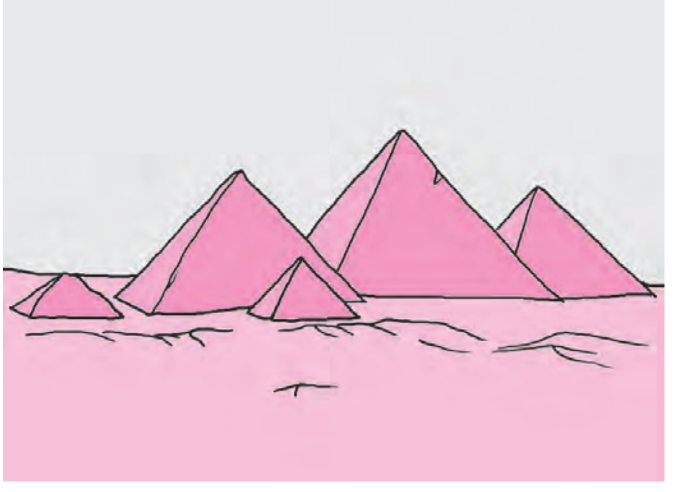
1 علم ہندسہ کے بنیادی تصورات Basic Concept of Geometry

آیئے، سیکھیں

- نقطہ، خط اور مستوی
- مشروط بیانات
- نقطہ کے محدد اور فاصلہ
- ثبوت
- درمیانیت



کیا آپ نے بازو کی تصویر پہچان لی؟

مصر کے اہرام کی تصویر ہے۔ 3000 قبل مسیح میں اتنی عظیم تعمیر پہلے کے لوگوں نے کس طرح کی ہوگی؟ فن تعمیر اور علم ہندسہ ان علوم میں ترقی ہوئے بغیر اس قسم کی تعمیر ناممکن ہے۔

علم ہندسہ (جیومیٹری) اس کے نام سے ہی اس کے علم کی ابتدا سمجھ میں آتی ہے۔ جیومیٹری یونانی لفظ 'Geo' یعنی زمین اور Metron معنی پیمائش۔ اس بنا پر زمین کی پیمائش کی ضرورت محسوس ہونے سے اس مضمون کی ابتدا ہوئی ایسا قیاس ہے۔

کئی ممالک میں علم ہندسہ کی ترقی مختلف زمانوں اور مختلف تعمیر کے لیے ہوئی۔ ایسی کہانی مشہور ہے کہ 'تھیلیس' قدیم یونانی ریاضی داں مصر میں جا کر اہرام کے سائے کی لمبائی ناپ کر متشابہ مثلثوں کی خصوصیت کا استعمال کر کے اہرام کی اونچائی معلوم کی تھی۔ ایسا قیاس کیا جاتا ہے کہ فیثا غورث بھی تھیلیس کا شاگرد تھا۔

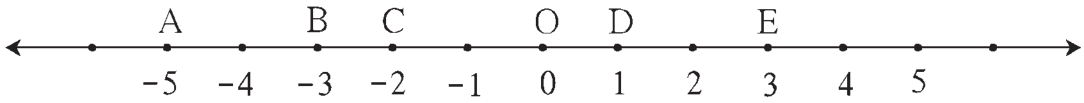
قدیم بھارتیوں کو بھی علم ہندسہ مضمون کا گہرا علم تھا۔ ویدک زمانہ میں بھارتی لوگ یدنیہ کنڈ کی تعمیر کے لیے علم ہندسہ کی خصوصیات کا استعمال کرتے تھے۔ دھاگے کی مدد سے کس طرح ناپا جاتا ہے اور مختلف شکل کس طرح بنانا چاہیے اس بات کا ذکر شلوستر میں ملتا ہے۔ بعد کے زمانے میں آریہ بھٹ، وراہ میر، برہم گپت، بھاسکر اچاریہ وغیرہ ریاضی دانوں نے اس مضمون میں قیمتی اضافہ کیا۔

آیئے سمجھ لیں

علم ہندسہ کے بنیادی تصورات : نقطہ ، خط اور مستوی۔ (Basic concept in Geometry : Point, line and Plane)

جس طرح ہم اعداد کی تعریف نہیں کرتے، اسی طرح نقطہ، خط اور مستوی کی تعریف نہیں کی جاتی۔ یہ علم ہندسہ کے بنیادی تصورات ہیں۔ خط اور مستوی نقاط کے سیٹ ہیں۔ خط یعنی مستقیم خط ہوتا ہے اسے ذہن میں رکھیے۔

ذیل کے عددی خط دیکھیے۔



شکل 1.1

یہاں نقطہ D عددی خط پر 1 ظاہر کرتا ہے۔عدد 1 کو نقطہ D کا محدد کہتے ہیں۔نقطہ B، عددی خط پر 3− عدد کو ظاہر کرتا ہے،اس لیے نقطہ B کا محدد 3− ہے۔اسی طرح نقطہ A کا محدد 5− اور E کا محدد 3 ہے۔

نقطہ D سے نقطہ E، 2 اکائی فاصلہ پر واقع ہے یعنی E اور D ان دو نقاط کے درمیان فاصلہ 2 اکائی ہے۔ یہاں ہم اکائی ناپ کر دو نقاط کے درمیان کا فاصلہ معلوم کر سکتے ہیں۔اس عددی خط پر نقطہ A اور B کے درمیان فاصلہ 2 اکائی ہے۔

اب نقاط کے محددین کا استعمال کر کے فاصلہ کس طرح معلوم کیا جاتا ہے، دیکھیں گے۔

دو نقاط کے درمیان فاصلہ معلوم کرنا یعنی ان نقاط کے محددین میں سے بڑے محدد سے چھوٹا محدد تفریق کرنا۔

نقطہ D کا محدد 1 ہے۔ E کا محدد 3 ہے اور ہم جانتے ہیں کہ $3 > 1$

اس لیے نقطہ E اور D کے درمیان فاصلہ $3-1$ یعنی 2 ہے۔

نقطہ E اور D کے درمیان فاصلہ کو $d(E,D)$ کی صورت میں لکھا جاتا ہے۔یہ فاصلہ یعنی $l\,(ED)$، قطعہ ED کی لمبائی ہے۔

$$d\,(E, D) = 3 - 1 = 2$$
$$\therefore\ l(ED) = 2$$
$$d\,(E, D) = l(ED) = 2$$
اسی طرح، $d\,(E, D) = 2$

$$d\,(C, D) = 1 - (-2)$$
$$= 1 + 2 = 3$$
$$\therefore\ d\,(C, D) = l(CD) = 3$$
اسی طرح، $d\,(C, D) = 3$

اب $d(A,B)$ معلوم کریں گے۔

نقطہ A کا محدد 5− ہے،نقطہ B کا محدد 3− ہے اور $-3 > -5$

$$\therefore\ d\,(A, B) = -3 - (-5) = -3+5 = 2$$ ... (یہ مثبت عدد ہے)

اوپر دی ہوئی تمام مثالوں سے سمجھ میں آتا ہے کہ دو مختلف نقاط کے درمیان فاصلہ مثبت عدد ہوتا ہے۔اسی طرح اگر P، Q ایک ہی نقطہ ہو تو $d(P, Q) = 0$ اسے دھیان میں دکھیے۔

اسے دھیان میں رکھیں

- دو نقاط کے درمیان فاصلہ،ان کے محددین کے بڑے محدد میں سے چھوٹا محدد تفریق کرنے پر حاصل ہوتا ہے۔
- کسی بھی دو نقاط کے درمیان کا فاصلہ غیر منفی حقیقی عدد ہوتا ہے۔

آیئے سمجھ لیں

درمیانیت (Betweenness)

اگر P,Q,R ہم خطی نقاط ہوں تو ذیل میں دی ہوئی اشکال کے مطابق تین صورتیں ممکن ہوسکتی ہیں۔

شکل 1.2

(i) نقطہ P، نقاط R اور Q کے درمیان ہے۔

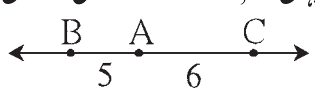
(ii) نقطہ R، نقاط P اور Q کے درمیان ہے۔

(iii) نقطہ Q، نقاط P اور R کے درمیان ہے۔

اگر $d(P, Q) + d(Q, R) = d(P, R)$ ہو تو اس طرح کہا جاتا ہے کہ نقطہ Q، نقاط P اور R کے درمیان واقع ہے اور اسے P – Q – R سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

مثال (1) ایک عددی خط پر A،B اور C نقاط اس طرح واقع ہیں کہ $d(A, B) = 5$، $d(B, C) = 11$ اور $d(A, C) = 6$ ہو تو بتایئے کون سا نقطہ دیگر دو نقاط کے درمیان واقع ہے؟

حل : یہاں A،B اور C نقاط میں سے کون سا نقطہ دیگر دو نقاط کے درمیان ہے، اسے ہم ذیل کے مطابق بتا سکتے ہیں۔



شکل 1.3

$d(B,C) = 11$ ... (I)

$d(A,B) + d(A,C) = 5+6 = 11$ ... (II)

$\therefore\ d(B, C) = d(A, B) + d(A, C)$ ... [(I) اور (II) کی رُو سے]

اس لیے نقطہ A، نقاط B اور C کے درمیان واقع ہے۔

مثال (2) ایک راستے پر مستقیم خط میں U , V اور A شہر واقع ہیں۔ U اور A شہروں کے درمیان فاصلہ 215 کلومیٹر، V اور A شہر کے درمیان فاصلہ 140 کلومیٹر اور U اور V کے درمیان فاصلہ 75 کلومیٹر ہے۔ تو بتایئے کون سا شہر کن دو شہروں کے درمیان واقع ہے؟

حل : $d(U,A) = 215;\quad d(V,A) = 140;\quad d(U,V) = 75$

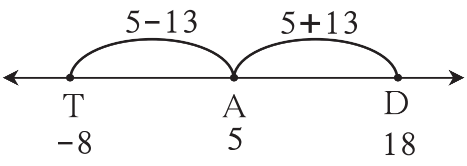
$$d(U,V) + d(V,A) = 75 + 140 = 215;\quad d(U,A) = 215$$

$$\therefore\ d(U,A) = d(U,V) + d(V,A)$$

اس لیے V شہر، U اور A شہروں کے درمیان واقع ہے۔

مثال (3) ایک عددی خط پر نقطہ A کا محدد 5 ہے۔اسی عددی خط پر نقطہ A سے 13 اکائی فاصلہ پر واقع نقطہ کا محدد معلوم کیجیے۔

حل : عددی خط پر نقطہ A سے 13 اکائی فاصلہ پر شکل کے مطابق نقطہ A سے بائیں جانب نقطہ T اور دائیں جانب نقطہ D اس طرح دو نقاط لیجیے۔



شکل 1.4

نقطہ A کے بائیں جانب نقطہ T کا محدد $= 5 - 13 = -8$

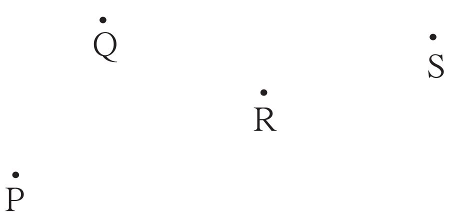
نقطہ A کے دائیں جانب نقطہ D کا محدد $= 5 + 13 = 18$

اس لیے نقطہ A سے 13 اکائی فاصلہ پر واقع نقاط کے محدد 8− اور 18 ہوں گے۔

تصدیق کیجیے۔ $d(A,D) = d(A,T) = 13$

عملی کام :

(1) نقاط B, A اور C ہم خطی نقاط ہیں؟ رسی کھینچ کر تصدیق کیجیے کہ وہ ایک خط میں واقع ہوں تو کون سا نقطہ دیگر دو نقاط کے درمیان ہے۔ اسے لکھیے۔



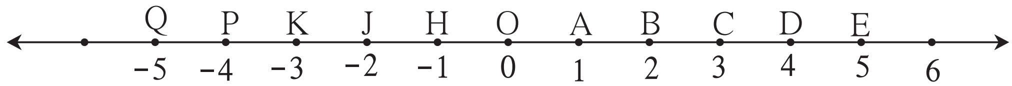
(2) بازو میں دی ہوئی شکل میں R, Q, P اور S چار نقاط دیئے ہوئے ہیں۔ان میں سے کون سے تین نقاط ہم خطی ہیں اور کون سے تین نقاط ہم خطی نہیں ہیں۔ جانچ کیجیے۔ جو تین نقاط ہم خطی ہیں ان کی درمیانیت لکھیے۔

(3) قواعد کے لیے طلبہ کو قطار میں کھڑے رہنے کے لیے کہا گیا ہے۔ ہر قطار کے طلبہ مستقیم خط میں ہیں یا نہیں کیسے آزمائیں گے؟

(4) روشنی کی شعاعیں خط مستقیم میں سفر کرتی ہیں یہ آپ کیسے تصدیق کریں گے؟ گذشتہ جماعت میں آپ نے جو سائنسی تجربہ کیا ہے اسے یاد کیجیے۔

مشقی سیٹ 1.1

(1) ذیل میں دیے ہوئے عددی خط کی مدد سے ذیل کے فاصلے معلوم کیجیے۔



شکل 1.5

(i) $d(B,E)$ (ii) $d(J, A)$ (iii) $d(P, C)$ (iv) $d(J, H)$

(v) $d(K, O)$ (vi) $d(O, E)$ (vii) $d(P, J)$ (viii) $d(Q, B)$

(2) نقطہ A کا محدد x اور نقطہ B کا محدد y ہے۔تو ذیل کے تعلق سے $d(A, B)$ معلوم کیجیے۔

(i) $x = 1, y = 7$ (ii) $x = 6, y = -2$ (iii) $x = -3, y = 7$

(iv) $x = -4, y = -5$ (v) $x = -3, y = -6$ (vi) $x = 4, y = -8$

(3) ذیل میں دی ہوئی معلومات کے مطابق کون سا نقطہ دیگر دو نقاط کے درمیان ہے طے کیجیے۔ دیے ہوئے نقاط غیر ہم خطی ہوں تو اسے بھی لکھیے۔

(i) $d(P, R) = 7,$ $d(P, Q) = 10,$ $d(Q, R) = 3$

(ii) $d(R, S) = 8,$ $d(S, T) = 6,$ $d(R, T) = 4$

(iii) $d(A, B) = 16,$ $d(C, A) = 9,$ $d(B, C) = 7$

(iv) $d(L, M) = 11,$ $d(M, N) = 12,$ $d(N, L) = 8$

(v) $d(X, Y) = 15,$ $d(Y, Z) = 7,$ $d(X, Z) = 8$

(vi) $d(D, E) = 5,$ $d(E, F) = 8,$ $d(D, F) = 6$

(4) ایک عددی خط پر نقاط A، B اور C اس طرح واقع ہیں کہ $d(A,C) = 10$، $d(C,B) = 8$ تو $d(A,B)$ معلوم کیجیے۔تمام ممکنات پر غور کیجیے۔

(5) X، Y اور Z ہم خطی نقاط ہیں۔ $d(X, Y) = 17$ ، $d(Y, Z) = 8$ ہو تو $d(X, Z)$ معلوم کیجیے۔

(6) شکل بنا کر ذیل کے سوالات کے جوابات لکھیے۔

(i) اگر A – B – C اور $l(AC) = 11$ ، $l(BC) = 6.5$ ہو تو $l(AB) = ?$

(ii) اگر R – S – T اور $l(ST) = 3.7$ ، $l(RS) = 2.5$ ہو تو $l(RT) = ?$

(iii) اگر X – Y – Z اور $l(XZ) = 3\sqrt{7}$ ، $l(XY) = \sqrt{7}$ ہو تو $l(YZ) = ?$

(7) تین غیر ہم خطی نقاط سے کون سی شکل بنتی ہے؟

آیئے سمجھ لیں

نویں جماعت کے ریاضی حصہ 1 میں سیٹ باب میں ہم نے اجتماعی سیٹ ، انقطاعی سیٹ کا مطالعہ کیا ہے۔اس کا استعمال کر کے قطعہ خط، شعاع اور خط کی وضاحت نقاط کے سیٹ کی صورت میں کریں گے۔

(1) قطعہ خط **(Line Segment)** : نقطہ A نقطہ B اور ان دونوں نقاط کے درمیان کے تمام نقاط کا اجتماعی سیٹ قطعہ خط AB ہوتا ہے۔

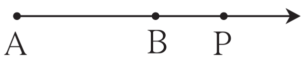
شکل 1.6

قطعہ خط AB کو مختصراً قطعہ AB لکھا جاتا ہے۔قطعہ (AB) کو قطعہ (BA) بھی کہتے ہیں۔نقطہ A اور نقطہ B یہ قطعہ AB کے اختتامی نقاط ہیں۔

قطعہ خط کے اختتامی نقاط کے درمیان کے فاصلہ کو قطعہ خط کی لمبائی کہتے ہیں۔ $l(AB) = d(A,B)$ ، $l(AB) = 5$ کو $AB = 5$ بھی لکھتے ہیں۔

(2) شعاع **AB (Ray AB)**

فرض کیجیے A اور B دو مختلف نقاط ہیں۔قطعہ AB پر واقع نقاط اور A – B – P ایسے تمام نقاط P کا اجتماعی سیٹ شعاع AB ہے۔یہاں نقطہ A کو شعاع AB کا مبداء کہتے ہیں۔



شکل 1.7

(3) خط **AB : (Line AB)**

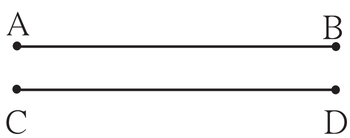
شعاع AB کے نقاط کا سیٹ اور اس کے مخالف شعاع کے نقاط کا سیٹ مل کر جو اجتماعی سیٹ بنتا ہے وہ خط AB کے نقاط کا سیٹ ہوتا ہے۔

قطعہ AB کے نقاط کا سیٹ، خط AB کے نقاط کے سیٹ کا ضمنی سیٹ ہوتا ہے۔

(4) متماثل قطعاتِ خط **(Congruent Segments)**

اگر دیے ہوئے دو قطعات کی لمبائیاں مساوی ہوں تو وہ قطعات متماثل ہوتے ہیں۔

اگر $l(AB) = l(CD)$ ہو تو قطعہ CD ≅ قطعہ AB



شکل 1.8

(5) قطعات کی متماثلت کی خصوصیات **(Properties of Congruent Segment)**

(i) عکسی خصوصیت (Reflexivity) ہر قطعہ خط،خود کے متماثل ہوتا ہے۔ قطعہ AB ≅ قطعہ AB

(ii) تشاکلی خاصیت (Symmetry) اگر قطعہ CD ≅ قطعہ AB ہو تو قطعہ AB ≅ قطعہ CD

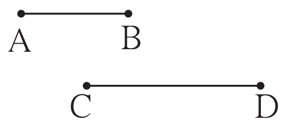
(iii) انتقالی عبوری خاصیت (Transitivity) اگر قطعہ CD ≅ قطعہ AB اور قطعہ EF ≅ قطعہ CD ہو تو قطعہ EF ≅ قطعہ AB۔

(6) قطعہ کا وسطی نقطہ **(Mid point of a Segment)**

اگر A – M – B اور قطعہ MB ≅ قطعہ AM ہو تو نقطہ M، قطعہ AB کا وسطی نقطہ کہلاتا ہے۔ہر قطعہ خط کا ایک اور صرف ایک ہی وسطی نقطہ ہوتا ہے۔

شکل 1.9

(7) قطعات خط کا موازنہ **(Comparison of Segments) :**



شکل 1.10

قطعہ AB کی لمبائی قطعہ CD سے کم ہو، یعنی

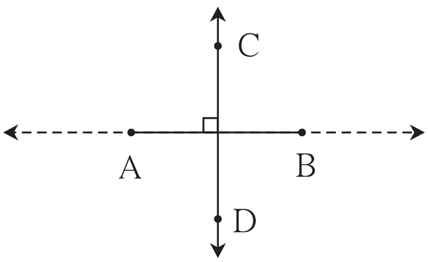
اگر $l(AB) < l(CD)$ ہو تو قطعہ $CD >$ قطعہ AB یا

AB قطعہ $< CD$ قطعہ اس طرح لکھتے ہیں۔

قطعات کا چھوٹا - بڑا پن اُن کی لمبائی پر منحصر ہوتا ہے۔

(8) قطعات یا شعاعوں کی عمودیت

(Perpendicularity of Segments or rays) :

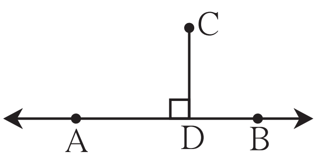


شکل 1.11

دو قطعات، دو شعاعیں یا ایک شعاع اور ایک قطعہ خط انھیں شامل کرنے والے خط اگر ایک دوسرے پر عمود ہوتے ہیں تو وہ دو قطعہ خط، وہ دو شعاعیں یا ایک شعاع اور ایک قطعہ خط ایک دوسرے پر عمود ہوتے ہیں۔

شکل 1.11 میں خط $CD \perp$ قطعہ AB، شعاع $CD \perp$ قطعہ AB

(9) نقطہ کا خط سے فاصلہ **(Distance of a point from a line)**



شکل 1.12

اگر خط $AB \perp CD$ قطعہ اور نقطہ D، خط AB پر واقع ہو تو CD قطعہ کی لمبائی کو نقطہ C کا خط AB سے فاصلہ کہتے ہیں۔ نقطہ D کو عمود کا پایہ (Foot) کہتے ہیں۔

اگر $l(CD) = a$ ہو تو نقطہ C، خط AB سے a فاصلہ پر ہے۔

مشقی سیٹ 1.2

1. ذیل کی جدول میں عمودی خط پر واقع نقاط کے محدد دیے ہوئے ہیں۔ اس بنا پر ذیل کے قطعہ خط متماثل ہیں یا نہیں طے کیجیے۔

نقطہ	A	B	C	D	E
محدد	-3	5	2	-7	9

(i) قطعہ AB اور قطعہ DE (ii) قطعہ BC اور قطعہ AD (iii) قطعہ BE اور قطعہ AD

2. نقطہ M، قطعہ AB کا وسطی نقطہ ہے اور $AB = 8$ ہو تو $AM = ?$

3. نقطہ P، قطعہ CD کا وسطی نقطہ ہے اور $CP = 2.5$ ہو تو قطعہ CD کی لمبائی معلوم کیجیے۔

4. اگر $AB = 5$ سم، $BP = 2$ سم اور $AP = 3.4$ سم ہو تو قطعات خط کا چھوٹا بڑا پن طے کیجیے۔

(5) شکل 1.13 کی بنا پر ذیل کے سوالات کے جوابات لکھیے۔

شکل 1.13

(i) شعاع RP، کی مخالف شعاع کا نام لکھیے۔

(ii) شعاع PQ اور شعاع RP کا انقطاعی سیٹ لکھیے۔

(iii) قطعہ PQ اور قطعہ QR کا اجتماعی سیٹ لکھیے۔

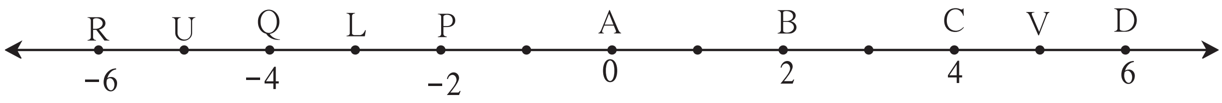
(iv) قطعہ QR کن شعاعوں کا ضمنی سیٹ ہے۔

(v) مبدا، R کی دو مخالف شعاعوں کی جوڑیاں لکھیے۔

(vi) مبدا، S کی کوئی دو مخالف شعاعوں کے نام لکھیے۔

(vii) شعاع SP اور شعاع ST کا انقطاعی سیٹ لکھیے۔

(6) ذیل کی شکل 1.14 کی بنا پر سوالات کے جوابات لکھیے۔



شکل 1.14

(i) نقطہ B سے ہم فاصلہ واقع نقاط کون سے ہیں۔

(ii) نقطہ Q سے ہم فاصلہ نقاط کی ایک جوڑی لکھیے۔

(iii) d(U, V)، d(P, C)، d(V, B)، d (U,L) معلوم کیجیے۔

آیئے سمجھ لیں

مشروط بیان اور عکس (Conditional Statements and Converse)

جو بیان 'جب– تب' یا 'اگر–تو' کی صورت میں لکھے جاتے ہیں انھیں مشروط بیان کہتے ہیں۔ مشروط بیان میں جب سے شروع ہونے والے بیان کو مقدم (دیا ہوا ہے) اور تب سے شروع ہونے والے بیان کو 'تالی' (جوابی) کہتے ہیں۔

مثلاً : 'معین کے وتر ایک دوسرے کے عمودی ناصف ہوتے ہیں' یہ بیان ہے۔

مشروط بیان : جب دیا ہوا ذواربعۃ الاضلاع معین ہو تو اس کے وتر ایک دوسرے کے عمودی ناصف ہوتے ہیں۔ اگر کوئی مشروط بیان دیا گیا ہو اور اس کے 'مقدم' اور 'تالی' حصہ کو تبدیل کر دیا گیا ہو تو حاصل ہونے والا نیا بیان اصل بیان کا عکس بیان (Converse) کہلاتا ہے۔

کوئی مشروط بیان صحیح ہو تو ضروری نہیں کہ اس کا عکس بیان بھی صحیح ہی ہو۔ ذیل کی مثال دیکھیے۔

مشروط بیان : جب کوئی ذواربعۃ الاضلاع معین ہوتو اس کے وتر ایک دوسرے کے عمودی ناصف ہوتے ہیں۔

عکس بیان : جب کسی ذواربعۃ الاضلاع کے وتر ایک دوسرے کے عمودی ناصف ہوں تب وہ ذواربعۃ الاضلاع معین ہوتا ہے۔

اس مثال میں اصل بیان اور اس کے عکس دونوں صحیح ہیں۔

مشروط بیان : اگر کوئی عدد مفرد عدد ہو تو، وہ عدد جفت یا طاق ہوتا ہے۔

عکس بیان : اگر کوئی عدد جفت یا طاق عدد ہو تو وہ مفرد عدد ہوتا ہے۔

اس میں اصل بیان درست ہے مگر عکس بیان درست نہیں۔

آیئے سمجھ لیں

ثبوت (Proofs)

ہم نے زاویہ، مثلث، ذواربعۃ الاضلاع وغیرہ شکلوں کی کئی خصوصیات کا مطالعہ کیا ہے۔ ان خصوصیات کو ہم نے تجرباتی طریقے سے سیکھا ہے۔ اس جماعت میں ہم 'علم ہندسہ' مضمون کو دوسرے نقطۂ نظر سے دیکھنے والے ہیں۔ اس نقطۂ نظر کا سہرا تیسری صدی قبل مسیح کے عظیم یونانی ریاضی داں اقلیدس کے سر جاتا ہے۔ علم ہندسہ کی اس زمانے میں جو معلومات تھی، اسے انھوں نے اچھے ڈھنگ سے مربوط کر کے جمع کیا۔ اس میں باضابطگی پیدا کی۔ انھوں نے خاص طور پر کچھ کلیات یا منظور بیانات کو مفروضہ (Postulate) یا تسلیم کردہ بیان کے طور پر قبول کیا، اور اس کی بنیاد پر منطقی دلائل سے نئی خصوصیت ثابت کر سکتے ہیں۔ ثابت کی ہوئی خصوصیات کو مسئلے (Theorems) کہتے ہیں۔

اقلیدس

اقلیدس کے پیش کردہ مفروضات میں سے کچھ مفروضے ذیل میں دیے ہوئے ہیں۔

(1) ایک نقطہ سے بے شمار خطوط گزرتے ہیں۔

(2) دو متفرق نقاط سے ایک اور صرف ایک خط گزرتا ہے۔

(3) کسی بھی نقطہ کو مرکز مان کر دیے ہوئے نصف قطر کا دائرہ کھینچا جا سکتا ہے۔

(4) تمام قائمہ زاویے ایک دوسرے کے متماثل ہوتے ہیں۔

(5) دو خطوط اور ان کا ایک تقاطع ہوں تو تقاطع کے ایک جانب بننے والے داخلہ زاویوں کی جمع دو قائمہ زاویوں سے کم ہو تو وہ خط اسی سمت بڑھانے پر ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں۔

ان میں سے کچھ مفروضات کی ہم نے عملی طور پر تصدیق کر چکے ہیں۔

کسی خصوصیت کا منطقی ثبوت دے سکیں تو اس خصوصیت کو صحیح مان لیا جاتا ہے۔ اس کے لیے دی ہوئی منطقی دلیل کو اس خصوصیت یعنی اس مسئلہ کا ثبوت (Proof) کہتے ہیں۔

کوئی مشروط بیان صحیح ہے ایسا ہمیں ثابت کرنا ہو تب اس کے 'مقدم' حصہ کے بیان کو 'دیا ہوا ہے' بیان کہتے ہیں۔ اور تالی حصہ کو 'ثابت کرنا ہے' کہتے ہیں۔

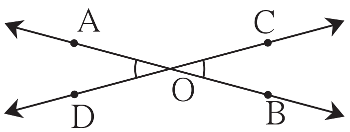
ثبوت کی راست ثبوت اور بالواسطہ ثبوت اس طرح دو قسمیں ہیں۔

ایک دوسرے کو قطع کرنے والے دو خطوط سے بنے ہوئے زاویوں کی خصوصیت کا راست ثبوت دیں گے۔

خصوصیت : دو خطوط ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں تب متقابلہ زاویے متماثل ہوتے ہیں۔

دیا ہوا ہے : خط AB اور خط CD ایک دوسرے کو نقطہ O پر قطع کرتے ہیں۔

A – O – B ، C – O – D



شکل 1.15

ثابت کرنا ہے : (i) $\angle AOC = \angle BOD$

(ii) $\angle BOC = \angle AOD$

ثبوت :

$\angle AOC + \angle BOC = 180^\circ$ ... (خطی جوڑی کے زاویے) ... (I)

$\angle BOC + \angle BOD = 180^\circ$ ... (خطی جوڑی کے زاویے) ... (II)

$\angle AOC + \angle BOC = \angle BOC + \angle BOD$ ... [بیان (I) اور (II) کی رو سے]

$\therefore \angle AOC = \angle BOD$ ... ($\angle BOC$ کا اخراج کرکے)

اسی طرح $\angle AOD = \angle BOC$ ثابت کیا جا سکتا ہے۔

بالواسطہ ثبوت (Indirect Proof)

اس طریقہ میں شروع میں تالی بیان غلط تسلیم کیا جاتا ہے۔اس کے سہارے صرف منطقی دلائل اور پہلے سے قبول شدہ صحیح بیانات کے سہارے مرحلہ وار ایک نتیجہ تک پہنچتے ہیں۔ یہ نتیجہ معلوم شدہ صحیح خصوصیت یا 'تالی' بیان سے، یعنی دی ہوئی معلومات کے برخلاف ہوتا ہے۔اس لیے تالی بیان غلط ہے، ایسا سمجھنا غلط ہے ایسا نتیجہ نکالتے ہیں۔یعنی تالی بیان صحیح ہے یہ قبول کیا جاتا ہے۔درج ذیل مثال کا مطالعہ کیجیے۔

بیان : دو سے بڑا مفرد عدد، طاق عدد ہوتا ہے۔

مشروط بیان : اگر p ، 2 سے بڑا مفرد عدد ہو تو p طاق عدد ہوتا ہے۔

دیا ہوا ہے : اگر p ، 2 سے بڑا مفرد عدد ہے۔یعنی p کا 1 اور p یہی دو عاد ہیں۔

ثابت کرنا ہے : p، طاق عدد ہے۔

ثبوت : فرض کیجیے p طاق عدد نہیں ہے۔

یعنی p جفت عدد ہے۔

اس لیے 2 ، p کا عاد ہے۔ ... (I)

لیکن p ، 2 سے بڑا مفرد عدد ہے ... (دیا ہوا ہے)

اس لیے p کے 1 اور p یہی دو عاد ہیں۔ ... (II)

بیان (I) اور (II) سے 'دیا ہوا ہے' کے متضاد آتا ہے۔

اس لیے فرض کیا ہوا بیان غلط ہے۔

اس لیے p ، 2 سے بڑا مفرد عدد ہو تو وہ طاق عدد ہوتا ہے، ثابت ہوا۔

مشقی سیٹ 1.3

.1 ذیل کے بیانات ''اگر ۔تب'' کی صورت میں لکھیے ۔

(i) متوازی الاضلاع کے مقابل کے زاویے متماثل ہوتے ہیں۔

(ii) مستطیل کے وتر متماثل ہوتے ہیں۔

(iii) متساوی الساقین مثلث میں راس اور قاعدے کے وسطی نقطہ کو ملانے والا قطعہ خط قاعدے پر عمود ہوتا ہے۔

.2 ذیل کے بیانات کا عکس بیان لکھیے ۔

(i) دو متوازی خطوط اور ان کا تقاطع دیا جائے تو حاصل ہونے والے متبادلہ زاویے متماثل ہوتے ہیں۔

(ii) دو خطوط کو ایک تقاطع سے قطع کریں تو داخلہ زاویوں کی ایک جوڑی متمم ہو تو وہ خطوط متوازی ہوتے ہیں۔

(iii) مستطیل کے وتر متماثل ہوتے ہیں۔

مجموعہ سوالات 1

.1 ذیل کے کثیر متبادل سوالوں کے جواب میں سے صحیح متبادل منتخب کیجیے۔

(i) ہر قطعہ خط کے کتنے وسطی نقاط ہوتے ہیں؟

(A) صرف ایک (B) دو (C) تین (D) کئی

(ii) دو متفرق خطوط ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں تب ان کے انقطاعی سیٹ میں کتنے نقاط ہوتے ہیں؟

(A) بے شمار (B) دو (C) ایک (D) ایک بھی نہیں

(iii) تین مختلف نقاط کو شامل کرنے والے کتنے خطوط ہوتے ہیں؟

(A) دو (B) تین (C) ایک یا تین (D) چھے

(iv) نقطہ A کا محدد -2 اور نقطہ B کا محدد 5 ہو تو $d(A, B) = ?$

(A) -2 (B) 5 (C) 7 (D) 3

(v) اگر P−Q−R، $d(P, Q) = 2$، $d(P, R) = 10$ ہو تو $d(Q, R) = ?$

(A) 12 (B) 8 (C) $\sqrt{96}$ (D) 20

.2 عددی خط پر P, Q, R نقاط کے محدد بالترتیب 3 , -5 اور 6 ہیں۔تو ذیل کے بیانات صحیح ہیں یا نہیں لکھیے۔

(i) $d(P,Q) + d(Q,R) = d(P,R)$ (ii) $d(P,R) + d(R,Q) = d(P,Q)$

(iii) $d(R,P) + d(P,Q) = d(R,Q)$ (iv) $d(P,Q) - d(P,R) = d(Q,R)$

.3 ذیل میں کچھ نقاط کے جوڑیوں کے محدد دیے گئے ہیں۔اس بنا پر ہر جوڑی کے درمیان کا فاصلہ معلوم کیجیے۔

(i) 3, 6 (ii) -9, -1 (iii) -4, 5 (iv) 0, -2

(v) $x + 3$, $x - 3$ (vi) -25, -47 (vii) 80, -85

.4 عددی خط پر نقطہ P کا محدد 7 – ہے تو نقطہ P سے 8 اکائی فاصلہ پر واقع نقاط کے محدد معلوم کیجیے۔

.5 دی ہوئی معلومات کے لحاظ ذیل کے سوالات کے جوابات لکھیے۔

(i) اگر A–B–C، d(A, C) = 17، d(B, C) = 6.5 ہو تو d(A, B) = ?

(ii) اگر P–Q–R، d(P, Q) = 3.4، d(Q, R) = 5.7 ہو تو d(P, R) = ?

.6 عددی خط پر نقطہ A کا محدد 1 ہے نقطہ A سے 7 اکائی فاصلہ پر واقع نقاط کے محدد معلوم کیجیے۔

.7 ذیل کے بیانات مشروط صورت میں لکھیے۔

(i) ہر معین مربع ہوتا ہے۔

(ii) خطی جوڑی کے زاویے ایک دوسرے کے متمم ہوتے ہیں۔

(iii) مثلث تین قطعہ خط سے بنی ہوئی شکل ہوتی ہے۔

(iv) صرف دو عادو والے عدد کو مفرد عدد کہتے ہیں۔

.8 ذیل کے بیان کے عکس بیان لکھیے۔

(i) اگر کسی کثیر الاضلاع کے زاویوں کی پیمائشوں کا مجموعہ °180 ہو تو وہ شکل مثلث ہوتی ہے۔

(ii) دو زاویوں کی پیمائشوں کا مجموعہ °90 ہو تو وہ ایک دوسرے کے مکملہ زاویہ ہوتے ہیں۔

(iii) دو متوازی خطوط اور تقاطع کے قطع کرنے سے بننے والے نظیری زاویے متماثل ہوتے ہیں۔

(iv) کسی عدد کے ہندسوں کا مجموعہ 3 سے تقسیم ہوتا ہو تو وہ عدد 3 سے تقسیم پذیر ہے۔

.9 مقابل کے بیانات میں 'دیا ہوا ہے' اور 'ثابت کرنا ہے' بیان لکھیے۔

(i) اگر مثلث کے تینوں اضلاع متماثل ہوں تو اس کے تینوں زاویے متماثل ہوتے ہیں۔

(ii) متوازی الاضلاع کے وتر ایک دوسرے کی تنصیف کرتے ہیں۔

.10 ذیل کے بیانات کے لیے نامزدہ شکل بنا کر اس بنا پر 'دیا ہوا ہے' اور 'ثابت کرنا ہے'، لکھیے۔

(i) دو متساوی الاضلاع مثلث، متشابہ مثلث ہوتے ہیں۔

(ii) اگر خطی جوڑی کے زاویے متماثل ہوں تو اس کا ہر زاویہ قائمہ زاویہ ہوتا ہے۔

(iii) مثلث کے دو ضلعوں پر کھینچے ہوئے ارتفاع اگر متماثل ہوں تو وہ دونوں ضلعے متماثل ہوتے ہیں۔

❑❑❑