



علم مثلث Trigonometry

8

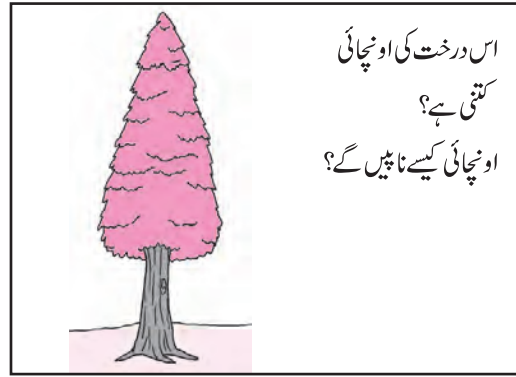
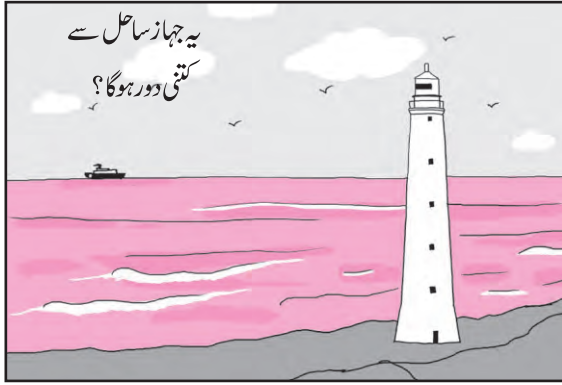
آئیے، سیکھیں



• مثلثاتی نسبتوں کے درمیان باہمی تعلق
• مخصوص زاویوں کی مثلثاتی نسبتیں

• علم مثلث کا تعارف
• مثلثاتی نسبتیں

علم مثلث کا تعارف (Introduction to trigonometry)



ہم زمین پر فاصلہ ڈوری سے یا چلتے ہوئے ناپ سکتے ہیں۔ لیکن سمندر میں جہاز کا روشنی کے مینار سے فاصلہ کس طرح ناپ سکتے ہیں؟ درخت کی اونچائی کیسے ناپیں گے؟

اوپر دی ہوئی تصاویر کا مشاہدہ کیجیے۔ تصاویر میں سوال ریاضی سے تعلق رکھتا ہے۔ ان سوالوں کے جوابات حاصل کرنے کے لیے ریاضی مضمون کی علم مثلث، شاخ کا استعمال ہوتا ہے۔ علم مثلث کا استعمال انجینئرنگ، علم فلکیات، جہاز رانی وغیرہ شاخوں میں کیا جاتا ہے۔ علم مثلث (Trigonometry) یہ لفظ تین لاطینی الفاظ سے بنایا گیا ہے۔ Tri یعنی تین، gona یعنی ضلع اور metron یعنی ناپ تول۔

آئیے ذرا یاد کریں

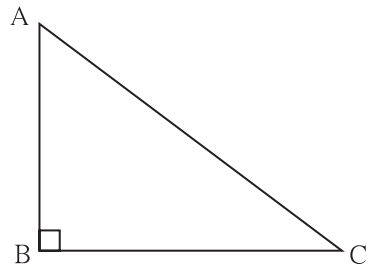


ہم مثلث کا مطالعہ کر چکے ہیں۔ قائمہ الزاویہ مثلث، فیثاغورث کا مسئلہ، مشابہ مثلثوں کی خصوصیات پر مبنی علم مثلث مضمون کی ابتدا ہوتی ہے۔ ان کا اعادہ کریں گے۔

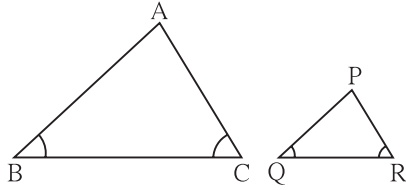
• ΔABC میں $\angle B$ قائمہ الزاویہ ہے۔ جبکہ $\angle B$ یعنی قائمہ زاویہ کے مقابل کا ضلع AC وتر ہے۔

$\angle A$ کے مقابل کا ضلع BC اور $\angle C$ کے مقابل کا ضلع AB ہے۔ اس مثلث سے متعلق فیثاغورث کے مسئلہ کا بیان :

$$(AB)^2 + (BC)^2 = (AC)^2$$



شکل 8.1



شکل 8.2

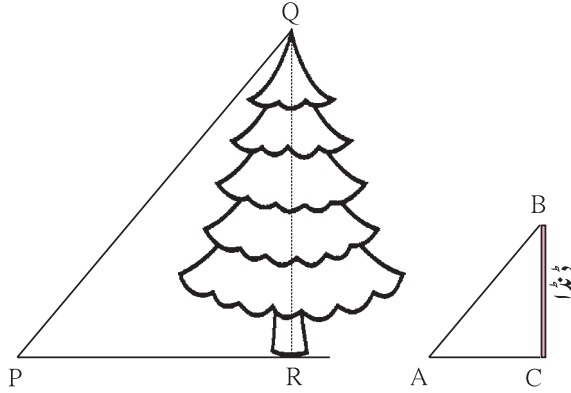
اگر $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ ہوتے ہیں تو ان کے نظیری اضلاع تناسب میں ہوتے ہیں۔

$$\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{AC}{PR} \text{ یعنی}$$

کسی بڑے درخت کی اونچائی ناپنا ہوتا ہے متشابه مثلثوں کے خصوصیت کا استعمال کر کے وہ کس طرح معلوم کر سکتے ہیں۔ اسے دیکھیں گے۔

عملی کام :

(یہ تجربہ تیز دھوپ کے دوران کیجیے)



شکل 8.3

QR درخت کی اونچائی ہے۔ BC ایک ڈنڈے کی اونچائی ہے۔

چھوٹے ڈنڈے کو زمین میں کھڑا کر اس کی اونچائی اور اس کے

سایہ کی لمبائی ناپیے۔ درخت کے سایہ کی لمبائی ناپیے۔ سورج کی

شعاعیں متوازی ہونے کی وجہ سے ΔABC اور ΔPQR

مشابہ زاویہ والے یعنی متشابه مثلث ہیں۔ اسے سمجھ لیں۔ متشابه مثلثوں کے نظیری اضلاع تناسب میں ہوتے ہیں۔

اس کا استعمال کر کے $\frac{QR}{PR} = \frac{BC}{AC}$ ملتا ہے۔

$$\text{درخت کی اونچائی} = QR = \frac{BC}{AC} \times PR$$

یہ مساوات حاصل ہوتی ہے۔

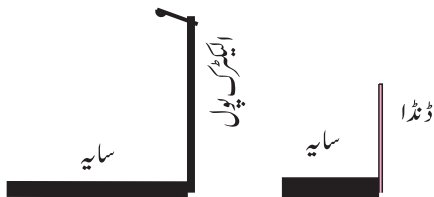
PR، BC اور AC کی قیمتیں ہمیں معلوم ہیں۔ یہ قیمتیں مساوات میں رکھ کر QR کی لمبائی یعنی درخت کی اونچائی معلوم کی جاسکتی ہے۔

غور کیجیے



یہ تجربہ صبح 8 بجے کرنے کی بجائے دوپہر 11:30 یا 1:30 بجے کرنا سہولت بخش ہے۔ ایسا کیوں؟

عملی کام :



شکل 8.4

مذکورہ بالا عملی کام کر کے آپ اپنے اطراف اونچے درخت کی اونچائی

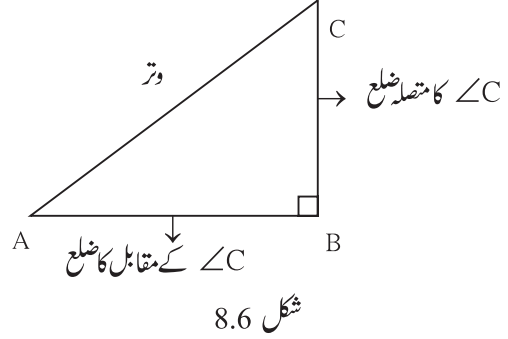
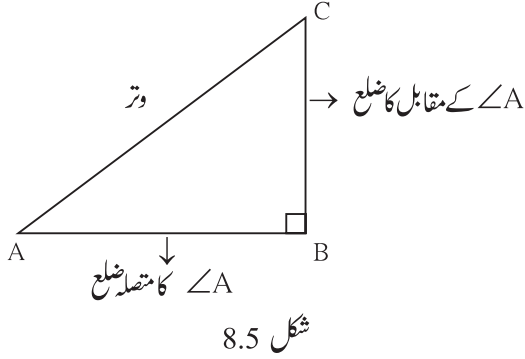
معلوم کیجیے۔ اطراف میں درخت نہ ہو تو کسی کھمبے (ستون) کی اونچائی

معلوم کیجیے۔



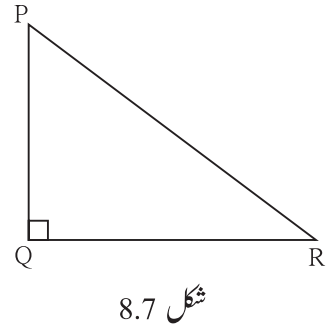
(Terms related to right angled triangle) قائمہ الزاویہ مثلث سے متعلق کچھ اصطلاحات

قائمہ الزاویہ ΔABC میں، $\angle B = 90^\circ$ ہے تب $\angle A$ اور $\angle C$ حادہ زاویہ ہیں۔



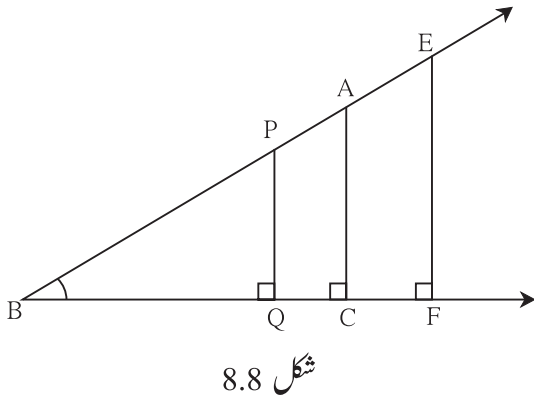
مثال : قائمہ الزاویہ ΔPQR میں،

$\angle P = \dots\dots\dots$ کا متصل ضلع ، $\angle P = \dots\dots\dots$ کے مقابل کا ضلع
 $\angle R = \dots\dots\dots$ کا متصل ضلع ، $\angle R = \dots\dots\dots$ کے مقابل کا ضلع



(Trigonometric Ratios) مثلثاتی نسبتیں

متصلہ شکل 8.8 میں کچھ قائمہ الزاویہ مثلث دکھائے ہوئے ہیں۔
 ان کا $\angle B$ مشترک زاویہ ہے۔ اس کی وجہ سے تمام قائمہ الزاویہ
 مثلث متشابه ہیں۔



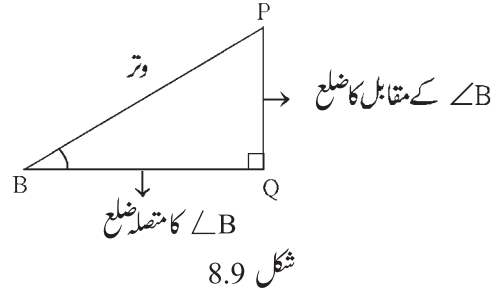
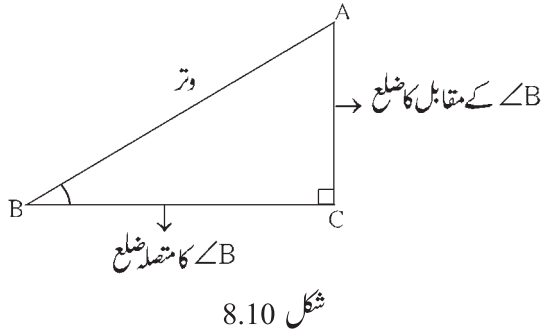
یہاں $\Delta PQB \sim \Delta ACB$

$$\therefore \frac{PB}{AB} = \frac{PQ}{AC} = \frac{BQ}{BC}$$

$$\frac{PQ}{AC} = \frac{PB}{AB} \quad , \quad \therefore \frac{PQ}{PB} = \frac{AC}{AB} \quad \dots \text{ (عمل تبدیل)}$$

$$\frac{QB}{BC} = \frac{PB}{AB} \quad , \quad \therefore \frac{QB}{PB} = \frac{BC}{AB} \quad \dots \text{ (عمل تبدیل)}$$

درج ذیل اشکال 8.9 اور 8.10 کو شکل 8.8 سے علیحدہ کیے گئے مثلثوں کی ہیں۔



(i) $\triangle PQB$ میں،

$$\frac{PQ}{PB} = \frac{\angle B \text{ کے مقابل کا ضلع}}{\text{وتر}}$$

$\triangle ACB$ میں،

$$\frac{AC}{AB} = \frac{\angle B \text{ کے مقابل کا ضلع}}{\text{وتر}}$$

$\frac{AC}{AB}$ اور $\frac{PQ}{PB}$ مساوی نسبتیں ہیں۔

$$\frac{PQ}{PB} = \frac{AC}{AB} = \frac{\angle B \text{ کے مقابل کا ضلع}}{\text{وتر}}$$

اس نسبت کو زاویہ B کی سائن (sine) نسبت کہتے ہیں۔ اس نسبت کو مختصراً $\sin B$ لکھتے ہیں۔

(ii) $\triangle ACB$ اور $\triangle PQB$ میں،

$$\frac{BQ}{PB} = \frac{\angle B \text{ کا متصل ضلع}}{\text{وتر}} \quad \text{اور} \quad \frac{BC}{AB} = \frac{\angle B \text{ کا متصل ضلع}}{\text{وتر}}$$

$$\frac{BQ}{PB} = \frac{BC}{AB} = \frac{\angle B \text{ کا متصل ضلع}}{\text{وتر}}$$

اس نسبت کو زاویہ B کی کوسائن (cosine) نسبت کہتے ہیں اس نسبت کو مختصراً $\cos B$ لکھتے ہیں۔

(iii) $\triangle ACB$ اور $\triangle PQB$ میں،

$$\frac{PQ}{BQ} = \frac{\angle B \text{ کے مقابل کا ضلع}}{\angle B \text{ کا متصل ضلع}} \quad \text{اور} \quad \frac{AC}{BC} = \frac{\angle B \text{ کے مقابل کا ضلع}}{\angle B \text{ کا متصل ضلع}}$$

$$\frac{PQ}{BQ} = \frac{AC}{BC} = \frac{\angle B \text{ کے مقابل کا ضلع}}{\angle B \text{ کا متصل ضلع}}$$

اس نسبت کو زاویہ B کی ٹینجینٹ (Tangent) نسبت کہتے ہیں اس نسبت کو مختصراً $\tan B$ لکھتے ہیں۔

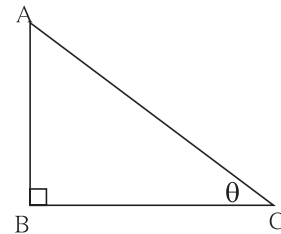
مثال : کبھی کبھی قائمہ الزاویہ مثلث کے حادہ زاویوں کی پیمائشوں کو θ (تھیٹا)،

α (الفا)، β (بیٹا) وغیرہ لاطینی حروف سے ظاہر کرتے ہیں۔ متصلہ شکل

8.11 میں $\triangle ABC$ کے حادہ زاویہ C کی پیمائش θ حروف سے ظاہر کی گئی ہے

ایسے وقت میں $\sin C$ ، $\cos C$ ، $\tan C$ نسبتوں کو بالترتیب $\sin \theta$ ، $\cos \theta$ ، $\tan \theta$

لکھتے ہیں۔



شکل 8.11

$$\sin C = \sin \theta = \frac{AB}{AC}, \quad \cos C = \cos \theta = \frac{BC}{AC}, \quad \tan C = \tan \theta = \frac{AB}{BC}$$

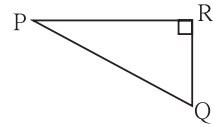


- زاویہ کے مقابل کا ضلع
نسبت $\sin = \frac{\text{زاویہ کے مقابل کا ضلع}}{\text{وتر}}$
- زاویہ کا متصل ضلع
نسبت $\cos = \frac{\text{زاویہ کا متصل ضلع}}{\text{وتر}}$
- زاویہ کے مقابل کا ضلع
نسبت $\tan = \frac{\text{زاویہ کے مقابل کا ضلع}}{\text{زاویہ کا متصل ضلع}}$

مشقی سیٹ 8.1

1. متعلقہ شکل 8.12 میں ΔPQR میں $\angle R$ قائمہ زاویہ ہے۔ تب درج ذیل نسبتیں لکھیے۔

(i) $\sin P$ (ii) $\cos Q$ (iii) $\tan P$ (iv) $\tan Q$

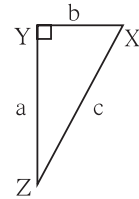


شکل 8.12

2. متعلقہ شکل 8.13 میں ΔXYZ قائمہ الزاویہ مثلث ہے۔

$\angle XYZ = 90^\circ$ ہے۔ اضلاع کی لمبائیاں a, b, c دی ہوئی ہیں۔ اس کی بناء پر درج ذیل نسبتیں لکھیے۔

(i) $\sin X$ (ii) $\tan Z$ (iii) $\cos X$ (iv) $\tan X$



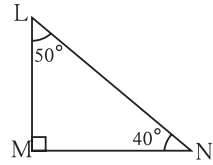
شکل 8.13

3. قائمہ الزاویہ ΔLMN میں $\angle LMN = 90^\circ$ ، $\angle L = 50^\circ$ اور $\angle N = 40^\circ$ ہے۔ اس بناء پر درج

ذیل نسبتیں لکھیے۔

(i) $\sin 50^\circ$ (ii) $\cos 50^\circ$

(iii) $\tan 40^\circ$ (iv) $\cos 40^\circ$



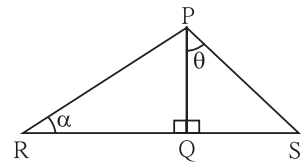
شکل 8.14

4. دی ہوئی شکل 8.15 میں $\angle PRQ = 90^\circ$ ، $\angle PQS = 90^\circ$ ، $\angle PRQ = \alpha$ اور $\angle QPS = \theta$

ہو تب درج ذیل مثلثاتی نسبتیں لکھیے۔

(i) $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\tan \alpha$

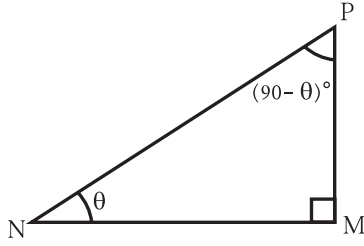
(ii) $\sin \theta$, $\cos \theta$, $\tan \theta$



شکل 8.15



(Relation among trigonometric ratios) مثلثاتی نسبتوں کے درمیان باہمی تعلق



شکل 8.16 میں ΔPMN قائمہ الزاویہ مثلث ہے۔ $m\angle M = 90^\circ$

$\angle N$ اور $\angle P$ ایک دوسرے کے مکملہ زاویے ہیں۔

اگر $m\angle N = \theta$ تب $m\angle P = 90 - \theta$

شکل 8.16

$$\sin(90 - \theta) = \frac{NM}{PN} \quad \dots(4)$$

$$\cos(90 - \theta) = \frac{PM}{PN} \quad \dots(5)$$

$$\tan(90 - \theta) = \frac{NM}{PM} \quad \dots(6)$$

$$\sin \theta = \frac{PM}{PN} \quad \dots(1)$$

$$\cos \theta = \frac{NM}{PN} \quad \dots(2)$$

$$\tan \theta = \frac{PM}{NM} \quad \dots(3)$$

$$\therefore \sin \theta = \cos(90 - \theta) \quad \dots \text{ [بیان (1) اور (5) سے]}$$

$$\cos \theta = \sin(90 - \theta) \quad \dots \text{ [بیان (2) اور (4) سے]}$$

اب اس پر بھی توجہ دیجیے۔

$$\tan \theta \times \tan(90 - \theta) = \frac{PM}{NM} \times \frac{NM}{PM} \quad \dots \text{ [بیان (3) اور (6) سے]}$$

$$\therefore \tan \theta \times \tan(90 - \theta) = 1$$

$$\text{اسی طرح, } \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\frac{PM}{PN}}{\frac{NM}{PN}} = \frac{PM}{PN} \times \frac{PN}{NM} = \frac{PM}{NM} = \tan \theta$$

اسے دھیان میں رکھیں



$$\cos(90 - \theta) = \sin \theta,$$

$$\sin(90 - \theta) = \cos \theta$$

$$\frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \tan \theta,$$

$$\tan \theta \times \tan(90 - \theta) = 1$$

* مزید معلومات کے لیے

$$\frac{1}{\sin \theta} = \operatorname{cosec} \theta, \quad \frac{1}{\cos \theta} = \sec \theta, \quad \frac{1}{\tan \theta} = \cot \theta$$

یعنی θ ، $\sec \theta$ اور $\cot \theta$ بالترتیب $\sin \theta$ ، $\cos \theta$ اور $\tan \theta$ کی معکوس نسبتیں ہیں۔

● $\sec \theta = \operatorname{cosec} (90 - \theta)$ ● $\operatorname{cosec} \theta = \sec (90 - \theta)$

- $\tan \theta = \cot (90 - \theta)$
- $\cot \theta = \tan (90 - \theta)$

آئیے ذرا یاد کریں



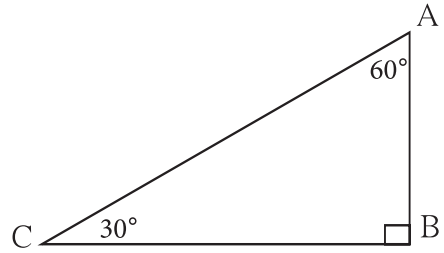
$30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$ پیمائشوں کے مثلث کی خصوصیت

کسی مثلث کے زاویوں کی پیمائش $30^\circ-60^\circ-90^\circ$ ہوں تب ہمیں معلوم ہے کہ 30° زاویہ کے مقابل کا ضلع وتر کے نصف ہوتا ہے۔ اور 60° زاویہ کے مقابل کا ضلع وتر کی لمبائی کے $\frac{\sqrt{3}}{2}$ گنا ہے۔

متصلہ شکل میں، قائمہ الزاویہ ΔABC میں $\angle A = 60^\circ$ ، $\angle C = 30^\circ$ ،

$$\angle B = 90^\circ$$

$$\therefore AB = \frac{1}{2} AC, \text{ and } BC = \frac{\sqrt{3}}{2} AC$$



8.17 شکل

آپے سمجھ لیں



30° اور 60° زاویوں کی مثلثاتی نسبتیں (Trigonometric ratios of 30° and 60° angles)

قائمة الزاوية ΔPQR میں، اگر $\angle Q = 90^\circ$ ، $\angle P = 60^\circ$ ، $\angle R = 30^\circ$

اور فرض کیجیے $PQ = a$ تب

$$QR = \frac{\sqrt{3}}{2} PR$$

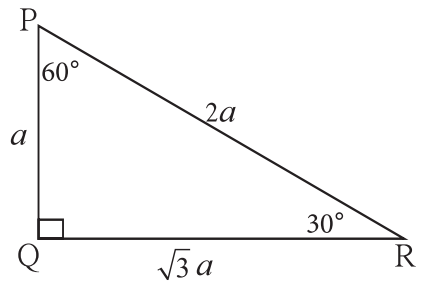
$$QR = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2a$$

$$QR = \sqrt{3} a$$

$$PQ = \frac{1}{2} PR$$

$$a = \frac{1}{2} \text{ PR}$$

$$\therefore \text{PR} = 2a$$



شکل 8.18

$\therefore$ اگر $PQ = a$ ہو تب $PR = 2a$ اور $QR = \sqrt{3}a$

$$\sin 30^\circ = \frac{PQ}{PR} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{QR}{PR} = \frac{\sqrt{3}a}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{PQ}{QR} = \frac{a}{\sqrt{3}a} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\sin 60^\circ = \frac{QR}{PR} = \frac{\sqrt{3}a}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{PQ}{PR} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$$

$$\tan 60^\circ = \frac{QR}{PQ} = \frac{\sqrt{3}a}{a} = \sqrt{3}$$

$$\sin \theta = \cos(90-\theta)$$

$$\sin 30^\circ = \cos (90^\circ - 30^\circ) = \cos 60^\circ$$

$$\sin 30^\circ = \cos 60^\circ$$

$$\cos \theta = \sin(90 - \theta)$$

$$\cos 30^\circ = \sin (90^\circ - 30^\circ) = \sin 60^\circ$$

$$\cos 30^\circ = \sin 60^\circ$$

اسے دھیان میں رکھیں

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\tan 60^\circ = \sqrt{3}$$

قائمة الزاوية ΔABC میں، $\angle C = 45^\circ$ ، $\angle A = 45^\circ$ ، $\angle B = 90^\circ$

∴ یہ متساوی الساقین قائمہ الزاویہ مثلث ہے۔

فرض کیجیے $AB = a$ ہے تب $BC = a$

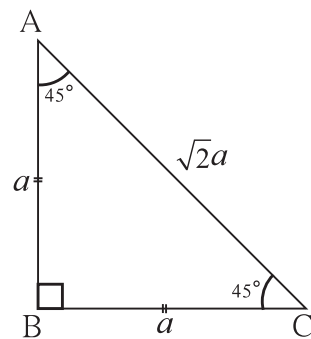
فیثا غورث کے مسئلہ کے رؤ سے AC کی لمبائی معلوم کیجیے۔

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

$$= a^2 + a^2$$

$$AC^2 = 2a^2$$

$$\therefore AC = \sqrt{2} a$$



شکل 8.19

$$\tan 45^\circ = \frac{AB}{BC} = \frac{a}{a} = 1$$

پچھلی شکل 8.19 میں $\angle C = 45^\circ$ ہے۔

$$\sin 45^\circ = \frac{AB}{AC} = \frac{a}{\sqrt{2}a} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos 45^\circ = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{\sqrt{2}a} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

اسے دھیان میں رکھیں

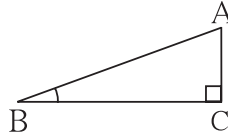
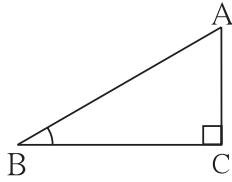


$$\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\tan 45^\circ = 1$$

(iv) 0° اور 90° پیمائشوں کے زاویوں کی مثلثاتی نسبتیں

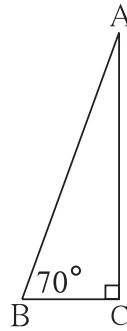
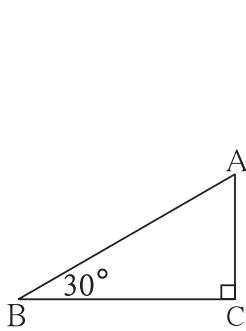


شکل 8.20

قائمہ الزاویہ $\triangle ACB$ میں $\angle C = 90^\circ$ اور $\angle B = 30^\circ$ ہے۔ اس لیے $\sin 30^\circ = \frac{AC}{AB}$ یہ ہمیں معلوم ہے۔ AB کی لمبائی مستقل رکھ کر، $\angle B$ کی پیمائش جیسے جیسے کم ہوتی جاتی ہے۔ ویسے ویسے $\angle B$ کے مقابل کا ضلع AC کی لمبائی کم ہوتی جاتی ہے۔ اس لیے $\angle B$ کی پیمائش کم ہوتی ہے ویسے ویسے $\sin \theta$ کی قیمت بھی کم ہوتی ہے۔

∴ جب $\angle B$ کی پیمائش 0° ہو جائے گی تب AC کی لمبائی 0 ہو جائے گی۔

$$\therefore \sin 0^\circ = \frac{AC}{AB} = \frac{0}{AB} \quad \therefore \sin 0^\circ = 0$$



شکل 8.21

اب شکل 8.21 میں دیکھیے اس قائمہ الزاویہ مثلث میں $\angle B$ کی پیمائش جیسے جیسے بڑھتی جاتی ہے۔ ویسے ویسے AC کی لمبائی بڑھتی ہوئی نظر آتی ہے۔ $\angle B$ کی پیمائش اگر 90° ہو جاتی ہے۔ تب AB, AC کے مساوی ہو جائے گی۔

$$\therefore \sin 90^\circ = \frac{AC}{AB} \quad \therefore \sin 90^\circ = 1$$

ہم نے قائمہ الزاویہ مثلث کی مثلثاتی نسبتیں دیکھ چکے ہیں۔

$$\sin \theta = \cos (90 - \theta) \quad \text{اور} \quad \cos \theta = \sin (90 - \theta)$$

$$\therefore \cos 0^\circ = \sin (90 - 0)^\circ = \sin 90^\circ = 1$$

$$\text{اور} \quad \cos 90^\circ = \sin (90 - 90)^\circ = \sin 0^\circ = 0$$

اسے دھیان میں رکھیں



$$\sin 0^\circ = 0, \quad \sin 90^\circ = 1, \quad \cos 0^\circ = 1, \quad \cos 90^\circ = 0$$

ہمیں معلوم ہے کہ،

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \quad \therefore \tan 0 = \frac{\sin 0}{\cos 0} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\text{لیکن}, \tan 90^\circ = \frac{\sin 90^\circ}{\cos 90^\circ} = \frac{1}{0}$$

لیکن $\frac{1}{0}$ یہ تقسیم نہیں کر سکتے۔ θ حادہ زاویہ بڑا ہوتے ہوتے 90° کے قریب ہوتے جاتا ہے۔ ویسے ویسے $\tan \theta$ تیزی سے خوب بڑھتا جاتا ہے۔ لیکن $\tan 90^\circ$ کی قیمت طے نہیں کر سکتے۔

اسے دھیان میں رکھیں



مخصوص پیمائشوں کے زاویوں کی مثلثاتی نسبتیں

زاویوں کی پیمائش / نسبتیں	0°	30°	45°	60°	90°
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
tan	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	طے نہیں کی جاسکتی

حل کردہ مثالیں :

مثال (1) قیمت معلوم کیجیے :

$$2 \tan 45^\circ + \cos 30^\circ - \sin 60^\circ$$

حل :

$$2 \tan 45^\circ + \cos 30^\circ - \sin 60^\circ$$

$$= 2 \times 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= 2 + 0$$

$$= 2$$

مثال (2) قیمت معلوم کیجیے۔ $\frac{\cos 56^\circ}{\sin 34^\circ}$

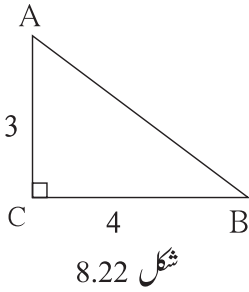
حل : $56^\circ + 34^\circ = 90^\circ$ یعنی 56° اور 34° یہ مکملہ زاویوں کی پیمائش ہیں۔

$$\sin \theta = \cos (90 - \theta)$$

$$\therefore \sin 34^\circ = \cos (90 - 34)^\circ = \cos 56^\circ$$

$$\therefore \frac{\cos 56^\circ}{\sin 34^\circ} = \frac{\cos 56^\circ}{\cos 56^\circ} = 1$$

مثال (3) قائمہ الزاویہ ΔACB میں، اگر $\angle C = 90^\circ$ ، $AC = 3$ ، $BC = 4$ ، $\angle A$ اور $\angle B$ کی درج ذیل مثلثاتی نسبتیں معلوم کیجیے۔



شکل 8.22

$\sin A$, $\sin B$, $\cos A$, $\tan B$

حل : قائمہ الزاویہ ΔACB میں فیثاغورث کے مسئلہ کی روش سے

$$AB^2 = AC^2 + BC^2$$

$$= 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$$

$$= 5^2$$

$$AB = 5$$

$$\cos A = \frac{AC}{AB} = \frac{3}{5}$$

$$\sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{4}{5}$$

$$\tan B = \frac{AC}{BC} = \frac{3}{4}$$

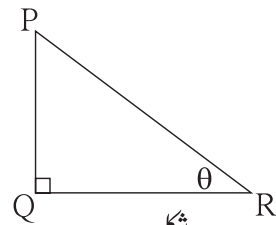
$$\sin B = \frac{AC}{AB} = \frac{3}{5}$$

مثال (4) قائمہ الزاویہ ΔPQR میں $\angle Q = 90^\circ$ ، $\angle R = \theta$ اور اگر $\sin \theta = \frac{5}{13}$ ہو تب $\cos \theta$ اور $\tan \theta$ معلوم کیجیے۔

قائمہ الزاویہ ΔPQR میں $\angle R = \theta$

$$\sin \theta = \frac{PQ}{PR} = \frac{5}{13}$$

$$\therefore \frac{PQ}{PR} = \frac{5}{13}$$

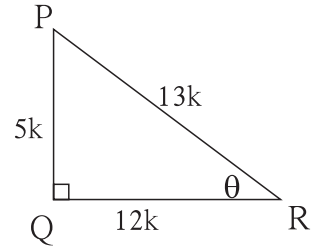


شکل 8.23

∴ فرض کریں، $PQ = 5k$ اور $PR = 13k$

فیثاغورث کے مسئلہ سے QR معلوم کریں گے۔

$$\begin{aligned} PQ^2 + QR^2 &= PR^2 \\ (5k)^2 + QR^2 &= (13k)^2 \\ 25k^2 + QR^2 &= 169k^2 \\ QR^2 &= 169k^2 - 25k^2 \\ QR^2 &= 144k^2 \\ QR &= 12k \end{aligned}$$



شکل 8.24

اب قائمہ الزاویہ ΔPQR میں $PQ = 5k$ ، $PR = 13k$ اور $QR = 12k$

$$\cos \theta = \frac{QR}{PR} = \frac{12k}{13k} = \frac{12}{13}, \quad \tan \theta = \frac{PQ}{QR} = \frac{5k}{12k} = \frac{5}{12}$$

غور کیجیے



- (1) مذکورہ بالا مثالیں حل کرتے وقت PQ اور PR اضلاع کی لمبائی $5k$ اور $13k$ کیوں لی گئی ہیں؟
 (2) کیا PQ اور PR کی لمبائی بالترتیب 5 اور 13 لی جاسکتی ہیں؟ لی جاسکتی ہوں تو تحریر میں کچھ تبدیلی کی جائے گی؟

مثالیاتی نسبتوں کی اہم مساوات :

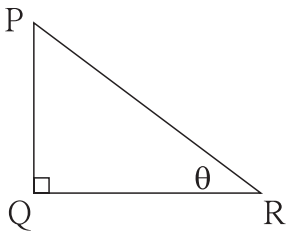
ΔPQR قائمہ الزاویہ مثلث ہے۔

$\angle R = \theta$ ، فرض کریں $\angle PQR = 90^\circ$

$$\sin \theta = \frac{PQ}{PR} \quad \dots (1)$$

$$\cos \theta = \frac{QR}{PR} \quad \dots (2)$$

فیثاغورث کے مسئلہ کی رؤ سے،



شکل 8.25

$$\begin{aligned} \therefore \left(\frac{PQ}{PR} \right)^2 + \left(\frac{QR}{PR} \right)^2 &= 1 \\ \therefore (\sin \theta)^2 + (\cos \theta)^2 &= 1 \end{aligned}$$

[بیان (1) اور (2) کی رؤ سے] ...

$$\begin{aligned} PQ^2 + QR^2 &= PR^2 \\ \therefore \frac{PQ^2}{PR^2} + \frac{QR^2}{PR^2} &= \frac{PR^2}{PR^2} \quad \dots \text{ (طرفین کے ہر رکن کو } PR^2 \text{ سے تقسیم کیا)} \end{aligned}$$



$(\sin \theta)^2$ یعنی $\sin \theta$ کا مربع اسے $\sin^2 \theta$ لکھتے ہیں۔

$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ یہ مساوات ہم نے فیثاغورث کا مسئلہ استعمال کر کے θ حادہ زاویہ والے قائمہ الزاویہ مثلث کے لیے ثابت کر چکے ہیں۔ $\theta = 0^\circ$ یا $\theta = 90^\circ$ ہو تب بھی یہ مساوات مطمئن ہوتی ہے۔ اس کی تصدیق کیجیے۔

$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ یہ مساوات کسی بھی پیمائش کے زاویہ کے لیے مطمئن ہوتی ہے۔ اس لیے اسے بنیادی متماثلہ مساوات یا دائی مساوات کہتے ہیں۔

$$(i) 0 \leq \sin \theta \leq 1, 0 \leq \sin^2 \theta \leq 1 \quad (ii) 0 \leq \cos \theta \leq 1, 0 \leq \cos^2 \theta \leq 1$$

مشقی سیٹ 8.2

1. درج ذیل جدول کے ہر ستون میں ایک نسبت دی ہوئی ہے۔ اس کی مدد سے دیگر دو نسبتیں معلوم کیجیے اور خالی جگہ پر کیجیے۔

$\sin \theta$		$\frac{11}{61}$		$\frac{1}{2}$				$\frac{3}{5}$	
$\cos \theta$	$\frac{35}{37}$				$\frac{1}{\sqrt{3}}$				
$\tan \theta$			1			$\frac{21}{20}$	$\frac{8}{15}$		$\frac{1}{2\sqrt{2}}$

2. قیمتیں معلوم کیجیے۔

(i) $5 \sin 30^\circ + 3 \tan 45^\circ$

(ii) $\frac{4}{5} \tan^2 60^\circ + 3 \sin^2 60^\circ$

(iii) $2 \sin 30^\circ + \cos 0^\circ + 3 \sin 90^\circ$

(iv) $\frac{\tan 60}{\sin 60 + \cos 60}$

(v) $\cos^2 45^\circ + \sin^2 30^\circ$

(vi) $\cos 60^\circ \times \cos 30^\circ + \sin 60^\circ \times \sin 30^\circ$

3. اگر $\sin \theta = \frac{4}{5}$ ہو تب $\cos \theta$ معلوم کیجیے۔

4. اگر $\cos \theta = \frac{15}{17}$ ہو تب $\sin \theta$ معلوم کیجیے۔

(1) درج ذیل کثیر متبادل سوالوں کے جواب سے صحیح متبادل منتخب کیجیے۔

(i) درج ذیل میں سے کون سا بیان صحیح ہے؟

(A) $\sin \theta = \cos (90 - \theta)$ (B) $\cos \theta = \tan (90 - \theta)$

(C) $\sin \theta = \tan (90 - \theta)$ (D) $\tan \theta = \tan (90 - \theta)$

(ii) $\sin 90^\circ$ کی قیمت درج ذیل میں سے کون سی ہے؟

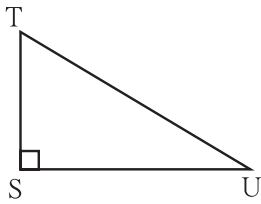
(A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (B) 0 (C) $\frac{1}{2}$ (D) 1

(iii) $2 \tan 45^\circ + \cos 45^\circ - \sin 45^\circ =$ کتنا ؟

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

(iv) $\frac{\cos 28^\circ}{\sin 62^\circ} =$ کتنا ؟

(A) 2 (B) -1 (C) 0 (D) 1

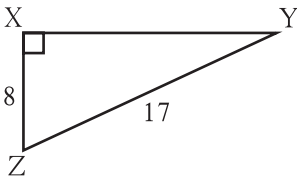


شکل 8.26

(2) قائمہ الزاویہ ΔTSU میں $TS = 5$ ، $\angle S = 90^\circ$ ، $SU = 12$

ہوتب $\sin T$ ، $\cos T$ ، $\tan T$ معلوم کیجیے اسی طرح

$\sin U$ ، $\cos U$ ، $\tan U$ معلوم کیجیے۔

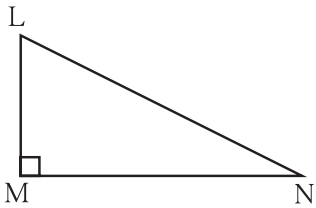


شکل 8.27

(3) قائمہ الزاویہ مثلث ΔYXZ میں $\angle X = 90^\circ$ ، $XZ = 8$ سم

سم $YZ = 17$ ہو تب $\sin Y$ ، $\cos Y$ ، $\tan Y$ اور

$\sin Z$ ، $\cos Z$ ، $\tan Z$ معلوم کیجیے۔



شکل 8.28

(4) قائمہ الزاویہ ΔLMN میں $\angle M = 90^\circ$ ، $\angle N = \theta$

$\cos \theta = \frac{24}{25}$ ہو تب $\sin \theta$ اور $\tan \theta$ کی نسبتیں معلوم کیجیے۔ اسی طرح $(\sin^2 \theta)$

اور $(\cos^2 \theta)$ کی قیمت معلوم کیجیے۔

(5) خالی جگہ پر کیجیے۔

(i) $\sin 20^\circ = \cos \square^\circ$

(ii) $\tan 30^\circ \times \tan \square^\circ = 1$

(iii) $\cos 40^\circ = \sin \square^\circ$

