाँ (1) ..... , ... (2) ..... , ...

सम्मुख कोणों की जोड़ियाँ (1) ..... , ... (2) ..... , ...

जरा याद करते हैं मेरा प्रकार तथा मेरे गुणधर्म हैं ।

मैं चतुर्भुज हूँ

1. मेरी सम्मुख भुजाओं की दोनों जोड़ियाँ समांतर → [   ]
   मेरे गुणधर्म ↓
   - सम्मुख भुजाएँ सर्वांगसम
   - सम्मुख कोण ....
   - विकर्ण ....
2. मेरे सभी कोण समकोण → [   ]
   मेरे गुणधर्म ↓
   - सम्मुख भुजा ....
   - विकर्ण .....
3. मेरी सभी भुजाओं की लंबाई समान → [   ]
   मेरे गुणधर्म ↓
   - सम्मुख कोण ....
   - विकर्ण .....
4. मेरे सभी कोण तथा सभी भुजाएँ समान → [   ]
   मेरे गुणधर्म ↓
   - विकर्ण .....
5. मेरे सम्मुख भुजाओं की एक ही जोड़ी समांतर → [   ]

चतुर्भुज के विभिन्न प्रकार तथा उनके गुणधर्म हमें पता हैं । भुजा तथा कोण का माप नापना उन्हें मोड़ना आदि कृतियों द्‌वारा वे आपने ज्ञात किया है । इन गुणधर्मों को तर्कों की सहायता से किस प्रकार सिद्‌ध कर सकते हैं । इस बात का अध्ययन करेंगे ।

जिस गुणधर्मों को तर्कों की सहायता से सिद्‌ध करते हैं उसी गुणधर्म को प्रमेय कहते हैं ।

आयत, समचर्तुभुज तथा वर्ग विशिष्ट प्रकार के समांतर चतुर्भुज होते हैं । यह इस पाठ का अध्ययन करने पर आप समझ सकते हैं । इसलिए पहले समांतर चतुर्भुज के अध्ययन से प्रारंभ करेंगे ।

आओ, जानें

समांतर चतुर्भुज (Parellelogram)

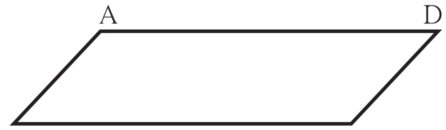
जिस चतुर्भुज की सम्मुख भुजाओं की दोनों जोड़ियाँ समांतर हों उसे समांतर चतुर्भुज कहते हैं ।

प्रमेय सिद्‌ध करते समय तथा उदाहरण हल करते समय बार-बार समांतर चतुर्भुज की आकृति खींचनी पड़ती है । अब हम देखेंगे कि आकृति कैसे खींचते हैं ।

माना □ABCD एक समांतर चतुर्भुज बताना है ।

विधि I :

- सर्वप्रथम किसी भी लंबाई के रेखाखंड AB तथा रेखाखंड BC इस प्रकार खींचिए कि उनके मध्य (किसी भी माप का) कोण निर्मित हो ।
- अब रेख AD तथा रेख BC यह समांतर होने चाहिए । अतः बिंदु A से रेख BC के समांतर एक रेखा खींचिए ।



आकृति 5.2

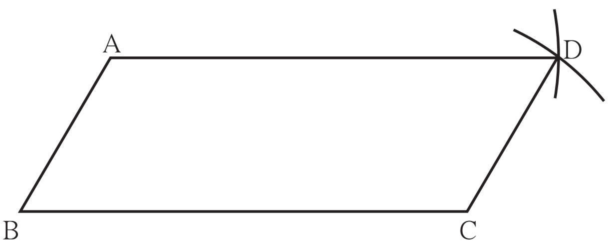
- उसी तरह रेख AB || रेख DC अर्थात बिंदु C से रेख AB के समांतर रेखा खींचिए ।

  दोनों रेखाएँ परस्पर जिस बिंदु पर प्रतिच्छेदित करती है, उसे D नाम दो । इस प्रकार बनने वाला चतुर्भुज ABCD समांतर चतुर्भुज है ।

विधि II :

- किसी भी लंबाईवाली रेख AB तथा रेख BC इस प्रकार खींचिए कि उनके मध्य (किसी भी माप का) कोण निर्मित हो ।
- कंपास में BC के बराबर दूरी लेकर तथा बिंदु A ले बिंदु A को केंद्र मानकर चाप खींचिए ।
- कंपास में AB के समान माप लेकर बिंदु C को केंद्र मानकर चाप खींचिए ।
- चापों के प्रतिच्छेदन बिंदु को D नाम दीजिए। रेख AD तथा रेख CD मिलाइए ।

  इस तरह बना □ABCD समांतर चतुर्भुज है ।



आकृति 5.3

दूसरी विधि से बनाए गए चतुर्भुज में हमने सम्मुख भुजाओं को समान लेकर रचना की है । इसकी सम्मुख भुजाएँ समांतर क्यों होती है, यह प्रमेय सिद्‌ध करने पर समझ में आएगा ।

कृति I संलग्न भुजाओं और कोणों के भिन्न-भिन्न माप लेकर पाँच विभिन्न समांतर चतुर्भुज बनाइए ।

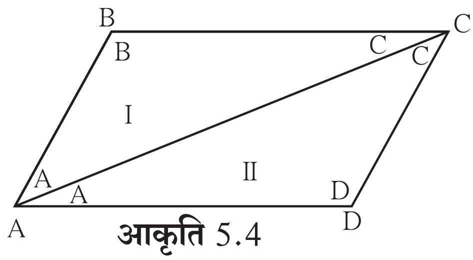
समांतर चतुर्भुज का प्रमेय सिद्‌ध करने के लिए सर्वांगसम त्रिभुजों का उपयोग होता है । उसे किस प्रकार करना है यह समझने के लिए निम्नलिखित कृति कीजिए ।

कृति II

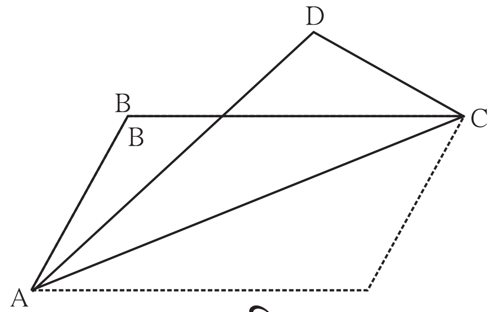
- एक मोटे कागज पर समांतर चतुर्भुज ABCD बनाइए । इसका विकर्ण AC खींचें । आकृति में दर्शाए अनुसार चर्तुभुज के शीर्षबिंदुओं के नाम चतुर्भुज के अंदर भी लिखिए ।
- □ABCD को विकर्ण AC पर मोड़ने से ΔADC तथा ΔCBA एक-दूसरे को पूर्णतः ढँकते हैं क्या, देखें ।
- □ABCD को विकर्ण AC पर काटकर ΔADC तथा ΔCBA अलग कीजिए । ΔCBA को घुमाकर देखिए कि वे ΔADC को पूर्णतः ढ़कते हैं क्या? देखें ।

क्या समझें ? ΔCBA की कौन-सी भुजाएँ ΔADC की कौन-सी भुजाओं को पूर्णता ढँकती हैं? ΔCBA का कौन-सा कोण यह ΔADC के कौन-से कोण को पूर्णतः ढँकता है?

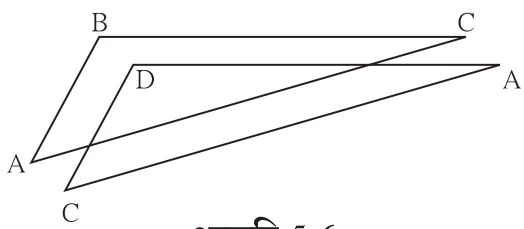
भुजा DC यह भुजा AB को और भुजा AD यह भुजा CB को पूर्णतः ढँकती है । उसी प्रकार $\angle$B यह $\angle$D से मिलता है ।



आकृति 5.4



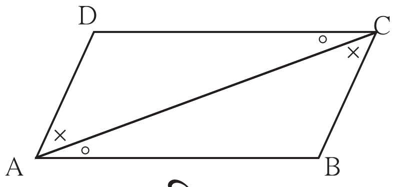
आकृति 5.5



आकृति 5.6

अर्थात ऐसा दिखता है कि समांतर चतुर्भुज की सम्मुख भुजाएँ तथा सम्मुख कोण सर्वांगसम होते हैं । समांतर चतुर्भुज के इसी गुणधर्म को अब हम सिद्‌ध करेंगे ।

प्रमेय 1. समांतर चतुर्भुज की सम्मुख भुजाएँ तथा सम्मुख कोण सर्वांगसम होते हैं ।



आकृति 5.7

दत्त : □ABCD समांतर चतुर्भुज है ।
अर्थात भुजा AB || भुजा DC, भुजा AD || भुजा BC

साध्य : रेख AD ≅ रेख BC ; रेख DC ≅ रेख AB
∠ADC ≅ ∠CBA, तथा ∠DAB ≅ ∠BCD

रचना : कर्ण AC खींचिए ।

उपपत्ति : रेख DC || रेख AB तथा विकर्ण AC तिर्यक रेखा है ।

∴ ∠DCA ≅ ∠BAC ....(1) }
तथा ∠DAC ≅ ∠BCA ....(2) } ......एकांतर कोण

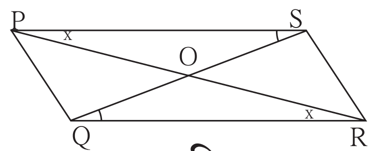
अब, ΔADC तथा ΔCBA में,
∠DAC ≅ ∠BCA .... कथन (2) से
∠DCA ≅ ∠BAC .... कथन (1) से
भुजा AC ≅ भुजा CA .... सामान्य भुजा
∴ ΔADC ≅ ΔCBA ...... कोभुको कसौटी
∴भुजा AD ≅ भुजा CB .... सर्वांगसम त्रिभुज की संगत भुजाएँ
तथा भुजा DC ≅ भुजा AB .... सर्वांगसम त्रिभुज की संगत भुजाएँ
इसी प्रकार, ∠ADC ≅ ∠CBA .... सर्वांगसम त्रिभुज का संगत कोण
इसी प्रकार ∠DAB ≅ ∠BCD सिद्‌ध कर सकते हैं ।

थोड़ा, सोचें

उपर्युक्त प्रमेय में ∠DAB ≅ ∠BCD सिद्‌ध करने के लिए रचना में परिवर्तन करना पड़ेगा क्या? वह परिवर्तन कर उपपत्ति किस प्रकार लिखेंगे ।

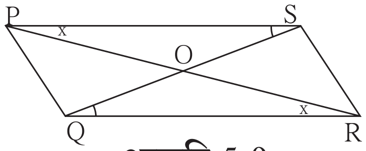
समांतर चतुर्भुज का एक और गुणधर्म समझने के लिए निम्नलिखित कृति कीजिए ।

कृति : समांतर चतुर्भुज □PQRS बनाइए ।
विकर्ण PR तथा विकर्ण QS खींचिए । उनके प्रतिच्छेदत बिंदु को O यह नाम दीजिए ।
प्रत्येक विकर्ण के हुए दो भागों की लंबाई की तुलना विभाजक की सहायता से कीजिए, क्या समझा?



आकृति 5.8

प्रमेय : समांतर चतुर्भुज के विकर्ण परस्पर एक-दूसरे को समद्विभाजित करते हैं ।



आकृति 5.9

दत्त : □PQRS समांतर चतुर्भुज है ।
विकर्ण PR तथा विकर्ण QS पपरस्पर बिंदु O पर प्रतिच्छेदित करते हैं ।

साध्य : रेख PO ≅ रेख RO, रेख SO ≅ रेख QO

उपपत्ति : ΔPOS तथा ΔROQ में

$\angle$OPS ≅ $\angle$ORQ .... एकांतर कोण

भुजा PS ≅ भुजा RQ .... समांतर चतुर्भुज की सम्मुख भुजाएँ

$\angle$PSO ≅ $\angle$RQO .... एकांतर कोण

$\therefore \Delta$POS ≅ ΔROQ .... कोभुको कसौटी

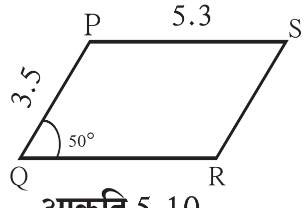
$\therefore$ रेख PO ≅ रेख RO ....
तथा रेख SO ≅ रेख QO .... } ...... सर्वांगसम त्रिभुजों की संगत भुजाएँ

इसे ध्यान में रखें

- समांतर चतुर्भुज की सम्मुख भुजाएँ सर्वांगसम होती हैं ।
- समांतर चतुर्भुज के सम्मुख कोण सर्वांगसम होते हैं ।
- समांतर चतुर्भुज के विकर्ण परस्पर एक-दूसरे को समद्विभाजित करते हैं ।

हल किए गए उदाहरण

उदा. (1) □PQRS एक समांतर चतुर्भुज है । PQ = 3.5, PS = 5.3 $\angle Q = 50^\circ$ तो □PQRS की अन्य भुजाओं तथा कोणों के माप ज्ञात कीजिए ।



आकृति 5.10

हल : □PQRS समांतर चतुर्भुज है ।

$\therefore \angle Q + \angle P = 180^\circ$ ....अंतःकोण

$\therefore\ 50^\circ + \angle P = 180^\circ$

$\therefore\ \angle P = 180^\circ - 50^\circ = 130^\circ$

अब, $\angle P = \angle R$ तथा $\angle Q = \angle S$ ....समांतर चतुर्भुज के सम्मुख कोण

$\therefore\ \angle R = 130^\circ$ तथा $\angle S = 50^\circ$

उसी प्रकार, PS = QR तथा PQ = SR ....समांतर चतुर्भुज की सम्मुख भुजाएँ

$\therefore$ QR = 5.3 तथा SR = 3.5

उदा. (2) □PQRS एक समांतर चतुर्भुज है जिसमें $\angle A = (4x + 13)^\circ$ तथा $\angle D = (5x - 22)^\circ$ तो $\angle B$ तथा $\angle C$ के माप ज्ञात कीजिए ।

हल : समांतर चतुर्भुज के संलग्न कोण संपूरक होते हैं ।

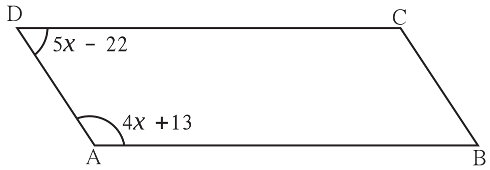
$\angle A$ तथा $\angle D$ संलग्न कोण है ।

$\therefore (4x + 13)^\circ + (5x - 22)^\circ = 180$

$\therefore 9x - 9 = 180$

$\therefore 9x = 189$

$\therefore x = 21$



आकृति 5.11

$\therefore \angle A = 4x + 13 = 4 \times 21 + 13 = 84 + 13 = 97^\circ \quad \therefore \angle C = 97^\circ$

$\angle D = 5x - 22 = 5 \times 21 - 22 = 105 - 22 = 83^\circ \quad \therefore \angle B = 83^\circ$

प्रश्नसंग्रह 5.1

1. समांतर चतुर्भुज □WXYZ के विकर्ण बिंदु O में प्रतिच्छेदित करते हैं ।
   $\angle XYZ = 135^\circ$ तो $\angle XWZ = ?$, $\angle YZW = ?$ यदि $l(OY) = 5$ सेमी तो $l(WY) = ?$

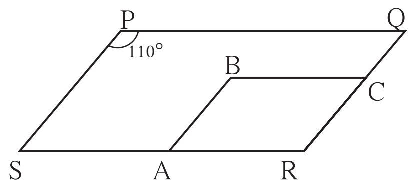
2. समांतर □ABCD में $\angle A = (3x + 12)^\circ$, $\angle B = (2x - 32)^\circ$ तो x का मान ज्ञात कीजिए । इस आधार पर $\angle C$ तथा $\angle D$ के माप ज्ञात कीजिए ।

3. किसी समांतर चतुर्भुज की परिमिति 150 सेमी है । उसकी एक भुजा दूसरी भुजा से 25 सेमी बड़ी है । तो उस चतुर्भुज की सभी भुजाओं की लंबाइयाँ ज्ञात कीजिए ।

4. किसी समांतर चतुर्भुज के दो संलग्न कोणों के मापों का अनुपात $1 : 2$ हो तो उस समांतर चतुर्भुज के सभी कोणों के माप ज्ञात कीजिए ।

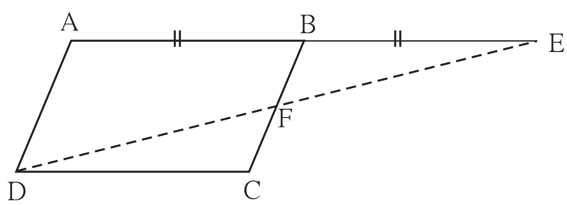
5*. समांतर □ABCD के विकर्ण एक-दूसरे को बिंदु O पर प्रतिच्छेदित करते हैं । यदि AO = 5, BO = 12 तथा AB = 13 तो सिद्‌ध कीजिए कि □ABCD समचतुर्भुज है ।

6. आकृति 5.12 में □PQRS तथा □ABCR दो समांतर चतुर्भुज है । $\angle P = 110^\circ$ तो □ABCR के सभी कोणों के माप ज्ञात कीजिए ।



आकृति 5.12

7. आकृति 5.13 में □ABCD समांतर चतुर्भुज है । किरण AB पर बिंदु E इस प्रकार है कि BE = AB तो सिद्‌ध कीजिए कि रेखा ED यह रेख BC को बिंदु F पर समद्‌विभाजित करती है ।



आकृति 5.13

थोड़ा याद करें

समांतर रेखाओं की कसौटियाँ

1. यदि दो रेखाओं को एक तिर्यक रेखा द्वारा प्रतिच्छेदित करने पर तथा बनने वाली संगत कोणों की एक जोड़ी सर्वांगसम हो तो वे रेखाएँ परस्पर समांतर होती हैं ।
2. यदि दो रेखाओं को एक तिर्यक रेखा द्वारा प्रतिच्छेदित करने पर बनने वाले एकांतर कोणों की जोड़ी सर्वांगसम हो तो वे रेखाएँ परस्पर समांतर होती हैं ।
3. यदि दो रेखाओं को एक तिर्यक रेखा द्वारा प्रतिच्छेदित करने पर बनने वाले अंतःकोणों को एक जोड़ी संपूरक हो तो वे रेखाएँ परस्पर समांतर होती हैं ।

आओ, जानें

समांतर चतुर्भुज की कसौटियाँ (Tests for parallelogram)

माना, □PQRS में PS = QR और PQ = SR है । सिद्ध करना है कि □PQRS समांतर चतुर्भुज है । उसके लिए चतुर्भुज के भुजाओं की कौन-सी जोड़ी समांतर है यह दिखाना होगा ? उसके लिए समांतर रेखाओं की किस कसौटी का उपयोग करना पड़ेगा ?

आकृति 5.14

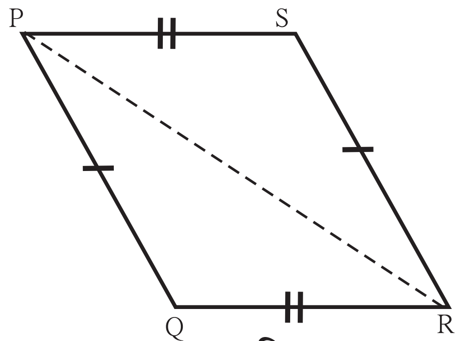
कसौटी के लिए आवश्यक कोण प्राप्त करने के लिए किस तिर्यक रेखा का उपयोग सुविधाजनक होगा ?

प्रमेय : चतुर्भुज की सम्मुख भुजाओं की जोड़ियाँ सर्वांगसम हो तो वह चतुर्भुज समांतर चतुर्भुज होता है ।

दत्त : □PQRS में
भुजा PS ≅ भुजा QR
भुजा PQ ≅ भुजा SR

साध्य : □PQRS समांतर चतुर्भुज है ।

रचना : विकर्ण PR खींचें



आकृति 5.15

उपपत्ति : Δ SPR तथा Δ QRP में,
भुजा SP ≅ भुजा QR ....(दत्त)
भुजा SR ≅ भुजा QP .... (दत्त)
भुजा PR ≅ भुजा RP .... सामान्य भुजा
∴ Δ SPR ≅ Δ QRP ...... भुभुभु कसौटी
∴ ∠SPR ≅ ∠QRP .... सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत कोण
उसी प्रकार ∠PRS ≅ ∠RPQ ..... सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत कोण

∠SPR और ∠QRP यह रेख QR और रेख PS की तिर्यक रेखा PR द्वारा बने एकांतर कोण है ।

∴ भुजा PS || भुजा QR ......(I) समांतर रेखाओं की एकांतर कोण कसौटी

उसी प्रकार ∠PRS और ∠RPQ रेख PQ तथा रेख SR की तिर्यक रेखा PR द्‌वारा बने एकांतर कोण है ।

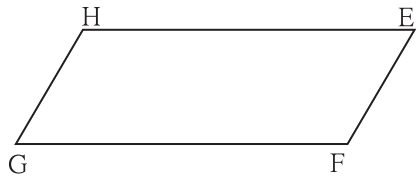
∴ भुजा PQ || भुजा SR ......(II) समांतर रेखाओं की एकांतर कोण कसौटी

∴ (I) तथा (II) के आधार पर □PQRS यह समांतर चतुर्भुज है ।

प्रारंभ में समांतर चतुर्भुज की रचनाओं की दो विधियाँ दी गई हैं । दूसरी विधि में समान सम्मुख भुजाओंवाले चतुर्भुज की रचना की है ।

ऐसा चतुर्भुज समांतर चतुर्भुज क्यों होता है, यह ध्यान में आया क्या ?

प्रमेय : चतुर्भुज की सम्मुख कोणों की जोड़ियाँ सर्वांगसम हो तो वह चतुर्भुज समांतर चतुर्भुज होता है ।



आकृति 5.16

नीचे दिए गए दत्त, साध्य तथा उपपत्ति में रिक्त स्थान की पूर्ति कीजिए ।

दत्त : □EFGH मे ∠E ≅ ∠G

तथा ∠.......... ≅ ∠..........

साध्य : □EFGH यह ....

उपपत्ति : माना ∠E = ∠G = x तथा ∠H = ∠F = y

चतुर्भुज के चारों कोणों के मापों का योगफल .... होता है ।

∴ ∠E + ∠G + ∠H + ∠F = ...

∴ x + y + ... + ... = ...

∴ □x + □y = ...

∴ $x + y = 180°$

∴ ∠G + ∠H = ...

रेख HE तथा रेख GF की तिर्यक रेखा HG के प्रतिच्छेदन से ∠G तथा ∠H यह अंतःकोण बनते हैं ।

∴ भुजा HE || भुजा GF .... (I) समांतर रेखाओं की अंतःकोण कसौटी

उसी प्रकार ∠G + ∠F = ...

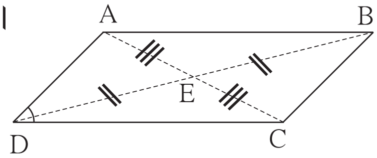
∴ भुजा .... || भुजा .... (II) समांतर रेखाओं की अंतःकोण कसौटी

∴ (I) तथा (II) से □EFGH यह .... है ।

प्रमेय : यदि चतुर्भुज के विकर्ण परस्पर समद्विभाजित करते हों तो वह चतुर्भुज समांतर चतुर्भुज होता है ।

दत्त : □ABCD के विकर्ण परस्पर बिंदु E पर समद्विभाजित करते हैं ।
अर्थात रेख AE ≅ रेख CE, रेख BE ≅ रेख DE

साध्य : □ABCD यह समांतर चतुर्भुज है ।



आकृति 5.17

उपपत्ति : नीचे दिए गए प्रश्नों के उत्तर ज्ञात कर तथा उपपत्ति स्वयं लिखिए ।

1. रेख AB || रेख DC यह सिद्ध करने हेतु एकांतर कोणों की कौन-सी जोड़ी सर्वांगसम दर्शानी होगी? एकांतर कोणों की वह जोड़ी कौन-सी तिर्यक रेखा द्वारा प्राप्त होगी ?
2. एकांतर कोणों की चुनी गई जोड़ियों के कोण कौन-से त्रिभुजों के कोण हैं?
3. उनमें से कौन-से त्रिभुज किस कसौटी के अनुसार सर्वांगसम हैं?
4. इस प्रकार विचार कर रेख AD || रेख BC सिद्ध कर सकते हैं । ना ?

कोई चतुर्भुज समांतर चतुर्भुज है यह सिद्ध करने के लिए उपर्युक्त प्रमेय का उपयोग होता है । इसीलिए इन प्रमेयों को समांतर चतुर्भुज की कसौटियाँ कहते हैं ।

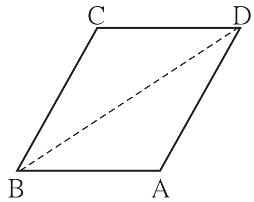
एक प्रमेय का उपयोग समांतर चतुर्भुज की कसौटी के रूप में होता है ।

प्रमेय : किसी चतुर्भुज के सम्मुख भुजाओं की एक जोड़ी सर्वांगसम तथा समांतर हो तो वह चतुर्भुज समांतर चतुर्भुज होता है ।

दत्त : □ABCD में रेख CB ≅ रेख DA तथा रेख CB || रेख DA

साध्य : □ABCD समांतर चतुर्भुज है ।

रचना : विकर्ण BD खींचिए ।



आकृति 5.18

नीचे दी गई संक्षिप्त उपपत्ति को विस्तार से लिखिए ।

Δ CBD ≅ Δ ADB ....भु-को-भु कसौटी

$\therefore$ $\angle$CDB ≅ $\angle$ABD ..... सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत कोण

$\therefore$ रेख CD || रेख BA ..... समांतर रेखाओं की एकांतर कोण कसौटी

इसे ध्यान में रखें

- जिस चतुर्भुज की सम्मुख कोणों की जोड़ियाँ सर्वांगसम हो, वह चतुर्भुज समांतर चतुर्भुज होता है ।
- जिस चतुर्भुज की सम्मुख भुजाओं की जोड़ियाँ सर्वांगसम होती हैं वह चतुर्भुज समांतर चतुर्भुज होता है ।
- जिस चतुर्भुज के विकर्ण परस्पर समद्विभाजित करते हो, वह चतुर्भुज समांतर चतुर्भुज होता है ।
- जिस चतुर्भुज की सम्मुख भुजाओं की एक जोड़ी सर्वांगसम तथा समांतर हो तो वह चतुर्भुज समांतर चतुर्भुज होता है ।

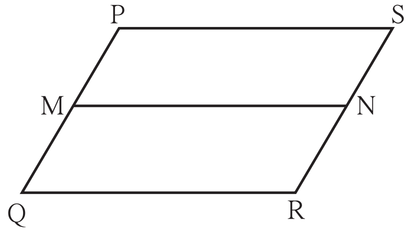
इन प्रमेयों को समांतर चतुर्भुज की कसौटियाँ कहते हैं ।

थोड़ा, सोचें

कॉपी में छपी गई रेखाएँ परस्पर समांतर होती हैं । इन रेखाओं का उपयोग कर समांतर चतुर्भुज की रचना कैसे कर सकते हैं?

हल किए गए उदाहरण

उदा. (1) □PQRS एक समांतर चतुर्भुज है । बिंदु M यह भुजा PQ का तथा बिंदु N भुजा RS का मध्यबिंदु है । तो सिद्ध कीजिए कि □MQRN समांतर चतुर्भुज हैं ।



आकृति 5.19

दत्त : □PQRS समांतर चतुर्भुज है । भुजा PQ तथा भुजा RS के मध्यबिंदु क्रमशः M तथा N है ।

साध्य : □PMNS समांतर चतुर्भुज है ।
□MQRN समांतर चतुर्भुज है ।

उपपत्ति : भुजा PQ || भुजा SR

∴ भुजा PM || भुजा SN ...... (∵ P-M-Q; S-N-R) ......(I)

उसी प्रकार भुजा PQ ≅ भुजा SR

$\therefore \frac{1}{2}$ PQ = $\frac{1}{2}$ SR (∵ PQ = SR)

∴ PM = SN

∴ भुजा PM ≅ भुजा SN ..... (∵ M तथा N मध्यबिंदु हैं)......(II)

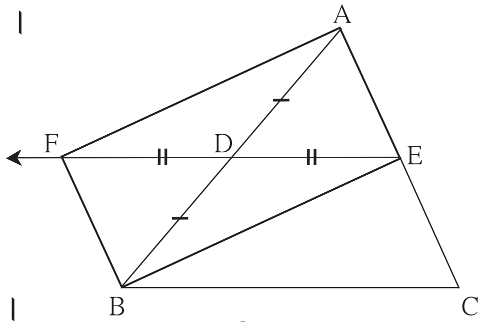
∴ (I) तथा (II) से □PMNQ यह समांतर चतुर्भुज है,

इसी प्रकार हम सिद्ध कर सकते हैं कि □MQRN समांतर चतुर्भुज हैं ।

उदा. (2) Δ ABC की भुजाओं AB तथा AC के मध्यबिंदु क्रमशः D तथा E है । किरण ED पर बिंदु F इस प्रकार है कि ED = DF । तो सिद्ध कीजिए कि □AFBE समांतर चतुर्भुज है ।
इस उदाहरण के लिए दत्त तथा साध्य स्वयं लिखें और उपपत्ति में रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए।

दत्त : --------------------

साध्य : -----------------------



आकृति 5.20

उपपत्ति : रेख AB तथा रेख EF यह □AFBE का ________ है ।

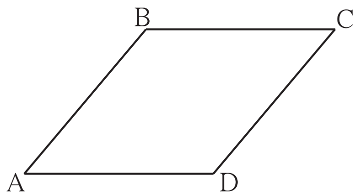
रेख AD ≅ रेख DB....... ________

रेख ________ ≅ रेख ________.......रचना ।

∴ □AFBE के विकर्ण एक-दूसरे का ________

∴ ________ कसौटी से □AFBE समांतर चतुर्भुज है ।

उदा. (3) सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक समचर्तुभुज, समांतर चतुर्भुज होता है ।



आकृति 5.21

दत्त : □ABCD समचर्तुभुज है

साध्य : □ABCD समांतर चतुर्भुज है ।

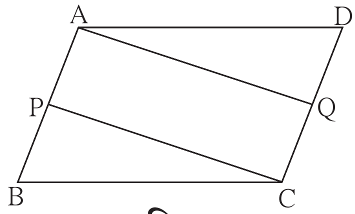
उपपत्ति : AB = BC = CD = AD (दत्त)

∴ भुजा AB ≅ भुजा CD तथा भुजा BC ≅ भुजा AD

∴ □ABCD समांतर चतुर्भुज है ।.... (समांतर चतुर्भुज की सम्मुख भुजा कसौटी)

प्रश्नसंग्रह 5.2

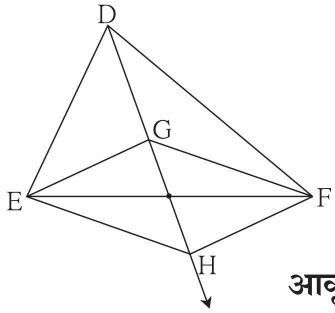
1. आकृति 5.22 में, □ABCD समांतर चतुर्भुज है । बिंदु P तथा बिंदु Q क्रमशः भुजा AB तथा भुजा DC के मध्यबिंदु हैं तो सिद्‌ध कीजिए कि □APCQ समांतर चतुर्भुज है ।



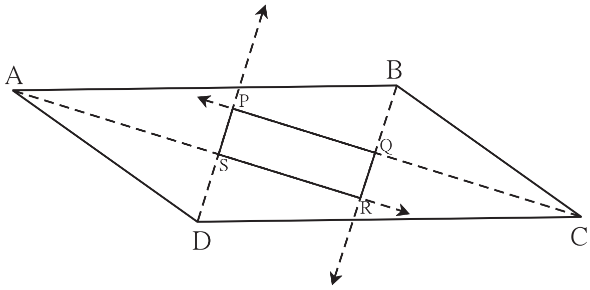
आकृति 5.22

2. सिद्‌ध कीजिए कि, आयत एक समांतर चतुर्भुज होता है ।

3. आकृति 5.23 में, बिंदु G, Δ DEF की माध्यिकाओं का संगामी बिंदु है । किरण DG पर बिंदु H इस प्रकार लें कि D-G-H तथा DG = GH, हो तो सिद्‌ध कीजिए कि □GEHF समांतर चतुर्भुज है ।



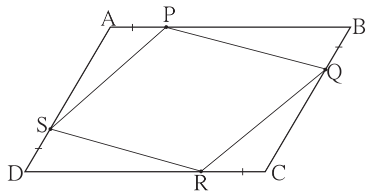
आकृति 5.23



आकृति 5.24

4*. सिद्‌ध कीजिए कि, समांतर चतुर्भुज के चारों कोणों के समद्विभाजकों से बना चतुर्भुज आयत होता है । (आकृति 5.24)

5. संलग्न आकृति 5.25 में समांतर चतुर्भुज □ABCD की भुजाओं पर P, Q, R, S इस प्रकार है कि, AP = BQ = CR = DS तो सिद्‌ध कीजिए कि □PQRS समांतर चतुर्भुज है ।



आकृति 5.25

आओ, जानें

आयत, समचर्तुभुज तथा वर्ग के विशिष्ट गुणधर्म (Properties of rectangle, rhombus and square)

आयत, समचतुर्भुज तथा वर्ग भी समांतर चतुर्भुज ही होते हैं । इसीलिए उनकी सम्मुख भुजाओं का समान होना, सम्मुख कोणों का समान होना तथा विकर्णों का परस्पर समद्विभाजित होना ये गुणधर्म तीनों प्रकार के चतुर्भुजों में होते हैं ।

किंतु इनसे भी अधिक गुणधर्म इन तीनों प्रकार के चतुर्भुजों में होते हैं । उसे हम देखेंगे । आगे इन गुणधर्मों की उपपत्ति संक्षेप में दी गई है । दिए गए सोपानों को ध्यान में रखते हुए उपपत्ति को विस्तार में लिखिए ।

प्रमेय : आयत के विकर्ण सर्वांगसम होते हैं ।

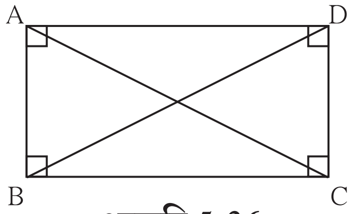
दत्त : □ABCD एक आयत है ।

साध्य : विकर्ण AC ≅ विकर्ण BD

उपपत्ति : संक्षिप्त में दी गई उपपत्ति को कारण सहित लिखिए ।

Δ ADC ≅ Δ DAB ...... भुकोभु कसौटी

विकर्ण AC ≅ विकर्ण BD..... (सर्वांगसम त्रिभुज के संगत भुजा)



आकृति 5.26

प्रमेय : वर्ग के विकर्ण परस्पर सर्वांगसम होते हैं ।

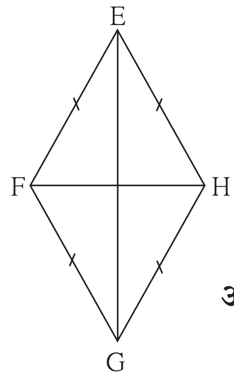
दत्त, साध्य तथा उपपत्ति स्वयं लिखिए ।

प्रमेय : समचर्तुभुज के विकर्ण परस्पर लंबसमद्विभाजक होते हैं ।

दत्त : □EFGH एक समचतुर्भुज है ।

साध्य : (i) विकर्ण EG, विकर्ण HF का लंबसमद्विभाजक है ।

(ii) विकर्ण HF, विकर्ण EG का लंबसमद्विभाजक है ।



आकृति 5.27

उपपत्ति : (i) रेख EF ≅ रेख EH
रेख GF ≅ रेख GH } दत्त

रेखाखंड के अंतःबिंदुओं से समदूरस्थ प्रत्येक बिंदु उस रेखाखंड के लंबसमद्विभाजक पर होता है ।

∴ बिंदु E तथा बिंदु G यह रेख HF के लंबसमद्विभाजक पर है ।

दो भिन्न बिंदु से एक और केवल एक ही रेखा जाती है ।

∴ रेखा EG यह विकर्ण HF की लंबसमद्विभाजक रेखा है ।

∴ विकर्ण EG यह विकर्ण HF की लंबसमद्विभाजक है ।

(ii) इसी प्रकार हम सिद्‌ध कर सकते हैं कि विकर्ण HF यह विकर्ण EG का लंबसमद्विभाजक है ।

नीचे दिए गए प्रमेयों की उपपत्ति स्वयं लिखिए ।

- वर्ग के विकर्ण परस्पर लंबसमद्विभाजक होते हैं ।
- समचतुर्भुज के विकर्ण उसके सम्मुख कोणों को समद्विभाजित करते हैं ।
- वर्ग के विकर्ण उसके सम्मुख कोणों को समद्विभाजित करते हैं ।

इसे ध्यान में रखें

- आयत के विकर्ण परस्पर सर्वांगसम होते हैं ।
- समचतुर्भुज के विकर्ण परस्पर लंबसमद्विभाजक होते हैं ।
- समचतुर्भुज के विकर्ण सम्मुख कोणों को समद्विभाजित करते हैं ।
- वर्ग के विकर्ण परस्पर सर्वांगसम होते हैं ।
- वर्ग के विकर्ण परस्पर लंबसमद्विभाजक होते हैं ।
- वर्ग के विकर्ण उसके सम्मुख कोण को समद्विभाजित करते हैं ।

प्रश्नसंग्रह 5.3

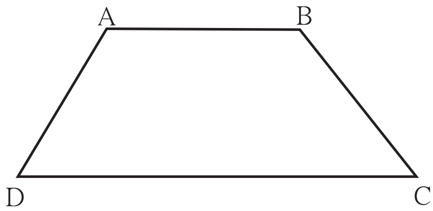
1. आयत ABCD के विकर्ण परस्पर बिंदु O पर प्रतिच्छेदित करते हैं । यदि AC = 8 सेमी तो BO = ?
   यदि $\angle CAD = 35^\circ$ तो $\angle ACB$ = ?
2. समचतुर्भुज PQRS में, यदि PQ = 7.5 सेमी, तो QR = ?
   यदि $\angle QPS = 75^\circ$ तो $\angle PQR$ = ?, $\angle SRQ$ = ?
3. वर्ग IJKL के विकर्ण बिंदु M पर परस्पर प्रतिच्छेदित करते हैं तो $\angle IMJ$, $\angle JIK$ तथा $\angle LJK$ के माप ज्ञात कीजिए ।
4. किसी समचतुर्भुज के विकर्णों की लंबाई क्रमशः 20 सेमी, 21 सेमी है तो उस चतुर्भुज की भुजा तथा परिमिति ज्ञात कीजिए ।
5. नीचे दिए गए कथन सत्य हैं या असत्य, कारण सहित लिखिए ।
   (i) प्रत्येक समांतर चतुर्भुज समचतुर्भुज होता है ।
   (ii) प्रत्येक समचतुर्भुज आयत होता है ।
   (iii) प्रत्येक आयत समांतर चतुर्भुज होता है ।
   (iv) प्रत्येक वर्ग आयत होता है ।
   (v) प्रत्येक वर्ग समचतुर्भुज होता है ।
   (vi) प्रत्येक समांतर चतुर्भुज, आयत होता है ।

आओ, जानें

समलंब चतुर्भुज (Trapezium)

जिस चतुर्भुज के सम्मुख भुजाओं की एक ही जोड़ी समांतर होती है उस चर्तुभुज को समलंब चतुर्भुज कहते हैं ।

संलग्न आकृति में □ABCD की केवल भुजा AB तथा भुजा DC यह जोड़ी परस्पर समांतर है अर्थात यह समलंब चतुर्भुज है ।

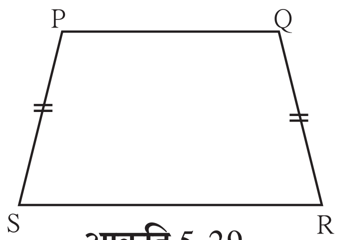


आकृति 5.28

समांतर रेखाओं के गुणधर्म के अनुसार संलग्न कोणों की जोड़ी $\angle A$ तथा $\angle D$ संपूरक है । इसी प्रकार $\angle B$ तथा $\angle C$ संलग्न कोणों की जोड़ी भी संपूरक होती है ।

समलंब चतुर्भुज में संलग्न कोणों की दोनों जोड़ियाँ संपूरक होती हैं ।

जिस समलंब चतुर्भुज की असमांतर भुजाओं की जोड़ी सर्वांगसम हो तो उस चतुर्भुज को **समद्विबाहु समलंब चतुर्भुज (Isosceles trapezium)** कहते हैं ।

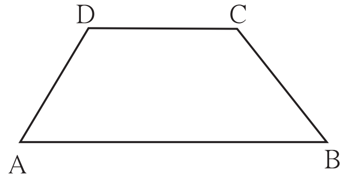


आकृति 5.29

किसी भी समलंब चतुर्भुज की असमांतर भुजाओं के मध्यबिंदुओं को जोड़ने वाले रेखाखंड को उस समलंब चतुर्भुज की माध्यिका होती है ।

हल किए गए उदाहरण :

उदा. (1) □ABCD के कोणों के मापों का अनुपात 4 : 5 : 7 : 8 है । तो सिद्ध कीजिए कि □ABCD समलंब चतुर्भुज है ।



आकृति 5.30

हल : माना, $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$, $\angle D$ के माप क्रमशः

$(4x)^\circ$, $(5x)^\circ$, $(7x)^\circ$, तथा $(8x)^\circ$ है ।

चतुर्भुज के चारों कोणों के मापों का योगफल 360°होता है ।

$\therefore\ 4x + 5x + 7x + 8x = 360$

$\therefore\ 24x = 360 \quad \therefore\ x = 15$

$\angle A = 4 \times 15 = 60^\circ$, $\angle B = 5 \times 15 = 75^\circ$, $\angle C = 7 \times 15 = 105^\circ$,

तथा $\angle D = 8 \times 15 = 120^\circ$

अब, $\angle B + \angle C = 75^\circ + 105^\circ = 180^\circ$

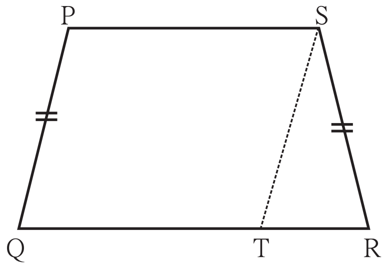
$\therefore$ भुजा CD || भुजा BA...... (I) (समांतर रेखाओं की अंतःकोणों की कसौटी)

परंतु $\angle B + \angle A = 75^\circ + 60^\circ = 135^\circ \neq 180^\circ$

$\therefore$ भुजा BC तथा भुजा AD परस्पर समांतर नहीं है । ....(II)

$\therefore$ □ABCD समलंब चतुर्भुज है । ....(I) तथा (II) से

उदा. (2) समलंब □PQRS में भुजा PS || भुजा QR तथा भुजा PQ ≅ भुजा SR,
भुजा QR > भुजा PS तो सिद्ध कीजिए कि $\angle PQR \cong \angle SRQ$



आकृति 5.31

दत्त : □PQRS में भुजा PS || भुजा QR
तथा भुजा PQ ≅ भुजा SR

साध्य : $\angle PQR \cong \angle SRQ$

रचना : बिंदु S से भुजा PQ के समांतर एक रेखाखंड खींचिए ।
जो भुजा QR को बिंदु T पर प्रतिच्छेदित करती है ।

उपपत्ति : □PQRS में,

रेख PS || रेख QT ....दत्त तथा Q-T-R

रेख PQ || रेख ST ....रचना

$\therefore$ □PQRS समांतर चतुर्भुज है ।

$\therefore \angle PQT \cong \angle STR$ ..... संगत कोण (I)

इसी प्रकार रेख PQ ≅ रेख ST

परंतु रेख PQ ≅ रेख SR ......(दत्त)

$\therefore$ रेख ST ≅ रेख SR

$\therefore \angle STR \cong \angle SRT$.....समद्विबाहु त्रिभुज का प्रमेय (II)

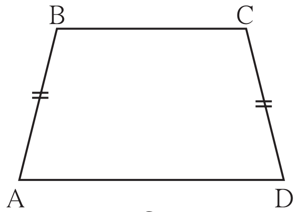
$\therefore \angle PQT \cong \angle SRT$ ....(I) तथा (II) से

$\therefore\ \angle PQR \cong \angle SRQ$ .... Q-T-R

इस आधार पर सिद्ध होता है कि समद्विबाहु समलंब चतुर्भुज के आधार के कोण सर्वांगसम होते हैं ।

प्रश्नसंग्रह 5.4

1. यदि □IJKL में भुजा IJ || भुजा KL हो और $\angle I = 108^\circ$ $\angle K = 53^\circ$ तो $\angle J$ तथा $\angle L$ के माप ज्ञात कीजिए ।
2. □ABCD में भुजा BC || भुजा AD, हो और भुजा AB ≅ भुजा DC, $\angle A = 72^\circ$ तो $\angle B$, तथा $\angle D$ के माप निश्चित कीजिए ।
3. आकृति 5.32 में □ABCD में भुजा BC < भुजा AD, भुजा BC || भुजा AD तथा यदि भुजा BA ≅ भुजा CD हो तो सिद्ध कीजिए कि $\angle ABC \cong \angle DCB$



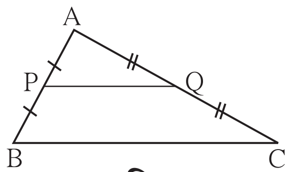
आकृति 5.32

आओ, जानें

त्रिभुज की दो भुजाओं के मध्यबिंदुओं का प्रमेय
(Theorem of midpoints of two sides of a triangle)

कथन : त्रिभुज की किन्हीं दो भुजाओं के मध्यबिंदुओं को जोड़ने वाला रेखाखंड तीसरी भुजा के समांतर होता है तथा लंबाई में तीसरी भुजा का आधा होता है ।

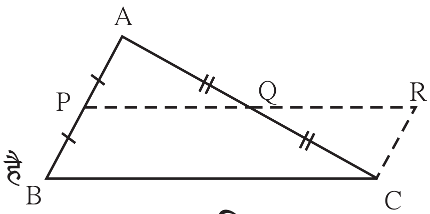
दत्त : Δ ABC की भुजाओं AB तथा BC के मध्यबिंदु क्रमशः P तथा Q है ।



आकृति 5.33

साध्य : रेख PQ || रेख BC तथा $PQ = \frac{1}{2}$ BC

रचना : रेख PQ को बिंदु R तक इस प्रकार बढ़ाइए कि PQ = QR रेख RC खीचें ।



आकृति 5.34

उपपत्ति : Δ AQP तथा Δ CQR में

रेख PQ ≅ रेख QR ...... रचना

रेख AQ ≅ रेख QC ...... Q यह AC का मध्यबिंदु है

$\angle AQP \cong \angle CQR$ ..... शीर्षाभिमुख कोण

∴ Δ AQP ≅ Δ CQR .... भुकोभु कसौटी

$\angle PAQ \cong \angle RCQ$ ..... (1) सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत कोण

∴ रेख AP ≅ रेख CR ......(2) सर्वांगसम त्रिभुजों की संगत भुजाएँ

कथन (1) से रेखा AB || रेखा CR.........एकांतर कोण कसौटी

कथन (2) से रेख AP ≅ रेख CR

किंतु रेख AP ≅ रेख PB ≅ रेख CR तथा रेख PB || रेख CR

∴ □PBCR समांतर चतुर्भुज है ।

∴ रेख PQ || रेख BC तथा PR = BC .....(समांतर चतुर्भुज की सम्मुख भुजाएँ लंबाई में समान होती है)

$PQ = \frac{1}{2}\ PR$ ...... रचना

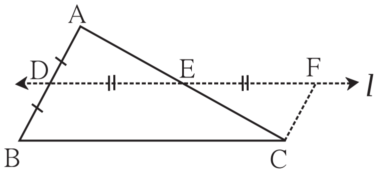
$\therefore\ PQ = \frac{1}{2}\ BC \qquad \because\ PR = BC$

त्रिभुज की दो भुजाओं के मध्यबिंदुओं के प्रमेय का विलोम

प्रमेय : त्रिभुज की एक भुजा के मध्यबिंदु से जाने वाला तथा दूसरी भुजा के समांतर रेखाखंड तीसरी भुजा को समद्विभाजित करती है ।

इस कथन के लिए आकृति, दत्त, साध्य, रचना दी गई है । इस आधार पर उस कथन की उपपत्ति लिखने का प्रयत्न कीजिए ।

दत्त : Δ ABC में बिदु D यह भुजा AB का मध्यबिंदु है । बिंदु D से भुजा BC के समांतर खींची गई रेखा यह भुजा AC को बिंदु E पर प्रतिच्छेदित करती है ।



आकृति 5.35

साध्य : AE = EC

रचना : रेखा l पर बिंदु F इस प्रकार लीजिए कि D-E-F तथा DE = EF । रेख CF खींचिए ।

उपपत्ति : रेखा l || रेख BC (दत्त) तथा की गई रचना का उपयोग कर सिद्ध कीजिए कि □BCFD समांतर चतुर्भुज है । Δ ADE $\cong$ Δ CFE सिद्ध कर उस आधार पर साध्य सिद्ध कीजिए ।

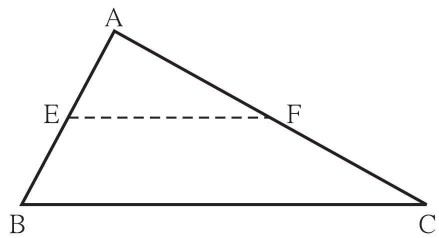
हल किए गए उदाहरण

उदा. (1) Δ ABC में बिंदु E तथा बिंदु F यह क्रमशः भुजा AB तथा AC के मध्यबिंदु हैं । यदि EF = 5.6 तो BC की लंबाई ज्ञात कीजिए ।

हल : Δ ABC में बिंदु E तथा बिंदु F क्रमशः भुजा AB तथा भुजा AC के मध्यबिंदु हैं ।

$EF = \frac{1}{2}\ BC$ ....मध्यबिंदु का प्रमेय

$5.6 = \frac{1}{2}\ BC \qquad \therefore\ BC = 5.6 \times 2 = 11.2$



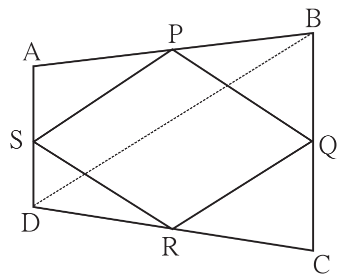
आकृति 5.36

उदा. (2) सिद्ध करें कि किसी भी चतुर्भुज के की भुजाओं के मध्यबिंदुओं को जोड़ने पर बनने वाला चतुर्भुज समांतर चतुर्भुज होता है ।

दत्त : □ABCD में बिंदु P, Q, R तथा S यह क्रमशः भुजाओं AB, BC, CD तथा AD के मध्यबिंदु हैं ।

साध्य : □PQRS यह समांतर चतुर्भुज है ।

रचना : विकर्ण BD खींचिए ।



आकृति 5.37

उपपत्ति: Δ ABD में बिंदु S तथा बिंदु P यह क्रमशः भुजा AD तथा AB के मध्यबिंदु हैं ।

$\therefore$ मध्यबिंदु के प्रमेयानुसार, PS $\parallel$ DB तथा PS = $\frac{1}{2}$ BD .... (1)

उसी प्रकार Δ DBC में बिंदु Q तथा बिंदु R यह क्रमशः भुजा BC तथा भुजा DC के मध्यबिंदु हैं ।

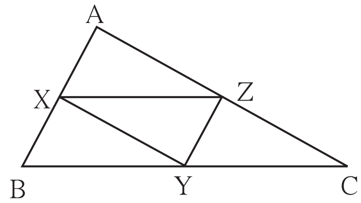
$\therefore$ QR $\parallel$ BD, QR = $\frac{1}{2}$ BD .... (2) मध्यबिंदु के प्रमेयानुसार

$\therefore$ PS $\parallel$ QR, PS = QR .... (1) तथा (2) से

$\therefore$ □PQRS यह समांतर चतुर्भुज है ।

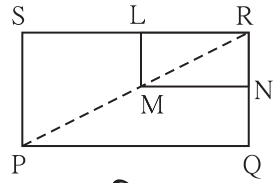
प्रश्नसंग्रह 5.5

1. आकृति 5.38 में Δ ABC मे बिंदु X, Y, Z यह क्रमशः भुजाओं AB, BC तथा AC के मध्यबिंदु है । AB = 5 सेमी, AC = 9 सेमी तथा BC = 11 सेमी, तो XY, YZ, XZ की लंबाई ज्ञात कीजिए ।



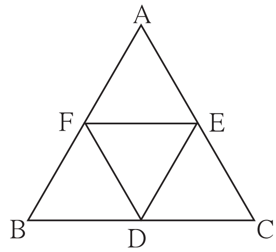
आकृति 5.38

2. आकृति 5.39 में □PQRS तथा □MNRL आयत है । बिंदु M यह PR का मध्यबिंदु है । तो सिद्ध कीजिए कि (i) SL = LR, (ii) LN = $\frac{1}{2}$SQ ।



आकृति 5.39

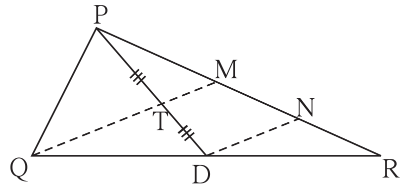
3. आकृति 5.40 में Δ ABC समबाहु त्रिभुज है जिसमें बिंदु F, D, E यह क्रमशः भुजा AB, भुजा BC, भुजा AC के मध्यबिंदु हैं तो सिद्ध कीजिए कि Δ FED यह समबाहु त्रिभुज है ।



आकृति 5.40

4. आकृति 5.41 में रेख PD यह Δ PQR की माध्यिका है । बिंदु T यह PD का मध्यबिंदु है । QT को आगे बढ़ाने पर यह PR को बिंदु M पर प्रतिच्छेदित करता है । तो सिदघ कीजिए कि $\frac{PM}{PR} = \frac{1}{3}$

[सूचना : DN $\parallel$ QM खींचें ।]



आकृति 5.41

प्रकीर्ण प्रश्नसंग्रह 5

1. नीचे दिए गए बहु वैकल्पिक प्रश्नों के उत्तरों में से सही विकल्प चुनिए ।

(i) जिस चतुर्भुज की संलग्न भुजाओं की सभी जोड़ियाँ सर्वांगसम हों तो उस चतुर्भुज का नाम क्या होगा?

(A) आयत (B) समांतर चतुर्भुज (C) समलंब चतुर्भुज (D) समचतुर्भुज

(ii) किसी वर्ग के विकर्ण की लंबाई $12\sqrt{2}$ सेमी हो तो उसकी परिमिति कितनी होगी ?

(A) 24 सेमी (B) $24\sqrt{2}$ सेमी (C) 48 सेमी (D) $48\sqrt{2}$ सेमी

(iii) किसी समचर्तुभुज के सम्मुख कोणों के माप $(2x)^\circ$ तथा $(3x - 40)^\circ$ हो तो x = ?

(A) 100° (B) 80° (C) 160° (D) 40°

2. किसी आयत की संलग्न भुजाएँ क्रमशः 7 सेमी तथा 24 सेमी हैं तो उस चतुर्भुज की विकर्ण की लंबाई ज्ञात कीजिए ।

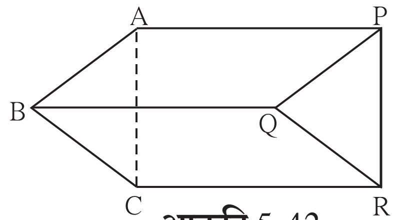
3. वर्ग के विकर्ण की लंबाई 13 सेमी है तो वर्ग की भुजा की लंबाई ज्ञात कीजिए ।

4. समांतर चतुर्भुज की दो संलग्न भुजाओं का अनुपात 3:4 है । उसकी परिमिति 112 सेमी हो तो उसकी प्रत्येक भुजा की लंबाई ज्ञात कीजिए ।

5. समचर्तुभुज PQRS के विकर्ण PR तथा विकर्ण QS की लंबाई क्रमशः 20 सेमी तथा 48 सेमी है तो समचर्तुभुज की भुजा PQ की लंबाई ज्ञात कीजिए ।

6. आयत PQRS के विकर्ण परस्पर बिंदु M पर प्रतिच्छेदित करते हैं । यदि $\angle QMR = 50^\circ$ तो $\angle MPS$ का माप ज्ञात कीजिए ।

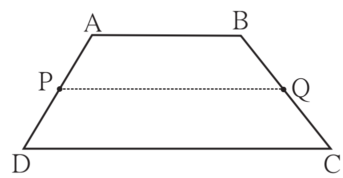
7. संलग्न आकृति 5.42 में
रेख AB || रेख PQ , रेख AB ≅ रेख PQ,
रेख AC || रेख PR, रेख AC ≅ रेख PR
तो सिद्‌ध कीजिए कि
रेख BC || रेख QR तथा रेख BC ≅ रेख QR



आकृति 5.42

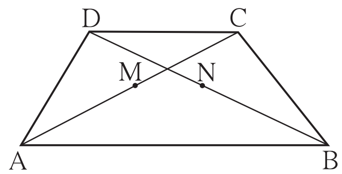
8*. संलग्न आकृति 5.43 में □ABCD समलंब चतुर्भुज है । AB || DC है । रेख AD तथा रेख BC के मध्यबिंदु क्रमशः P तथा Q हैं, तो सिद्‌ध कीजिए कि

$$PQ \parallel AB \text{ तथा } PQ = \frac{1}{2}(AB + DC)$$



आकृति 5.43

9. संलग्न आकृति 5.44 में □ABCD यह समलंब चतुर्भुज है । AB || DC, बिंदु M तथा बिंदु N क्रमशः विकर्ण AC तथा विकर्ण DB के मध्यबिंदु है तो सिद्‌ध कीजिए कि MN || AB



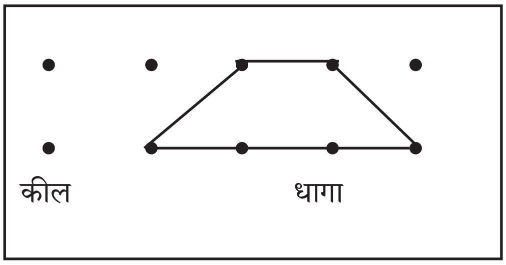
आकृति 5.44

कृति

चतुर्भुज की विभिन्न प्रमेयों की जाँच करना ।

साहित्य : 15 सेमी × 10 सेमी का प्लायवुड का टुकड़ा; 12 से 15 किल, मोटा धागा, कैंची

सूचना : 15 सेमी × 10 सेमी प्लायवुड के टुकड़े पर सरल रेखा में 2 सेमी की दूरी पर 5 कील ठोकिए उसी तरह नीचे की सरल रेखा में भी 2 सेमी की दूरी पर कील ठोकिए । धागे से भिन्न-भिन्न चतुर्भुज (किल का आधार लेकर) बनाइए । भुजा संबंधी गुणधर्मों की जाँच धागे से कीजिए । इस आधार पर कोण संबंधी गुणधर्मों की जाँच कीजिए ।



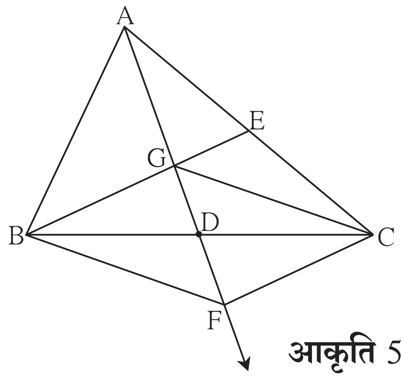
आकृति 5.45

अधिक जानकारी हेतु

त्रिभुज की माध्यिकाओं का संगामी बिंदु, माध्यिकाओं को 2 : 1 के अनुपात में विभाजित करता है ।

इस गुणधर्म की जानकारी आपको है ।

इसे सिद्‌ध करने की विधि का अध्ययन कीजिए ।



आकृति 5.46

दत्त : Δ ABC की माध्यिकाएँ रेख AD तथा रेख BE परस्पर बिंदु G पर प्रतिच्छेदित करती हैं ।

साध्य : AG : GD = 2 : 1

रचना : किरण AD पर बिंदु F इस प्रकार लीजिए कि G-D-F तथा GD = DF

उपपत्ति : □BGCF के विकर्ण परस्पर समद्‌विभाजित करते हैं ।. .... दत्त तथा रचना

$\therefore$ □BGCF समांतर चतुर्भुज है ।

$\therefore$ रेखा BE || रेखा FC ......समांतर चतुर्भुज की सम्मुख भुजाओं को समाविष्ट करने वाली रेखा

अब Δ AFC में बिंदु E, भुजा AC का मध्यबिंदु है । .... (दत्त)

रेख EB || रेखा FC

त्रिभुज की किसी एक भुजा के मध्यबिंदु से दूसरी भुजा के समांतर खींची गई रेखा तीसरी भुजा को समद्‌विभाजित करती है ।

$\therefore$ रेख AF का G यह मध्यबिंदु है ।

$\therefore$ AG = GF

परंतु AG = 2 GD

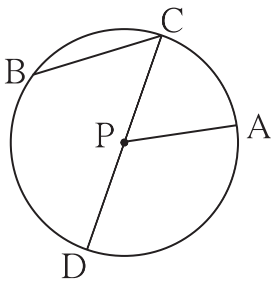
$\frac{AG}{GD} = \frac{2}{1}$ अर्थात AG = GD = 2 : 1

6 वृत्त

आओ, सिखें

- वृत्त
- वृत्त की जीवा के गुणधर्म
- अंतर्वृत्त
- परिवृत्त

थोड़ा सोचें



आकृति 6.1

संलग्न आकृति में P केंद्र वाले वृत्त का निरीक्षण कीजिए । इस आकृति के आधार पर नीचे दी गई तालिका पूर्ण कीजिए ।

---	रेख PA	---	---	---	---	$\angle CPA$
जीवा	---	व्यास	त्रिज्या	केंद्र	केंद्रीय कोण	---

आओ, जानें

वृत्त (Circle)

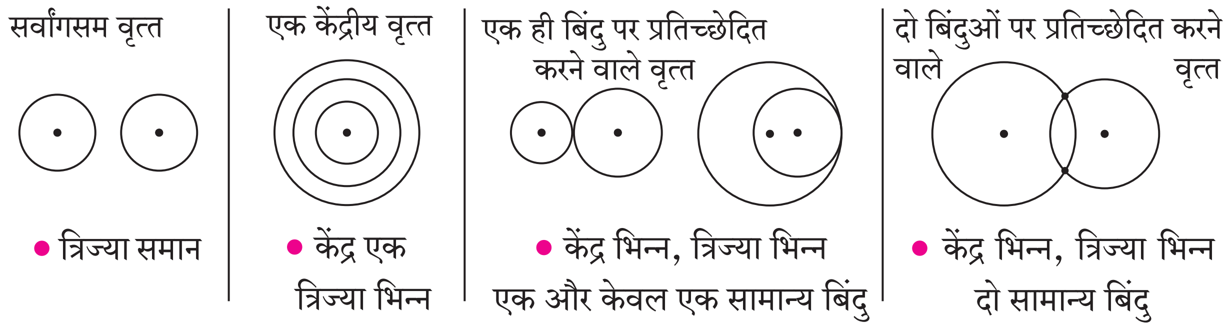
बिंदुओं के समुच्चय के रूप में वृत्त का वर्णन करेंगे ।

- प्रतल के किसी स्थिर बिंदु से उसी प्रतल के समदूरस्थ सभी बिंदुओं के समुच्चय को **वृत्त** (Circle) कहते हैं । उस स्थिर बिंदु को **वृत्त का केंद्र** (Centre of a circle) कहते हैं ।

वृत्त संबंधी कुछ पद (संज्ञा)

- वृत्त के केंद्र तथा वृत्त पर स्थित किसी भी बिंदु को जोड़ने वाले रेखाखंड को **त्रिज्या** (Radius) कहते हैं ।
- वृत्त के केंद्र और वृत्त पर स्थित किसी बिंदु के बीच की दूरी को भी **त्रिज्या** कहते हैं ।
- वृत्त के कोई भी दो बिंदुओं को जोड़ने वाला रेखाखंड **जीवा** (Chord) कहलाता है ।
- वृत्त के केंद्र से जाने वाली जीवा को उस वृत्त का **व्यास** (Diameter) कहते हैं । व्यास वृत्त की सबसे बड़ी जीवा होती है ।

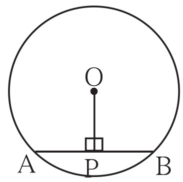
प्रतल में स्थित वृत्त



आकृति 6.2

वृत्त की जीवा के गुणधर्म (Properties of chord)

कृति I : समूह के प्रत्येक विद्‌यार्थी को नीचे दी गई कृति करनी है ।
अपनी कॉपी में एक वृत्त खींचकर उसमें एक जीवा खींचिए ।
वृत्त के केंद्र से जीवा पर लंब खींचिए । जीवा के दो भाग हुए हैं ।
प्रत्येक भाग की लंबाई नापिए ।
समूह पमुख ने निम्नलिखित सारिणी बनाकर उसमें सभी के निरीक्षण अंकित करना है ।



आकृति 6.3

विद्‌यार्थी / लंबाई	1	2	3	4	5	6
l (AP)	...... सेमी					
l (PB)	...... सेमी					

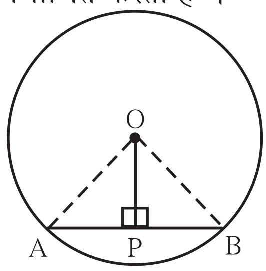
इस निरीक्षण के आधार पर प्राप्त गुणधर्म को लिखिए । इस गुणधर्म को सिद्‌ध करने को विधि (उपपत्ति) देखेंगे ।

प्रमेय : वृत्त के केंद्र से जीवा पर डाला गया लंब उस जीवा को समद्‌विभाजित करता है ।

पक्ष : O केंद्रवाले वृत्त में रेख AB जीवा है ।
रेख OP $\perp$ जीवा AB

साध्य : रेख AP $\cong$ रेख BP

उपपत्ति : रेख OA तथा रेख OB खींचिए ।



आकृति 6.4

Δ OPA तथा Δ OPB में

$\angle$OPA $\cong$ $\angle$OPB . . . . रेख OP $\perp$ जीवा AB (प्रत्येक कोण 90 का है ।)

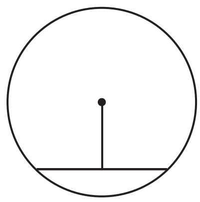
रेख OP $\cong$ रेख OP . . . . सामान्य भुजा

कर्ण OA $\cong$ कर्ण OB . . . . एक ही वृत्त की त्रिज्याएँ

$\therefore$ Δ OPA $\cong$ Δ OPB . . . . कर्ण भुजा प्रमेय

रेख PA $\cong$ रेख PB . . . . सर्वांगत त्रिभुजों की संगत भुजाएँ

कृति II : समूह के प्रत्येक विद्‌यार्थी को नीचे दी गई कृति करनी है । अपनी कॉपी में एक वृत्त बनाइए । उसमें एक जीवा खींचिए । जीवा का मध्यबिंदु ज्ञात कीजिए । मध्यबिंदु तथा वृत्त के केंद्र को मिलाने वाला रेखाखंड खींचिए । इस रेखाखंड के द्‌वारा जीवा के साथ बनने वाले कोण को मापिए ।
क्या देखा ? आपके द्‌वारा मापे गए कोण का माप एक-दूसरे को बताइए ।
निश्चित कीजिए कि इस कृति के आधार पर कौन-सा गुणधर्म ध्यान में आता है ।

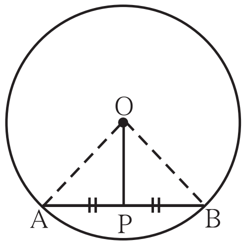

आकृति 6.5

प्रमेय : वृत्त केंद्र तथा जीवा के मध्यबिंदु को जोड़ने वाला रेखाखंड जीवा पर लंब होता है ।

दत्त : O केंद्रवाले वृत्त की रेखा AB यह जीवा है । जीवा AB का P मध्यबिंदु है ।
अतः रेख AP $\cong$ रेख PB

साध्य : रेख OP $\perp$ जीवा AB

उपपत्ति : रेख OA तथा रेख OB खींचिए ।



आकृति 6.6

Δ AOP तथा Δ BOP में

रेख OA $\cong$ रेख OB . . . . (एक ही वृत्त की त्रिज्याएँ)

रेख OP $\cong$ रेख OP. . . . . (सामान्य भुजा)

रेख AP $\cong$ रेख BP . . . . (दत्त)

$\therefore$ Δ AOP $\cong$ Δ BOP . . . . (भुभुभु कसौटी)

$\therefore$ $\angle$OPA $\cong$ $\angle$OPB . . . . (सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत कोण) . . . .(I)

अब $\angle OPA + \angle OPB = 180^\circ$ . . . (रेखीक युगल कोण)

$\angle OPB + \angle OPB = 180^\circ$ . . . . . . (I से)

$2 \angle OPB = 180^\circ$

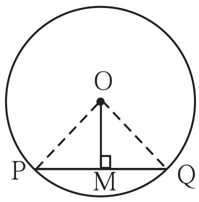
$\angle OPB = 90^\circ$

$\therefore$ रेख OP $\perp$ जीवा AB

हल किए गए उदाहरण

उदा. (1) किसी वृत्त की त्रिज्या 5 सेमी है । उस वृत्त की कोई जीवा 8 सेमी लंबी है तो वह जीवा तथा वृत्त के केंद्र के के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए ।

हल :



आकृति 6.7

सर्वप्रथम दी गई जानकारी के अनुसार आकृति बनाएँ ।
माना, O केंद्रवाले वृत्त की जीवा PQ की लंबाई 8 सेमी है
रेख OM $\perp$ जीवा PQ खींचिए ।

हम जानते हैं कि वृत्त के केंद्र से जीवा पर डाला गया लंब जीवा को समद्विभाजित करता है ।

$\therefore$ PM = MQ = 4 सेमी

वृत्त की त्रिज्या 5 सेमी है अर्थात OQ = 5 सेमी दिया है ।

समकोण त्रिभुज Δ OMQ में पायथागोरस के प्रमेय अनुसार,

$OM^2 + MQ^2 = OQ^2$

$OM^2 + 4^2 = 5^2$

$\therefore \; OM^2 = 5^2 - 4^2 = 25 - 16 = 9 = 3^2$

$\therefore \; OM = 3$

अर्थात जीवा, वृत्त के केंद्र से 3 सेमी की दूरी पर है ।

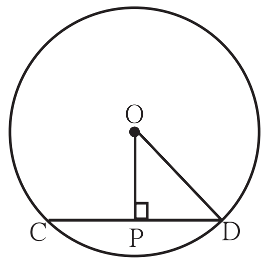
उदा. (2) किसी वृत्त की त्रिज्या 20 सेमी है । इस वृत्त की कोई जीवा वृत्त के केंद्र से 12 सेमी की दूरी पर है तो उस जीवा की लंबाई ज्ञात कीजिए ।

हल : माना वृत्त का केंद्र O है. त्रिज्या = OD = 20 सेमी जीवा CD केंद्र O से 12 सेमी की दूरी पर है ।

रेख OP $\perp$ रेख CD

$\therefore$ OP = 12 सेमी

$\therefore$ CP = PD ...... वृत्त के केंद्र से जीवा पर डाला गया लंब जीवा को समद्विभाजित करता है ।



आकृति 6.8

समकोण त्रिभुज Δ OPD में पायथागोरस के प्रमेयानुसार,

$OP^2 + PD^2 = OD^2$

$(12)^2 + PD^2 = 20^2$

$PD^2 = 20^2 - 12^2$

$PD^2 = (20+12)(20-12)$

$= 32 \times 8 = 256$

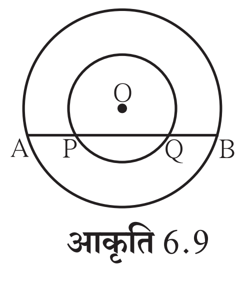
$\therefore$ PD = 16 $\qquad$ $\therefore$ CP = 16

CD = CP + PD = 16 + 16 = 32

$\therefore$ जीवा की लंबाई 32 सेमी है ।

प्रश्नसंग्रह 6.1

1. वृत्त के केंद्र O से 8 सेमी की दूरी पर जीवा AB स्थित है । जीवा AB की लंबाई 12 सेमी है तो वृत्त का व्यास ज्ञात कीजिए ।
2. किसी वृत्त का व्यास 26 सेमी तथा जीवा की लंबाई 24 सेमी है तो वह जीवा वृत्त के केंद्र से कितनी दूरी पर होगी ?
3. 34 सेमी त्रिज्यावाले वृत्त की एक जीवा केंद्र से 30 सेमी की दूरी पर हो तो जीवा की लंबाई ज्ञात कीजिए ।
4. O केंद्रवाले वृत्त की त्रिज्या 41 सेमी है । वृत्त की जीवा PQ की लंबाई 80 सेमी हो तो जीवा PQ की केंद्र से दूरी ज्ञात कीजिए ।
5. आकृति 6.9 में बिंदु O केंद्रवाले दो वृत्त हैं । बड़े वृत्त की जीवा AB यह जीवा छोटे वृत्त के बिंदु P तथा Q पर प्रतिच्छेदित करती है । सिद्ध कीजिए कि AP = BQ
6. सिद्ध कीजिए कि यदि वृत्त का व्यास दो जीवाओं को समद्विभाजित करता हो तो वे जीवाएँ परस्पर समांतर होती हैं ।



आकृति 6.9

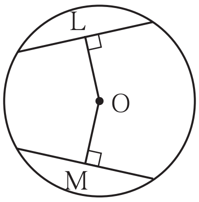
कृति I

(1) सुविधाजनक त्रिज्यावाला वृत्त बनाइए । (2) प्रत्येक वृत्त में समान लंबाईवाली दो जीवाएँ खींचिए ।
(3) वृत्त के केंद्र से प्रत्येक जीवा पर लंब खींचिए । (4) वृत्त के केंद्र से प्रत्येक जीवा की दूरी नापिए ।

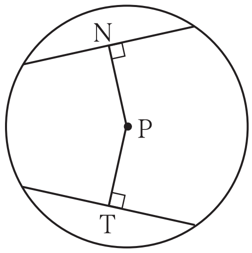
आओ, जानें

वृत्त की सर्वांगसम जीवाओं तथा उनके केंद्र से दूरी संबंधी गुणधर्म

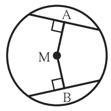
कृति II



आकृति (i)



आकृति (ii)

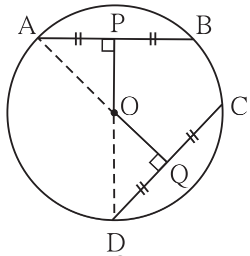


आकृति (iii)

आकृति (i) में OL = OM, आकृति (ii) में PN = PT, आकृति (iii) में MA = MB ऐसा मिलता है क्या ? इस कृति से प्राप्त होने वाले गुणधर्म को शब्दों मे लिखिए ।

आओ, जानें

सर्वांगसम जीवाओं के गुणधर्म (Properties of congruent chords)



आकृति 6.10

प्रमेय : एक ही वृत्त की सर्वांगसम जीवाएँ केंद्र से समदूरस्थ होती हैं।

पक्ष : O केंद्रवाले वृत्त में

जीवा AB $\cong$ जीवा CD

OP $\perp$ AB, OQ $\perp$ CD

साध्य : OP = OQ

रचना : रेख OA तथा रेख OD खींचिए ।

उपपत्ति : AP = $\frac{1}{2}$ AB, DQ = $\frac{1}{2}$ CD . . . वृत्त के केंद्र से जीवा पर डाला गया लंब जीवा को समद्विभाजित करता है ।

AB = CD . . . . पक्ष

$\therefore$ AP = DQ

$\therefore$ रेख AP $\cong$ रेख DQ . . . . (I) एक ही वृत्त की त्रिज्या

समकोण Δ APO तथा समकोण Δ DQO में,

रेख AP $\cong$ रेख DQ . . . . (I) से

कर्ण OA $\cong$ कर्ण OD . . . . एक ही वृत्त की त्रिज्या

$\therefore$ Δ APO $\cong$ Δ DQO . . . . कर्णभुजा प्रमेय

रेख OP $\cong$ रेख OQ . . . . सर्वांगसम त्रिभुजों की संगत भुजाएँ

$\therefore$ OP = OQ . . . . सर्वांगसम रेखाखंडों की लंबाई समान होती है ।

वृत्त की सर्वांगसम जीवाएँ केंद्र से समदूरस्थ होती हैं ।

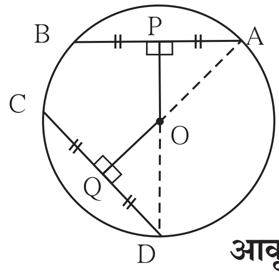
प्रमेय : एक ही वृत्त की केंद्र से समदूरस्थ जीवाएँ सर्वांगसम होती हैं ।

पक्ष : O केंद्रवाले वृत्त में

रेख OP $\perp$ जीवा AB

रेख OQ $\perp$ जीवा CD

और OP = OQ



आकृति 6.11

साध्य : जीवाAB $\cong$ जीवा CD

रचना : रेख OA तथा रेख OD खींचिए ।

उपपत्ति : नीचे दिए गए विधानों में रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए ।

समकोण Δ OPA तथा समकोण Δ OQD में

कर्ण OA $\cong$ कर्ण OD . . . . ______

रेख OP $\cong$ रेख OQ . . . . दत्त

$\therefore$ Δ OPA $\cong$ Δ OQD . . . . ______

$\therefore$ रेख AP $\cong$ रेख QD . . . . सर्वांगसम त्रिभुजों की संगत भुजाएँ

$\therefore$ AP = QD . . . . (I)

किंतु AP = $\frac{1}{2}$ AB, OQ = $\frac{1}{2}$ CD . . . . . ______

$\therefore$ AP = QD . . . . विधान (I)

$\therefore$ AB = CD

$\therefore$ रेख AB $\cong$ रेख CD

यह समझ लीजिए कि उपर्युक्त दोनों प्रमेय परस्पर एक-दूसरे के विलोम हैं ।

इसे ध्यान में रखें

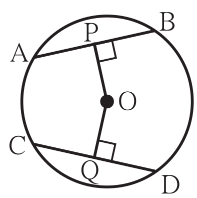
एक ही वृत्त की सर्वांगसम जीवाएँ केंद्र से समान दूरी पर (समदूरस्थ) होती हैं ।

कृति :

1. उपर्युक्त दोनों प्रमेय एक वृत्त या दो सर्वांगसम वृत्त लेकर भी सिद्ध कर सकते हैं ।
2. सर्वांगसम वृत्तों की केंद्र से समदूरस्थ जीवाएँ सर्वांगसम होती है । इन दोनों प्रमेयों के लिए दत्त, साध्य तथा उपपत्ति लिखिए ।

हल किए गए उदाहरण

उदा. दी गई आकृति 6.12 में बिंदु O वृत्त का केंद्र है ।
AB = CD यदि OP = 4 सेमी तो OQ की लंबाई ज्ञात कीजिए ।



आकृति 6.12

हल : O केंद्रवाले वृत्त में
जीवा AB $\cong$ जीवा CD दिया गया है ।

OP ⊥ AB, OQ ⊥ CD

OP = 4 सेमी अर्थात जीवा AB वृत्त के केंद्र O से 4 सेमी की दूरी पर है ।

हमे जानते है कि एक ही वृत्त की सर्वांगसम जीवाएँ केंद्र से समदूरस्थ होती हैं ।

∴ OQ = 4 सेमी

प्रश्नसंग्रह 6.2

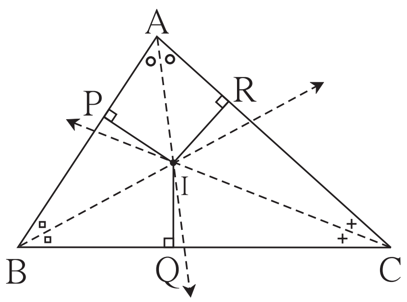
1. किसी वृत्त की त्रिज्या 10 सेमी है । उस वृत्त में 16 सेमी लंबाईवाली दो जीवाएँ हैं तो उन जीवाओं की केंद्र से दूरी ज्ञात कीजिए ?
2. एक वृत्त में समान लंबाईवाली दो जीवाएँ हैं । वे जीवाएँ केंद्र से 5 सेमी दूरी पर है । वृत्त की त्रिज्या 13 सेमी है तो जीवाओं की लंबाई ज्ञात कीजिए ।
3. C केंद्रवाले वृत्त में रेख PM तथा रेख PN सर्वांगसम जीवाएँ है तो सिद्ध कीजिए किरण PC यह ∠NPM की समद्विभाजक है ।

थोड़ा याद करें

पिछली कक्षा में हमने विभिन्न त्रिभुज खींचकर यह जाँच कीया कि उनके कोण के समद्विभाजक संगामी होते हैं । त्रिभुज के कोणों के समद्विभाजकों के संगामी बिंदु को 'I' इस अक्षर द्वारा दर्शाया जाता है ।

आओ, जानें

त्रिभुज का अंतर्वृत्त (Incircle of a triangle)



आकृति 6.13

Δ ABC के तीनों कोणों के समद्विभाजक बिंदु I पर मिलते हैं ।

कोणों के समद्विभाजकों के संगामी बिंदु I से त्रिभुज को तीनों भुजाओं पर लंब खींचे गए हैं ।

IP ⊥ AB, IQ ⊥ BC, IR ⊥ AC

हमने यह अध्ययन किया है कि कोणों के समद्विभाजक पर स्थित प्रत्येक बिंदु कोण की दोनों भुजाओं से समदूरस्थ होता है ।

∠B के समद्विभाजक पर बिंदु I है । अतः IP = IQ

∠C के समद्विभाजक पर बिंदु I है । अतः IQ = IR

IP = IQ= IR

बिंदु I यह त्रिभुज की तीनों भुजाओं अर्थात AB, AC तथा BC से समदूरस्थ है ।

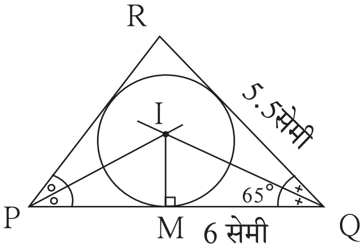
∴ बिंदु I को केंद्र मानकर तथा IP त्रिज्या लेकर खींचा गया वृत्त त्रिभुज की भुजा AB, AC तथा BC को अतः स्पर्श करता है तो ऐसे वृत्त को त्रिभुज का अंतर्वृत्त कहते हैं ।

आओ, जानें

त्रिभुज के अंतर्वृत्त की रचना करना (To construct incircle of a triangle)

उदा. Δ PQR के अतः वृत्त की रचना कीजिए, जिसमें PQ = 6 सेमी, $\angle Q = 35^\circ$, QR = 5.5 सेमी

पहले कच्ची आकृति खींचकर उसमें दी गई जानकारी दर्शाइए ।



कच्ची आकृति 6.14

रचना के सोपान :

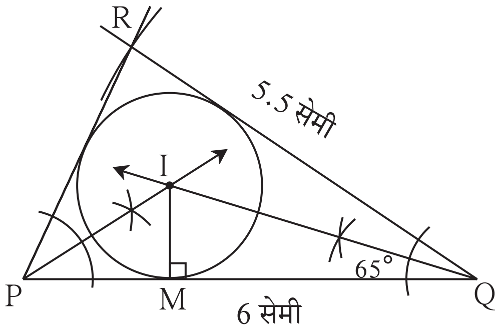
(1) दिए गए माप के आधार पर Δ PQR की रचना कीजिए ।

(2) किन्हीं दो कोणों के समद्विभाजक खींचिए ।

(3) कोण समद्विभाजकों के प्रतिच्छेदन बिंदु को I नाम दीजिए ।

(4) बिंदु Q से रेख PQ पर IM लंब खींचिए ।

(5) IM त्रिज्या तथा I को केंद्र मानकर वृत्त खींचिए ।



आकृति 6.15

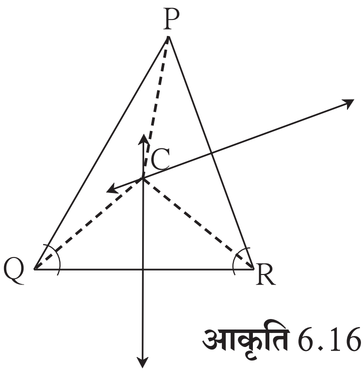
इसे ध्यान में रखें

त्रिभुज की तीनों भुजाओं को स्पर्श करने वाले वृत्त को उस त्रिभुज का अंतर्वृत्त कहते हैं ।
उस वृत्त के केंद्र को अंतर्वृत्त केंद्र या अंतःकेंद्र कहते हैं ।

थोड़ा याद करें

पिछली कक्षाओं में हमने विभिन्न त्रिभुजों की रचना कर जाँच की थी कि त्रिभुज की भुजाओं के लंबसमद्विभाजक संगामी होते हैं । त्रिभुज की भुजाओं के लंबसमद्विभाजकों के संगामी बिंदु को C इस अक्षर द्वारा दर्शाते हैं ।

आओ, जानें



आकृति 6.16

Δ PQR की भुजाओं के लंबसमद्विभाजक बिंदु C पर मिलते हैं अर्थात लंबसमद्विभाजकों का संगामी बिंदु C है ।

त्रिभुज का परिवृत्त (Circumcircle)

Δ PQR को तीनों भुजाओं के लंबसमद्विभाजकों का संगामी बिंदु C है । PC, QC, तथा RC खींचिए । हमने अध्ययन किया है कि रेखाखंड के लंबसमद्विभाजक पर स्थित प्रत्येक बिंदु रेखाखंड के अंतःबिंदुओं से समान दूरी पर होता है ।

बिंदु C यह रेख PQ के लंबसमद्विभाजक पर स्थित है । $\therefore$ PC = QC I

बिंदु C यह रेख QR के लंबसमद्विभाजक पर स्थित है । $\therefore$ QC = RC II

$\therefore$ PC = QC = RC . . . . . विधान I व II से

$\therefore$ बिंदु C को केंद्र मानकर तथा PC त्रिज्या लेकर खींचा गया वृत्त यह त्रिभुज के तीनों शीर्षबिंदुओं से होकर जाता है । इस प्रकार के वृत्त को त्रिभुज का परिवृत्त कहते हैं ।

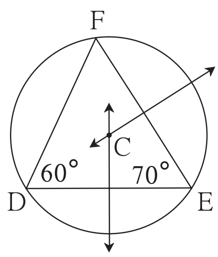
इसे ध्यान में रखें

त्रिभुज के सभी शीर्षबिंदुओं से होकर जाने वाले वृत्त के त्रिभुज का परिवृत्त कहते हैं
और वृत्त के केंद्र को परिकेंद्र कहते हैं ।

आओ, जानें

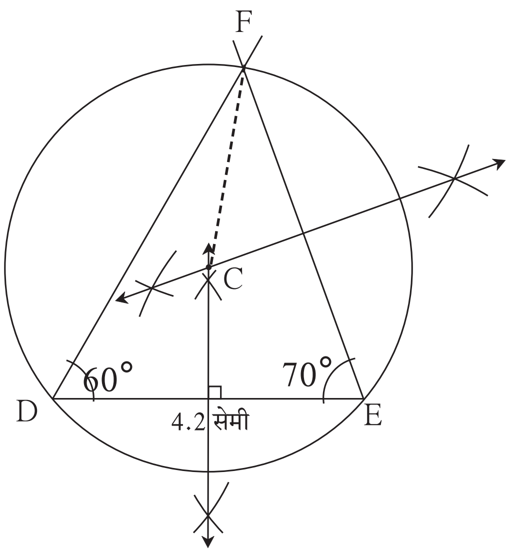
त्रिभुज के परिवृत्त की रचना करना

उदा. Δ DEF के परिवृत्त की रचना कीजिए जिसमें DE = 4.2 सेमी, $\angle D = 60^\circ$, $\angle E = 70^\circ$
पहले कच्ची आकृति बनाइए, उसमें दी गई जानकारी दर्शाइए ।



कच्ची आकृति

आकृति 6.17



आकृति 6.18

रचना के सोपान :

(1) दिए गए माप के आधार पर DEF की रचना कीजिए ।
(2) किन्हीं दो भुजाओं के लंबसमद्विभाजक खींचिए ।
(3) वे लंबसमद्विभाजक जहाँ मिलते हैं, उस बिंदु को C नाम दीजिए ।
(4) रेख CF खींचिए ।
(5) CF त्रिज्या तथा C केंद्र लेकर वृत्त की रचना कीजिए ।

कृति

विभिन्न मापवाले विभिन्न प्रकार के त्रिभुजों की रचना कीजिए । उनके अंतर्वृत्त तथा परिवृत्त खींचिए । अपना निरीक्षण नीचे दी गई तालिका में अंकित कीजिए तथा चर्चा कीजिए ।

त्रिभुज का प्रकार	समबाहु त्रिभुज	समद्विबाहु त्रिभुज	विषमबाहु त्रिभुज
अंतर्वृत्त के केंद्र का स्थान	त्रिभुज के अंतः भाग में	त्रिभुज के अंतः भाग में	त्रिभुज के अंतः भाग में
परिवृत्त के केंद्र का स्थान	त्रिभुज के अंतः भाग में	त्रिभुज के अंतः भाग या बाह्यभाग या त्रिभुज पर	

त्रिभुज का प्रकार	न्यूनकोण त्रिभुज	समकोण त्रिभुज	अधिककोण त्रिभुज
अंतर्वृत्त के केंद्र का स्थान			
परिवृत्त के केंद्र का स्थान		कर्ण के मध्यबिंदु पर	

इसे ध्यान में रखें

- त्रिभुज का अंतर्वृत्त त्रिभुज की तीनों भुजाओं को स्पर्श करता है ।
- त्रिभुज का अंतर्वृत्त बनाने के लिए किन्हीं दो कोणों के समद्विभाजक खींचना होता है ।
- त्रिभुज का परिवृत्त त्रिभुज के तीनों शीर्ष बिंदुओं से होकर जाता है ।
- त्रिभुज का परिवृत्त बनाने के लिए उसकी दो भुजाओं के लंबसमद्विभाजक खींचना होता है ।
- न्यूनकोण त्रिभुज का परिकेंद्र त्रिभुज के अंतः भाग में होता है ।
- समकोण त्रिभुज का परिकेंद्र कर्ण का मध्यबिंदु होता है ।
- अधिककोण त्रिभुज का परिकेंद्र त्रिभुज के बाह्यभाग में होता है ।
- किसी भी त्रिभुज का अंतः केंद्र त्रिभुज के अंतः भाग में होता है ।

कृति : कोई भी एक समबाहु त्रिभुज बनाकर उसके परिवृत्त तथा अंतर्वृत्त की रचना कीजिए ।

यह कृति करते समय निम्नलिखित के संदर्भ में क्या ध्यान में आता है ?

(1) त्रिभुज का परिवृत्त तथा अंतर्वृत्त बनाते समय उसके कोणों के समद्विभाजक तथा भुजाओं के लंबसमद्विभाजक एक ही है क्या ?

(2) परिवृत्त तथा अंतर्वृत्त का केंद्र एक ही है क्या ? यदि हाँ तो उसका कारण क्या होगा ?

(3) परिवृत्त की त्रिज्या तथा अंतर्वृत्त की त्रिज्या नापिए तथा उनका अनुपात ज्ञात कीजिए ।

इसे ध्यान में रखें

- समबाहु त्रिभुज के परिवृत्त तथा अंतर्वृत्त की रचना करते समय उसके कोणों के समद्विभाजक तथा भुजाओं के लंबसमद्विभाजक एक ही होते हैं ।
- समबाहु त्रिभुज के परिवृत्त तथा अंतर्वृत्त का केंद्र एक ही होता है ।
- समबाहु त्रिभुज के परिवृत्त की त्रिज्या तथा अंतर्वृत्त की त्रिज्या का अनुपात 2 : 1 होता है ।

प्रश्नसंग्रह 6.3

1. Δ ABC के अंतर्वृत्त की रचना कीजिए, जिसमें $\angle B = 100°$, BC = 6.4 सेमी $\angle C = 50°$ ।
2. Δ PQR के परिवृत्त की रचना कीजिए, जिसमें $\angle P = 70°$, $\angle R = 50°$, QR = 7.3 सेमी ।
3. Δ XYZ के अंतर्वृत्त की रचना कीजिए,जिसमें XY = 6.7 सेमी, YZ = 5.8 सेमी, XZ = 6.9 सेमी ।
4. Δ LMN में LM = 7.2 सेमी, $\angle M = 105°$, MN = 6.4 सेमी तो Δ LMN परिवृत्त की रचना कीजिए ।
5. Δ DEF के परिवृत्त की रचना कीजिए, जिसमें DE = EF = 6 सेमी $\angle F = 45°$ ।

◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇ प्रकीर्ण प्रश्नसंग्रह 6 ◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇

1. निम्नलिखित बहु वैकल्पिक प्रश्नों के दिए गए उत्तरों में से सही विकल्प चुनिए ।

(i) एक वृत्त की त्रिज्या 10 सेमी तथा जीवा की केंद्र से दूरी 6 सेमी है तो उस जीवा की लंबाई कितनी होगी ?

(A) 16 सेमी (B) 8 सेमी (C) 12 सेमी (D) 32 सेमी

(ii) त्रिभुज के तीनों कोणों के समद्विभाजक संगामी होते हैं । उनके संगामी बिंदु को क्या कहते हैं ?

(A) माध्यिका संगम (B) परिकेंद्र (C) अंतः केंद्र (D) लंब केंद्र

(iii) त्रिभुज के सभी शीर्ष बिंदुओं से जाने वाले वृत्त को क्या कहते हैं ?

(A) परिवृत्त (B) अंतःवृत्त (C) सर्वांगसम वृत्त (D) एक केंद्रीय वृत्त

(iv) किसी वृत्त की जीवा की लंबाई 24 सेमी तथा केंद्र से जीवा 5 सेमी दूरी पर है तो वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए ?

(A) 12 सेमी (B) 13 सेमी (C) 14 सेमी (D) 15 सेमी

(v) 2.9 सेमी त्रिज्यावाले वृत्त की सबसे बड़ी जीवा की लंबाई कितनी हो सकती है ?

(A) 3.5 सेमी (B) 7 सेमी (C) 10 सेमी (D) 5.8 सेमी

(vi) किसी O केंद्रवाले वृत्त की त्रिज्या 4 सेमी है । $l(OP) = 4.2$ सेमी हो तो बिंदु ‘P’ कहाँ होगा ?

(A) केंद्र पर (B) वृत्त के अंतःभाग में (C) वृत्त के बहिर्भाग में (D) वृत्त पर

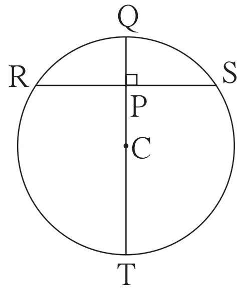
(vii) किसी वृत्त की समांतर जीवाओं की लंबाई क्रमशः 6 सेमी तथा 8 सेमी है । उस वृत्त की त्रिज्या 5 सेमी हो तो उन जीवाओं के बीच दूरी कितनी होगी ?

(A) 2 सेमी (B) 1 सेमी (C) 8 सेमी (D) 7 सेमी

2. समबाहु त्रिभुज Δ DSP में DS = 7.5 सेमी तो Δ DSP के परिवृत्त तथा अंतर्वृत्त की रचना कीजिए । परिवृत्त तथा अंतर्वृत्त की त्रिज्या का अनुपात ज्ञात कीजिए ।

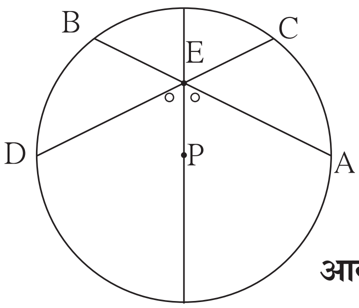
3. Δ NTS में परिवृत्त तथा अंतर्वृत्त की रचना कीजिए जिसमें NT = 5.7 सेमी, TS = 7.5 सेमी $\angle NTS = 110^\circ$

4. आकृति 6.19 में C वृत्त का केंद्र है । रेख QT व्यास है । CT = 13, CP = 5 हो तो जीवा RS ज्ञात कीजिए ।



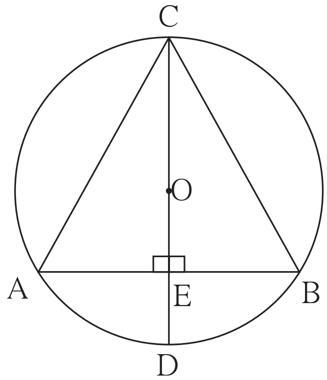
आकृति 6.19

5. आकृति 6.20 में P वृत्त का केंद्र है । जीवा AB तथा जीवा CD परस्पर व्यास के बिंदु E पर प्रतिच्छेदित करते हैं । यदि $\angle AEP \cong \angle DEP$ तो सिद्ध कीजिए कि AB = CD.

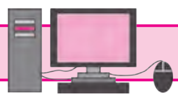


आकृति 6.20

6. आकृति 6.21 में O केंद्रवाले वृत्त का व्यास CD तथा जीवा AB है । व्यास CD जीवा AB के बिंदु E पर लंब है तो सिद्ध कीजिए कि Δ ABC समद्विबाहु त्रिभुज है ।



आकृति 6.21



ICT Tools or Links

Geogebra software की सहायता से विभिन्न वृत्त खींचकर उसमें जीवा तथा व्यास के गुणधर्म प्रत्यक्ष करके देखिए और परिवृत्त तथा अंतर्वृत्त खींचिए । Move option का उपयोग कर मूल त्रिभुज का आकार बदलकर अंतःकेंद्र, परिकेंद्र का स्थान कैसे बदलता है, इसे प्रत्यक्ष रूप से करके देखिए ।

7 निर्देशांक भूमिति

आओ, सीखें

- अक्ष, आरंभ बिंदु तथा चतुर्थांश
- प्रतल में बिंदु का निर्देशांक
- बिंदु स्थापित करना
- X-अक्ष के समांतर रेखा
- Y-अक्ष के समांतर रेखा
- रेखा का समीकरण

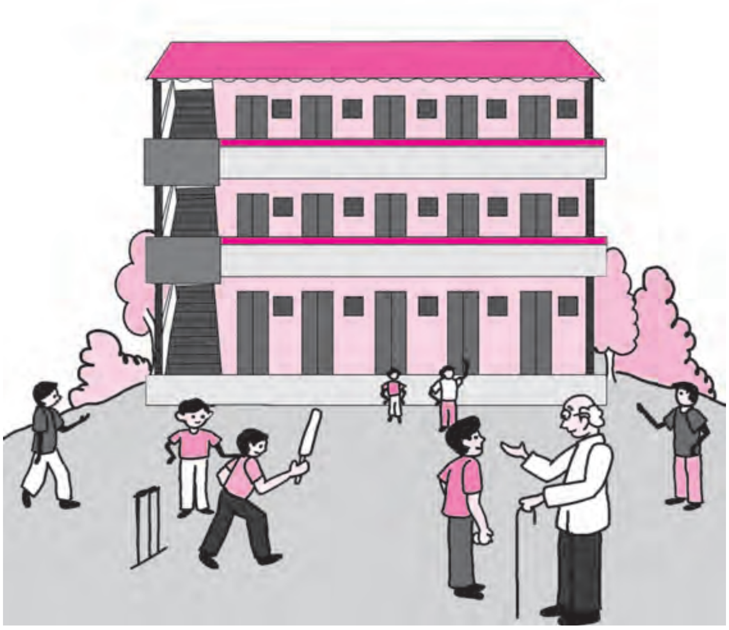
किसी इमारत के सामने मैदान में चिंटू तथा उसके मित्र खेल रहे थे । एक दादा जी वहाँ आए ।

दादा जी : अरे चिंटू, दत्ता जी इसी सोसायटी में रहते हैं ना ?

चिंटू : हाँ, यहीं रहते हैं । दूसरी मंजिल पर उनका घर है । यहाँ से जो खिड़की दीखती है ना वही ।

दादा जी : अरे! दूसरी मंजिल पर तो मुझे पाँच खिड़कियाँ दीख रही हैं । सही घर कौन-सा है ?

चिंटू : दूसरी मंजिल पर बाईं ओर से तीसरी खिड़की उनकी है ।



चिंटू द्‌वारा दत्ताभाऊ के घर की स्थिति का किया हुआ वर्णन ही निर्देशांक भूमिति की मूल संकल्पना है ।

घर का स्थान समझने के लिए सिर्फ घर का क्रमांक पर्याप्त नहीं है । घर बाईं या दाईं ओर से कौन-से क्रमांक पर है यह भी बताना होता है अर्थात क्रम से दो संख्याएँ बतानी होती हैं । जमीन से दूसरी मंजिल एवं बाईं ओर से तीसरी खिड़की इन दो क्रमवाचक संख्याओं का उपयोग करना पड़ा ।

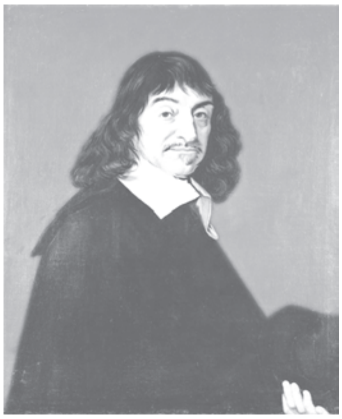
आओ, जानें

अक्ष, आंरभबिंदु तथा चतुर्थांश (Axes, origin, quadrants)

दत्ता भाऊ के घर का स्थान दो क्रमवाचक संख्याओं द्‌वारा सटीक बताया जा सका । उसी तरह परस्पर लंब दो रेखाओं से दूरी द्‌वारा किसी बिंदु का स्थान आसानी से बता सकते हैं ।

किसी बिंदु का प्रतल में स्थान बताने के लिए, उसी प्रतल में क्षैतिज (उचित स्थान पर) एक संख्या रेखा खींचते हैं । इस संख्या रेखा को X- अक्ष कहते हैं ।

रेने देकार्त (1596–1650)



सत्रहवीं शताब्दी में फ्रेंच गणितज्ञ रेने देकार्त ने प्रतल के बिंदु का सटीक स्थान दर्शाने के लिए निर्देशांक पद्धति का सुझाव दिया । इस पद्धति को 'कार्तेशियन निर्देशांक पद्धति' कहते हैं । देकार्त के नाम पर यह नाम दिया गया । सर्वप्रथम देकार्त ने भूमिति तथा बीजगणित में सहसंबंध स्थापित किया जिससे गणित के क्षेत्र में क्रांति आई ।

कार्तेशियन निर्देशांक पद्धति यह विश्लेषक भूमिति (Analytical Geometry) का आधार है । रेने देकार्त की पहली पुस्तक का नाम 'ला जामेट्रिक' है । इस पुस्तक में उन्होंने भूमिति के अध्ययन के लिए बीजगणित का उपयोग किया था । उन्होंने अपनी इस पुस्तक में पहली बार बताया कि प्रतल के बिंदुओं को वास्तविक संख्याओं की क्रमिक जोड़ी से दर्शा सकते हैं । इस क्रमिक जोड़ी को 'कार्तेशियन निर्देशांक' कहते हैं ।

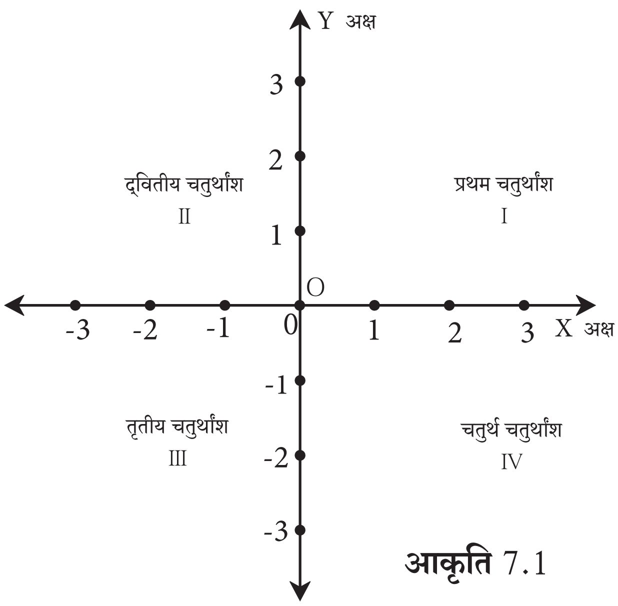
निर्देशांक भूमिति का उपयोग भौतिक शास्त्र, अभियांत्रिकी, नौकायन शास्त्र, भूकंप शास्त्र तथा कला इस प्रकार के अनेक क्षेत्रों में किया जाता है । प्रौद्योगिकी की प्रगति में निर्देशांक भूमिति महत्वपूर्ण स्थान रखती है । जिओजेब्रा में भूमिति तथा बीजगणित का सहसंबंध स्पष्ट रूप से दिखाई देता है । Geometry तथा Algebra इन शब्दों को मिलाकर ही Geogebra नाम दिया गया है ।

X–अक्ष के 0 निर्देशांकवाले बिंदु से X–अक्ष पर खींची गई लंब संख्या रेखा Y–अक्ष है । सामान्यतः दोनों संख्या रेखाओं पर 0 यह संख्या एक ही बिंदु में दर्शाई जाती है । इस बिंदु को मूल बिंदु (Origin) कहते हैं । उसे अंग्रेजों के 'O' अक्षर द्वारा दर्शाते हैं ।

X–अक्ष पर O के दाईं ओर धनात्मक संख्याएँ तथा बाईं ओर ऋणात्मक संख्याएँ दर्शाते हैं ।

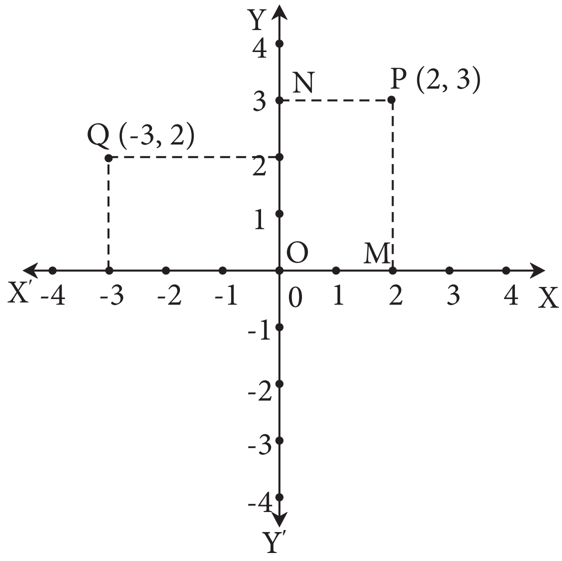
Y–अक्ष पर O के ऊपर धनात्मक जबकि नीचे की ओर ऋणात्मक संख्याएँ दर्शाते हैं ।

X तथा Y अक्ष के कारण प्रतल के चार भाग होते हैं । प्रत्येक को चतुर्थांश कहते हैं । उन चतुर्थांशों में अक्ष पर स्थित बिंदुओं का समावेश नहीं होता । आकृति में दिखाए अनुसार घड़ी की सूई की विपरीत दिशा में चतुर्थांशों का क्रम मानते हैं ।



आकृति 7.1

प्रतल के बिंदु के निर्देशांक (Co-ordinates of a point in a plane)



आकृति 7.2

किसी प्रतल पर X-अक्ष तथा Y-अक्ष निश्चित किए गए हैं । उसी प्रतल में बिंदु P दिखाया गया है । P का स्थान उसकी दोनों अक्षों से दूरी निश्चित कर बता सकते हैं उसके लिए रेख PM $\perp$ X-अक्ष तथा रेख PN $\perp$ Y-अक्ष खींचें ।

M का X अक्ष पर निर्देशांक 2 है । N का Y अक्ष पर निर्देशांक 3 है ।

$\therefore$ P का x निर्देशांक 2 और y निर्देशांक 3 है ।

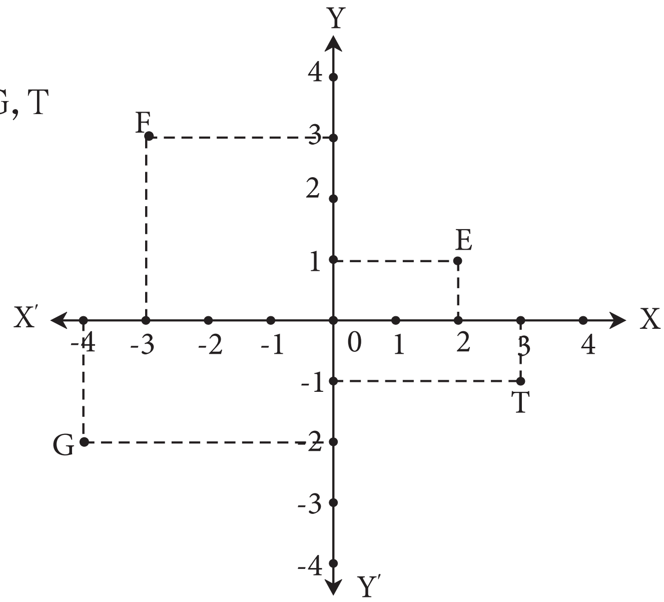
बिंदुओं के स्थान बताते समय उसका x निर्देशांक पहले बताते हैं, ऐसी मान्यता है। इस के अनुसार P बिंदु के निर्देशांकों का क्रम 2, 3 निश्चित होता है । बिंदु का स्थान संक्षिप्त रूप से संख्याओं की (2, 3) इस जोड़ी से बता सकते हैं ।

बिंदु Q से X अक्ष पर QS एक लंब खींचा तथा Y अक्ष पर QR यह लंब खींचा । Q का X अक्ष पर निर्देशांक -3 तथा Y अक्ष पर निर्देशांक 2 है । $\therefore$ बिंदु Q का निर्देशांक (-3, 2) है ।

उदा. संलग्न आकृति में दिखाए गए बिंदुओं E, F, G, T के निर्देशांक लिखिए ।

हल :

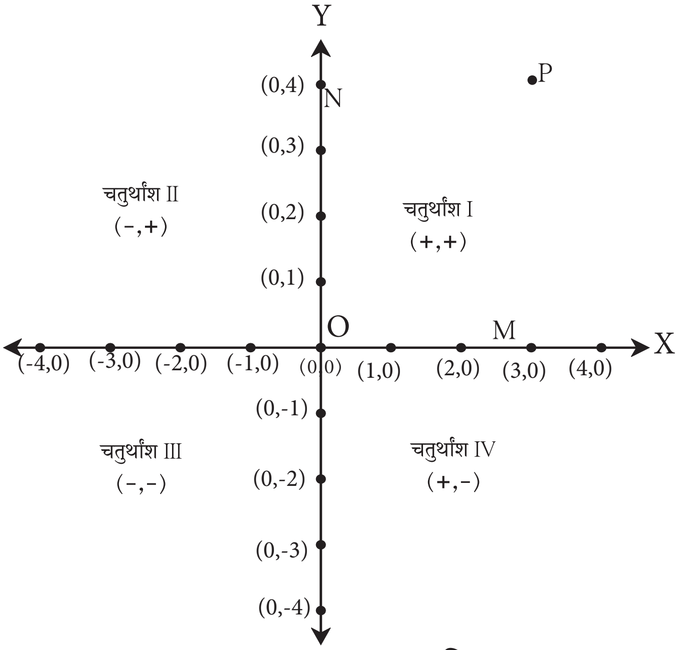
- बिंदु E के निर्देशांक (2,1)
- बिंदु F के निर्देशांक (-3,3)
- बिंदु G के निर्देशांक (-4,-2)
- बिंदु T के निर्देशांक (3,-1)



आकृति 7.3

आओ, जानें

अक्ष पर स्थित बिंदुओं के निर्देशांक (Co-ordinates of points on the axes)



आकृति 7.4

M बिंदु का x निर्देशांक अर्थात M बिंदु की Y अक्ष से दूरी अतः M का x निर्देशांक 3 है उस बिंदु की X अक्ष से दूरी शून्य है । अतः M का y निर्देशांक 0 है ।

इस आधार पर X अक्ष पर स्थित M बिंदु का निर्देशांक (3,0) है । Y अक्ष पर N बिंदु का y निर्देशांक 4 है । क्योंकि वह बिंदु X अक्ष से 4 इकाई की दूरी पर है तथा बिंदु N की Y अक्ष से दूरी शून्य है इस अतः इसका y निर्देशांक 0 है ।

इस तरह Y अक्ष पर स्थित N बिंदु का निर्देशांक (0,4) है ।

अब 'O' यह मूल बिंदु X तथा Y दोनों अक्षों पर स्थित है इसलिए उस बिंदु की X तथा Y दोनों अक्षों से दूरी 0 है । अतः बिंदु 'O' का निर्देशांक (0,0) है ।

इस तरह प्रतल में स्थित प्रत्येक बिंदु से एक और केवल एक जोड़ी (क्रमित जोड़ी) संबंधित होती है ।

इसे ध्यान में रखें

- X -अक्ष पर स्थित प्रत्येक बिंदु का y निर्देशांक शून्य होता है ।
- Y -अक्ष पर स्थित प्रत्येक बिंदु का x निर्देशांक शून्य होता है ।
- मूल बिंदु का निर्देशांक (0,0) होते हैं ।

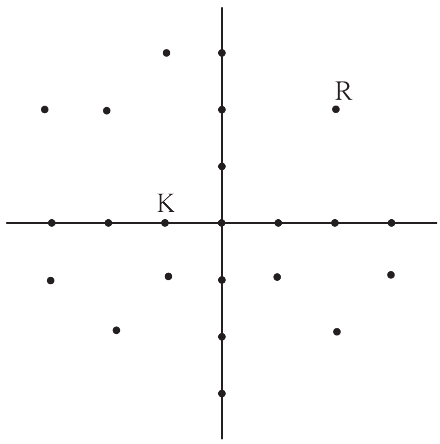
उदा. निम्नलिखित बिंदु किस चतुर्थांश में हैं अथवा किस अक्ष पर हैं पहचानिए ।
A(5,7), B(−6,4), C(4,−7), D(−8,−9), P(−3,0), Q(0,8)

हल : A(5,7) का x निर्देशांक धन तथा y निर्देशांक धन है । $\therefore$ बिंदु A प्रथम चतुर्थांश में है ।
B(−6,4) का x निर्देशांक ऋण तथा y निर्देशांक धन है । $\therefore$ बिंदु B द्वितीय चतुर्थांश में है ।
C(4,−7) का x निर्देशांक धन तथा y निर्देशांक ऋण है । $\therefore$ बिंदु C चतुर्थ चतुर्थांश में है ।
D(−8,−9) का x निर्देशांक ऋण तथा y निर्देशांक ऋण है । $\therefore$ बिंदु D तृतीय चतुर्थांश में है ।

P(–3,0) का y निर्देशांक शून्य है । ∴ बिंदु P यह X अक्ष पर है ।
Q(0,8) का x निर्देशांक शून्य है । ∴ बिंदु Q यह Y अक्ष पर है ।

कृति: आकृति में दिखाए गए अनुसार विद्यालय के मैदान में विद्यार्थियों को क्षैतिज पंक्ति में बिठाइए जिससे X– अक्ष तथा Y– अक्ष बनेंगे ।

- रंगीन बिंदुओं के स्थान पर चारों चतुर्थांशों में विद्यार्थियों को बिठाइए ।
- अब अलग-अलग विद्यार्थियों के नाम के प्रथम अक्षर का उच्चारण कर आकृति में दिखाए गए अनुसार खड़े कीजिए तथा उनके निर्देशांक पूछिए । उदा. राजेंद्र (2, 2) तथा कीर्ति (–1, 0)
- इस प्रकार मैदान में की गई कृति से प्रतल के बिंदु का स्थान मनोरंजक विधि से व आसानी से स्पष्ट होगा ।



आकृति 7.5

आओ, जानें

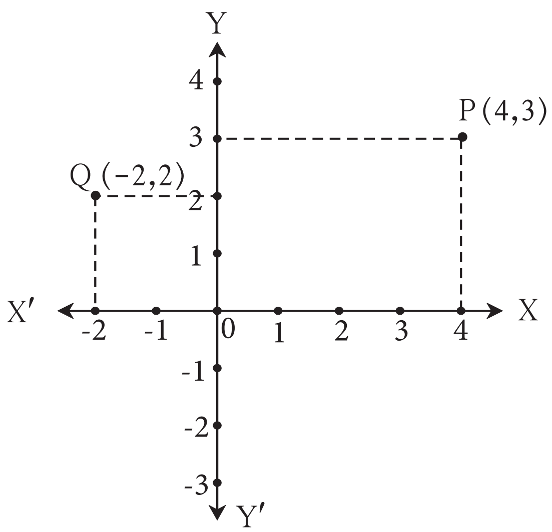
दिए गए निर्देशांकों से संबंधित बिंदु स्थापित करना (To plot the points of given co-ordinates)

माना P (4,3) तथा Q (–2,2) बिंदु स्थापित करना हैं ।

बिंदु स्थापित करने के सोपान

(i) प्रतल में X-अक्ष तथा Y-अक्ष खींचिए । मूल बिंदु दर्शाइए ।

(ii) P (4,3) इस बिंदु को दर्शाने के लिए X अक्ष पर 4 दर्शाने वाले बिंदु से Y अक्ष के समांतर रेखा खींचिए ।
Y अक्ष पर 3 दर्शाने वाले बिंदु से X अक्ष के समांतर रेखा खींचिए ।



आकृति 7.6

(iii) इन दो समांतर का रेखाओं का प्रतिच्छेदन बिंदु अर्थात P (4,3)है । यह बिंदु किस चतुर्थांश में होगा, निरीक्षण कीजिए ।

(iv) इसी प्रकार Q (-2,2) बिंदु स्थापित कीजिए । यह बिंदु द्‌वितीय चतुर्थांश में आया क्या ? इस निर्देशांक पद्‌धति के अनुसार R(-3,-4), S(3,-1) बिंदु स्थापित कीजिए ।

उदा. निम्नलिखित बिंदु किस चतुर्थांश में या अक्ष पर हैं लिखिए ।

(i) (5,3) (ii) (-2,4) (iii) (2,-5) (iv) (0,4)
(v) (-3,0) (vi) (-2,2.5) (vii) (5,3.5) (viii) (-3.5,1.5)
(ix) (0, -4) (x) (2,-4)

हल :

	निर्देशांक	चतुर्थांश / अक्ष
(i)	(5,3)	चतुर्थांश I
(ii)	(-2,4)	चतुर्थांश II
(iii)	(2,-5)	चतुर्थांश IV
(iv)	(0,4)	Y अक्ष
(v)	(-3,0)	X अक्ष

	निर्देशांक	चतुर्थांश / अक्ष
(vi)	(-2, -2.5)	चतुर्थांश III
(vii)	(5,3.5)	चतुर्थांश I
(viii)	(-3.5,1.5)	चतुर्थांश II
(ix)	(0, -4)	Y अक्ष
(x)	(2,-4)	चतुर्थांश IV

प्रश्नसंग्रह 7.1

1. नीचे दिए गए बिंदु उनके निर्देशांकों के आधार पर किस चतुर्थांशों या अक्षों पर है, लिखिए ।
   - A(-3,2), • B(-5,-2), • K(3.5,1.5), • D(2,10),
   - E(37,35), • F(15,-18), • G(3,-7), • H(0,-5),
   - M(12,0), • N(0,9), • P(0,2.5), • Q(-7,-3)

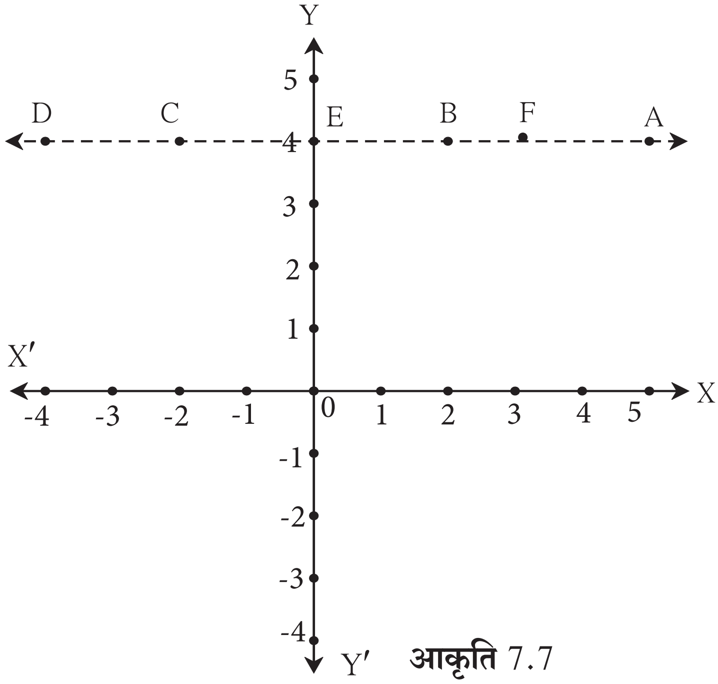
2. निम्नलिखित बिंदु किस चतुर्थांश में होंगे ?
   (i) जिसके दोनों निर्देशांक धनात्मक है । (ii) जिसके दोनों निर्देशांक ऋणात्मक है ।
   (iii) जिसका x निर्देशांक धनात्मक तथा y निर्देशांक ऋणात्मक है ।
   (iv) जिसका x निर्देशांक ऋणात्मक तथा y निर्देशांक धनात्मक है ।

3. प्रतल में निर्देशांक पद्‌धति निश्चित कीजिए तथा निम्नलिखित बिंदु स्थापित कीजिए ।
   L(-2,4), M(5,6), N(-3,-4), P(2,-3), Q(6,-5), S(7,0), T(0,-5)

आओ, जानें

X –अक्ष के समांतर रेखा (Lines parallel to X–axis)

- आलेख कागज पर निम्नलिखित बिंदु स्थापित कीजिए ।
  A(5,4), B(2,4), C(–2,4), D(–4,4), E(0,4), F(3,4)
- बिंदुओं के निर्देशांकों का निरीक्षण कीजिए ।
- यह ध्यान में आया क्या कि सभी बिंदुंओं के y निर्देशांक समान है ?
- सभी बिंदु एकरेखीय हैं ।
- यह रेखा किस अक्ष की समांतर रेखा है ?
- रेखा DA पर स्थित प्रत्येक बिंदु का y निर्देशांक समान अर्थात 4 है । वह स्थिर है । इसीलिए रेखा DA का वर्णन $y = 4$ इस समीकरण द्वारा करते हैं । किसी भी बिंदु का y निर्देशांक 4 हो तो वह बिंदु रेखा DA पर होगा ।
  X अक्ष के समांतर तथा 4 इकाई दूरी पर X अक्ष के ऊपर की ओर स्थित रेखा का समीकरण $y = 4$ है ।



आकृति 7.7

आओ, चर्चा करें

- X अक्ष के समांतर तथा X अक्ष के नीचे की ओर 6 इकाई दूरी पर स्थित रेखा खींच सकते हैं क्या ?
- (–3,–6), (10,–6), ($\frac{1}{2}$, –6) में सभी बिंदु उस रेखा पर होंगे क्या ?
- इस रेखा का समीकरण क्या होगा ?

इसे ध्यान में रखें

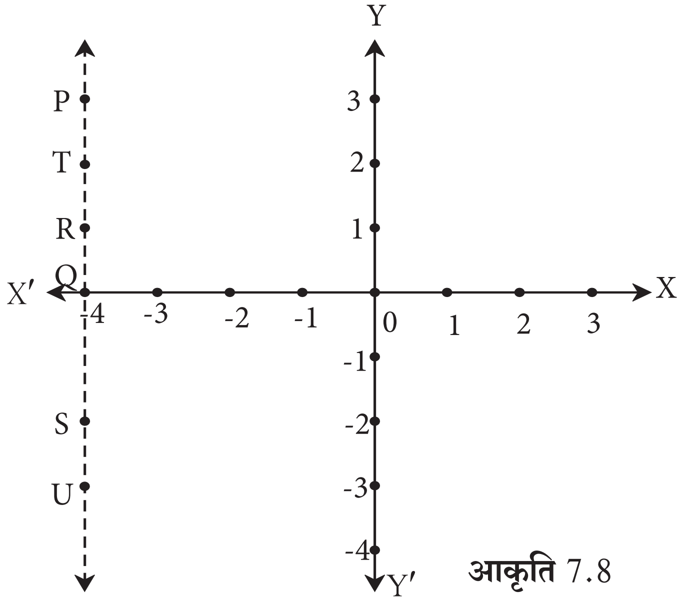
यदि b > 0 तथा $y = b$ यह X अक्ष के समांतर रेखा है । जो बिंदु (0, b) से होकर जाती हो तो वह रेखा X अक्ष के ऊपर की ओर उसके समांतर होगी । b < 0 हो तो वह रेखा X अक्ष के नीचे ओर उसको समांतर रेखा होगी ।

X अक्ष के समांतर रेखा का समीकरण $y = b$ स्वरूप में होता है ।

आओ, जानें

Y–अक्ष के समांतर रेखा (Lines parallel to Y–axis)

- आलेख कागज पर निम्नलिखित बिंदु स्थापित कीजिए ।
  P(–4,3), Q(–4,0), R(–4,1), S(–4,–2), T(–4,2), U(–4,–3)
- बिंदुओं के निर्देशांकों का निरीक्षण कीजिए ।
- यह ध्यान में आया क्या कि सभी बिंदुओं के x निर्देशांक समान है ?
- सभी बिंदु एकरेखीय हैं क्या ?
- यह रेखा किस अक्ष के समांतर है ?
- रेखा PS पर स्थित प्रत्येक बिंदु का x निर्देशांक समान अर्थात –4 है । वह स्थिर है । इसलिए रेखा PS का वर्णन $x = -4$ इस समीकरण द्वारा करते हैं । जिस बिंदु का x निर्देशांक –4 होगा वह प्रत्येक बिंदु रेखा PS वर होगा ।
  Y अक्ष के बाईं ओर 4 इकाई दूरी पर स्थित समांतर रेखा का समीकरण $x = -4$ है ।



आकृति 7.8

आओ, चर्चा करें

- Y अक्ष के समांतर तथा उससे 2 इकाई दूरी पर दाईं ओर रेखा खींच सकते हैं क्या ?
- (2,10), (2,8), $(2, -\frac{1}{2})$ ये सभी बिंदु उस रेखा पर होंगे क्या ?
- इस रेखा का समीकरण क्या होगा ?

इसे ध्यान में रखें

यदि $x = a$ यह Y अक्ष के समांतर रेखा जो बिंदु $(a, 0)$ से होकर जाती हो तथा $a > 0$ हो तो रेखा Y अक्ष के दाईं ओर होती है । यदि $a < 0$ हो तो वह रेखा Y अक्ष की बाईं ओर होती है ।

Y अक्ष के समांतर रेखा का समीकरण $x = a$ के रूप होता है ।

इसे ध्यान में रखें

(1) X-अक्ष पर स्थित प्रत्येक बिंदु का y निर्देशांक 0 होता है । इसके विपरीत जिस बिंदु का y निर्देशांक 0 होता है । वह बिंदु X-अक्ष पर होता है । इसलिए X अक्ष का समीकरण $y = 0$ ऐसे लिखते हैं ।

(2) Y-अक्ष पर स्थित प्रत्येक बिंदु का x निर्देशांक 0 होता है । इसके विपरीत जिस बिंदु का x निर्देशांक 0 होता है । वह बिंदु Y-अक्ष पर होता है । इसलिए Y अक्ष का समीकरण $x = 0$ ऐसे लिखते हैं ।

आओ, जानें

रेखीय समीकरण का आलेख (Graph of linear equations)

उदा. $x = 2$ तथा $y = -3$ इन समीकरणों का आलेख खींचिए ।

हल (i) आलेख कागज पर X अक्ष तथा Y अक्ष खींचिए ।

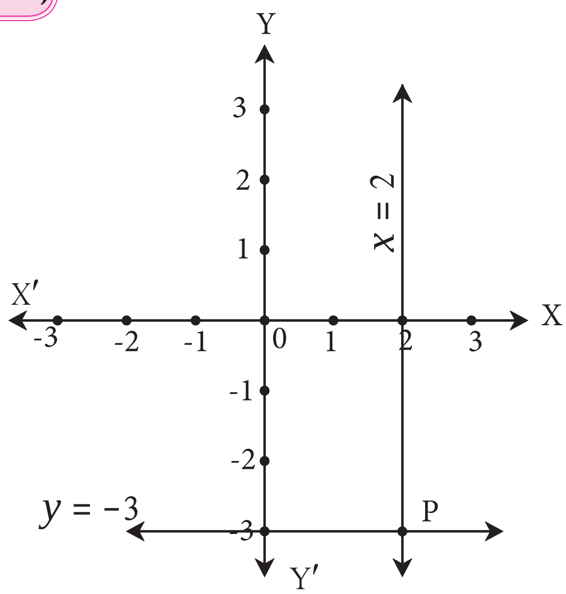
(ii) $x = 2$ दिया गया है इसलिए Y अक्ष की दाईं ओर 2 इकाई दूरी पर Y अक्ष के समांतर रेखा खींचिए ।

(iii) $y = -3$ दिया गया है, इसलिए X अक्ष से नीचे की ओर 3 इकाई दूरी पर X अक्ष के समांतर रेखा खींचिए ।

(iv) अक्षों के समांतर खींची गई रेखाएँ ही समीकरणों के आलेख हैं ।

(v) इन दोनों रेखाओं के प्रतिच्छेदन बिंदु P के निर्देशांक लिखिए ।

(vi) जाँच कीजिए कि P का निर्देशांक (2,-3) हैं ।

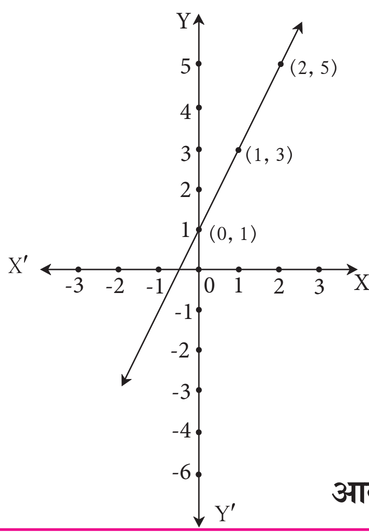


आकृति 7.9

सामान्य स्वरूप में रेखीय समीकरण का आलेख

कृति : आलेख कागज पर (0,1) (1,3) (2,5) बिंदु स्थापित कीजिए । जाँच कीजिए कि वे एकरेखीय हैं । यदि एकरेखीय हो तो, उनसे होकर जाने वाली रेखा खींचिए ।

- वह रेखा किन-किन चतुर्थांशों से होकर जाती है ?
- वह रेखा तथा Y अक्ष के प्रतिच्छेदन बिंदु का निर्देशांक लिखिए ।
- उस रेखा पर कोई बिंदु दर्शाए जो कि तृतीय चतुर्थांश में हों । उसका निर्देशांक लिखिए ।



आकृति 7.10

उदा. $2x - y + 1 = 0$ यह दो चरांकवाला सामान्य स्वरूप का रेखीय समीकरण है । इस समीकरण का आलेख बनाइए ।

हल : $2x - y + 1 = 0$ अर्थात $y = 2x + 1$

x का कोई भी मान रखकर y का मान ज्ञात कीजिए ।

उदाहरणार्थ, यदि $x = 0$ यह मान समीकरण में रखने पर $y = 1$ मिलता है ।

इसी प्रकार x का मान $0, 1, 2, \frac{1}{2}, -2$ रखकर y का मान ज्ञात कीजिए ।

इन मानों को क्रमिक जोड़ी के स्वरूप में लिखिए ।

x	0	1	2	$\frac{1}{2}$	-2
y	1	3	5	2	-3
(x, y)	$(0,1)$	$(1,3)$	$(2,5)$	$(\frac{1}{2}, 2)$	$(-2,-3)$

इन बिंदुओं को स्थापित करें । निश्चित कीजिए कि स्थापित बिंदु एकरेखीय है ? इन सभी बिंदुओं से होकर जाने वाली रेखा खींचे यह रेखा ही समीकरण $2x - y + 1 = 0$ का आलेख है ।

ICT Tools or Links

Geogebra Software की सहायता से X-अक्ष, Y-अक्ष खींचिए । विविध बिंदु स्थापित कीजिए । Algebric View में बिंदुओं के निर्देशांक देखें तथा अध्ययन करें । अक्षों के समांतर रेखाओं का समीकरण देखिए । Move Option का उपयोग कर रेखाओं के स्थान बदलते रहें । X-अक्ष तथा Y-अक्ष का समीकरण कौन-सा आता है ?

प्रश्नसंग्रह 7.2

1. आलेख कागज पर A (3,0), B(3,3), C(0,3) बिंदु स्थापित कीजिए । AB तथा BC को खींचें । कौन-सी आकृति मिलती है, लिखिए ।
2. Y-अक्ष के समांतर तथा उस अक्ष की बाईं ओर 7 इकाई की दूरी पर स्थित रेखा का समीकरण लिखिए ।
3. X-अक्ष के समांतर तथा उसी अक्ष के नीचे की ओर 5 इकाई की दूरी पर स्थित रेखा का समीकरण लिखिए ।
4. Q(-3,-2) यह बिंदु Y-अक्ष के समांतर रेखा पर है । उस रेखा का समीकरण लिखिए तथा उसका आलेख बनाइए ।
5. Y-अक्ष तथा रेखा $x = -4$ समांतर रेखाएँ हैं, इन दो रेखाओं के बीच की दूरी कितनी है ?

6. निम्नलिखित में से किन समीकरणों का आलेख X अक्ष के समांतर हैं तथा किन समीकरणों का आलेख Y अक्ष के समांतर होगा ।

(i) $x = 3$ (ii) $y - 2 = 0$ (iii) $x + 6 = 0$ (iv) $y = -5$

7. आलेख कागज पर A(2,3), B(6,-1) तथा C(0,5) बिंदु स्थापित कीजिए । यदि बिंदु एकरेखीय हो तो उन बिंदुओं को समाविष्ट करने वाली रेखा खींचिए । यह रेखा X अक्ष तथा Y अक्ष को जिन बिंदुओं पर प्रतिच्छेदित करती है, उन बिंदुओं के निर्देशांक लिखिए ।

8. नीचे दिए गए समीकरणों के आलेख एक ही निर्देशांक पद्धति पर खींचिए । उनके प्रतिच्छेदन बिंदुओं के निर्देशांक लिखिए । $x + 4 = 0$, $y - 1 = 0$, $2x + 3 = 0$, $3y - 15 = 0$

9. निम्नलिखित समीकरणों का आलेख खींचिए ।

(i) $x + y = 2$ (ii) $3x - y = 0$ (iii) $2x + y = 1$

प्रकीर्ण प्रश्नसंग्रह 7

1. नीचे दिए गए वैकल्पिक प्रश्नों के दिए गए उत्तरों में से सही विकल्प चुनिए।

(i) X अक्ष पर स्थित बिंदु निम्नलिखित में से किस स्वरूप में होता है?

(A) (b, b) (B) (o, b) (C) (a, o) (D) (a, a)

(ii) रेखा $y = x$ इस रेखा पर स्थित प्रत्येक बिंदु का निर्देशांक निम्नलिखित में से किस स्वरूप में होगा ?

(A) (a, a) (B) (o, a) (C) (a, o) (D) $(a, -a)$

(iii) निम्नलिखित में से X अक्ष का समीकरण कौन-सा है ?

(A) $x = 0$ (B) $y = 0$ (C) $x + y = 0$ (D) $x = y$

(iv) बिंदु (-4, -3) किस चतुर्थांश में होगा ?

(A) प्रथम (B) द्‌वितीय (C) तृतीय (D) चतुर्थ

(v) (-5,5), (6,5), (-3,5), (0,5) बिंदुओं को समाविष्ट करने वाली रेखा का स्वरूप कैसा होगा ?

(A) मूल बिंदु से जाने वाली (B) Y अक्ष के समांतर

(C) X अक्ष के समांतर (D) इनमें से कोई नहीं

(vi) P(-1,1), Q(3,-4), R(1,-1), S(-2,-3), T(-4,4) में से चतुर्थ चतुर्थांश के बिंदु कौन-से हैं?

(A) P तथा T (B) Q तथा R (C) केवल S (D) P तथा R

2. आकृति में कुछ बिंदु दर्शाए गए हैं ।

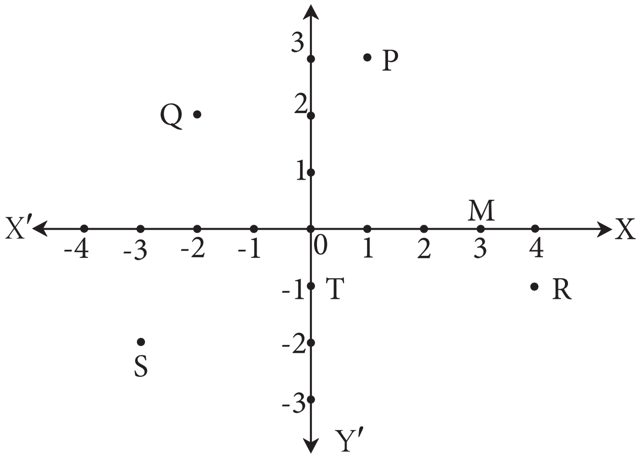
नीचे दिए गए प्रश्नों के उत्तर लिखिए ।

(i) Q तथा R बिंदुओं के निर्देशांक लिखिए ।

(ii) T तथा M बिंदुओं के निर्देशांक लिखिए ।

(iii) तृतीय चतुर्थांश में कौन-सा बिंदु है ?

(iv) किस बिंदु के x तथा y निर्देशांक समान हैं ?



आकृति 7.11

3. नीचे दिए गए बिंदुओं को आलेख पर स्थापित किए बिना बताइए कि वे किस चतुर्थांश में हैं या किस अक्ष पर हैं ?

(i) (5, −3) (ii) (−7, −12) (iii) (−23, 4)

(iv) (−9, 5) (v) (0, −3) (vi) (−6, 0)

4. निम्नलिखित बिंदुओं को आलेख कागज पर स्थापित कीजिए ।

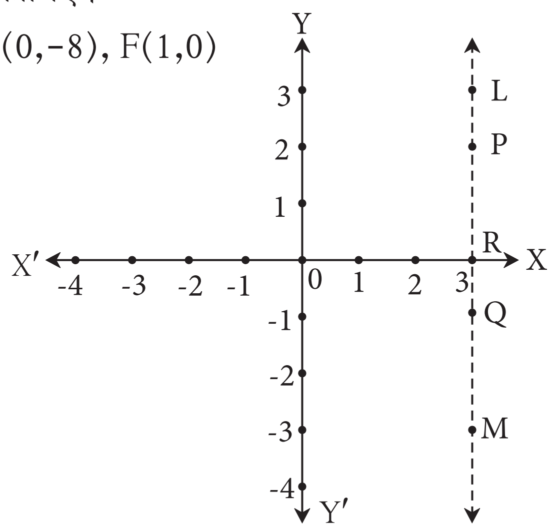
A(1,3), B(−3,−1), C(1,−4), D(−2,3), E(0,−8), F(1,0)

5. संलग्न आकृति में रेखा LM यह Y अक्ष की समांतर रेखा है ।

(i) रेखा LM की Y अक्ष से कितने दूरी पर है ?

(ii) बिंदु P, Q तथा R के निर्देशांक लिखिए ।

(iii) बिंदु L तथा M के x निर्देशांकों में कितना अंतर हैं ?



आकृति 7.12

6. X- अक्ष के समांतर तथा X-अक्ष से 5 इकाई दूरी पर कितनी रेखाएँ हो सकती हैं ? उनके समीकरण लिखिए ।

7*. कोई एक वास्तविक संख्या a लेकर Y-अक्ष तथा $x = a$ रेखाओं के बीच की दूरी निश्चित कीजिए ।

❑❑❑

8 त्रिकोणमिति

आओ, सीखें

- त्रिकोणमिति का परिचय
- त्रिकोणमितीय अनुपात
- त्रिकोणमितीय अनुपातों में संबंध
- विशेष कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपात

त्रिकोणमिति का परिचय (Introduction to trigonometry)

हम भूखंड की दूरी रस्सी से, चलकर नाप सकते हैं किंतु समुद्र में जहाजों से दीपस्तंभ की दूरी कैसे नापेंगे ?

उपर्युक्त चित्रों का निरीक्षण कीजिए । चित्र में दिए गए प्रश्न गणित से संबंधित है । इन प्रश्नों के उत्तर प्राप्त करने के लिए गणित विषय के त्रिकोणमिति इस शाखा का उपयोग होता हैं । त्रिकोणमिति का उपयोग अभियांत्रिकी, खगोलशास्त्र, नौकाशास्त्र आदि शाखाओं में किया जाता है ।

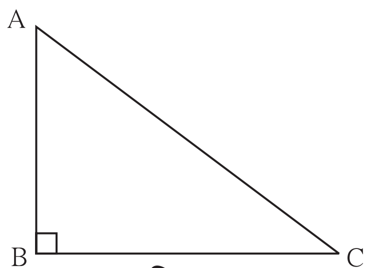
त्रिकोणमिति (Trigonometry) यह शब्द तीन ग्रीक शब्द से बना गया है । Tri का अर्थ तीन, gona अर्थात भुजा, metron अर्थात माप करना ।

थोड़ा याद करें

हमने त्रिभुज का अध्ययन किया है, समकोण त्रिभुज, पायथागोरस का प्रमेय तथा समरूप त्रिभुज के गुणधर्म के आधार पर त्रिकोणमिति विषय का आरंभ होता है ।

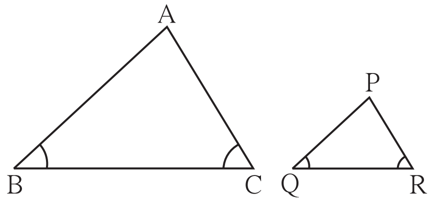
उनका पुनरावर्तन कीजिए ।

- Δ ABC में $\angle B$ यह समकोण है तो $\angle B$ इस समकोण की सम्मुख भुजा AC यह विकर्ण है ।
  $\angle A$ की सम्मुख भुजा BC है, $\angle C$ सम्मुख भुजा AB है ।
  इस त्रिभुज के संदर्भ में पायथागोरस प्रमेय के कथन द्वारा $(AB)^2 + (BC)^2 = (AC)^2$



आकृति 8.1

- यदि Δ ABC ~ Δ PQR तो इनकी संगत भुजाएँ समानुपात में होती हैं अर्थात $\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{AC}{PR}$



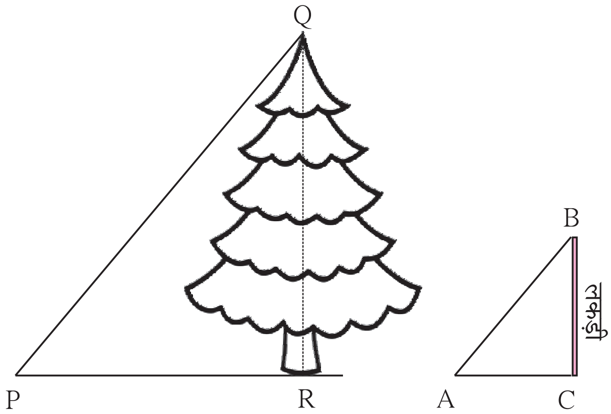
आकृति 8.2

किसी बड़े पेड़ की ऊँचाई मापनी हो तो समरूप त्रिभुज के गुणधर्म का उपयोग कर उसे कैसे मापा जा सकता है, वह देखेंगे ।

कृति : अच्छी धूपवाले दिन इस प्रयोग को करते हैं । संलग्न आकृति देखें ।
दी गई आकृति में QR यह पेड़ की ऊँचाई है, BC एक लकड़ी की ऊँचाई है ।

छोटी लकड़ी को जमीन पर खड़ी रख कर उसकी ऊँचाई तथा उसकी छाया की लंबाई माप कर लिखिए । पेड़ की छाया की लंबाई नापिए । सूर्य की किरण समांतर होने के कारण Δ PQR तथा Δ ABC यह समकोण तथा समरूप त्रिभुज हैं, इसे समझें । समरूप त्रिभुज की संगत भुजाएँ समानुपात में होती हैं इसका उपयोग कर $\frac{QR}{PR} = \frac{BC}{AC}$ प्राप्त होता है । इसलिए पेड़ की ऊँचाई

QR = $\frac{BC}{AC} \times PR$ यह समीकरण प्राप्त होता है ।



आकृति 8.3

PR, BC तथा AC के मान हम जानते हैं । यह मान समीकरण में रखकर QR की लंबाई अर्थात पेड़ की ऊँचाई निश्चित कर सकते हैं ।

थोड़ा, सोचें

यह प्रयोग प्रातः 8 बजे न करके दोपहर 11:30 या 1:30 को करना सुविधाजनक होगा क्या ?

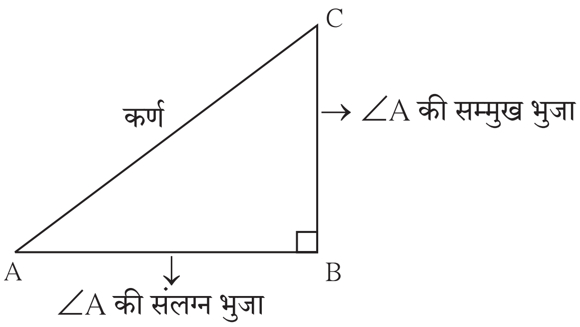
कृति : उपर्युक्त कृति कर आप स्वयं परिसर के ऊँचे पेड़ की ऊँचाई ज्ञात कीजिए ।
परिसर में पेड़ न हो तो किसी खंबे की ऊँचाई ज्ञात कीजिए ।

आकृति 8.4

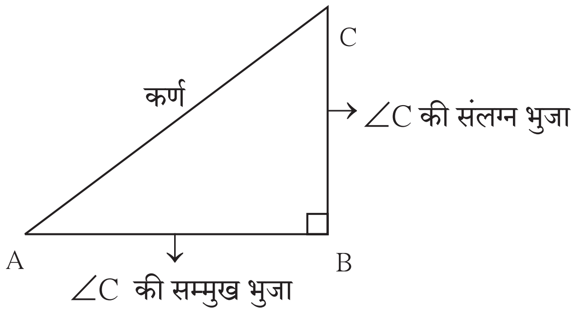
आओ, जानें

त्रिभुज के संदर्भ में कुछ संबोध (Terms related to triangle)

समकोण Δ ABC में $\angle B = 90^\circ$ है तो $\angle A$ तथा $\angle C$ न्यूनकोण है ।

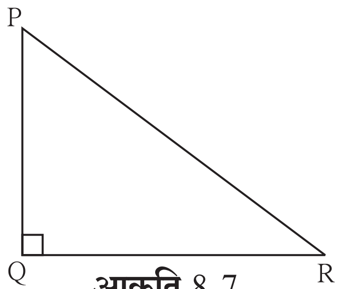


आकृति 8.5



आकृति 8.6

उदा. समकोण Δ PQR में



आकृति 8.7

$\angle P$ की सम्मुख भुजा = . . . $\angle P$ की संलग्न भुजा = ...

$\angle R$ सम्मुख भुजा = . . . $\angle R$ की संलग्न भुजा = ...

त्रिकोणमितीय अनुपात (Trigonometic ratios)

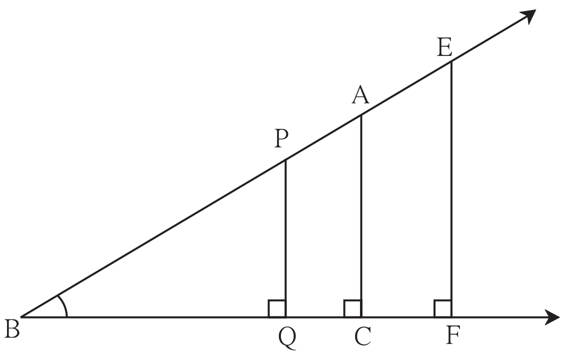
संलग्न आकृति 8.8 में कुछ समकोण त्रिभुज दिखाए गए है । जिनका $\angle B$ सामान्य कोण है । इसलिए सभी समकोण त्रिभुज समरूप है ।

यहाँ Δ PQB ~ Δ ACB है ।

$\therefore \dfrac{PB}{AB} = \dfrac{PQ}{AC} = \dfrac{BQ}{BC}$

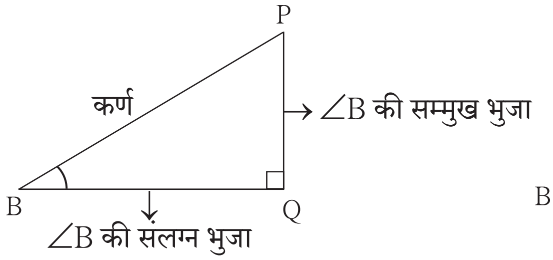
$\dfrac{PQ}{AC} = \dfrac{PB}{AB} \quad \therefore \dfrac{PQ}{PB} = \dfrac{AC}{AB}$ . . . . . एकांतरानुपात से

$\dfrac{QB}{BC} = \dfrac{PB}{AB} \quad \therefore \dfrac{QB}{PB} = \dfrac{BC}{AB}$ . . . . . एकांतरानुपात से

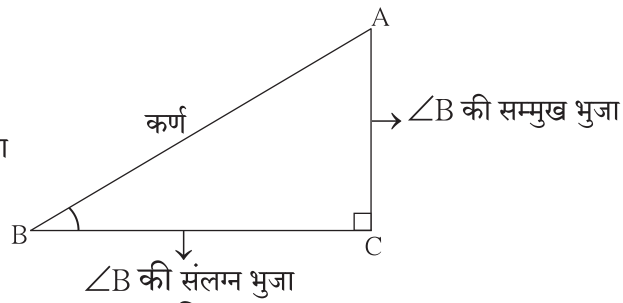


आकृति 8.8

निम्नलिखित आकृति 8.9 तथा 8.10 ये आकृतियाँ 8.8 से अलग किए त्रिभुज की हैं ।



आकृति 8.9



आकृति 8.10

(i) Δ PQB में,

$$\frac{PQ}{PB} = \frac{\angle B \text{ की सम्मुख भुजा}}{\text{कर्ण}}$$

Δ ACB में,

$$\frac{AC}{AB} = \frac{\angle B \text{ की सम्मुख भुजा}}{\text{कर्ण}}$$

$\frac{PQ}{PB}$ तथा $\frac{AC}{AB}$ यह अनुपात समान है ।

$$\frac{PQ}{PB} = \frac{AC}{AB} = \frac{\angle B \text{ की सम्मुख भुजा}}{\text{कर्ण}}$$

इस अनुपात को कोण B का साईन (sine) अनुपात कहते हैं । इसे संक्षेप में **sin B** ऐसा लिखते हैं ।

(ii) Δ PQB तथा Δ ACB में

$$\frac{BQ}{PB} = \frac{\angle B \text{ की संलग्न भुजा}}{\text{कर्ण}} \quad \text{तथा} \quad \frac{BC}{AB} = \frac{\angle B \text{ की संलग्न भुजा}}{\text{कर्ण}}$$

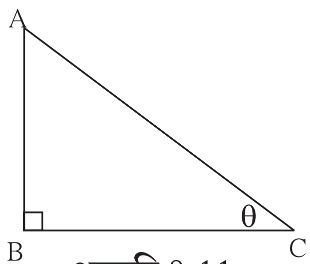
$$\frac{BQ}{PB} = \frac{BC}{AB} = \frac{\angle B \text{ की संलग्न भुजा}}{\text{कर्ण}}$$

इस अनुपात को कोण B का कोसाईन (cosine) अनुपात कहते हैं । इस अनुपात को संक्षेप में **cosB** ऐसा लिखा जाता है ।

(iii) $\frac{PQ}{BQ} = \frac{AC}{BC} = \frac{\angle B \text{ की सम्मुख भुजा}}{\angle B \text{ की संलग्न भुजा}}$

इस अनुपात को कोण B का टैंजंट (tangent) अनुपात कहते हैं । इस अनुपात को संक्षेप में **tanB** ऐसा लिखते हैं ।

उदा.



आकृति 8.11

कई बार समकोण त्रिभुज के न्यूनकोणों के माप θ(थीटा), α (अल्फा), β (बीटा) आदि ग्रीक अक्षरों से दर्शाया जाता है । दी गई आकृति Δ ABC में C इस न्यूनकोण का माप θ इस अक्षर से दिखाया गया है ऐसे समय sinC, cosC, tanC यह अनुपात क्रमशः sinθ, cosθ, tan θ ऐसा भी लिखते हैं ।

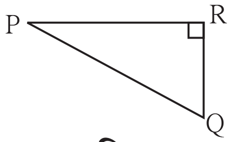
$$\sin C = \sin\theta = \frac{AB}{AC}, \quad \cos C = \cos\theta = \frac{BC}{AC}, \quad \tan C = \tan\theta = \frac{AB}{BC}$$

इसे ध्यान में रखें

- $\sin$ अनुपात $= \dfrac{\text{कोण की सम्मुख भुजा}}{\text{कर्ण}}$
- $\cos$ अनुपात $= \dfrac{\text{कोण की संलग्न भुजा}}{\text{कर्ण}}$
- $\tan$ अनुपात $= \dfrac{\text{कोण की सम्मुख भुजा}}{\text{कोण की संलग्न भुजा}}$

प्रश्नसंग्रह 8.1

1.

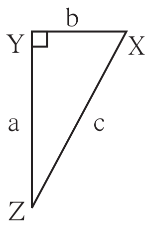


आकृति 8.12

संलग्न आकृति 8.12 में Δ PQR का $\angle R$ यह समकोण है तो निम्नलिखित अनुपात लिखिए ।

(i) $\sin P$ (ii) $\cos Q$ (iii) $\tan P$ (iv) $\tan Q$

2.

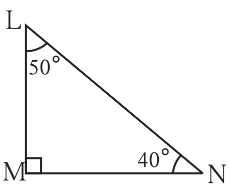


आकृति 8.13

आकृति 8.13 में Δ XYZ यह समकोण त्रिभुज है । $\angle XYZ = 90^\circ$ है । भुजा की लंबाई क्रमशः a, b, c इस प्रकार दी गई है । इस आधार पर निम्नलिखित अनुपात लिखिए ।

(i) $\sin X$ (ii) $\tan Z$ (iii) $\cos X$ (iv) $\tan X$

3.



आकृति 8.14

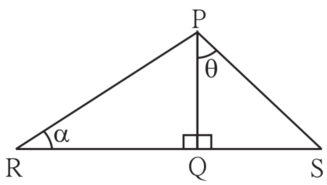
समकोण Δ LMN में, $\angle LMN = 90^\circ$

$\angle L = 50^\circ$ तथा $\angle N = 40^\circ$ है । इस आधार पर निम्नलिखित अनुपात लिखिए ।

(i) $\sin 50^\circ$ (ii) $\cos 50^\circ$

(iii) $\tan 40^\circ$ (iv) $\cos 40^\circ$

4.



आकृति 8.15

दी गई आकृति में $\angle PQR = 90^\circ$, $\angle PQS = 90^\circ$, $\angle PRQ = \alpha$ तथा $\angle QPS = \theta$ तो निम्नलिखित त्रिकोणमितीय अनुपात लिखिए ।

(i) $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\tan\alpha$

(ii) $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$

आओ, जानें

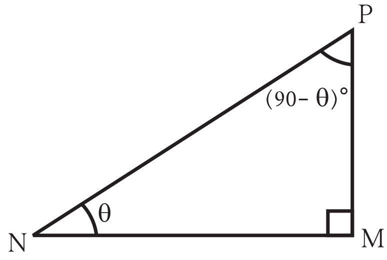
त्रिकोणमितीय अनुपातों में संबंध (Relations between trigonometric ratios)

आकृति 8.16 में,

Δ PMN यह समकोण त्रिभुज है ।

$m\angle M = 90°$, $\angle P$ तथा $\angle N$ परस्पर कोटिपूरक है ।

$\therefore$ यदि $m\angle N = \theta$ तो $m\angle P = 90 - \theta$



आकृति 8.16

$\sin\theta = \dfrac{PM}{PN}$ ....(1)

$\cos\theta = \dfrac{NM}{PN}$ ....(2)

$\tan\theta = \dfrac{PM}{NM}$ ....(3)

$\sin(90-\theta) = \dfrac{NM}{PN}$ ....(4)

$\cos(90-\theta) = \dfrac{PM}{PN}$ ....(5)

$\tan(90-\theta) = \dfrac{NM}{PM}$ ....(6)

$\therefore\ \sin\theta = \cos(90-\theta)$ .... (1) तथा (5) से

$\cos\theta = \sin(90-\theta)$ .... (2) तथा (4) से

अब इसे भी समझिए $\tan\theta \times \tan(90-\theta) = \dfrac{PM}{NM} \times \dfrac{NM}{PM}$ .... (3) तथा (6) से

$\therefore\ \tan\theta \times \tan(90-\theta) = 1$

इसी प्रकार $\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} = \dfrac{\frac{PM}{PN}}{\frac{NM}{PN}} = \dfrac{PM}{PN} \times \dfrac{PN}{NM} = \dfrac{PM}{NM} = \tan\theta$

इसे ध्यान में रखें

$\cos(90-\theta) = \sin\theta$, $\sin(90-\theta) = \cos\theta$

$\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta$, $\tan\theta \times \tan(90-\theta) = 1$

✲ **अधिक जानकारी हेतु**

$$\frac{1}{\sin\theta} = \operatorname{cosec}\theta,\quad \frac{1}{\cos\theta} = \sec\theta,\quad \frac{1}{\tan\theta} = \cot\theta$$

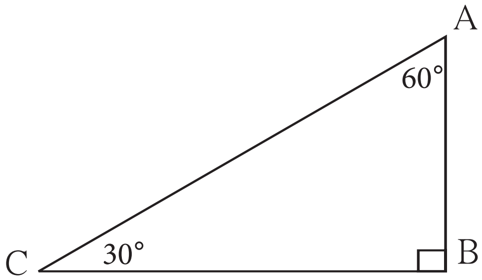
अर्थात cosec θ, sec θ और cot θ यह क्रमशः sin θ, cos θ तथा tan θ इनके प्रतिलोम अनुपात है ।

- $\sec\theta = \operatorname{cosec}(90 - \theta)$
- $\operatorname{cosec}\theta = \sec(90 - \theta)$
- $\tan\theta = \cot(90 - \theta)$
- $\cot\theta = \tan(90 - \theta)$

थोड़ा याद करें

30°– 60°–90° मापवाले त्रिभुज का गुणधर्म

किसी त्रिभुज के कोणों के माप 30°,60°, 90° हो तो हम जानते हैं कि, 30° कोण की सम्मुख भुजा कर्ण की आधी होती है और 60° कोण की सम्मुख भुजा कर्ण की लंबाई में $\frac{\sqrt{3}}{2}$ गुणा होती है ।



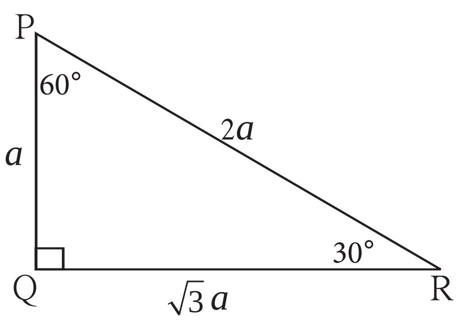
आकृति 8.17

दी गई आकृति में, समकोण Δ ABC में
$\angle C = 30°$, $\angle A = 60°$, $\angle B = 90°$ है ।

$\therefore$ $AB = \frac{1}{2}AC$ तथा $BC = \frac{\sqrt{3}}{2}AC$

आओ, जानें

30° तथा 60° मापवाले कोणों का त्रिकोणमितीय अनुपात (Trignometric ratios of 30° and 60°)



आकृति 8.18

समकोण Δ PQR में यदि $\angle R = 30°$,

$\angle P = 60°$, $\angle Q = 90°$ तथा

माना $PQ = a$

तो $PQ = \frac{1}{2}\,PR$

$a = \frac{1}{2}\,PR$

$\therefore\ PR = 2a$

$QR = \frac{\sqrt{3}}{2}\,PR$

$QR = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2a$

$QR = \sqrt{3}\,a$

$\therefore$ यदि $PQ = a$ तो $PR = 2a$ तथा $QR = \sqrt{3}\,a$

(I) 30° मापवाले कोण के त्रिकोणमितीय अनुपात

$$\sin 30^\circ = \frac{PQ}{PR} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{QR}{PR} = \frac{\sqrt{3}a}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{PQ}{QR} = \frac{a}{\sqrt{3}a} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

(II) 60° मापवाले कोण के त्रिकोणमितीय अनुपात

$$\sin 60^\circ = \frac{QR}{PR} = \frac{\sqrt{3}\,a}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{PQ}{PR} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$$

$$\tan 60^\circ = \frac{QR}{PQ} = \frac{\sqrt{3}\,a}{a} = \sqrt{3}$$

समकोण Δ PQR में $\angle Q = 90^\circ$ दिया है । $\angle P$ तथा $\angle R$ परस्पर कोटिपूरक कोण हैं इसलिए कोटिपूरक कोण के साइन तथा कोसाइन अनुपातों के संबंधों की जाँच कीजिए ।

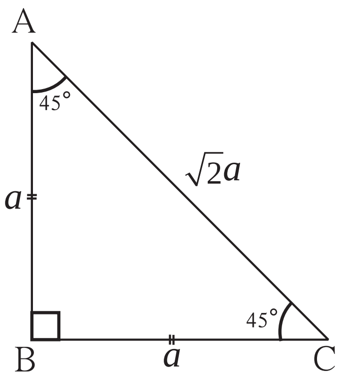
$\sin \theta = \cos(90-\theta)$
$\sin 30^\circ = \cos(90^\circ - 30^\circ) = \cos 60^\circ$
$\sin 30^\circ = \cos 60^\circ$

$\cos \theta = \sin(90-\theta)$
$\cos 30^\circ = \sin(90^\circ - 30^\circ) = \sin 60^\circ$
$\cos 30^\circ = \sin 60^\circ$

इसे ध्यान में रखें

$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$	$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$
$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$	$\tan 60^\circ = \sqrt{3}$

(III) 45° मापवाले कोण के त्रिकोणमितीय अनुपात



आकृति 8.19

समकोण Δ ABC में $\angle B = 90^\circ$, $\angle A = 45^\circ$, $\angle C = 45^\circ$ $\therefore$ यह समद्विबाहु समकोण त्रिभुज है । माना, $AB = a$ तो $BC = a$

पायथागोरस के प्रमेय द्वारा AC की लंबाई ज्ञात कीजिए ।

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$
$$= a^2 + a^2$$
$$AC^2 = 2a^2$$
$$\therefore AC = \sqrt{2}\,a$$

आकृति 8.19 में $\angle C = 45^\circ$ है ।

$$\sin 45^\circ = \frac{AB}{AC} = \frac{a}{\sqrt{2}\,a} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

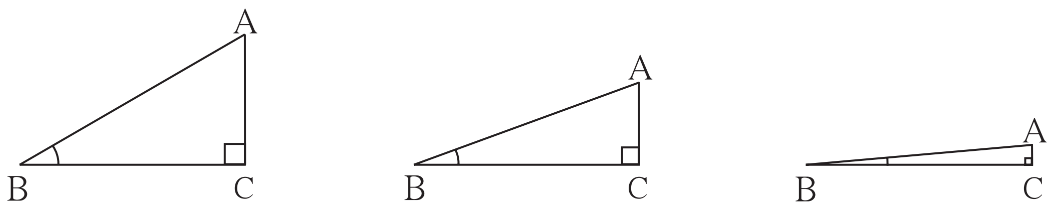
$$\cos 45^\circ = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{\sqrt{2}\,a} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\tan 45^\circ = \frac{AB}{BC} = \frac{a}{a} = 1$$

इसे ध्यान में रखें

$\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\tan 45^\circ = 1$

(IV) 0° तथा 90° मापवाले कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपात



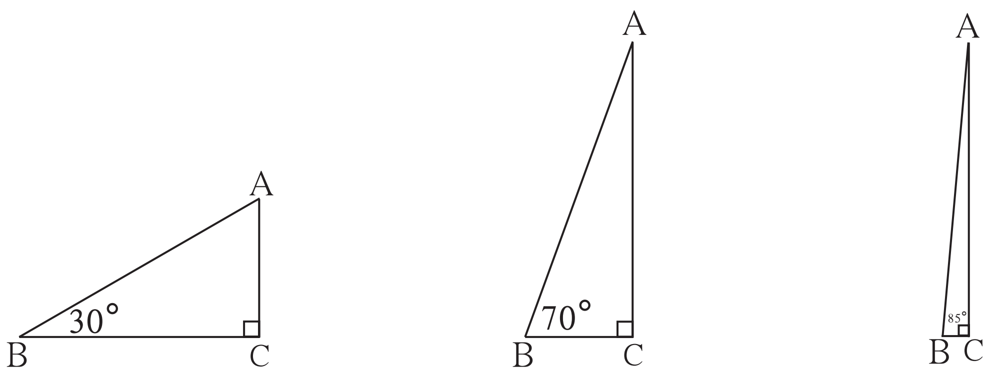
आकृति 8.20

समकोण Δ ACB में $\angle C = 90^\circ$ और $\angle B = 30^\circ$ है । $\sin 30^\circ = \frac{AC}{AB}$ यह हमें ज्ञात है । AB की लंबाई स्थिर रखकर, $\angle B$ के माप जैसे-जैसे कम होते हैं वैसे-वैसे $\angle B$ की सम्मुख भुजा AC की लंबाई कम होती है अर्थात $\angle B$ का माप कम होने से $\sin \theta$ का मान कम होगा ।

$\therefore$ $\angle B$ का माप 0° होगा तब AC की लंबाई 0 होगी ।

$\therefore \sin 0^\circ = \frac{AC}{AB} = \frac{0}{AB}$

$\therefore \sin 0^\circ = 0$



आकृति 8.21

अब आकृति 8.21 देखिए । इस समकोण त्रिभुज में $\angle B$ का माप जैसे-जैसे बढ़ते जाएगा वैसे-वैस AC की लंबाई में बढ़ोत्तरी दिखाई देगी । $\angle B$ का माप यदि 90° हुआ तो AC की लंबाई AB की लंबाई के बराबर होगी ।

$$\therefore \sin 90^\circ = \frac{AC}{AB} \qquad \therefore \sin 90^\circ = 1$$

हमने कोटिपूरक कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपात देखे हैं ।

$$\sin\theta = \cos(90 - \theta) \text{ तथा } \cos\theta = \sin(90 - \theta)$$

$$\therefore \cos 0^\circ = \sin(90 - 0)^\circ = \sin 90^\circ = 1$$

$$\text{तथा } \cos 90^\circ = \sin(90 - 90)^\circ = \sin 0^\circ = 0$$

इसे ध्यान में रखें

$\sin 0^\circ = 0,$ $\quad$ $\sin 90^\circ = 1,$ $\quad$ $\cos 0^\circ = 1,$ $\quad$ $\cos 90^\circ = 0$

हम जानते हैं कि,

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \qquad \therefore \tan 0 = \frac{\sin 0}{\cos 0} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\text{परंतु } \tan 90^\circ = \frac{\sin 90^\circ}{\cos 90^\circ} = \frac{1}{0}$$

किंतु $\frac{1}{0}$ यह भाग किया नहीं जा सकता । θ न्यूनकोण से बड़ा होते-होते 90° के निकट पहुँचने लगता है । वैसे-वैसे $\tan\theta$ का मान अनियंत्रित रूप सें बढ़ता जाता है किंतु tan 90 का मान निश्चित नहीं कर सकते ।

इसे ध्यान में रखें

विशेष मापवाले कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपात

कोणों के माप / अनुपात	0°	30°	45°	60°	90°
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
tan	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	अपरिभाषित

हल किए हुए प्रश्न

उदा. 1 मान ज्ञात कीजिए : $2\tan 45^\circ + \cos 30^\circ - \sin 60^\circ$

हल : $2\tan 45^\circ + \cos 30^\circ - \sin 60^\circ$

$$= 2 \times 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= 2 + 0$$

$$= 2$$

उदा. 2 मान ज्ञात कीजिए । $\frac{\cos 56^\circ}{\sin 34^\circ}$

हल : $56^\circ + 34^\circ = 90^\circ$ अर्थात 56 तथा 34 कोटिपूरक कोण के माप है ।

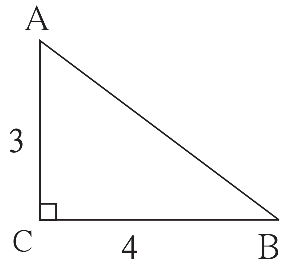
$$\sin\theta = \cos(90 - \theta)$$

$\therefore$ $\sin 34^\circ = \cos(90 - 34)^\circ = \cos 56^\circ$

$\therefore$ $\frac{\cos 56^\circ}{\sin 34^\circ} = \frac{\cos 56^\circ}{\cos 56^\circ} = 1$

उदा. 3 समकोण Δ ACB में यदि $\angle C = 90^\circ$, AC = 3, BC = 4 तब $\angle A$ तथा $\angle B$ के निम्नलिखित त्रिकोणमितीय अनुपात ज्ञात कीजिए ।

sin A, sin B, cos A, tan B



आकृति 8.22

हल: समकोण Δ ACB में पायथागोरस के प्रमेय से,

$AB^2 = AC^2 + BC^2$

$= 3^2 + 4^2$

$= 5^2$

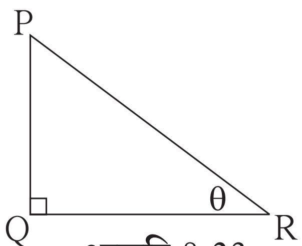
AB = 5

$\sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{4}{5}$ $\qquad$ $\cos A = \frac{AC}{AB} = \frac{3}{5}$

$\sin B = \frac{AC}{AB} = \frac{3}{5}$ $\qquad$ $\tan B = \frac{AC}{BC} = \frac{3}{4}$

उदा. 4 समकोण Δ PQR में $\angle Q = 90^\circ$, $\angle R = \theta$ तथा यदि $\sin\theta = \frac{5}{13}$ तो $\cos\theta$, $\tan\theta$ ज्ञात कीजिए ।

हल :



आकृति 8.23

समकोण Δ PQR मे $\angle R = \theta$

$\sin\theta = \frac{5}{13}$

$\therefore$ $\frac{PQ}{PR} = \frac{5}{13}$

$\therefore$ माना PQ = $5k$ तथा PR = $13k$

पायथागोरस के प्रमेय के आधार QR का मान ज्ञात कीजिए ।

$PQ^2 + QR^2 = PR^2$

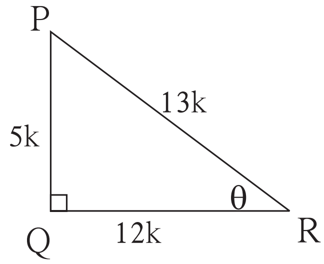
$(5k)^2 + QR^2 = (13k)^2$

$25k^2 + QR^2 = 169\ k^2$

$QR^2 = 169\ k^2 - 25k^2$

$QR^2 = 144\ k^2$

$QR = 12k$



आकृति 8.24

अब समकोण Δ PQR में PQ = $5k$ और PR = $13k$, QR = $12k$

$\cos\theta = \frac{QR}{PR} = \frac{12k}{13k} = \frac{12}{13}$, $\tan\theta = \frac{PQ}{QR} = \frac{5k}{12k} = \frac{5}{12}$

थोड़ा, सोचें

(1) उपर्युक्त उदाहरण हल करने के लिए PQ तथा PR इन भुजाओं की लंबाई 5k तथा 13k क्यों ली गई है?

(2) PQ तथा PR की लंबाई क्रमशः 5 तथा 13 ले सकते हैं? क्या यदि हाँ, तो उपर्युक्त में कुछ बदलाव करना होगा क्या?

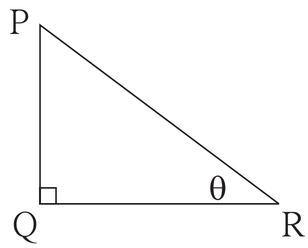
त्रिकोणमितीय के महत्वपूर्ण समीकरण

Δ PQR यह समकोण त्रिभुज है

$\angle PQR = 90^\circ$, माना $\angle R = \theta$

$\sin\theta = \frac{PQ}{PR}$ ....(1)

$\cos\theta = \frac{QR}{PR}$ ....(2)



आकृति 8.25

पायथागोरस के प्रमेय के अनुसार

$PQ^2 + QR^2 = PR^2$

$\therefore \frac{PQ^2}{PR^2} + \frac{QR^2}{PR^2} = \frac{PR^2}{PR^2}$ .... प्रत्येक पद को PR^2 से भाग देने पर

$\therefore \left(\frac{PQ}{PR}\right)^2 + \left(\frac{QR}{PR}\right)^2 = 1$

$\therefore (\sin\theta)^2 + (\cos\theta)^2 = 1$.... (1) तथा (2) से

इसे ध्यान में रखें

$(\sin\theta)^2$ अर्थात $\sin\theta$ का वर्ग, यह $\sin^2\theta$ ऐसे लिखते हैं ।

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ यह समीकरण हम पायथागोरस के प्रमेय का उपयोग कर θ यह एक न्यूनकोण हैं ऐसे समकोण त्रिभुज की सहायता से सिद्ध किया है । $\theta = 0^\circ$ या $\theta = 90^\circ$ हो तब भी यह समीकरण सत्य होता है इसकी जाँच कीजिए ।

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ यह समीकरण किसी भी माप के कोणों के लिए सत्य होने के कारण इसे त्रिकोणमिति की मूलभूत नित्य समिकाएँ कहते हैं ।

(i) $0 \le \sin\theta \le 1,\ 0 \le \sin^2\theta \le 1$ (ii) $0 \le \cos\theta \le 1,\ 0 \le \cos^2\theta \le 1$

प्रश्नसंग्रह 8.2

1. निम्नलिखित तालिका के प्रत्येक स्तंभ में एक अनुपात दिया गया है इसके आधार पर अन्य दो अनुपात ज्ञात कीजिए तथा रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए ।

$\sin\theta$		$\frac{11}{61}$		$\frac{1}{2}$				$\frac{3}{5}$	
$\cos\theta$	$\frac{35}{37}$				$\frac{1}{\sqrt{3}}$				
$\tan\theta$			1			$\frac{21}{20}$	$\frac{8}{15}$		$\frac{1}{2\sqrt{2}}$

2. मान ज्ञात कीजिए ।

(i) $5\sin 30^\circ + 3\tan 45^\circ$

(ii) $\frac{4}{5}\tan^2 60^\circ + 3\sin^2 60^\circ$

(iii) $2\sin 30^\circ + \cos 0^\circ + 3\sin 90^\circ$

(iv) $\frac{\tan 60}{\sin 60 + \cos 60}$

(v) $\cos^2 45^\circ + \sin^2 30^\circ$

(vi) $\cos 60^\circ \times \cos 30^\circ + \sin 60^\circ \times \sin 30^\circ$

3. यदि $\sin\theta = \frac{4}{5}$ तो $\cos\theta$ का मान ज्ञात कीजिए ।

4. यदि $\cos\theta = \frac{15}{17}$ तो $\sin\theta$ का मान ज्ञात कीजिए ।

1. नीचे दिए गए बहुवैकल्पिक प्रश्नों के उत्तर का सही विकल्प चुनकर लिखिए ।

(i) निम्नलिखित में से कौन-से कथन सत्य है ।

(A) $\sin\theta = \cos(90-\theta)$ (B) $\cos\theta = \tan(90-\theta)$

(C) $\sin\theta = \tan(90-\theta)$ (D) $\tan\theta = \tan(90-\theta)$

(ii) निम्नलिखित में से $\sin 90°$ का मान कौन-सा है ?

(A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (B) 0 (C) $\frac{1}{2}$ (D) 1

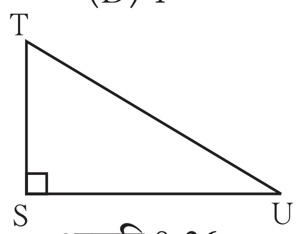
(iii) $2\tan 45° + \cos 45° - \sin 45° =$ कितना ?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

(iv) $\frac{\cos 28°}{\sin 62°} =$ कितना ?

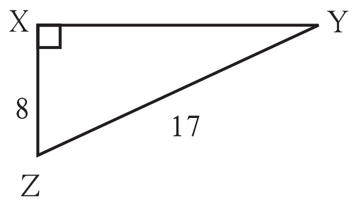
(A) 2 (B) -1 (C) 0 (D) 1

2. समकोण Δ TSU में TS = 5, $\angle S = 90°$, SU = 12 तो sin T, cos T, tan T का मान ज्ञात कीजिए । इसी प्रकार sin U, cos U, tan U का भी मान ज्ञात कीजिए ।



आकृति 8.26

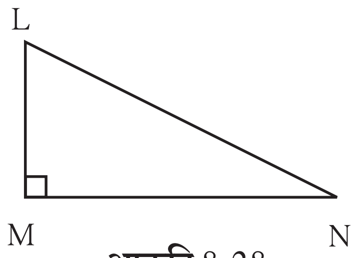
3. समकोण Δ YXZ में, $\angle X = 90°$, XZ = 8 सेमी, YZ = 17 सेमी तो sin Y, cos Y, tan Y, sin Z, cos Z, tan Z का मान ज्ञात कीजिए ।



आकृति 8.27

4. समकोण Δ LMN में $\angle N = \theta$, $\angle M = 90°$, $\cos\theta = \frac{24}{25}$ तो $\sin\theta$ तथा $\tan\theta$ इस अनुपात का मान ज्ञात कीजिए ।

इसी प्रकार $\sin^2\theta$ तथा $\cos^2\theta$ का मान ज्ञात कीजिए ।



आकृति 8.28

5. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए ।

(i) $\sin 20° = \cos \square°$

(ii) $\tan 30° \times \tan \square° = 1$

(iii) $\cos 40° = \sin \square°$

9 पृष्ठफल तथा घनफल

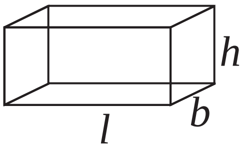
आओ, सीखें

- शंकु का पृष्ठफल
- शंकु का घनफल
- गोले का पृष्ठफल
- गोले का घनफल

थोड़ा याद करें

हमने पिछली कक्षा में आयताकार लंब बेलन (घनाभ), घन, वृत्ताकार लंब बेलन इन घनाकृतियों का पृष्ठफल तथा घनफल कैसे ज्ञात करते हैं, इसका अध्ययन किया है ।

घनाभ



आकृति 9.1

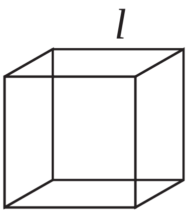
- आयताकार लंब बेलन की लंबाई, चौड़ाई तथा ऊँचाई क्रमशः l , b, h हो तो

  (i) आयताकार लंब बेलन के उर्ध्वाधर पृष्ठों का क्षेत्रफल
  $= 2(l + b) \times h$
  यहाँ आयताकार लंब बेलन के उर्ध्वाधर 4 पृष्ठों के क्षेत्रफल का विचार किया गया है ।

  (ii) आयताकार लंब बेलन का संपूर्ण पृष्ठफल
  $= 2(lb + bh + lh)$
  यहाँ आयताकार लंब बेलन के छह पृष्ठों के क्षेत्रफल का विचार किया गया है ।

  (iii) आयताकार लंब बेलन का घनफल = $l \times b \times h$

घन



आकृति 9.2

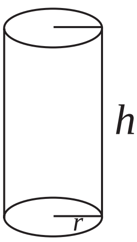
- समघन की कोर (edge) l हो तो

  (i) समघन का संपूर्ण पृष्ठफल = $6l^2$

  (ii) समघन का उर्ध्वाधर पृष्ठफल = $4l^2$

  (iii) समघन का घनफल = l^3

वृत्ताकार लंब बेलन



आकृति 9.3

- वृत्ताकार लंब बेलन की आधार की त्रिज्या r तथा ऊँचाई h हो तो

  (i) वृत्ताकार लंब बेलन का वक्र पृष्ठफल = $2\pi rh$

  (ii) वृत्ताकार लंब बेलन का संपूर्ण पृष्ठफल = $2\pi r(r + h)$

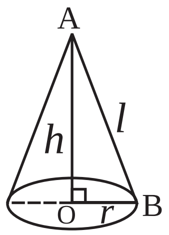
  (iii) वृत्ताकार लंब बेलन का घनफल = $\pi r^2 h$

प्रश्नसंग्रह 9.1

1. एक घनाभ के आकार का दवाई का बक्सा जिसकी लंबाई, चौड़ाई तथा ऊँचाई क्रमशः 20 सेमी, 12 सेमी व 10 सेमी है तो इस बक्से के उर्ध्वाधर पृष्ठों का क्षेत्रफल तथा संपूर्ण पृष्ठफल ज्ञात कीजिए ।
2. किसी घनाभ के आकार के बक्से का संपूर्ण पृष्ठफल 500 वर्ग इकाई है । उसकी चौड़ाई तथा ऊँचाई क्रमशः 6 व 5 इकाई है तो उस बक्से की लंबाई कितनी होगी ?
3. किसी समघन की भुजा 4.5 सेमी हो, तो उस समघन के उर्ध्वाधर पृष्ठों का क्षेत्रफल तथा संपूर्ण पृष्ठफल ज्ञात कीजिए ।
4. किसी समघन का संपूर्ण पृष्ठफल 5400 वर्ग सेमी है तो उस समघन की उर्ध्वाधर पृष्ठों का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ।
5. एक आयताकार लंब बेलन का घनफल 34.50 घन मी है तथा उसकी चौड़ाई तथा ऊँचाई क्रमशः 1.5 मी तथा 1.15 मी है तो उस आयताकार लंब बेलन की लंबाई ज्ञात कीजिए ।
6. किसी समघन की कोर की लंबाई 7.5 सेमी हो तो उसका घनफल कितना होगा ?
7. एक वृत्ताकार लंब बेलन के आधार की त्रिज्या 20 सेमी तथा ऊँचाई 13 सेमी है तो उस वृत्ताकार लंब बेलन का वक्र पृष्ठफल तथा संपूर्ण पृष्ठफल ज्ञात कीजिए । ($\pi = 3.14$)
8. वृत्ताकार लंब बेलन का वक्र पृष्ठफल 1980 सेमी^{2} है और आधार की त्रिज्या 15 सेमी तो उस वृत्ताकार लंब बेलन की ऊँचाई ज्ञात कीजिए । ($\pi = \frac{22}{7}$)

आओ, जानें

शंकु से संबंधित पद और उनका परस्पर संबंध (Terms related to cone and their relation)



आकृति 9.4

दी गई आकृति 9.4 में शंकु के आधार का केंद्रबिंदु O तथा शंकु का शीर्षबिंदु A है । रेख OA यह त्रिज्या OB पर लंब है अर्थात AO शंकु की लंब ऊँचाई (h) है । AB शंकु की तिरछी ऊँचाई (l) है ।

Δ AOB समकोण त्रिभुज है ।

$\therefore$ पायथागोरस के प्रमेय के अनुसार

$$AB^2 = AO^2 + OB^2$$

$$\therefore l^2 = h^2 + r^2$$

अर्थात **(तिरछी ऊँचाई)^2 = (लंब ऊँचाई)^2 + (आधार की त्रिज्या)^2**

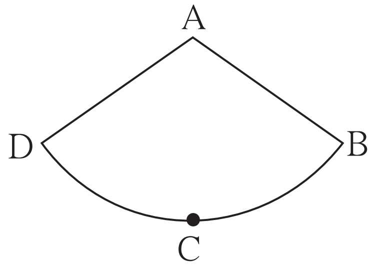
शंकु का पृष्ठफल (Surface area of a cone)

शंकु को दो पृष्ठ होते हैं । (i) वृत्ताकार आधार (ii) वक्रपृष्ठ

इनमें से वृत्त के क्षेत्रफल के सूत्र का उपयोग कर आधार का क्षेत्रफल ज्ञात कर सकते हैं ।

शंकु का वक्रपृष्ठ का क्षेत्रफल किस प्रकार ज्ञात किया जाता है?

इसके लिए शंकु की वक्रपृष्ठ की बनावट देखिए ।



आकृति 9.5

आकृति 9.4 में दिए गए शंकु को AB इस तिरछी ऊँचाई पर काँट कर उसे खोलने पर जैसे दिखता है । इस आकृति को द्वैत्रिज्य कहा जाता है । आकृति 9.4 और आकृति 9.5 इनकी तुलना कीजिए ।

इसके आधार पर दी गई बातें आपके ध्यान में आई है क्या ?

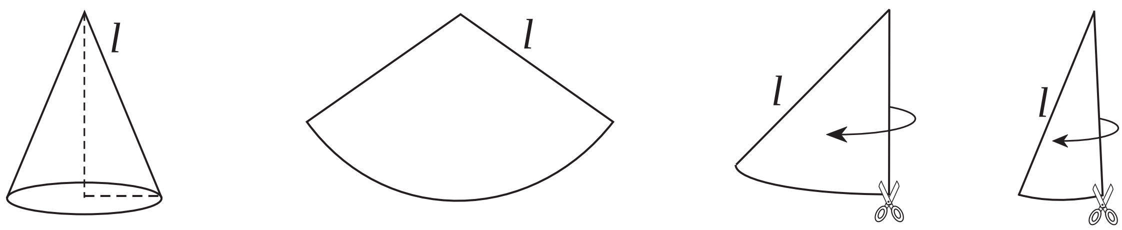
(i) द्वैत्रिज्य की त्रिज्या AB यह शंकु की तिरछी ऊँचाई के बराबर है ।

(ii) द्वैत्रिज्य का चाप BCD यह शंकु के आधार की परिधि का ही रूपांतर है ।

(iii) शंकु के वक्रपृष्ठ का क्षेत्रफल = A-BCD इस द्वैत्रिज्य का क्षेत्रफल

इससे, शंकु का वक्रपृष्ठ का क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए उसकी बनावट अर्थात द्वैत्रिज्य का क्षेत्रफल ज्ञात करना है, यह नीचे दी गई कृति से समझना होगा ।

कृति शंकु के बनावट पर विचार करेंगे ।



शंकु

आकृति 9.6

वक्रपृष्ठों की बनावट

आकृति 9.7

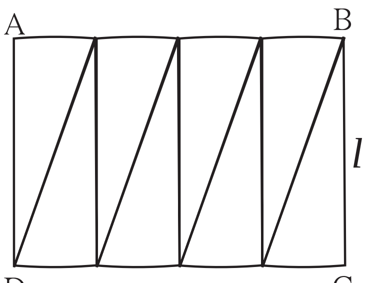
बनावट के टुकड़े

आकृति 9.8

आधार की परीधि = $2\pi r$

एक वक्रपृष्ठ की आकृति 9.8 में दिखाए अनुसार संभवतः उसके छोटे टुकड़े कीजिए । वह आकृति 9.9 में दिखाए अनुसार एक दूसरे को जोड़िए ।

शंकु के वक्रपृष्ठ के टुकड़े को इस प्रकार जोड़ने पर □ABCD लगभग आयत बनता है ।



आकृति 9.9

AB तथा CD की कुल लंबाई $2\pi r$ है ।

$\therefore$ ABCD इस आयत की भुजा AB की लंबाई πr तथा भुजा CD की लंबाई πr है ।

आयत की भुजा BC की लंबाई = शंकु की तिरछी ऊँचाई = l है ।

$\therefore$ शंकु का वक्र पृष्ठफल अर्थात इस आयत का क्षेत्रफल होगा ।

$\therefore$ शंकु का वक्र पृष्ठफल = आयत का क्षेत्रफल = $AB \times BC = \pi r \times l = \pi rl$

अब, शंकु का संपूर्ण पृष्ठफल का सूत्र ज्ञात कर सकेंगे ।

शंकु का संपूर्ण पृष्ठफल = वक्रपृष्ठ का क्षेत्रफल + आधार का क्षेत्रफल

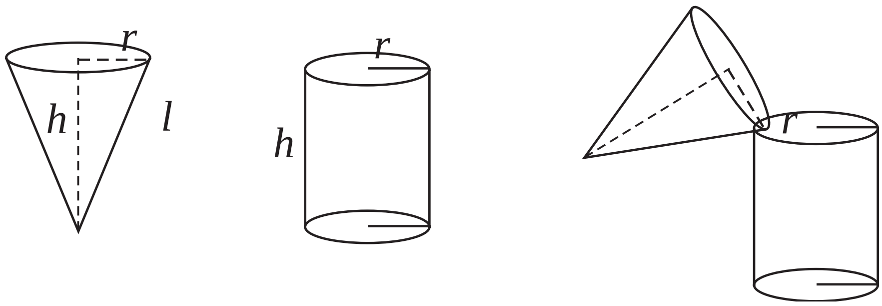
$$= \pi rl + \pi r^2$$

$$= \pi r(l + r)$$

यहाँ एक महत्त्वपूर्ण बात ध्यान में आई क्या ? शंकु बंद न हो तो (अर्थात जोकर की/ जन्मदिन के अवसर पर पहनी टोपी जैसे होगा) तो वक्रपृष्ठ ही उसका एक मात्र पृष्ठ होगा अर्थात पृष्ठफल πrl इस सूत्र से मिलेंगे ।

कृति : एक कार्डबोर्ड लेकर उससे एक बंद वृत्ताकार लंब बेलन बनाइए । जिसमें आधार की त्रिज्या तथा ऊँचाई समान हो ऐसा एक शंकु तथा एक वृत्ताकार लंब बेलन जिसे एक तरफ से बंद करिए अर्थात शंकु की लंब ऊँचाई तथा वृत्ताकार लंब बेलन की ऊँचाई समान हो ऐसा एक शंकु तथा वृत्ताकार लंब बेलन लीजिए ।

शंकु को बारीक रेत से पूर्ण भरकर तथा वह रेत उस वृत्ताकार लंब बेलन में भरिए। वृत्ताकार लंब बेलन पूर्ण भरने तक इस कृति को किया जाए । वृत्ताकार लंब बेलन को रेत से भरने में कितने शंकु रेत लगेगी, ज्ञात कीजिए ।



आकृति 9.10

वृत्ताकार लंब बेलन को रेत से पूर्णतः भरने में तीन शंकु रेत लगी है ।

आओ, जानें

शंकु का घनफल (Volume of a cone)

$$3 \times \text{शंकु का घनफल} = \text{वृत्ताकार लंब बेलन का घनफल}$$

$$\therefore\ 3 \times \text{शंकु का घनफल} = \pi r^2 h$$

$$\therefore\ \text{शंकु का घनफल} = \frac{1}{3} \times \pi r^2 h$$

इसे ध्यान में रखें

(i) शंकु के आधार का क्षेत्रफल = πr^2 (ii) शंकु का वक्र पृष्ठफल = πrl

(iii) शंकु का संपूर्ण पृष्ठफल = $\pi r(l + r)$ (iv) शंकु का घनफल = $\frac{1}{3} \times \pi r^2 h$

हल किए गए उदाहरण

उदा. (1) शंकु के आधार की त्रिज्या (r) तथा लंब ऊँचाई (h) हो तो उसे लेकर उसकी तिरछी (l)ऊँचाई ज्ञात कीजिए ।

(i) r = 6 सेमी, h = 8 सेमी

$l^2 = r^2 + h^2$

$\therefore l^2 = (6)^2 + (8)^2$

$\therefore l^2 = 36 + 64$

$\therefore l^2 = 100$

$\therefore l$ = 10 सेमी

(ii) r = 9 सेमी, h = 12 सेमी

$l^2 = r^2 + h^2$

$\therefore l^2 = (9)^2 + (12)^2$

$\therefore l^2 = 81 + 144$

$\therefore l^2 = 225$

$\therefore l$ = 15 सेमी

उदा. (2) एक शंकु के आधार की त्रिज्या 12 सेमी तथा लंब ऊँचाई 16 सेमी हो तो शंकु की तिरछी ऊँचाई, वक्र पृष्ठफल तथा संपूर्ण पृष्ठफल ज्ञात कीजिए ।($\pi = 3.14$)

(i) r = 12 सेमी, h = 16 सेमी

$l^2 = r^2 + h^2$

$\therefore l^2 = (12)^2 + (16)^2$

$\therefore l^2 = 144 + 256$

$\therefore l^2 = 400$

$\therefore l$ = 20 सेमी

(ii) शंकु का वक्र पृष्ठफल = πrl

$= 3.14 \times 12 \times 20$

= 753.6 वर्ग सेमी

(iii) शंकु का संपूर्ण पृष्ठफल = $\pi r(l + r)$

$= 3.14 \times 12(20+12)$

$= 3.14 \times 12 \times 32$

= 1205.76 वर्ग सेमी

उदा. (3) एक शंकु का संपूर्ण पृष्ठफल 704 वर्ग सेमी तथा आधार की त्रिज्या 7 सेमी हो तो शंकु की तिरछी ऊँचाई ज्ञात कीजिए । ($\pi = \frac{22}{7}$)

शंकु का संपूर्ण पृष्ठफल = $\pi r(l + r)$

$\therefore \quad 704 = \frac{22}{7} \times 7\ (l + 7)$

$\therefore \quad \frac{704}{22} = l + 7$

$\therefore \quad 32 = l + 7$

$\therefore \quad 32 - 7 = l$

$\therefore \quad l$ = 25 सेमी

$\therefore$ शंकु की तिरछी ऊँचाई = 25 सेमी

उदा. (4) एक शंकु के आधार का क्षेत्रफल 1386 वर्ग सेमी है तथा शंकु की ऊँचाई 28 सेमी हो तो शंकु का वक्र पृष्ठफल ज्ञात कीजिए ।($\pi = \frac{22}{7}$ लीजिए)

शंकु के आधार का क्षेत्रफल = πr^2

$\therefore \quad 1386 = \frac{22}{7} \times r^2$

$\therefore \quad \frac{1386 \times 7}{22} = r^2$

$\therefore \quad 63 \times 7 = r^2$

$\therefore \quad 441 = r^2$

$\therefore \quad r = 21$ सेमी

$l^2 = r^2 + h^2$

$\therefore l^2 = (21)^2 + (28)^2$

$\therefore l^2 = 441 + 784$

$\therefore l^2 = 1225$

$\therefore l = 35$ सेमी

शंकु का वक्र पृष्ठफल $= \pi rl$

$= \frac{22}{7} \times 21 \times 35$

$= 22 \times 21 \times 5$

$= 2310$ वर्ग सेमी

प्रश्नसंग्रह 9.2

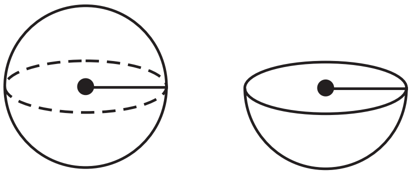
1. शंकु की लंब ऊँचाई 12 सेमी तथा तिरछी ऊँचाई 13 सेमी हो तो शंकु की आधार की त्रिज्या कितनी है ?
2. एक शंकु का संपूर्ण पृष्ठफल 7128 सेमी^{2} तथा शंकु के आधार की त्रिज्या 28 सेमी हो तो शंकु का घनफल ज्ञात कीजिए ।($\pi = \frac{22}{7}$)
3. एक शंकु का वक्र पृष्ठफल 251.2 सेमी^{2} तथा आधार की त्रिज्या 8 सेमी हो तो शंकु की तिरछी ऊँचाई तथा लंब ऊँचाई ज्ञात कीजिए ।($\pi = 3.14$)
4. 6 मी त्रिज्या तथा 8 मी तिरछी ऊँचाईवाली टिन के बंद शंक्वाकार घन बनाने की दर 10 रु प्रति वर्ग मीटर हो तो उस घनाकृति को बनाने में कितना खर्च लगेगा ? ($\pi = \frac{22}{7}$)
5. यदि शंकु का घनफल 6280 घसेमी है तथा आधार की त्रिज्या 20 सेमी है तो शंकु की लंब ऊँचाई ज्ञात कीजिए । ($\pi = 3.14$)
6. शंकु का वक्र पृष्ठफल 188.4 वर्ग सेमी तथा तिरछी ऊँचाई 10 सेमी है । तो शंकु की लंब ऊँचाई ज्ञात कीजिए । ($\pi = 3.14$)
7. एक शंकु का घनफल 1232 सेमी^{3} तथा ऊँचाई 24 सेमी है तो उस शंकु का वक्र पृष्ठफल ज्ञात कीजिए । ($\pi = \frac{22}{7}$)
8. एक शंकु का वक्र पृष्ठफल 2200 वर्ग सेमी है तथा तिरछी ऊँचाई 50 सेमी है तो उस शंकु का संपूर्ण पृष्ठफल तथा घनफल ज्ञात कीजिए ।($\pi = \frac{22}{7}$)
9. एक शंक्वाकार तंबू में 25 लोग रहते हैं । प्रत्येक को जमीन पर 4 वर्ग मी जगह लगती है । यदि तंबू की ऊँचाई 18 मीटर हो तो तंबू का घनफल कितना होगा ?

10. एक खेत में पशुओं का सूखा चारा शंक्वाकार आकार की ढ़ेर करके रखा गया । ढ़ेर की ऊँचाई 2.1 मीटर है तथा आधार का व्यास 7.2 मीटर है, तो चारे के ढ़ेर का घनफल ज्ञात कीजिए । वर्षा की संभावना होने पर चारे को ढंकने के लिए कितने वर्ग मीटर प्लास्टीक के कागज की आवश्यकता होगी ?

($\pi = \frac{22}{7}$ तथा $\sqrt{17.37} = 4.17$)

आओ, जानें

गोले का पृष्ठफल (Surface area of sphere)



आकृति 9.11

खोखले गोले का वक्र पृष्ठफल $= 4\pi r^2$

$\therefore$ अर्धगोले का वक्र पृष्ठफल $= 2\pi r^2$

ठोस अर्धगोले का संपूर्ण पृष्ठफल = वक्र पृष्ठफल + वृत्त का क्षेत्रफल

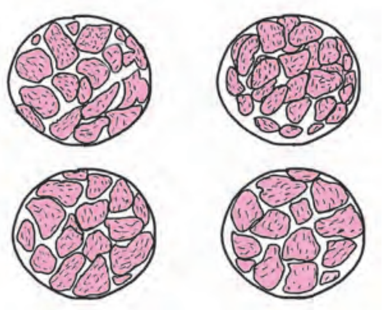
$= 2\pi r^2 + \pi r^2$

$= 3\pi r^2$

कृति :

एक मोसंबी लेकर उसके दो समान भाग कीजिए ।

एक भाग कागज पर उलटा रखकर उसके चारों ओर पेंसिल घुमाकर वृत्त बनाइए । ऐसे चार वृत्त बनाएँ । अब मोसंबी के चार समान भाग कीजिए तथा उनके छिलके निकालिए ।



एक वृत्त उन प्रत्येक टुकड़े के छोटे छिलके से करीब भर जाएगा इस प्रकार चारों वृत्त भर जाएँगे । इस आधार पर गोले का वक्र पृष्ठफल = 4 $\times$ वृत्त का क्षेत्रफल

$= 4\pi r^2$

हल किए गए उदाहरण

(1) एक गोले की त्रिज्या 7 सेमी है, तो उस गोले का वक्र पृष्ठफल ज्ञात कीजिए ।($\pi = \frac{22}{7}$)

गोले का वक्र पृष्ठफल = $4\pi r^2$

$= 4 \times \frac{22}{7} \times (7)^2$

$= 4 \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7$

$= 88 \times 7$

$= 616$

गोले का वक्र पृष्ठफल = 616 वर्ग सेमी

(2) किसी गोले का वक्र पृष्ठफल 1256 वर्ग सेमी है तो उस गोले की त्रिज्या ज्ञात कीजिए ।(π = 3.14)

गोले का वक्र पृष्ठफल = $4\pi r^2$

$\therefore\ 1256 = 4 \times 3.14 \times r^2$

$\therefore\ 1256 = \frac{1256}{4 \times 3.14} = r^2$

$\therefore\ 1256 = \frac{31400}{314} = r^2$

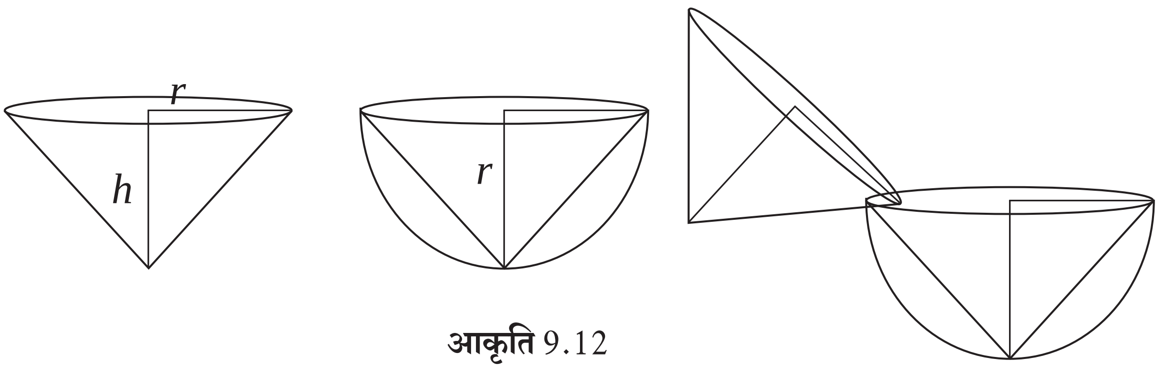
$\therefore\ 100 = r^2$

$\therefore\ 10 = r$

$\therefore\ r = 10$ सेमी

कृति : एक शंकु तथा एक अर्धगोले इस प्रकार से लीजिए कि अर्धगोले की त्रिज्या तथा शंकु की ऊँचाई समान हो, इसी प्रकार शंकु की आधार की त्रिज्या तथा अर्धगोले की त्रिज्या समान हो ।

शंकु को रेत से पूरा भरिए । पूरा भरा हुआ अर्धगोले में पलटिए इस अर्धगोले को पूरा भरने के लिए कितने शंकु रेत लगेगी, इसे देखेंगे ।



आकृति 9.12

एक अर्धगोले भरने के लिए दो शंकु भरकर रेत लगी

$\therefore$ 2 $\times$ शंकु का घनफल = अर्धगोले का घनफल

$\therefore$ अर्धगोले का घनफल = 2 $\times$ शंकु का घनफल

$= 2 \times \frac{1}{3} \times \pi r^2 h$

$= 2 \times \frac{1}{3} \times \pi r^2 \times r$

$= \frac{2}{3} \pi r^3$

$\therefore$ गोले का घनफल = 2 $\times$ अर्धगोले का घनफल

$= \frac{4}{3} \pi r^3$

$\therefore$ गोले का घनफल = $\frac{4}{3} \pi r^3$

इसे ध्यान में रखें

- अर्धगोले का घनफल = $\frac{2}{3}\pi r^3$
- ठोस अर्धगोले का संपूर्ण पृष्ठफल = $2\pi r^2 + \pi r^2 = 3\pi r^2$

हल किए गए उदाहरण

उदा. (1) एक गोले की त्रिज्या 21 सेमी है, तो उस गोले का घनफल ज्ञात कीजिए। ($\pi = \frac{22}{7}$)

हल : गोले का घनफल $= \frac{4}{3}\pi r^3$

$= \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times (21)^3$

$= \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times 21 \times 21 \times 21$

$= 88 \times 441$

$\therefore$ गोले का घनफल = 38808 घन सेमी

उदा. (2) 113040 घसेमी घनफल हो तो उस गोले की त्रिज्या ज्ञात कीजिए। ($\pi = 3.14$)

हल : गोले का घनफल $= \frac{4}{3}\pi r^3$

$113040 = \frac{4}{3} \times 3.14 \times r^3$

$\frac{113040 \times 3}{4 \times 3.14} = r^3$

$\frac{28260 \times 3}{3.14} = r^3$

$\therefore 9000 \times 3 = r^3$

$\therefore r^3 = 27000$

$\therefore r = 30$ सेमी

गोले की त्रिज्या 30 सेमी है।

उदा. (3) किसी गोले का वक्र पृष्ठफल 314 वर्ग सेमी हो तो उसका घनफल ज्ञात कीजिए ? ($\pi = 3.14$)

गोले का वक्र पृष्ठफल $= 4\pi r^2$

$314 = 4 \times 3.14 \times r^2$

$\frac{314}{4 \times 3.14} = r^2$

$\frac{31400}{4 \times 314} = r^2$

$\therefore \frac{100}{4} = r^2$

$\therefore 25 = r^2$

$\therefore r = 5$ सेमी

गोले का घनफल $= \frac{4}{3}\pi r^3$

$= \frac{4}{3} \times 3.14 \times 5^3$

$= \frac{4}{3} \times 3.14 \times 125$

$= 523.33$ घन सेमी

प्रश्नसंग्रह 9.3

1. निम्नलिखित संख्या गोले की त्रिज्या दर्शाती है ।
   (i) 4 सेमी (ii) 9 सेमी (iii) 3.5 सेमी
   तो उस गोले का वक्र पृष्ठफल तथा घनफल ज्ञात कीजिए । ($\pi = 3.14$)
2. यदि किसी ठोस अर्धगोले की त्रिज्या 5 सेमी हो तो उस ठोस अर्धगोले का वक्र पृष्ठफल का संपूर्ण पृष्ठफल ज्ञात कीजिए ।($\pi = 3.14$)
3. 2826 सेमी^{2} वक्र पृष्ठफल के गोले का घनफल ज्ञात कीजिए ।($\pi = 3.14$)
4. यदि किसी गोले का घनफल 38808 घन सेमी हो तो गोले का वक्र पृष्ठफल ज्ञात कीजिए ।($\pi = \frac{22}{7}$)
5. एक अर्धगोले का घनफल 18000 π घन सेमी है, तो उस गोले का व्यास ज्ञात कीजिए ।

प्रकीर्ण प्रश्नसंग्रह 9

1. 0.9 मी व्यास तथा 1.4 मी लंबाई वाले रोड रोलर के 500 फेरे लगाने में कितनी जमीन समतल होगी ? ($\pi = \frac{22}{7}$)
2. एक घनाभ आकार के घरेलू मत्स्यालय बनाने के लिए 2 मिमी मोटी काँच का उपयोग (उसकी दीवार) किया उसकी बाहरी लंबाई, चौड़ाई तथा ऊँचाई क्रमशः सेमी में $60.4 \times 40.4 \times 40.2$ है तो उस मत्स्यालय के लिए अधिक-से-अधिक कितना पानी लगेगा ?
3. एक शंकु के आधार की त्रिज्या तथा लंब ऊँचाइयों का अनुपात 5:12 है । शंकु का घनफल 314 घमी है तो उस शंकु की लंब ऊँचाई तथा तिरछी ऊँचाई ज्ञात कीजिए ।($\pi = 3.14$)
4. एक गोले का घनफल 904.32 घन सेमी है तो उस गोले की त्रिज्या ज्ञात कीजिए ।($\pi = 3.14$)
5. किसी घन के संपूर्ण पृष्ठफल 864 वर्ग सेमी है तो उसका घनफल ज्ञात कीजिए ।
6. किसी गोले का पृष्ठफल 154 वर्ग सेमी है । ऐसे गोले का घनफल ज्ञात कीजिए ।
7. किसी शंकु का संपूर्ण पृष्ठफल 616 वर्ग सेमी है । उसकी तिरछी ऊँचाई यह आधार की त्रिज्या का तीन गुणा है तो उसकी तिरछी ऊँचाई ज्ञात कीजिए ।
8. वृत्ताकार कुएँ का आंतरिक व्यास 4.20 मीटर तथा गहराई 10 मीटर है । तो उस कुएँ का आंतरिक वक्र पृष्ठफल कितना होगा? कुएँ के आंतरिक पृष्ठफल का लेप लगाने के लिए 52 रुपये प्रतिवर्गमी की दर से कितना खर्च आएगा?
9. एक रोड रोलर की लंबाई 2.1 मीटर तथा उस का व्यास 1.4 मीटर है । किसी मैदान को समतल करने के लिए रोलर को 500 फेरे लगाने पड़ते हैं । तो रोलर ने कितनी वर्ग मीटर जमीन समतल की ? 7 रुपये प्रति वर्ग मी की दर से कितना खर्च आएगा?

उत्तर सूची

1. भूमिति के मूलभूत संबोध

प्रश्नसंग्रह 1.1

1. (i) 3 (ii) 3 (iii) 7 (iv) 1
   (v) 3 (vi) 5 (vii) 2 (viii) 7
2. (i) 6 (ii) 8 (iii) 10 (iv) 1 (v) 3 (vi) 12
3. (i) P-R-Q (ii) एकरेखीय नहीं है (iii) A-C-B (iv) एकरेखीय नहीं है
   (v) X-Y-Z (vi) एकरेखीय नहीं है
4. 18 तथा 2 **5.** 25 तथा 9 **6.** (i) 4.5 (ii) 6.2 (iii) $2\sqrt{7}$ **7.** त्रिभुज

प्रश्नसंग्रह 1.2

1. (i) नहीं है (ii) नहीं है (iii) हैं **2.** 4 **3.** 5 **4.** BP < AP < AB
5. (i) किरण RS या किरण RT (ii) किरण PQ (iii) रेख QR (iv) किरण QR तथा किरण RQ आदि।
   (v) किरण RQ तथा किरण RT आदि । (vi) किरण SR , किरण ST आदि । (vii) बिंदु S
6. (i) बिंदु A तथा बिंदु C , बिंदु D तथा बिंदु P (ii) बिंदु L तथा बिंदु U , बिंदु P बिंदु R
   (iii) $d(U,V) = 10$, $d(P,C) = 6$, $d(V,B) = 3$, $d(U,L) = 2$

प्रश्नसंग्रह 1.3

1. (i) यदि कोई चतुर्भुज समांतर चतुर्भुज हो तो उस चतुर्भुज के सम्मुख कोण सर्वांगसम होते हैं ।
   (ii) यदि कोई चतुर्भुज आयत हो तो उस चतुर्भुज के विकर्ण सर्वांगसम होते हैं ।
   (iii) यदि कोई त्रिभुज समद्विबाहु हो तो उस त्रिभुज का शीर्षबिंदु तथा आधार के मध्यबिंदु को जोड़ने वाला रेखाखंड आधार को लंब होता है ।
2. (i) यदि दो रेखाएँ तथा उनकी तिर्यक रेखा दी गई हो तो बनने वाले एकांतर कोण सर्वांगसम होते हैं ।
   (ii) दो समांतर रेखाओं को एक तिर्यक रेखा द्वारा प्रतिच्छेदित करते हैं तो बनने वाले एकांतर कोण संपूरक होते हैं ।
   (iii) किसी चतुर्भुज के विकर्ण सर्वांगसम हो तो वह चतुर्भुज आयत होता है ।

प्रकीर्ण प्रश्नसंग्रह 1

1. (i) A (ii) C (iii) C (iv) C (v) B
2. (i) असत्य (ii) असत्य (iii) सत्य (iv) असत्य
3. (i) 3 (ii) 8 (iii) 9 (iv) 2 (v) 6 (vi) 22 (vii) 165
4. -15 तथा 1 (5) (i) 10.5 (ii) 9.1 (6) -6 तथा 8

2. समांतर रेखा

प्रश्नसंग्रह 2.1

1. (i) 95° (ii) 95° (iii) 85° (iv) 85°
2. $\angle a = 70^\circ$, $\angle b = 70^\circ$, $\angle c = 115^\circ$, $\angle d = 65^\circ$
3. $\angle a = 135^\circ$, $\angle b = 135^\circ$, $\angle c = 135^\circ$
5. (i) 75° (ii) 75° (iii) 105° (iv) 75°

प्रश्नसंग्रह 2.2

1. नहीं. 4. $\angle ABC = 130^\circ$

प्रकीर्ण प्रश्नसंग्रह 2

1. (i) C (ii) C (iii) A (iv) B (v) C 4. $x = 130^\circ$ $y = 50^\circ$
5. x = $126^{0\circ}$ 6. f = 100° $g = 80^\circ$

3. त्रिभुज

प्रश्नसंग्रह 3.1

1. 110° 2. 45° 3. $80^\circ, 60^\circ, 40^\circ$ 4. $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$
5. $60^\circ, 80^\circ, 40^\circ$ 6. $\angle DRE = 70^\circ$, $\angle ARE = 110^\circ$
7. $\angle AOB = 125^\circ$ 9. $30^\circ, 70^\circ, 80^\circ$

प्रश्नसंग्रह 3.2

1. (i) भु.भु.भु. (ii) भु.को.भु. (iii) को.भु.को. (iv) कर्णभुजा
2. (i) को.भु.को., $\angle BAC \cong \angle QPR$,रेख AB $\cong$ रेख PQ, रेख AC $\cong$ रेख PR
   (ii) भु.को.भु., $\angle TPQ \cong \angle TSR$, $\angle TQP \cong \angle TRS$, रेख PQ $\cong$ रेख SR
3. कर्णभुजा, $\angle ACB \cong \angle QRP$, $\angle ABC \cong \angle QPR$, रेख AC $\cong$ रेख QR
4. भु.भु.भु., $\angle MLN \cong \angle MPN$, $\angle LMN \cong \angle MNP$,$\angle LNM \cong \angle PMN$

प्रश्नसंग्रह 3.3

1. $x = 50^\circ$, $y = 60^\circ$, $m\angle ABD = 110^\circ$, $m\angle ACD = 110^\circ$.
2. 7.5 इकाई 3. 6.5 इकाई 4. $l(PG)$ = 5 सेमी , $l(PT)$ = 7.5 सेमी

प्रश्नसंग्रह 3.4

1. 2 सेमी 2. 28° 3. $\angle QPR$, $\angle PQR$ 4. भुजा NA, भुजा FN

प्रश्नसंग्रह 3.5

1. $\frac{XY}{LM} = \frac{YZ}{MN} = \frac{XZ}{LN}$, $\angle X \cong \angle L$, $\angle Y \cong \angle M$, $\angle Z \cong \angle N$
2. $l(QR)$ = 12 सेमी, $l(PR)$ = 10 सेमी

प्रकीर्ण प्रश्नसंग्रह 3

1. (i) D (ii) B (iii) B

5. चतुर्भुज

प्रश्नसंग्रह 5.1

1. $m\angle XWZ = 135^\circ$, $m\angle YZW = 45^\circ$, l (WY) = 10 सेमी
2. $x = 40^\circ$, $\angle C = 132^\circ$, $\angle D = 48^\circ$
3. 25 सेमी, 50 सेमी, 25 सेमी, 50 सेमी
4. 60°, 120°, 60°, 120°
6. $\angle A = 70^\circ$, $\angle B = 110^\circ$, $\angle C = 70^\circ$, $\angle R = 110^\circ$

प्रश्नसंग्रह 5.3

1. BO = 4 सेमी, $\angle ACB = 35^\circ$
2. QR = 7.5 सेमी, $\angle PQR = 105^\circ$, $\angle SRQ = 75^\circ$
3. $\angle IMJ = 90^\circ$, $\angle JIK = 45^\circ$, $\angle LJK = 45^\circ$
4. भुजा = 14.5 सेमी, परिमिति = 58 सेमी
5. (i) असत्य (ii) असत्य (iii) सत्य (iv) सत्य (v) सत्य (vi) असत्य

प्रश्नसंग्रह 5.4

1. $\angle J = 127^\circ$, $\angle L = 72^\circ$ **2.** $\angle B = 108^\circ$, $\angle D = 72^\circ$

प्रश्नसंग्रह 5.5

1. XY = 4.5 सेमी, YZ = 2.5 सेमी, XZ = 5.5 सेमी

प्रकीर्ण प्रश्नसंग्रह 5

1. (i) D (ii) C (iii) D **2.** 25 सेमी, **3.** $6.5\sqrt{2}$ सेमी

4. 24 सेमी, 32 सेमी, 24 सेमी, 32 सेमी **5.** PQ = 26 सेमी **6.** $\angle MPS = 65^\circ$

6. वृत्त

प्रश्नसंग्रह 6.1

1. 20 सेमी **2.** 5 सेमी **3.** 32 इकाई **4.** 9 इकाई

प्रश्नसंग्रह 6.2

1. 12 सेमी **2.** 24 सेमी

प्रकीर्ण प्रश्नसंग्रह 6

1. (i) A (ii) C (iii) A (iv) B (v) D (vi) C (vii) D **2.** 2:1 **4.** 24 इकाई

7. निर्देशक भूमिति

प्रश्नसंग्रह 7.1

1. बिंदु A : चतुर्थांश II, बिंदु B : चतुर्थांश III, बिंदु K : चतुर्थांश I, बिंदु D : चतुर्थांश I
   बिंदु E : चतुर्थांश I, बिंदु F : चतुर्थांश IV, बिंदु G : चतुर्थांश IV, बिंदु H : Y-अक्ष
   बिंदु M : X-अक्ष, बिंदु N : Y-अक्ष, बिंदु P : Y-अक्ष, बिंदु Q : चतुर्थांश III
2. (i) चतुर्थांश I (ii) चतुर्थांश III (iii) चतुर्थांश IV (iv) चतुर्थांश II

प्रश्नसंग्रह 7.2

1. चतुर्भुज 2. $x = -7$ 3. $y = -5$ 4. $x = -3$ 5. 4 इकाई
6. (i) Y-अक्ष (ii) X-अक्ष (iii) Y-अक्ष (iv) X-अक्ष
7. X अक्ष मे (5,0) , Y अक्ष में (0,5)
8. (-4,1), (-1.5, 1), (-1.5,5), (-4,5)

प्रकीर्ण प्रश्नसंग्रह 7

1. (i) C (ii) A (iii) B (iv) C (v) C (vi) B **2.** (i) Q (2,2), R(4,-1)
   (ii) T(0,-1), M(3,0) (iii) बिंदु S (iv) बिंदु O **3.** (i) चतुर्थांश IV (ii) चतुर्थांश III
   (iii) चतुर्थांश II (iv) चतुर्थांश II (v) Y अक्ष (vi) X अक्ष **5.** (i) 3
   (ii) P(3,2), Q(3,-1), R (3,0) (iii) 0 **6.** दो रेखा. $y = 5$, $y = -5$ **7.** $|a|$

8. त्रिकोणमिति

प्रश्नसंग्रह 8.1

1. (i) $\frac{QR}{PQ}$ (ii) $\frac{QR}{PQ}$ (iii) $\frac{QR}{PR}$ (iv) $\frac{PR}{QR}$
2. (i) $\frac{a}{c}$ (ii) $\frac{b}{a}$ (iii) $\frac{b}{c}$ (iv) $\frac{a}{b}$
3. (i) $\frac{MN}{LN}$ (ii) $\frac{LM}{LN}$ (iii) $\frac{LM}{MN}$ (iv) $\frac{MN}{LN}$
4. (i) $\frac{PQ}{PR}, \frac{RQ}{PR}, \frac{PQ}{RQ}$ (ii) $\frac{QS}{PS}, \frac{PQ}{PS}, \frac{QS}{PQ}$

प्रश्नसंग्रह 8.2

1. $\sin\theta : \frac{12}{37}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \frac{21}{29}, \frac{8}{17}, \frac{1}{3}$; $\cos\theta : \frac{60}{61}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{20}{29}, \frac{15}{17}, \frac{4}{5}, \frac{2\sqrt{2}}{3}$

   $\tan\theta : \frac{12}{35}, \frac{11}{60}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{2}, \frac{3}{4}$

2. (i) $\frac{11}{2}$ (ii) $\frac{93}{20}$ (iii) 5 (iv) $\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}$ (v) $\frac{3}{4}$ (vi) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 3. $\frac{3}{5}$ 4. $\frac{8}{17}$

प्रकीर्ण प्रश्नसंग्रह 8

1. (i) A (ii) D (iii) C (iv) D
2. $\sin T = \frac{12}{13}$, $\cos T = \frac{5}{13}$, $\tan T = \frac{12}{5}$, $\sin U = \frac{5}{13}$, $\cos U = \frac{12}{13}$, $\tan U = \frac{5}{12}$
3. $\sin Y = \frac{8}{17}$, $\cos Y = \frac{15}{17}$, $\tan Y = \frac{8}{15}$, $\sin Z = \frac{15}{17}$, $\cos Z = \frac{8}{17}$, $\tan Z = \frac{15}{8}$
4. $\sin\theta = \frac{7}{25}$, $\tan\theta = \frac{7}{24}$, $\sin^2\theta = \frac{49}{625}$, $\cos^2\theta = \frac{576}{625}$
5. (i) 70 (ii) 60 (iii) 50

9. पृष्ठफल तथा घनफल

प्रश्नसंग्रह 9.1

1. 640 वर्ग सेमी, 1120 वर्ग सेमी 2. 20 इकाई 3. 81 वर्ग सेमी, 121.50 वर्ग सेमी
4. 3600 वर्ग सेमी 5. 20 मी 6. 421.88 घन सेमी
7. 1632.80 वर्ग सेमी, 4144.80 वर्ग सेमी 8. 21 सेमी

प्रश्नसंग्रह 9.2

1. 5 सेमी 2. 36960 घसेमी 3. 10 सेमी, 6 सेमी 4. ₹ 2640
5. 15 सेमी 6. 8 सेमी 7. 550 वर्ग सेमी 8. 2816 वर्ग सेमी, 9856 घन सेमी
9. 600 घन मी 10. 28.51 घन मी, 47.18 वर्ग मी

प्रश्नसंग्रह 9.3

1. (i) 200.96 वर्ग सेमी, 267.95 घन सेमी (ii) 1017.36 वर्ग सेमी, 3052.08 घन सेमी
   (iii) 153.86 वर्ग सेमी, 179.50 घन सेमी
2. 157 वर्ग सेमी, 235.5 वर्ग सेमी 3. 14130 घन सेमी 4. 5544 वर्ग सेमी 5. 60 सेमी

प्रकीर्ण प्रश्नसंग्रह 9

1. 1980 वर्ग मी 2. 96801.6 घन सेमी 3. 12 मी, 13 मी
4. 6 सेमी 5. 1728 घन सेमी 6. 179.67 घन सेमी
7. 21 सेमी 8. 132 वर्ग मी, ₹ 6864 9. 4620 वर्ग मी, ₹ 32340

महाराष्ट्र राज्य पाठ्यपुस्तक निर्मिती व अभ्यासक्रम संशोधन मंडळ, पुणे – ४११ ००४

हिंदी गणित इ. ९वी भाग-२

₹ 61.00