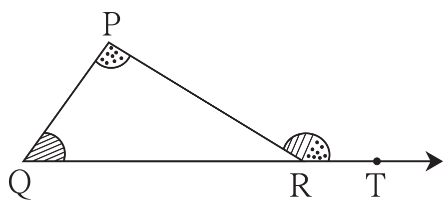
3 مثلث Triangle

آیئے، سیکھیں

- مثلث کے بعید داخلہ زاویوں کا مسئلہ
- مثلث کا وسطانیہ
- مثلثوں کی متماثلت
- قائمۃ الزاویہ مثلث کے وتر پر کھینچے گئے وسطانیہ کی خصوصیت
- متساوی الساقین مثلث کا مسئلہ
- عمودی ناصف کا مسئلہ
- $30°$-$60°$-$90°$ پیمائش کے مثلث کی خصوصیت
- زاویے کے ناصف کا مسئلہ
- متشابہ مثلث

عملی کام : ایک موٹی دفتی پر کسی بھی پیمائش کا $\triangle PQR$ بنایئے۔ شکل کے مطابق شعاع QR پر نقطہ T لیجیے۔ رنگین موٹے کارڈ شیٹ کے $\angle P$ اور $\angle Q$ کی پیمائش کے ٹکڑے کاٹ لیجیے۔ ان ٹکڑوں کو $\angle PRT$ میں رکھ کر دیکھیے۔ وہ مکمل طور پر سما جاتا ہے۔

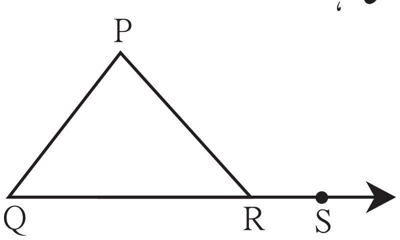


شکل 3.1

آیئے سمجھ لیں

مثلث کے بعید داخلہ زاویوں کا مسئلہ (Theorem of Remote Interior angles of a Triangle)

مسئلہ : مثلث کے ایک خارجہ زاویہ کی پیمائش، اس کے بعید داخلہ زاویوں کی پیمائشوں کے مجموعے کے مساوی ہوتی ہے۔



شکل 3.2

دیا ہوا ہے : $\triangle PQR$ کا، $\angle PRS$ کا خارجہ زاویہ ہے۔

ثابت کرنا ہے : $\angle PRS = \angle PQR + \angle QPR$

ثبوت : مثلث کے تینوں زاویوں کی پیمائشوں کا مجموعہ $180°$ ہوتا ہے۔

$\therefore \angle PQR + \angle QPR + \angle PRQ = 180°$ ... (I)

$\angle PRQ + \angle PRS = 180°$ ... (II) (خطی جوڑی کے زاویے)

اس لیے بیان (I) اور (II) کی بناء پر

$\angle PQR + \angle QPR + \angle PRQ = \angle PRQ + \angle PRS$

$\therefore \angle PQR + \angle QPR = \angle PRS$ ... ($\angle PRQ$ کا اخراج کرنے سے)

لہٰذا مثلث کے ایک خارجہ زاویہ کی پیمائش، اس کے بعید داخلہ زاویوں کی پیمائشوں کے مجموعہ کے مساوی ہوتی ہے۔

غور کیجیے

شکل 3.2 میں نقطہ R سے قطعہ PQ کے متوازی خط کھینچ کر کیا اس مسئلہ کا کوئی دوسرا ثبوت دے سکتے ہیں؟

آیئے سمجھ لیں

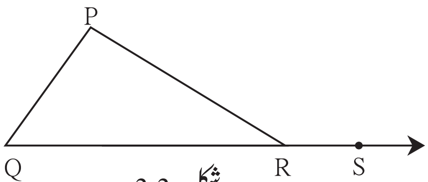
مثلث کے خارجہ زاویہ کی خصوصیت (Property of an Exterior angle of a Triangle)

a اور b ان دو اعداد کا مجموعہ $(a + b)$، عدد a سے بڑا اور b سے بھی بڑا ہوتا ہے۔ یعنی $a + b > b$ ،$a + b > a$

اس کا استعمال کر کے مثلث کے خارجہ زاویہ کی درج ذیل خصوصیت حاصل ہوتی ہے۔

$\triangle PQR$ کا، $\angle PRS$ خارجہ زاویہ ہو تو $\angle PRS > \angle Q$ ،$\angle PRS > \angle P$

$\therefore$ مثلث کا خارجہ زاویہ، اس کے ہر بعید داخلہ زاویہ سے بڑا ہوتا ہے۔



شکل 3.3

حل کردہ مثالیں :

مثال **(1)** : ایک مثلث کے زاویوں کی پیمائشوں کی نسبت 7 : 6 : 5 ہے۔ تو اس کے تمام زاویوں کی پیمائشیں معلوم کیجیے۔

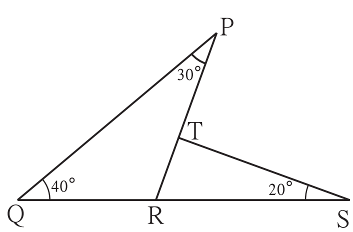
حل : فرض کیجیے مثلث کے زاویوں کی پیمائشیں $5x, 6x$ اور $7x$ ہیں۔

$$5x + 6x + 7x = 180^\circ$$
$$18x = 180^\circ$$
$$x = 10^\circ$$

$5x = 5 \times 10 = 50^\circ$, $\quad 6x = 6 \times 10 = 60^\circ$, $\quad 7x = 7 \times 10 = 70^\circ$

مثلث کے زاویوں کی پیمائشیں بالترتیب 50° ، 60° اور 70° ہیں۔

مثال **(2)** : بازو کی شکل 3.4 کا مشاہدہ کر کے $\angle PRS$ اور $\angle RTS$ کی پیمائشیں معلوم کیجیے۔



شکل 3.4

حل : $\triangle PQR$ کا خارجہ زاویہ $\angle PRS$ ہے۔

بعید داخلہ زاویوں کے مسئلہ کی رُو سے،

$$\angle PRS = \angle PQR + \angle QPR$$
$$= 40^\circ + 30^\circ$$
$$\angle PRS = 70^\circ$$

اب $\triangle RTS$ میں

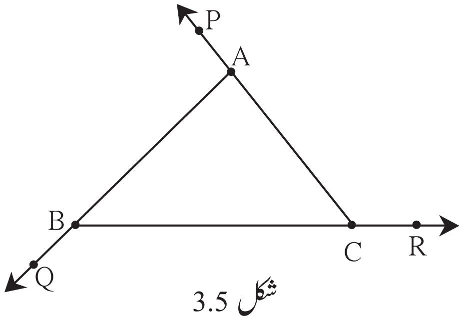
$\angle TRS + \angle RTS + \angle TSR = \square$ ... (مثلث کے تینوں زاویوں کی پیمائشوں کا مجموعہ)

$\therefore \square + \angle RTS + \square = 180^\circ$

$\therefore \angle RTS + 90^\circ = 180^\circ$

$\therefore \angle RTS = \square$

مثال (3) : ثابت کیجیے کہ مثلث کے اضلاع ایک ہی سمت میں بڑھانے سے بننے والے خارجہ زاویوں کی پیمائشوں کا مجموعہ 360° ہوتا ہے۔



شکل 3.5

دیا ہوا ہے : $\angle PAB$ ، $\angle QBC$ اور $\angle ACR$ یہ تینوں $\triangle ABC$ کے خارجہ زاویے ہیں۔

ثابت کرنا ہے : $\angle PAB + \angle QBC + \angle ACR = 360°$

ثبوت : اس مثال کا ثبوت ہم دو طریقوں سے دے سکتے ہیں۔

طریقہ (I)

$\triangle ABC$ میں اگر $\angle PAB$ خارجہ زاویہ ہو تو اس کے تعلق سے $\angle ABC$ اور $\angle ACB$ بعید داخلہ زاویے ہیں۔

$\angle BAP = \angle ABC + \angle ACB$ ... (I)

اسی طرح

$\angle ACR = \angle ABC + \angle BAC$ ... (II) ... (بعید داخلہ زاویے)

اور , $\angle CBQ = \angle BAC + \angle ACB$ ... (III)

مساوات (I)، (II)، (III) کے طرفین کی جمع کرنے پر

$\angle BAP + \angle ACR + \angle CBQ$

$= \angle ABC + \angle ACB + \angle ABC + \angle BAC + \angle BAC + \angle ACB$

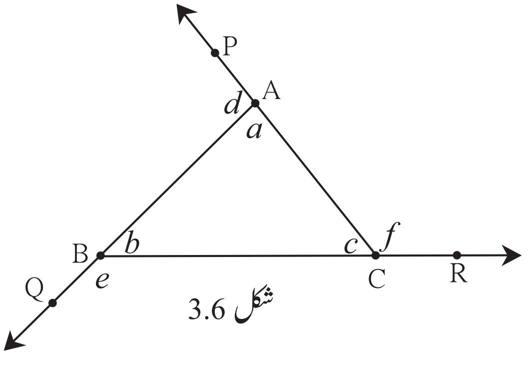
$= 2\angle ABC + 2\angle ACB + 2\angle BAC$

$= 2(\angle ABC + \angle ACB + \angle BAC)$

$= 2 \times 180°$ ... (مثلث کے داخلہ زاویوں کی پیمائشوں کا مجموعہ)

$= 360°$

طریقہ (II)



شکل 3.6

$\angle c + \angle f = 180°$ ...(خطی جوڑی کے زاویے)

اسی طرح، $\angle a + \angle d = 180°$

اور $\angle b + \angle e = 180°$

$\therefore \angle c + \angle f + \angle a + \angle d + \angle b + \angle e = 180° \times 3 = 540°$

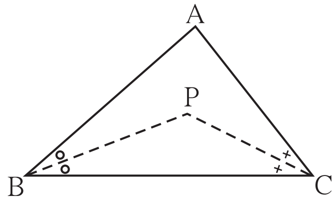
$\angle f + \angle d + \angle e + (\angle a + \angle b + \angle c) = 540°$

$\therefore \quad \angle f + \angle d + \angle e + 180° = 540°$

$\therefore f + d + e = 540° - 180°$

$= 360°$

مثال (4) : شکل 3.7 میں $\triangle ABC$ کے، $\angle B$ اور $\angle C$ کے ناصف
اگر نقطہ P پر قطع کرتے ہوں تو
ثابت کیجیے کہ $\angle BPC = 90 + \frac{1}{2} \angle BAC$
خالی جگہ پر کر کے ثبوت مکمل کیجیے۔



شکل 3.7

ثبوت : $\triangle ABC$ میں،

$\angle BAC + \angle ABC + \angle ACB = \square$ .. (مثلث کے زاویوں کی پیمائشوں کا مجموعہ)

$\therefore \frac{1}{2} \angle BAC + \frac{1}{2} \angle ABC + \frac{1}{2} \angle ACB = \frac{1}{2} \times \square$ ... (طرفین کو $\frac{1}{2}$ سے ضرب کرنے پر)

$\therefore \frac{1}{2} \angle BAC + \angle PBC + \angle PCB = 90^\circ$

$\therefore \angle PBC + \angle PCB = 90^\circ - \frac{1}{2} \angle BAC$ ... (I)

$\triangle BPC$ میں،

$\angle BPC + \angle PBC + \angle PCB = 180^\circ$ ... (مثلث کے داخلہ زاویوں کی پیمائشوں کا مجموعہ)

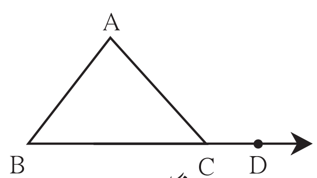
$\therefore \angle BPC + \boxed{} = 180^\circ$ ... [بیان (I) کی بناء پر]

$\therefore \angle BPC = 180^\circ - (90^\circ - \frac{1}{2} \angle BAC)$

$\therefore = 180^\circ - 90^\circ + \frac{1}{2} \angle BAC$

$= 90^\circ + \frac{1}{2} \angle BAC$

مشقی سیٹ 3.1



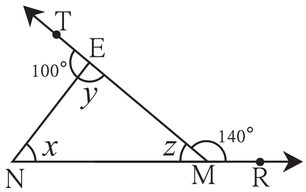
شکل 3.8

.1 شکل 3.8 میں $\triangle ABC$ کا $\angle ACD$ خارجہ زاویہ ہے۔ $\angle B = 40^\circ$، $\angle A = 70^\circ$ ہو تو $m\angle ACD$ کی پیمائش معلوم کیجیے۔

.2 $\triangle PQR$ میں، $\angle P = 70^\circ$، $\angle Q = 65^\circ$ ہو تو $\angle R$ کی پیمائش معلوم کیجیے۔

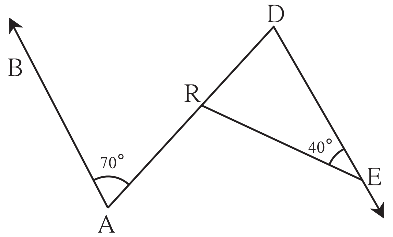
.3 مثلث کے زاویوں کی پیمائشیں x°، $(x-20)^\circ$ اور $(x-40)^\circ$ ہو تو ہر زاویے کی پیمائش معلوم کیجیے۔

.4 مثلث کے تین زاویوں میں سے، ایک زاویہ، سب سے چھوٹے زاویہ کا دگنا اور دوسرا زاویہ، سب سے چھوٹے زاویہ کا تین گنا ہے۔ تو ان تینوں زاویوں کی پیمائشیں معلوم کیجیے۔



شکل 3.9

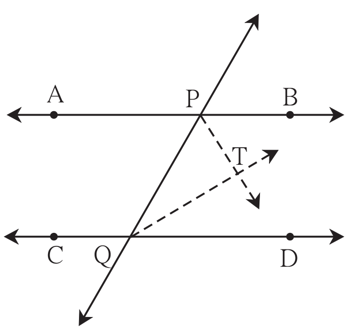
5. شکل 3.9 میں دیے ہوئے زاویوں کی پیمائشوں کی بنا پر x ، y اور z کی قیمتیں معلوم کیجیے۔



شکل 3.10

6. شکل 3.10 میں DE خط || AB خط، دی ہوئی پیمائشوں کی بنا پر ∠DRE اور ∠ARE کی پیمائشیں معلوم کیجیے۔

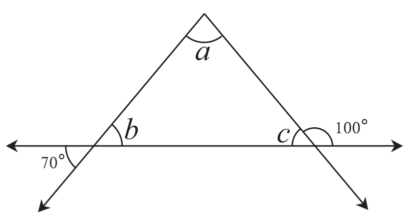
7. △ABC میں ∠A اور ∠B کے ناصف، نقطہ O پر قطع کرتے ہیں اگر ∠C = 70° ہو تو ∠AOB کی پیمائش معلوم کیجیے۔



شکل 3.11

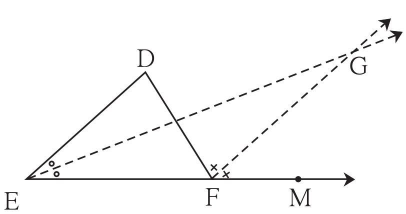
8. شکل 3.11 میں CD خط || AB خط اور خط PQ ان کا تقاطع ہے۔ شعاع PT اور شعاع QT بالترتیب ∠BPQ اور ∠PQD کی ناصف ہیں۔

تو ثابت کیجیے کہ ∠PTQ = 90°



شکل 3.12

9. شکل 3.12 میں دی ہوئی معلومات کی مدد سے $\angle a$، $\angle b$ اور $\angle c$ کی پیمائشیں معلوم کیجیے۔



شکل 3.13

*10. شکل 3.13 میں، GF ضلع || DE ضلع، شعاع EG اور شعاع FG بالترتیب ∠DEF اور ∠DFM کی ناصف ہیں تو

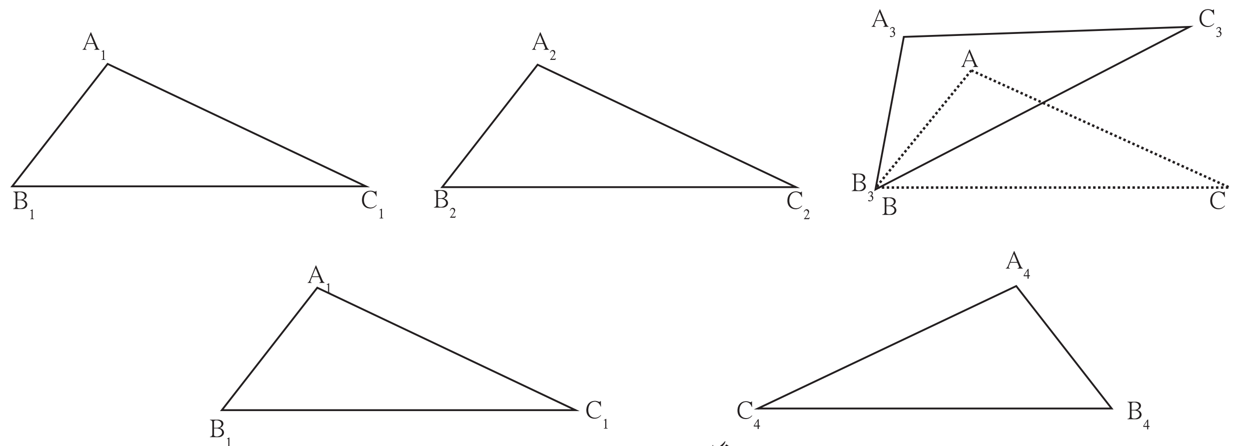
ثابت کیجیے (i) ∠DEF = ∠EDF

(ii) EF = FG

آیئے سمجھ لیں

مثلثوں کی متماثلت (Congruence of Triangles)

ایک قطعہ خط دوسرے پر رکھنے پر منطبق ہوتا ہو تب وہ دو قطعات متماثل ہوتے ہیں۔اسی طرح ایک زاویہ کو اٹھا کر دوسرے زاویے پر رکھنے پر منطبق ہوتے ہوں تو وہ دو زاویے متماثل ہوتے ہیں۔اس بات کو ہم جانتے ہیں۔اسی طرح ایک مثلث کو اٹھا کر دوسرے مثلث پر رکھنے پر منطبق ہوتے ہیں تو وہ دو مثلث متماثل ہوتے ہیں۔اگر $\triangle ABC$ اور $\triangle PQR$ متماثل ہو تب اسے $\triangle ABC \cong \triangle PQR$ کی صورت میں دکھایا جاتا ہے۔



شکل 3.14

عملی کام :

کسی بھی پیمائش کا ایک مثلث $\triangle ABC$ موٹی دفتی سے کاٹ لیجیے۔اسے کارڈ شیٹ پر ایک جگہ رکھ کر اس کے اطراف سے پنسل گھما کر اس کی نقل بنائیے۔اس مثلث کو $\triangle A_1B_1C_1$ نام دیجیے۔

اب اس دفتی کے مثلث کو ہٹا کر دوسرے جانب سرکا کر وہاں دوسری نقل بنائیے۔اسے $\triangle A_2B_2C_2$ نام دیجیے۔اس کے بعد اوپر کی شکل کے مطابق اس مثلث کو تھوڑا گھما کر ایک اور نقل بنائیے۔اس نقل کو $\triangle A_3B_3C_3$ نام دیجیے۔بعد میں مثلث نما دفتی کو اٹھا کر دوسری جانب اوندھا رکھ کر اسی کی نقل بنائیے اور نئے مثلث کو $\triangle A_4B_4C_4$ نام دیجیے۔

کیا آپ کے دھیان میں آ گیا؟ $\triangle A_1B_1C_1$، $\triangle A_2B_2C_2$، $\triangle A_3B_3C_3$ اور $\triangle A_4B_4C_4$ یہ سب $\triangle ABC$ کے متماثل ہیں کیونکہ $\triangle ABC$ ہر ایک پر منطبق ہو جاتا ہے۔ $\triangle A_3B_3C_3$ کے لیے تصدیق کیجیے۔لیکن اسے $\angle A$ کو $\angle A_3$، $\angle B$ کو $\angle B_3$ اور $\angle C$ کو $\angle C_3$ پر رکھنے پر $\triangle ABC \cong \triangle A_3B_3C_3$ کہہ سکتے ہیں۔پھر $AB = A_3B_3$، $BC = B_3C_3$ اور $CA = C_3A_3$ بھی منطبق ہو جاتے ہیں۔

اس سے یہ بات سمجھ میں آتی ہے کہ دو مثلثوں کی متماثلت کی جانچ کے دوران ان کے زاویے اور ضلع مخصوص ترتیب سے یعنی ایک سے ایک مطابقت رکھتے ہیں۔

اگر $\triangle ABC \cong \triangle PQR$ ہو تو $\angle A = \angle P$، $\angle B = \angle Q$ اور $\angle C = \angle R$ ... (I)

اور $AB = PQ,\ BC = QR,\ CA = RP$ ... (II) اس طرح کل چھ مساواتیں حاصل ہوتی ہیں۔

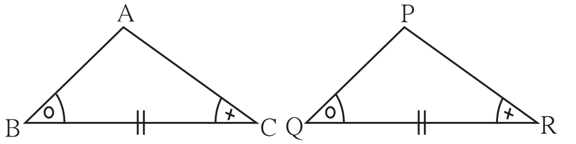
یعنی ان مثلثوں کے زاویوں اور ضلعوں کی ایک سے ایک مطابقت کی وجہ سے ان کے تین زاویے مساوی اور تین ضلع مساوی ہیں۔

اوپر کے تمام چھے مساواتیں متماثل مثلث کے لیے صحیح ہیں۔اس لیے تین مخصوص مساواتیں مساوی معلوم ہونے پر تمام چھے مساواتیں صحیح ہوجاتی ہیں اور وہ دونوں مثلث متماثل ہوتے ہیں۔وہ کیسے آیئے دیکھتے ہیں۔

(1) جب ایک سے ایک مطابقت کے لحاظ سے △ABC کے دو زاویے، △PQR کے دو زاویوں کے مساوی ہوں اور ان زاویوں کا مشمولی ضلع مساوی ہوں تو وہ دو مثلث متماثل ہوتے ہیں۔

اس خصوصیت کو ' زاویہ-ضلع-زاویہ ' آزمائش کہتے ہیں۔

اسے مختصراً زاضل زا آزمائش لکھتے ہیں۔

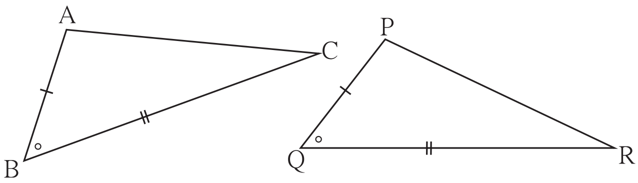


شکل 3.15

(2) جب ایک سے ایک مطابقت کے لحاظ سے △ABC کے دو اضلاع △PQR کے دو اضلاع کے مساوی ہوں اور △ABC کے ان دو اضلاع کے درمیان کا زاویہ △PQR کے دو نظیری اضلاع کے درمیان کے زاویہ کے مساوی ہوں تو وہ دو مثلث متماثل ہوتے ہیں۔

اس خصوصیت کو 'ضلع-زاویہ-ضلع' آزمائش کہتے ہیں۔

اور اسے مختصراً ضل زا ضل آزمائش لکھتے ہیں۔

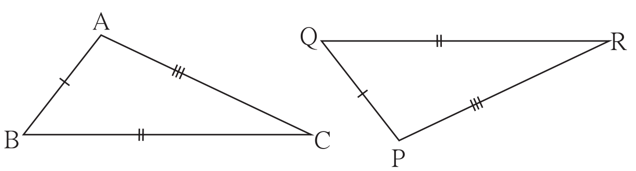


شکل 3.16

(3) جب △ABC کے تین اضلاع ایک سے ایک مطابقت کے لحاظ سے △PQR کے نظیری اضلاع کے مساوی ہوں تو وہ مثلث متماثل ہوتے ہیں۔

اس خصوصیت کو 'ضلع-ضلع-ضلع' آزمائش کہتے ہیں۔

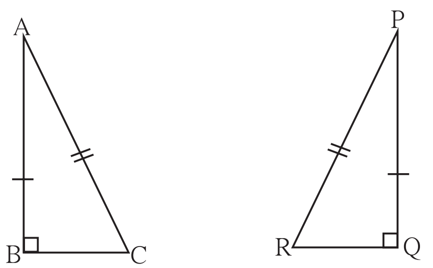
اور اسے مختصراً ضل ضل ضل آزمائش لکھتے ہیں۔



شکل 3.17

(4) △ABC اور △PQR دونوں قائمۃ الزاویہ مثلث ہیں۔ان مثلثوں میں ∠B اور ∠Q قائمہ زاویے ہیں اور دونوں مثلثوں کے وتر مساوی ہیں۔نیز AB = PQ ہو تو وہ مثلث متماثل ہوتے ہیں۔

اس آزمائش کو وتر ضلع آزمائش کہتے ہیں۔



شکل 3.18

اسے دھیان میں رکھیں

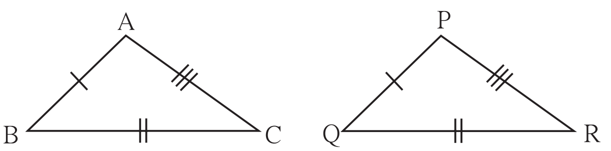
ہم نے مثلث کی کچھ پیمائشیں دی ہوں تو مثلث بنایا ہے۔(مثلاً دو زاویہ اور ان کا مشمولی ضلع، تین ضلعے، دو اضلاع اور ان کا مشمولی زاویہ) ان میں سے کوئی بھی معلومات دی جائے تو ایک ہی مثلث بنا سکتے ہیں، اس بات کا ہمیں تجربہ ہے۔ اس لیے دو مثلثوں میں ایک سے ایک مطابقت کے لحاظ سے یہ تین ارکان دیے ہوئے ہوں تو دونوں مثلث متماثل ہوتے ہیں۔ یہ بات سمجھ میں آتی ہے۔ پھر ایک سے ایک مطابقت کے لحاظ سے ان کے تینوں زاویے مساوی اور تینوں ضلع بھی مساوی ہوتے ہیں۔

دو مثلث متماثل ہوں تو ایک سے ایک مطابقت کے لحاظ سے ان کے تینوں زاویے متماثل ہوتے ہیں۔ اور تینوں اضلاع مساوی ہوتے ہیں۔ اس کا استعمال علم ہندسہ کی کئی مثالوں میں ہوتا ہے۔

مشقی سیٹ 3.2

1. ذیل کے مثالوں میں مثلث کی جوڑیوں کے ارکان کو یکساں نشانات سے دکھائے ہوئے حصے متماثل ہیں اس معلومات کی مدد سے ہر جوڑی کے مثلث جس آزمائش کی بنا پر متماثل ہوتے ہیں وہ آزمائش شکل کے نیچے دی ہوئی خالی جگہ میں لکھیے۔

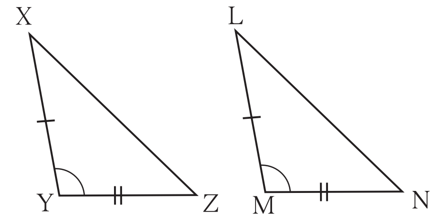
(i)



آزمائش ....

$\Delta\, ABC \cong \Delta\, PQR$

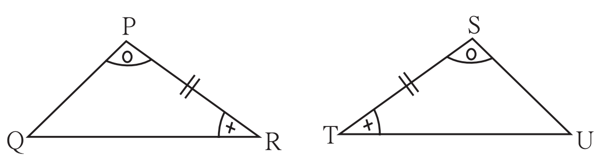
(ii)



آزمائش ....

$\Delta\, XYZ \cong \Delta\, LMN$

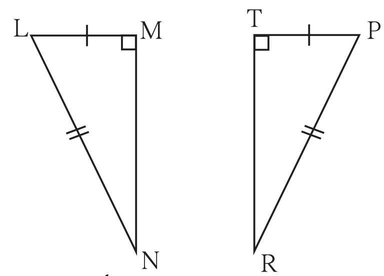
(iii)



آزمائش ....

$\Delta\, PRQ \cong \Delta\, STU$

(iv)



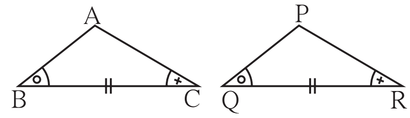
آزمائش ....

$\Delta\, LMN \cong \Delta\, PTR$

شکل 3.19

2. ذیل کے مثلثوں کی جوڑیوں میں ظاہر کی گئی معلومات کا مشاہدہ کیجیے۔ وہ مثلث کس آزمائش کے لحاظ سے متماثل ہیں۔ اسے لکھیے اور ان کے بقیہ متماثل ارکان بھی لکھیے۔

(i)



شکل 3.20

شکل میں دی ہوئی معلومات کے مطابق،

$\triangle ABC$ اور $\triangle PQR$ میں،

$\angle ABC \cong \angle PQR$

قطعہ BC $\cong$ قطعہ QR

$\angle ACB \cong \angle PRQ$

$\therefore \Delta ABC \cong \Delta PQR$ (آزمائش ______)

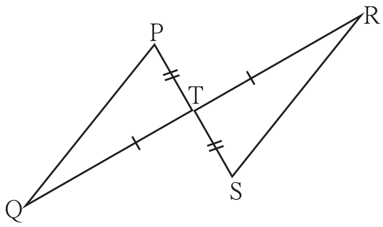
$\therefore \angle BAC \cong$ ______ ....

(متماثل مثلث کے نظیری زاویے)

قطعہ AB $\cong$ ______ اور ______ $\cong$ قطعہ PR

(متماثل مثلثوں کے نظیری اضلاع) ...

(ii)



شکل 3.21

شکل میں ہوئی معلومات کے مطابق،

$\triangle PTQ$ اور $\triangle STR$ میں،

قطعہ PT $\cong$ قطعہ ST

$\angle PTQ \cong \angle STR$ ... (متقابلہ زاویے)

قطعہ TQ $\cong$ قطعہ TR

$\therefore \Delta PTQ \cong \Delta STR$ ... آزمائش ______

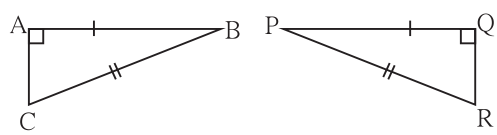
$\therefore \angle TPQ \cong$ ______ } (متماثل مثلثوں کے ....

اور ______ $\cong \angle TRS$ } نظیری زاویے)

ضلع PQ $\cong$ ______

(متماثل مثلثوں کے نظیری اضلاع) ...

(3) ذیل کی شکل میں دی گئی معلومات کی مدد سے ΔABC اور ΔPQR کی متماثلت کی آزمائش اور بقیہ متماثل ارکان لکھیے۔



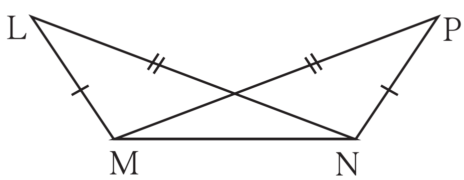
شکل 3.22

(4) ذیل کی شکل میں دی ہوئی معلومات کے مطابق

ΔLMN اور ΔPNM میں $LM = PN$،

$LN = PM$ ہو تو یہ مثلث کس آزمائش کے تحت متماثل ہیں لکھیے

اور بقیہ متماثل ارکان بھی لکھیے۔

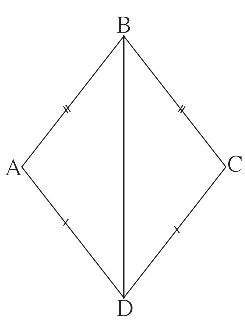


شکل 3.23

(5) شکل 3.24 میں، قطعہ BC $\cong$ قطعہ AB اور

قطعہ CD $\cong$ قطعہ AD ہو تو

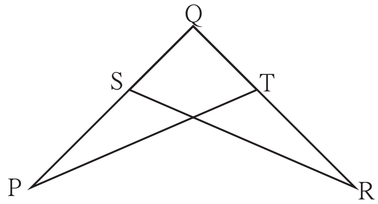
ثابت کیجیے کہ $\Delta ABD \cong \Delta CBD$



شکل 3.24

(6) شکل 3.25 میں ∠P ≅ ∠R ، قطعہ QR ≅ قطعہ PQ ہو تو

ثابت کیجیے ΔPQT ≅ ΔRQS



شکل 3.25

آیئے سمجھ لیں

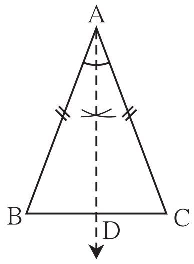
متساوی الساقین مثلث کا مسئلہ (Isosceles triangle theorem)

مسئلہ : اگر ایک مثلث کے دو ضلعے متماثل ہوں تب ان ضلعوں کے مقابل کے زاویے متماثل ہوتے ہیں۔

دیا ہوا ہے : ΔABC میں، ضلع AC ≅ ضلع AB

ثابت کرنا ہے : ∠ABC ≅ ∠ACB

عمل : ΔABC میں ∠BAC کا ناصف کھینچیے جو ضلع BC کو جہاں قطع کرتا ہے اس نقطہ کا نام D دیجیے۔



شکل 3.26

ثبوت : ΔABD اور ΔACD میں

قطعہ AB ≅ قطعہ AC ... (دیا ہوا ہے)

∠BAD ≅ ∠CAD .... (عمل)

قطعہ AD ≅ قطعہ AD .... (مشترک ضلع)

∴ Δ ABD ≅ Δ ACD ... ______

∴ ∠ABD ≅ ______ ... (متماثل مثلثوں کے نظیری زاویے)

∴ ∠ABC ≅ ∠ACB ∵ B - D - C

نتیجہ صریح : مثلث کے تینوں اضلاع متماثل ہوں، تب اس کے تینوں زاویے متماثل ہوتے ہیں اور ہر زاویہ کی پیائش 60° ہوتی ہے۔ (آپ اس نتیجہ صریح کا ثبوت لکھیے)

متساوی الساقین مثلث کے مسئلہ کا عکس (Converse of an Isosceles triangle theorem) :

مسئلہ : اگر ایک مثلث کے دو زاویے متماثل ہوں تب ان زاویوں کے مقابل کے ضلعے متماثل ہوتے ہیں۔

دیا ہوا ہے : △PQR میں ∠PQR ≅ ∠PRQ

ثابت کرنا ہے : ضلع PR ≅ ضلع PQ

عمل : ∠P کا ناصف کھینچیے۔ جو ضلع QR کو جہاں قطع کرتا ہے۔ اس نقطہ کو M نام دیجیے۔

ثبوت : △PQM اور △PRM میں

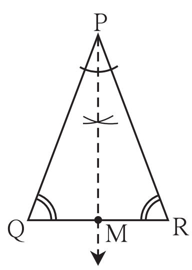
∠PQM ≅ ______ ... (دیا ہوا ہے)

∠QPM ≅ ∠RPM ... ______

قطعہ PM ≅ ______ ... (مشترک ضلع)

∴ Δ PQM ≅ Δ PRM ... آزمائش ______

∴ قطعہ PQ ≅ قطعہ PR متماثل مثلث کے نظیری اضلاع



شکل 3.27

نتیجہ صریح : مثلث کے تینوں زاویے متماثل ہوں تو اس کے تینوں اضلاع متماثل ہوتے ہیں۔ آپ اس نتیجہ صریح کا ثبوت لکھیے۔

اوپر دیے ہوئے دونوں ذیلی مسئلوں کے بیانات ایک دوسرے کے عکس ہیں۔

غور کیجیے

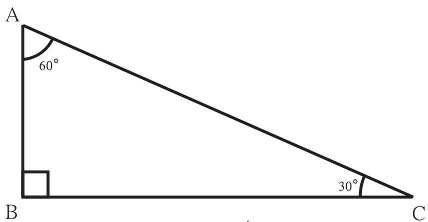
(1) کیا متساوی الساقین مثلث کے مسئلہ کا ثبوت، مختلف عمل کے ذریعے دے سکتے ہیں؟

(2) کیا متساوی الساقین مثلث کے مسئلہ کا ثبوت، کسی عمل کے بغیر دے سکتے ہیں؟

آیئے سمجھ لیں

90° – 60° – 30° پیمائش کے مثلث کی خصوصیات (Property of 30°–60°–90° triangle)

عملی کام I :



شکل 3.28

گروہ کے ہر طالب علم کو ایک ایسا قائمۃ الزاویہ مثلث بنانے کے لیے کہیں

جس کا ایک زاویہ 30° کا ہو۔

ہر طالب علم 30° پیمائش کے زاویے کے مقابل کے ضلع اور وتر کی لمبائی ناپ لے۔

گروہ کا ایک طالب علم تمام طلبہ کے بنائے ہوئے مثلثوں کے لیے ذیل کا جدول مکمل کر لے۔

مثلثوں کے نمبر شمار	مثلث 1	مثلث 2	مثلث 3	مثلث 4
30° زاویہ کے مقابل کا ضلع				
وتر کی لمبائی				

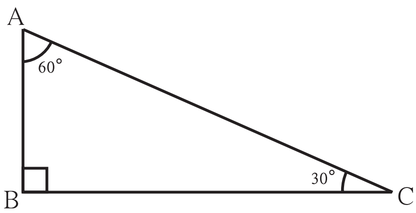
اوپر کے جدول کی بنا پر زاویوں کی پیمائشیں 30°، 60° اور 90° والے مثلث کے اضلاع کی کچھ خصوصیات حاصل ہوتی ہیں۔

عملی کام II : کمپاس بکس میں ایک گنیا کے زاویے 30°، 60° اور 90° ہوتے ہیں کیا ان کے اضلاع کے تعلق سے یہ خصوصیت حاصل ہوتی ہے؟ تصدیق کیجیے۔

اس عمل کی بنا پر ہمیں حاصل ہونے والی ایک اہم خصوصیت کو اب ہم ثابت کریں گے۔

مسئلہ : اگر قائمۃ الزاویہ کے حادہ زاویے 30° اور 60° کے ہوں تب 30° کے زاویے کے مقابل کا ضلع، وتر کا نصف ہوتا ہے۔

ذیل میں دیے ہوئے ثبوت کی خالی جگہ پُر کیجیے۔



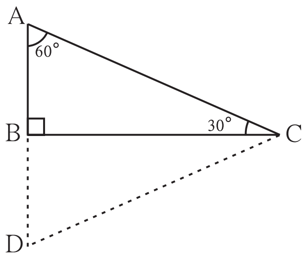
شکل 3.29

دیا ہوا ہے : قائمۃ الزاویہ ΔABC میں $\angle A = 60°$ ، $\angle C = 30°$ ، $\angle B = 90°$

ثابت کرنا ہے : $AB = \frac{1}{2} AC$

عمل : قطعہ AB کو نقطہ D تک اس طرح بڑھائیے کہ

$AB = BD$ اور قطعہ خط DC کھینچیے۔



شکل 3.30

ثبوت : ΔABC اور ΔDBC میں

قطعہ AB ≅ قطعہ DB ... ______

$\angle ABC \cong \angle DBC$ ... ______

قطعہ BC ≅ قطعہ BC ... ______

$\therefore \Delta ABC \cong \Delta DBC$ ... ______

$\therefore \angle BAC \cong \angle BDC$ ... (متماثل مثلثوں کے نظیری زاویے)

$\triangle ABC$ میں $\angle BAC = 60°$ ، $\therefore \angle BDC = 60°$

اب $\triangle ADC$ میں

$\angle DAC = \angle ADC = \angle ACD = 60°$ ... (مثلث کے زاویوں کا مجموعہ 180°)

$\therefore$ $\triangle ADC$ ، یہ متساوی الاضلاع مثلث ہے۔

$\therefore AC = AD = DC$ ... (متساوی الساقین مثلث کے مسئلہ کے عکس کا نتیجہ صریح)

لیکن، (عمل) ... $AB = \frac{1}{2} AD$

$\therefore AB = \frac{1}{2} AC$ .... $(\because AD = AC)$

عملی کام : اوپر کی شکل 3.29 کی مدد سے خالی چوکون مکمل کر کے ذیل کے مسئلے کا ثبوت لکھیے

قائمۃ الزاویہ مثلث میں دیگر زاویے 30° ، 60° ہوں تو 60° زاویے کے مقابل کا ضلع، وتر $\times \frac{\sqrt{3}}{2}$ ہوتا ہے۔

اوپر کے مسئلے میں، ہم جانتے ہیں، $AB = \frac{1}{2} AC$

(فیثاغورث کے مسئلہ کی رو سے) ... $AB^2 + BC^2 =$ ______

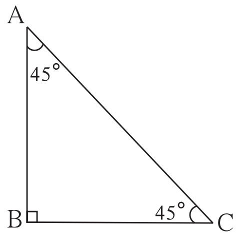
$\frac{1}{4} AC^2 + BC^2 =$ ______

$\therefore BC^2 = AC^2 - \frac{1}{4} AC^2$

$\therefore BC^2 =$ ______

$\therefore BC = \frac{\sqrt{3}}{2} AC$

عملی کام : قائمۃ الزاویہ مثلث کے زاویے جب °45 ,°45 , °90 ہوں تب قائمہ زاویہ بنانے والا ہر ضلع، وتر × $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ہوتا ہے۔



شکل 3.31

$\triangle ABC$ میں، $\angle B = 90°$ اور $\angle A = \angle C = 45°$

$\therefore\ BC = AB$

فیثا غورث کے مسئلہ کی رو سے،

$AB^2 + BC^2 = \square$

$AB^2 + \square = AC^2 \quad \ldots (\because\ BC = AB)$

$\therefore\ 2AB^2 = \square$

$\therefore\ AB^2 = \square$

$\therefore\ AB = \frac{1}{\sqrt{2}}\ AC$

اس مسئلہ کو °90–°45–°45 کے مثلث کا مسئلہ کہتے ہیں۔

اسے دھیان میں رکھیں

(1) قائمۃ الزاویہ مثلث کے زاویے °30, °60 اور °90 ہوں تب °30 زاویے کے مقابل کا ضلع $\frac{\text{وتر}}{2}$ ہوتا ہے اور °60 کے زاویے کے مقابل کا ضلع وتر × $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ہوتا ہے۔ اس مسئلہ کو °90–°60–°30 کا مسئلہ کہتے ہیں۔

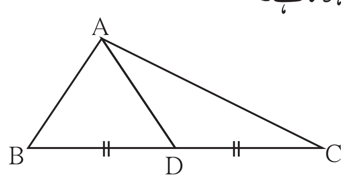
(2) قائمۃ الزاویہ مثلث کے زاویے °45، °45 اور °90 ہوں تب قائمہ زاویہ بنانے والا ہر ضلع $\frac{\text{وتر}}{\sqrt{2}}$ ہوتا ہے۔ اس مسئلہ کو °90–°45–°45 کا مسئلہ کہتے ہیں۔

آیئے ذرا یاد کریں

مثلث کا وسطانیہ (Median of a triangle)

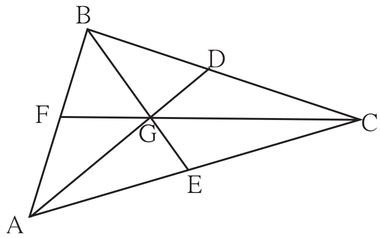
مثلث کے راس اور اس کے مقابل کے ضلع کے وسطی نقطہ کو ملانے والا قطعہ خط، اس مثلث کا وسطانیہ کہلاتا ہے۔

شکل میں نقطہ D، ضلع BC کا وسطی نقطہ ہے اس لیے قطعہ AD، یہ ΔABC کا وسطانیہ ہے۔



شکل 3.32

عملی کام I :



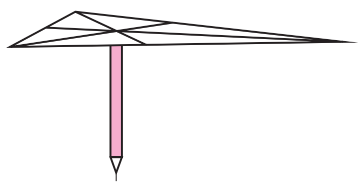
شکل 3.33

کوئی بھی ایک مثلث ABC بنائیے ۔اس مثلث کے BE, AD اور CF وسطانیے کھینچئے ۔ان کے نقطہ تراکز کو G نام دیجیے۔ AG اور GD کی لمبائی کا موازنہ تقسیم کار (Divider) کی مدد سے کیجیے۔ AG کی لمبائی، GD کے دگنا ہے۔اس کی تصدیق کیجیے۔

اسی طرح کیا BG کی لمبائی GE، کے دگنا اور CG کی لمبائی GF کی لمبائی کے دگنا ہوتی ہے؟اس کی بھی تصدیق کیجیے۔

اس بنا پر ہندسی وسط (تینوں وسطانیوں کا نقطہ تراکز) ہر وسطانیہ کو 1 : 2 اس کی نسبت میں تقسیم کرتا ہے۔اس خصوصیت کو دھیان میں رکھیے۔

عملی کام II : ΔABC،اس مثلث کو ایک موٹے کاغذ پر بنا کر کاٹ لیجیے۔اس کے تینوں وسطانیہ کھینچئے ۔ان کے نقطہ تراکز کو نقطہ G نام دیجیے۔اب ایک پنسل لیجیے جس کا نچلا حصہ ہموار ہو۔ہموار حصے کو اوپر کی جانب کر کے اسے کھڑا کیجیے۔مثلث کے نقطہ G کو پنسل کے ہموار حصے پر رکھ کر دیکھیے کہ توازن برقرار رہتا ہے۔تصدیق کیجیے۔


شکل 3.34

اس بناء پر وسطانیوں کے نقطہ تراکز یا ’ہندسی مرکز‘ کی اہم خصوصیت سمجھ میں آتی ہے۔

آیئے سمجھ لیں

قائمۃ الزاویہ مثلث کے وتر کے وسطانیہ کی خصوصیت

عملی کام : فرض کیجیے شکل 3.35 میں ΔABC قائمۃ الزاویہ مثلث ہے۔

قطعہ BD وسطانیہ ہے۔

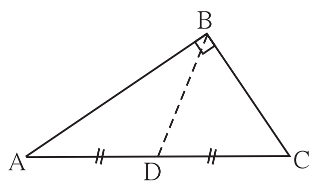
تقسیم کار کی مدد سے درج ذیل قطعات خط کی لمبائیاں ناپ کر لکھیے۔

l(AD) =......... l(DC) =........... l(BD) = ...

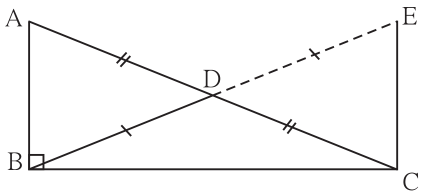
اس بنا پر $(AC)\ \frac{1}{2} = (BD)$ خصوصیت حاصل ہوتی ہے۔

تصدیق کیجیے۔

اب ہم اس خصوصیت کو ثابت کریں گے۔



شکل 3.35



شکل 3.32

مسئلہ : قائمۃ الزاویہ مثلث میں، وتر پر کھینچے گئے وسطانیہ کی لمبائی وتر کا نصف ہوتی ہے۔

دیا ہوا ہے : قائمۃ الزاویہ $\triangle ABC$ میں قطعہ BD وسطانیہ ہے۔

ثابت کرنا ہے : $BD = \frac{1}{2} AC$

عمل : شعاع BD، پر ایک نقطہ E اس طرح لیجیے کہ B – D – E ،

$l(BD) = l(DE)$ اور قطعہ EC کھینچیے ۔

ثبوت : ذیل میں ثبوت کے اہم مرحلے دکھائے گئے ہیں۔ درمیان کے مرحلے، بیانات اور وجوہات لکھ کر ثبوت مکمل کیجیے۔

$\Delta ADB \cong \Delta CDE$ (ضل زاضل آزمائش) ...

قطعہ AB $\|$ قطعہ EC (متبادلہ زاویوں کی آزمائش) ...

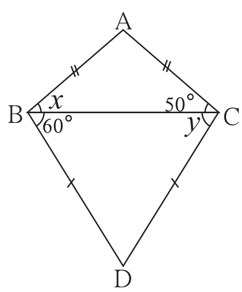
$\Delta ABC \cong \Delta ECB$ (ضل زاضل آزمائش) ...

$BD = \frac{1}{2}(AC)$

اسے دھیان میں رکھیں

کسی بھی قائمۃ الزاویہ مثلث میں، وتر پر کھینچے گئے وسطانیہ کی لمبائی وتر کا نصف ہوتی ہے۔

مشقی سیٹ 3.3

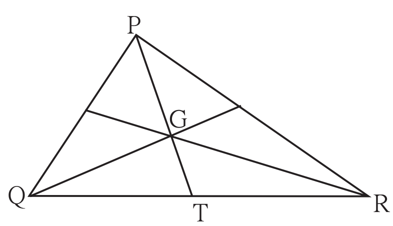


شکل 3.37

(1) شکل 3.37 میں دیئے گئے زاویوں کی پیائشیں دیکھیے۔ x اور y کی قیمتیں معلوم کیجیے۔ اسی طرح $\angle ABD$ اور $\angle ACD$ کی پیائشیں معلوم کیجیے۔

(2) قائمۃ الزاویہ مثلث میں وتر کی لمبائی 15 ہو تب اس پر کھینچے گئے وسطانیہ کی لمبائی معلوم کیجیے۔

(3) قائمۃ الزاویہ مثلث ΔPQR میں، $\angle Q = 90°$، $PQ = 12, QR = 5$ اور QS، قطعہ PR کا وسطانیہ ہے۔ تب QS کی قیمت معلوم کیجیے۔

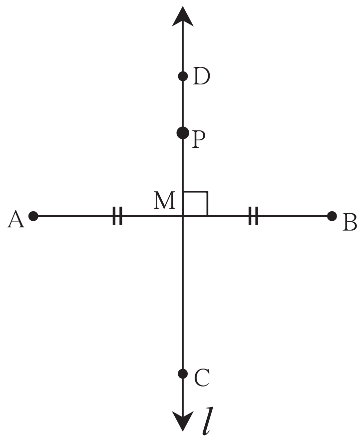


شکل 3.38

(4) شکل 3.38 میں ΔPQR کا نقطہ G ہندسی مرکز ہے۔ اگر سم $GT = 2.5$ ہو تو PG اور PT کی قیمتیں معلوم کیجیے۔

عملی کام : مناسب لمبائی کا قطعہ AB کھینچیے۔ اس کے وسطی نقطے کو M نام دیجیے۔نقطہ M سے گزرنے والا اور قطعہ AB پر عمود ہو، ایسا خط l کھینچیے۔خط l، قطعہ AB کا عمودی ناصف ہے۔کیا یہ بات دھیان میں آ گئی؟

خط l پر کہیں بھی نقطہ p لیجیے۔PA اور PB کے فاصلوں کا موازنہ تقسیم کار کی مدد سے کیجیے۔کیا حاصل ہوا؟ PA = PB یہی حاصل ہوا نا؟ اس سے یہ بات سمجھ میں آتی ہے کہ قطعہ خط کے عمودی ناصف پر واقع کوئی بھی نقطہ، اس قطعہ خط کے اختتامی نقاط سے ہم فاصلہ ہوتا ہے۔



شکل 3.39

اب کمپاس کی مدد سے، نقطہ A اور B سے ہم فاصلہ نقاط C اور D جیسے کچھ نقاط لیجیے۔
تمام نقاط خط l پر ہی ہیں نا؟ اس بات سے کیا سمجھ میں آیا؟ قطعہ خط کے سروں سے ہم فاصلہ ہر نقطہ، عمودی ناصف پر واقع ہوتا ہے۔ یہ دو خصوصیات عمودی ناصف کے مسئلہ کے دو حصے ہیں، اب ہم انھیں ثابت کریں گے۔

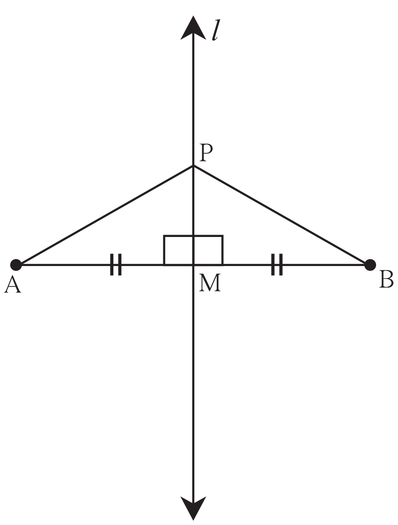
عمودی ناصف کا مسئلہ (Perpendicular bisector Theorem)

حصہ I : قطعہ خط کے عمودی ناصف پر واقع ہر نقطہ، اس قطعہ کے اختتامی نقاط سے مساوی فاصلہ پر ہوتا ہے۔

دیا ہوا ہے : خط l، قطعہ AB کا عمودی ناصف ہے، جو قطعہ AB کو نقطہ M پر قطع کرتا ہے۔
نقطہ P، خط l پر واقع کوئی ایک نقطہ ہے۔

ثابت کرنا ہے : $l(PA) = l(PB)$

عمل : قطعہ AP اور قطعہ BP کھینچیے۔



شکل 3.40

ثبوت : ΔPMA اور ΔPMB میں

قطعہ PM ≅ قطعہ PM ... (مشترک ضلع)

∠PMA ≅ ∠PMB ... (ہر زاویہ قائمہ)

قطعہ AM ≅ قطعہ BM ... (نقطہ M وسطی نقطہ)

$\therefore\ \Delta PMA \cong \Delta PMB$ ... (ضل زا ضل آزمائش)

$\therefore$ قطعہ PA $\cong$ قطعہ PB ... (متماثل مثلثوں کے نظیری اضلاع)

$\therefore\ l(PA) = l(PB)$

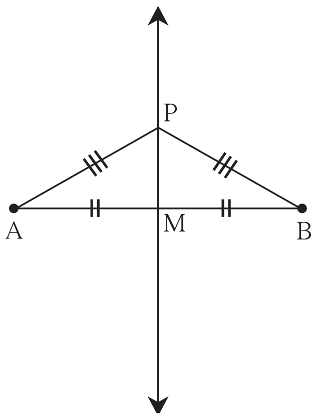
اس بنا پر قطعہ خط کے عمودی ناصف پر واقع ہر نقطہ، اس قطعہ کے اختتامی نقاط سے ہم فاصلہ ہوتا ہے۔

حصہ II : قطع خط کے اختتامی سروں سے ہم فاصلہ کوئی بھی نقطہ، اس قطعہ خط کے عمودی ناصف پر واقع ہوتا ہے۔

دیا ہوا ہے : نقطہ P، قطعہ AB کے اختتامی نقاط سے مساوی فاصلے پر واقع کوئی نقطہ ہے۔ یعنی PA = PB

ثابت کرنا ہے : نقطہ P، قطعہ AB کے عمودی ناصف پر واقع ہے۔

عمل : قطعہ AB کا وسطی نقطہ M لیجیے اور خط PM کھینچیے ۔



شکل 3.41

ثبوت : ΔPAM اور ΔPBM میں

قطعہ PA $\cong$ قطعہ PB ... ______

قطعہ AM $\cong$ قطعہ BM ... ______

قطعہ PM $\cong$ ______ ... (مشترک ضلع)

$\therefore \Delta PAM \cong \Delta PBM$ ... (______ آزمائش)

$\therefore \angle PMA \cong \angle PMB$ ... (متماثل مثلثوں کے نظیری زاویے)

لیکن $\angle PMA +$ ______ $= 180^\circ$

$\angle PMA + \angle PMA = 180^\circ$ ... $(\because \angle PMB = \angle PMA)$

$2\angle PMA =$ ______

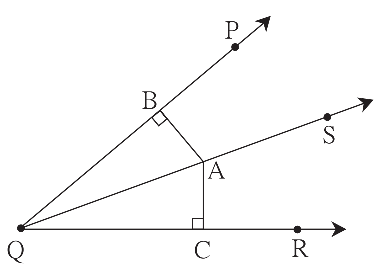
$\therefore \angle PMA = 90^\circ$

قطعہ PM $\perp$ قطعہ AB ... (1)

(2) ... اسی طرح، ضلع AB کا وسطی نقطہ M ہے۔ ... (عمل)

اس لیے خط PM، قطعہ AB کا عمودی ناصف ہے۔ یعنی نقطہ P، قطعہ AB کے عمودی ناصف پر واقع ہے۔

زاویہ کے ناصف کا مسئلہ (Angle Bisector Theorem)



شکل 3.42

حصہ I : زاویہ کے ناصف پر واقع ہر نقطہ، اس زاویہ کی ساقین سے ہم فاصلہ ہوتا ہے۔

دیا ہوا ہے : شعاع QS یہ $\angle PQR$ کی ناصف ہے۔

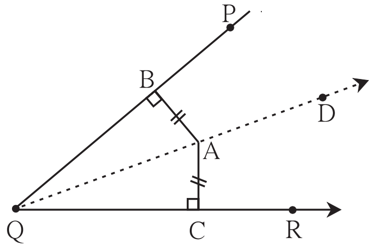
A، زاویہ کے ناصف پر واقع کوئی ایک نقطہ ہے۔ QP شعاع $\perp$ AB قطعہ،

QR شعاع $\perp$ AC قطعہ

ثابت کرنا ہے : AC قطعہ $\cong$ AB قطعہ

ثبوت : مثلثوں کی متماثلت کی مناسب وموزوں آزمائش کا استعمال کر کے ثبوت لکھیے۔

حصہ **II** : زاویہ کے ساقین سے مساوی فاصلہ پر واقع کوئی بھی نقطہ، اس زاویے کے ناصف پر ہوتا ہے۔



شکل 3.43

دیا ہوا ہے : ∠PQR کے اندرون میں A ایک نقطہ اس طرح واقع ہے کہ،

قطعہ AC ⊥ قطعہ QR

قطعہ AB ⊥ شعاع QP

AB = AC

ثابت کرنا ہے : شعاع QA، ∠PQR کی ناصف ہے یعنی

یعنی ∠ BQA = ∠ CQA

ثبوت : مثلث کی مناسب متماثلت کی آزمائش کا استعمال کر کے ثبوت لکھیے۔

آیئے ذرا یاد کریں

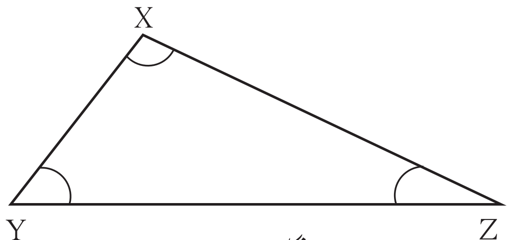
عملی کام I :

شکل کے مطابق، ضلع XY > ضلع XZ

ایسا △XYZ بنائیے۔

اب ∠Z اور ∠Y ناپیے۔

کون سا زاویہ بڑا ہے؟

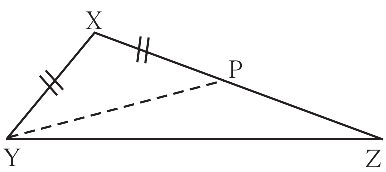


شکل 3.44

آیئے سمجھ لیں

مثلث میں ضلعوں اور زاویوں کی غیر مساویت کی خصوصیت :

مسئلہ : جب مثلث کے دو ضلعوں میں سے ایک ضلع، دوسرے ضلع سے بڑا ہوتا ہے تب بڑے ضلع کے مقابل کا زاویہ چھوٹے ضلع کے مقابل کے زاویے سے بڑا ہوتا ہے۔



شکل 3.45

دیا ہوا ہے : △XYZ، میں ضلع XY > ضلع XZ

ثابت کرنا ہے : ∠XYZ > ∠XZY

عمل : ضلع XZ پر نقطہ P، اس طرح لیجیے کہ l(XY) = l (XP)، قطعہ YP کھینچیے ۔

ثبوت : Δ XYP میں،

(عمل) ... XY = XP

(متماثل اضلاع کے مقابل کے زاویے مساوی) ... ∴ ∠XYP = ∠XPY ... (I)

∠XPY، △YPZ کا خارجہ زاویہ ہے۔

(خارجہ زاویہ کا مسئلہ) ... ∴ ∠XPY > ∠PZY

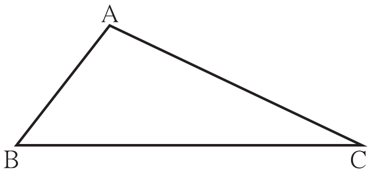
بیان (I) کی بنا پر ... ∠XYP > ∠PZY

(اگر $a > b$ اور $c > 0$ ہو تو $a + c > b$) ... ∠XYP + ∠PYZ > ∠PZY

∴ ∠XYZ > ∠PZY یعنی , ∠XYZ > ∠XZY

مسئلہ : مثلث کے دو زاویے غیر مساوی پیمائشوں کے ہوں تب بڑے زاویے کے مقابل کا ضلع، چھوٹے زاویے کے مقابل کے ضلع سے بڑا ہوتا ہے۔

اس مسئلہ کا ثبوت بالواسطہ طریقے سے دے سکتے ہیں۔ ذیل میں دیے ہوئے ثبوت کی خالی جگہ پر کیجیے اور ثبوت مکمل کیجیے۔



شکل 3.46

دیا ہوا ہے : ΔABC میں $\angle B > \angle C$

ثابت کرنا ہے : $AC > AB$

ثبوت : $\triangle ABC$ کے اضلاع AB اور AC کے لمبائیوں میں درج ذیل میں سے ایک اور صرف ایک ہی مفروضہ ممکن ہوسکتا ہے۔

(i) $AC < AB$ (ii) [ ] (iii) [ ]

(1) فرض کیجیے ۔ $AC < AB$

مثلث کے غیر مساوی ضلعوں میں سے بڑے ضلع کے مقابل کا زاویہ، چھوٹے ضلع کے مقابل کے زاویے سے [ ] ہوتا ہے۔

$\therefore \angle C >$ [ ]

لیکن (دیا ہوا ہے) ... $\angle C < \angle B$

یعنی یہاں تضاد پایا جاتا ہے۔

(یہ مفروضہ غلط ہے) ... $\therefore$ [ ] $<$ [ ]

(2) اگر، $AC = AB$

ہوتو $\angle B = \angle C$

لیکن (دیا ہوا ہے) ... [ ] $>$ [ ]

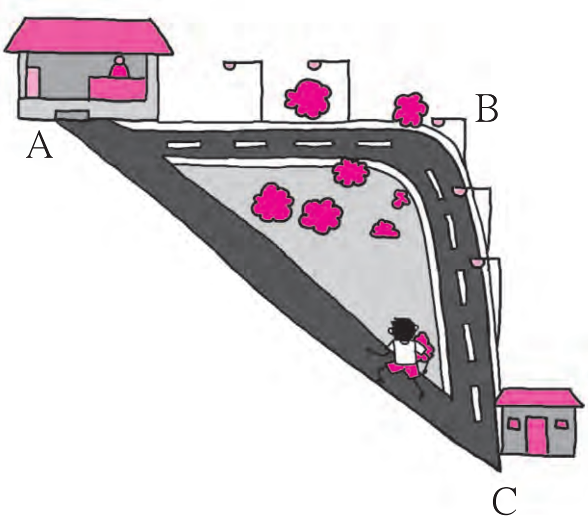
یعنی یہاں دوبارہ تضاد پیدا ہوتا ہے۔

(یہ مفروضہ غلط ہے) ... [ ] $=$ [ ] $\therefore$

اب یہی ایک ممکنہ مفروضہ باقی رہتا ہے۔ ... $\therefore AC > AB$

$\therefore \quad AC > AB$

آیئے ذرا یاد کریں



گذشتہ جماعت میں ہم نے ایک عملی کام کیا تھا۔ اس کی مدد سے مثلث کی ایک خصوصیت دیکھی تھی، اسے یاد کریں۔

بازو کی تصویر کے مطابق مقام A پر ایک دکان ہے۔ سمیر C مقام پر کھڑا تھا۔ دکان تک پہنچنے کے لیے اس نے $C \rightarrow B \rightarrow A$ اس پکی سڑک کی بجائے $C \rightarrow A$ راستہ اختیار کیا۔ کیونکہ اس کے دھیان میں یہ بات آئی تھی کہ یہ راستہ کم لمبائی کا ہے۔ یعنی مثلث کی کون سی خصوصیت اس کے دھیان میں آئی تھی؟

مثلث کے کوئی بھی دو ضلعوں کا مجموعہ تیسرے ضلع سے بڑا ہوتا ہے۔ اس خصوصیت کو اب ہم ثابت کریں گے۔

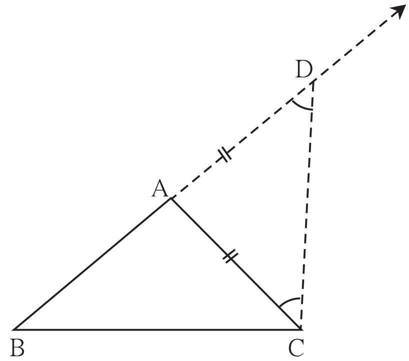
مسئلہ : مثلث کے کسی بھی دو ضلعوں کی لمبائی کا مجموعہ، تیسرے ضلع کی لمبائی سے بڑا ہوتا ہے۔

دیا ہوا ہے : $\triangle ABC$ کوئی ایک مثلث ہے۔

ثابت کرنا ہے : $AB + AC > BC$

$AB + BC > AC$

$AC + BC > AB$



شکل 3.47

عمل : شعاع BA پر نقطہ D اس طرح لیجیے کہ $AD = AC$

ثبوت : $\triangle ACD$ میں $AC = AD$ ... (عمل)

$\therefore \angle ACD = \angle ADC$ ... (متماثل اضلاع کے مقابل کے زاویے)

$\therefore \angle ACD + \angle ACB > \angle ADC$ ...(اگر $a > b$ اور $c>0$ ہو تو $a + c > b$)

$\therefore \angle BCD > \angle ADC$

$\therefore$ ضلع BD > ضلع BC ... (مثلث کے بڑے زاویے کے مقابل کا ضلع بڑا)

$\therefore BA + AD > BC$ ...($\because$ $BD = BA + AD$)

$BA + AC > BC$ ... ($\because$ $AD = AC$)

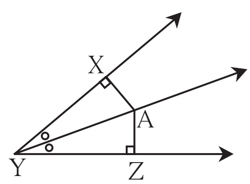
اسی طرح $AB + BC > AC$

اور $BC + AC > AB$ ثابت کر سکتے ہیں۔

مشقی سیٹ 3.4

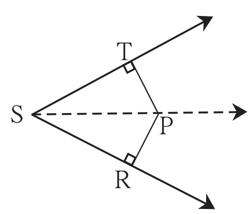
(1) شکل 3.48 میں، نقطہ A، یہ $\angle XYZ$ کے ناصف پر واقع ہے۔

اگر $AX = 2$ سم ہو تو AZ معلوم کیجیے۔



شکل 3.48

(2)



شکل 3.49

شکل 3.49 میں $\angle RST = 56°$، شعاع ST $\perp$ PT قطعہ،

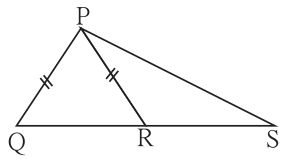
شعاع SR $\perp$ PR قطعہ اور PT قطعہ $\cong$ PR قطعہ ہو تو $\angle RSP$ معلوم کیجیے۔ وجہ لکھیے۔

(3) $\triangle PQR$ میں $PQ = 10$ سم، $QR = 12$ سم، $PR = 8$ سم ہو تو مثلث کا سب سے بڑا اور سب سے چھوٹا زاویہ معلوم کیجیے۔

(4) $\triangle FAN$ میں، $\angle A = 40°$, $\angle F = 80°$ ہو تو مثلث کے سب سے بڑے اور سب سے چھوٹے ضلع کے نام وجہ کے ساتھ لکھیے؟

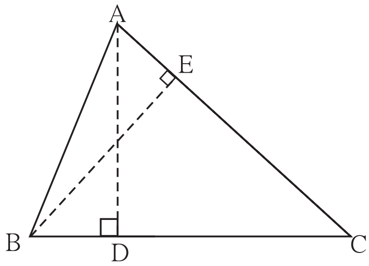
(5) ثابت کیجیے کہ متساوی الاضلاع مثلث '' متساوی الزاویہ مثلث '' ہوتا ہے۔

(6) $\triangle ABC$ میں، $\angle BAC$ کا ناصف، ضلع BC پر عمود ہو تو ثابت کیجیے کہ $\triangle ABC$، متساوی الساقین مثلث ہیں۔



شکل 3.50

(7) شکل 3.50 میں اگر قطعہ PQ $\cong$ قطعہ PR ہو تو دکھایئے کہ
قطعہ PQ $>$ قطعہ PS



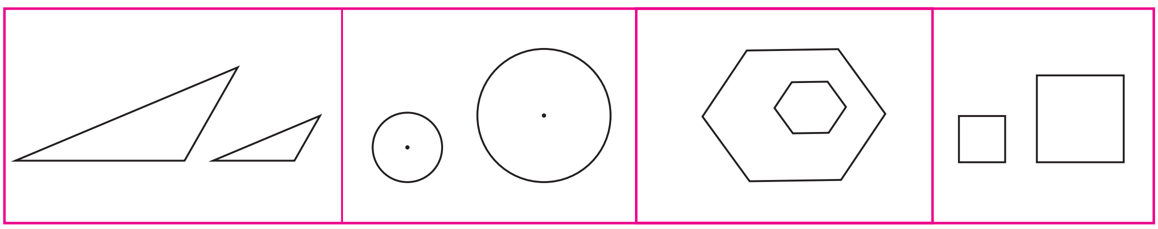
شکل 3.51

(8) شکل 3.51 میں ΔABC کے قطعہ AD اور قطعہ BD ارتفاع ہیں اور
AE = BD ہو تو ثابت کیجیے قطعہ BE $\cong$ قطعہ AD

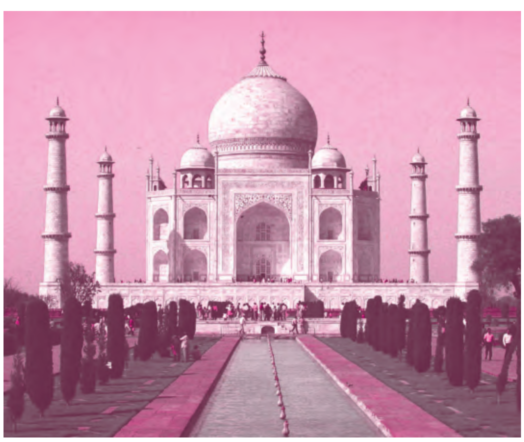
آیئے سمجھ لیں

متشابہ مثلث (Similar Triangles)

مقابل کے اشکال کا مشاہدہ کیجیے۔



ہر حصہ میں دکھائی ہوئی دو-دو شکلوں کی جسامت (Shape) ایک جیسی ہے۔ لیکن وہ شکلیں چھوٹی بڑی ہیں، یعنی وہ متماثل نہیں ہیں۔
ایسی ایک جیسی دکھائی دینے والی شکلیں، یعنی ایسی ہو بہو نظر آنے والی شکلیں متشابہ شکلیں کہلاتی ہیں۔



کسی فوٹو، اس فوٹو کی مدد سے نکالا گیا بڑا فوٹو اس میں متشابہت پائی جاتی ہے۔ اسی طرح راستہ اور راستے کا نقشہ میں متشابہت پائی جاتی ہے۔ دو شکلوں کے درمیان اضلاع کی متناسبت، متشابہ اشکال کی اہم خصوصیت ہے۔ متشابہ شکلوں میں اگر زاویے ہوں تب وہ متماثل ہوتے ہیں، اُسی پیمائش کے رہنا ضروری ہے۔ دو راستوں میں جو زاویہ ہے، وہی زاویہ ان کے نقشہ میں نہ ہو تو وہ نقشہ غلط فہمی پیدا کرسکتا ہے۔

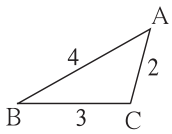
ITC Tools or Links

موبائیل یا کمپیوٹر پر کوئی فوٹو دیکھیے، اسے چھوٹا یا بڑا بنانے کے لیے آپ کیا کرتے ہیں؟ اسے یاد کیجیے۔

اسی طرح کسی فوٹو کا مخصوص حصہ دیکھنے کے لیے آپ کون سا عمل کرتے ہیں۔ یاد کیجیے۔

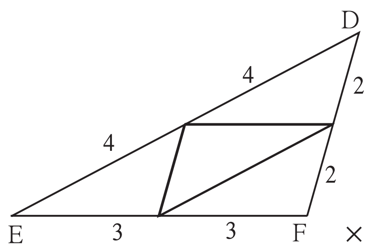
اب ہم متشابہ مثلث کی خصوصیت ایک عمل کے ذریعے سمجھنے کی کوشش کریں گے۔

عملی کام : 4 سم، 3 سم اور 2 سم ضلعوں والا ایک مثلث کاغذ پر بنائیے۔ اس مثلث کو ایک موٹے کاغذ پر رکھیے۔ اس کے اطراف پنسل گھما کر اس قسم کے 14 مثلث کاٹ کر تیار کیجیے۔ کاغذ کے یہ مثلثی ٹکڑے متماثل ہیں اس بات کو دھیان میں رکھیں۔ انھیں ذیل کے مطابق ترتیب دے کر تین مثلث بنائیے۔



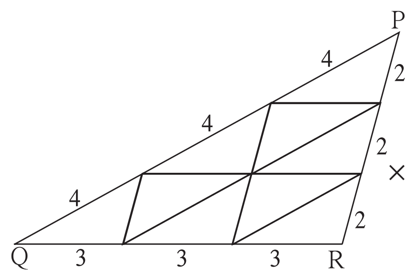
شکل 3.52

مثلث کی تعداد 1



شکل 3.53

مثلث کی تعداد 4



شکل 3.54

مثلث کی تعداد 9

ΔABC اور ΔDEF، یہ $ABC \leftrightarrow DEF$ مطابقت کے لحاظ سے متشابہ ہیں۔

$$\angle A \cong \angle D,\ \angle B \cong \angle E,\ \angle C \cong \angle F$$

اور

$$\frac{AB}{DE} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}\ ; \qquad \frac{BC}{EF} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}\ ; \qquad \frac{AC}{DF} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

یعنی نظیری ضلعے تناسب میں ہیں۔

اسی طرح $\triangle DEF$ اور $\triangle PQR$ پر غور کیجیے۔

$DEF \leftrightarrow PQR$ اس مطابقت کے لحاظ سے کیا ان کے زاویے متماثل اور ضلع تناسب میں ہیں؟

آیئے سمجھ لیں

مثلثوں کی متشابہت

$\triangle ABC$ اور $\triangle PQR$ میں اگر $\angle C = \angle R$ ،$\angle B = \angle Q$ ،$\angle A = \angle P$ (i)

اور $\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{AC}{PR}$ (ii) ہوتو $\triangle ABC$ اور $\triangle PQR$ متشابہ مثلث ہیں۔

'$\triangle ABC$ اور $\triangle PQR$، متشابہ ہیں' اسے '$\triangle ABC \cong \triangle PQR$' لکھتے ہیں۔

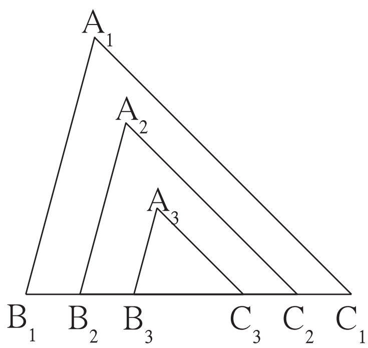
متشابہ مثلثوں کے نظیری زاویے اور نظیری ضلعوں کے درمیان باہمی تعلق ذیل کے عملی کام سے سمجھ لیں۔

عملی کام : $\triangle A_1B_1C_1$ نام کا کوئی ایک مثلث دبیز کاغذ (کارڈشیٹ) پر بنایئے اور اسے کاٹ لیجیے۔ $\angle A_1$، $\angle B_1$ اور $\angle C_1$ کی پیائش ناپیے۔

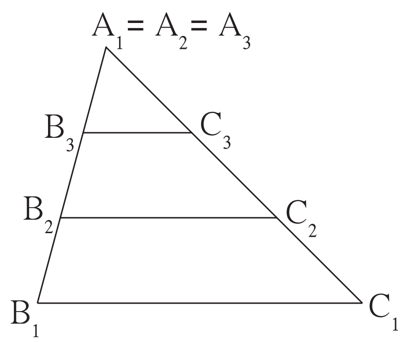
اسی طرح دبیز کاغذ پر $\triangle A_2B_2C_2$ اور $\triangle A_3B_3C_3$ نام کے مزید دو مثلث بنایئے اس طرح کہ $\angle A_1 = \angle A_2 = \angle A_3$ ،

$\angle B_1 = \angle B_2 = \angle B_3$ اور $\angle C_1 = \angle C_2 = \angle C_3$، لیکن $B_1C_1 > B_2C_2 > B_3C_3$

اب ان دو مثلثوں کو کاٹ کر بازو میں رکھیے۔ تینوں مثلثوں کے اضلاع کی لمبائی ناپیے۔ ان مثلثوں کو ذیل کے دونوں طریقے کے مطابق ترتیب دیجیے۔



شکل 3.55



شکل 3.56

$\frac{A_1C_1}{A_2C_2}$ ، $\frac{B_1C_1}{B_2C_2}$ ، $\frac{A_1B_1}{A_2B_2}$ ان نسبتوں کی جانچ کیجیے۔ وہ مساوی ہیں، یہ تصدیق کیجیے۔

اسی طرح $\frac{A_1B_1}{A_3B_3}$ ، $\frac{B_1C_1}{B_3C_3}$ ، $\frac{A_1C_1}{A_3C_3}$ کیا یہ نسبتیں بھی مساوی ہیں، معلوم کیجیے۔

اس عملی کام سے یہ بات ذہن نشین کیجیے کہ جن مثلثوں کے نظیری زاویے مساوی پیائش کے ہوتے ہیں، ان کے نظیری اضلاع کی نسبتیں بھی مساوی ہوتی ہیں۔ یعنی ان کے نظیری اضلاع یکساں تناسب میں ہوتے ہیں۔

ہم نے دیکھا کہ $\triangle ABC$ اور $\triangle PQR$ میں اگر (i) $\angle A=\angle P$ ،$\angle B=\angle Q$ ،$\angle C=\angle R$ ہوتب (ii) $\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{AC}{PR}$

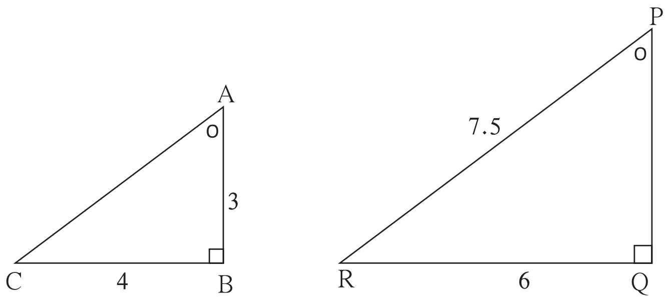
یعنی اگر نظیری زاویے مساوی ہوں تب نظیری اضلاع یکساں تناسب میں ہوتے ہیں۔ اس اصول کو تھوڑی محنت سے ثابت کر سکتے ہیں۔ ہم اسے کئی مثالوں میں استعمال کرنے والے ہیں۔

اسے دھیان میں رکھیں

- دو مثلثوں کے نظیری زاویے مساوی ہوں تب، وہ دونوں مثلث متشابہ ہوتے ہیں۔
- دو مثلث متشابہ ہوتے ہیں تب ان کے نظیری اضلاع تناسب میں ہوتے ہیں اور نظیری زاویے متماثل ہوتے ہیں۔

مثال : شکل 3.57 میں $\triangle ABC$ اور $\triangle PQR$ دکھائے ہوئے ہیں۔

ان دو مثلثوں میں دی ہوئی معلومات کا مشاہدہ کیجیے۔اس بناء پر جن کی لمبائی نہیں دی ہوئی ہو، ان اضلاع کی لمبائیاں معلوم کیجیے۔



شکل 3.57

حل : ہر مثلث کے تمام داخلہ کے زاویوں کی پیائشوں کا مجموعہ °180 ہوتا ہے۔

دی ہوئی معلومات کے مطابق،

$$\angle A = \angle P \text{ اور } \angle B = \angle Q \therefore \angle C = \angle R$$

اس لیے $\triangle ABC$ اور $\triangle PQR$ متشابۃ الزاویہ ہیں۔

$\therefore$ ان کے اضلاع یکساں تناسب میں ہیں۔

$$\therefore \frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{AC}{PR}$$

$$\therefore \frac{3}{PQ} = \frac{4}{6} = \frac{AC}{7.5}$$

$$\therefore 4 \times PQ = 18$$

$$\therefore PQ = \frac{18}{4} = 4.5$$

اسی طرح، $6 \times AC = 7.5 \times 4$

$$\therefore AC = \frac{7.5 \times 4}{6} = \frac{30}{6} = 5$$

مشقی سیٹ 3.5

(1) اگر $\Delta XYZ \sim \Delta LMN$ ہو تب ان کے متماثل نظیری زاویے لکھیے اور نظیری اضلاع کی نسبتیں لکھیے۔

(2) $\triangle XYZ$ میں $XY=4$ سم، $YZ = 6$ سم، $XZ = 5$ سم، اگر $\triangle XYZ \sim \triangle PQR$ اور $PQ = 8$ سم ہو تو $\triangle PQR$ کے بقیہ اضلاع کی لمبائیاں معلوم کیجیے۔

(3) متشابہ مثلثوں کی جوڑی کی کچی (رف) شکل بنائیے۔ مثلثوں کے نام دیجیے۔ان کے نظیری زاویوں کو یکساں نشانات سے دکھائیے۔اور مثلثوں کے نظیری اضلاع کی لمبائیوں کو تناسب میں بتانے والے اعداد سے ظاہر کیجیے۔

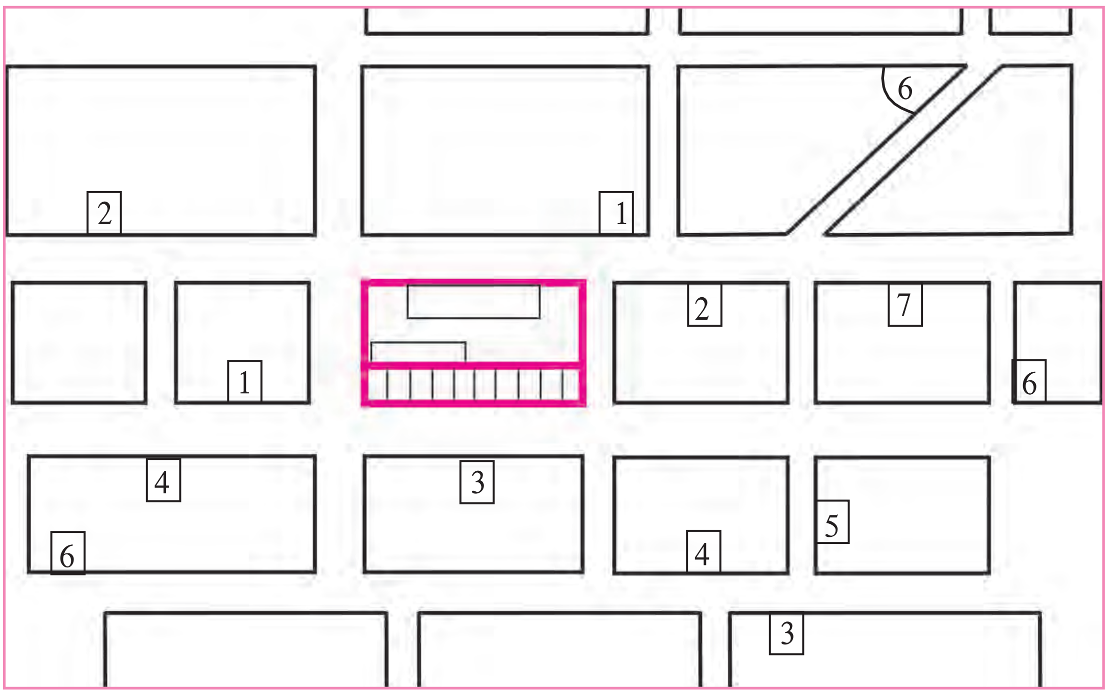
آیئے ذرا یاد کریں

آپ کو نقشہ بناتے وقت راستے پر فاصلہ مناسب پیمانے میں دکھانا ہے۔ جیسے میٹر 100 = 1 سم یا میٹر 50 = 1 سم۔

کیا آپ نے مثلث کی خصوصیت پر غور کیا؟ مثلث کے بڑے زاویے کے مقابل کا ضلع بڑا ہوتا ہے۔ ذرا یاد کیجیے۔

عملی کام :

آپ کے اسکول یا گھر کے اطراف کے 500 میٹر علاقہ کے راستے کا نقشہ تیار کرنا ہے۔ راستے کے دو مقام کے درمیان کا فاصلہ آپ کیسے ناپیں گے؟ عام طور پر 2 میٹر فاصلہ، آپ کتنے قدم چل کر طے کرتے ہیں؟ وہ دیکھیے۔ فرض کیجیے، دو میٹر فاصلہ میں تین قدم چلا جائے، تب اس تناسب سے 90 قدم یعنی 60 میٹر، اس طرح فرضی طور پر مقام طے کیجیے۔ مختصراً، اطراف کے تمام راستوں پر چل کر آپ کو مختلف فاصلے طے کرنا ہوگا۔ بعد میں جہاں راستے ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں وہاں جو زاویہ بنتا ہے اس کی پیائش کا اندازہ لگائیے۔ راستے کی ناپی ہوئی لمبائی کے لیے مناسب پیمانہ لے کر نقشہ تیار کیجیے۔ اطراف کے دکانیں، چھوٹی دکانیں (ٹپریاں)، عمارتیں، بس اسٹینڈ، آٹو رکشا اسٹینڈ وغیرہ ظاہر کرنے کی کوشش کیجیے۔ ذیل میں نقشہ کا ایک نمونہ دیا ہوا ہے اور اس کی فہرست بھی دی ہوئی ہے۔



فہرست : 1. کتابوں کی دکان 2. بس اسٹینڈ 3. اسٹیشنری دکان 4. بینک
5. میڈیکل اسٹور 6. ہوٹل 7. سائیکل کی دکان

(1) ذیل میں دیے ہوئے کثیر متبادل سوالوں کے جواب میں سے صحیح جواب منتخب کیجیے۔

(i) ایک مثلث کے دو اضلاع 5 سم اور 1.5 سم ہوں تب مثلث کے تیسرے ضلع کی لمبائی .... نہیں ہوگی.

(A) 3.7 سم (B) 4.1 سم (C) 3.8 سم (D) 3.4 سم

(ii) $\triangle PQR$ میں جب $\angle R > \angle Q$ ہو تو .... ہوگا۔

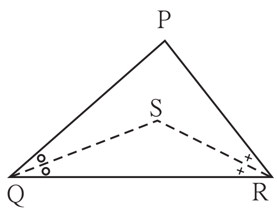
(A) $QR > PR$ (B) $PQ > PR$ (C) $PQ < PR$ (D) $QR < PR$

(iii) ΔTPQ میں $\angle T = 65^\circ$، $\angle P = 95^\circ$ ہو تب درج ذیل بیانات میں سے صحیح بیان کون سا ہے؟

(A) $PQ < TP$ (B) $PQ < TQ$ (C) $TQ < TP < PQ$ (D) $PQ < TP < TQ$

(2) $\triangle ABC$ متساوی الساقین مثلث ہے۔ جس میں $AB = AC$ ہے اور قطعہ BD اور CE دو وسطانیے ہیں تو دکھایئے کہ $BD = CE$

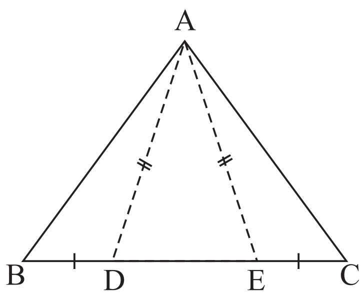
(3) $\triangle PQR$ میں اگر $PQ > PR$ ہے $\angle Q$ اور $\angle R$ کے ناصف ایک دوسرے کو نقطہ S پر قطع کرتے ہیں۔ تو دکھایئے کہ $SQ > SR$



شکل 3.58

(4) شکل 3.59 میں $\triangle ABC$ کے ضلع BC پر نقطہ D اور E نقاط اس طرح واقع ہیں کہ $BD = CE$، اسی طرح $AD = AE$ تو دکھایئے کہ

$$\triangle ABD \cong \triangle ACE$$

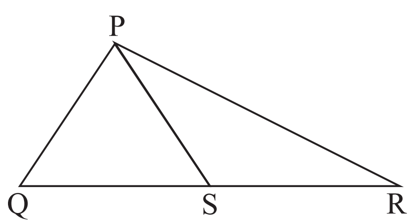


شکل 3.59

(5) شکل 3.60 میں $\triangle PQR$ کے ضلع QR پر نقطہ S کوئی ایک نقطہ ہے۔

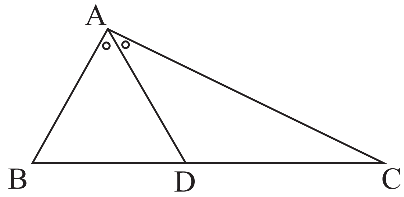
ثابت کیجیے کہ

$$PQ + QR + RP > 2PS$$



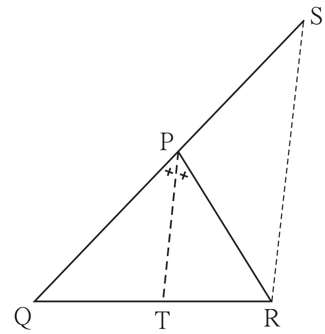
شکل 3.60

(6) شکل 3.61 میں $\triangle ABC$ کے $\angle BAC$ کا ناصف قطعہ BC کو نقطہ D پر قطع کرتا ہے۔ثابت کیجیے کہ $AB > BD$



شکل 3.61

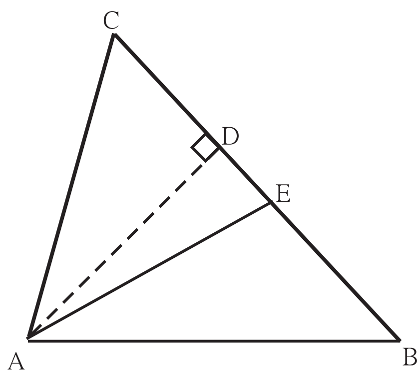
(7) شکل 3.62 میں قطعہ PT، یہ $\angle QPR$ کا ناصف ہے نقطہ R سے، قطعہ PT کے متوازی خط، شعاع QP کو نقطہ S پر قطع کرتا ہے۔تو ثابت کیجیے کہ $PS = PR$



شکل 3.62

(8) شکل 3.63 میں BC قطعہ $AD \perp$ قطعہ، قطعہ AE، یہ $\angle CAB$ کا ناصف ہے اور E – D – C ہو تو دکھایئے کہ

$$m\angle DAE = \frac{1}{2}(m\angle C - m\angle B)$$



شکل 3.63

غور کیجیے

ہم نے سیکھا کہ دو مثلث متشابہ زاویہ ہوں تب اُن کے نظیری اضلاع یکساں تناسب میں ہوتے ہیں۔دو ذو اربعۃ الاضلاع متشابہ زاویہ ہوں تب کیا ان کے نظیری اضلاع یکساں تناسب میں ہوتے ہیں؟

مختلف شکلیں بنا کر تصدیق کیجیے۔

اس خصوصیت کو دیگر کثیر الاضلاع سے متعلق جانچیے۔