4 نسبت اور تناسب Ratio and Proportion

آیئے، سیکھیں

- نسبت
- نسبت کی خصوصیات
- مساوی نسبتوں پر عمل
- مساوی نسبتوں کا مسئلہ
- مسلسل تناسب
- نسبت میں k کا طریقہ

آیئے ذرا یاد کریں

ہم گزشتہ جماعت میں نسبت اور تناسب کا مطالعہ کر چکے ہیں۔اس پر مبنی مثالیں حل کر چکے ہیں۔

مثال : ومل کے بنائے ہوئے روا کے لڈو بڑے لذیذ ہوتے ہیں۔وہ ایک پیالی گھی، تین پیالی روا اور دو پیالی شکر لے کر لڈو بناتی ہے۔

یہاں روا اور شکر کا تناسب $3 : 2$ یا $\frac{3}{2}$ ہے۔

اگر لڈو کے لیے 12 پیالی روا لیں تو شکر کتنی درکار ہوگی؟

فرض کریں x پیالی شکر درکار ہوگی۔اس بناء پر $\frac{12}{x} = \frac{3}{2}$

$\therefore \quad 3x = 24 \quad ; \quad \therefore \quad x = 8$

یعنی 12 پیالی روا لے کر لڈو بنانے کے لیے 8 پیالی شکر درکار ہوگی۔

اس مثال کو ذیل کے مطابق بھی حل کر سکتے ہیں۔

روا $3k$ پیالی ہو تب شکر $2k$ پیالی درکار ہوگی۔کیونکہ $\frac{3}{2} = \frac{3k}{2k}$

یہاں , $3k = 12 \quad ; \quad \therefore \quad k = 4 \quad , \quad \therefore \quad 2k = 8$

اس لیے 8 پیالی شکر درکار ہوگی۔

آیئے سمجھ لیں

نسبت اور تناسب Ratio and proportion

دو اعداد کی نسبت کے تصور کو تین یا زائد اعداد کے لیے وسعت دے سکتے ہیں۔لڈوؤں کی مثال دیکھیے۔

گھی، روا اور شکر کا تناسب $1 : 3 : 2$ ہے۔

یہاں گھی اور روا کی نسبت $1 : 3$ اور روا اور شکر کا نسبت $3 : 2$ ہے۔یہ معلومات یکساں پیمانے میں دی ہوئی ہے۔

گھی $k = 1k$ پیالی، روا $3k$ پیالی اور شکر $2k$ پیالی فرض کریں گے۔

اب 12 پیالی روا ہوگا تو لڈوؤں کے لیے کتنی پیالی گھی اور کتنی پیالی شکر درکار ہوگی؟ معلوم کر سکتے ہیں۔

کیونکہ $3k = 12$، $\therefore \quad k = 4$ اور $2k = 8$ یعنی 4 پیالی گھی اور 8 پیالی شکر درکار ہوگی۔

یہی تصور چار اور زائد امور کے تناسب کے لیے بھی استعمال کرسکتے ہیں۔

اگر a، b، c، d یہ چار اعداد کا تناسب 4 : 7 : 3 : 2 ہو تب وہ اعداد بالترتیب $2m$ ، $3m$، $7m$، $4m$ فرض کریں گے اور دی ہوئی معلومات کا استعمال کرکے m کی قیمت معلوم کریں گے۔ مثال میں ان چار اعداد کی جمع 48 دی ہو تب وہ چار اعداد معلوم کریں گے۔

$$2m + 3m + 7m + 4m = 16\,m = 48$$

$$\therefore \quad m = 3$$

$\therefore \quad 2m = 6 \;,\; 3m = 9 \;,\; 7m = 21 \;,\; 4m = 12$ ... (اعداد حاصل ہوتے ہیں۔)

$\therefore$ مطلوبہ اعداد $= 6,\ 9,\ 21,\ 12$

مثال **(1)** کھاد میں 10 : 18 : 18 تناسب میں نائٹروجن کا مرکب 18%، فاسفورس کا مرکب 18% اور پوٹاشیم کا مرکب 10% ہوتا ہے۔ باقی دوسری اشیاء ہوتی ہیں۔ تب بتایئے اس قسم کی 20 کلوگرام کھاد میں ہر طرح کے مرکبات کی کمیت (وزن) کتنا ہے؟

حل : فرض کیجیے 20 کلوگرام کھاد میں نائٹروجن کے مرکب کا وزن x کلوگرام ہے۔

$$\therefore \frac{18}{100} = \frac{x}{20} \quad , \quad \therefore x = \frac{18 \times 20}{100} = 3.6$$

$\therefore$ نائٹروجن کا مرکب 3.6 کلوگرام ہے۔

فاسفورس کے مرکب کا فیصد 18 اتنا ہی ہے۔ اس لیے فاسفورس کا مرکب 3.6 کلوگرام ہے۔

فرض کیجیے 20 کلوگرام کھاد میں پوٹاشیم کے مرکب کی کمیت (وزن) y ہے۔

$\frac{10}{100} = \frac{y}{20} \quad \therefore y = 2 \;;\; \therefore$ پوٹاشیم کا مرکب = 2 کلوگرام

مستقیم تناسب

ایک موٹر گاڑی 1 لٹر پٹرول میں 10 کلومیٹر فاصلہ طے کرتی ہے۔

اس لیے 20 لٹر پٹرول میں وہ گاڑی $20 \times 10 = 200$ کلومیٹر فاصلہ طے کرے گی۔

تب 40 لٹر پٹرول میں وہ گاڑی $40 \times 10 = 400$ کلومیٹر فاصلہ طے کرے گی۔

اوپر دی ہوئی معلومات جدول کی صورت میں لکھتے ہیں۔

پٹرول x لٹر	1	20	40	
فاصلہ : y کلومیٹر	10	200	400	
$\frac{x}{y}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{20}{200} = \frac{1}{10}$	$\frac{40}{400} = \frac{1}{10}$	$\frac{x}{y} = k$

گاڑی سے استعمال کیا گیا پٹرول (لٹر میں) اور اتنے ہی پٹرول میں طے کردہ فاصلہ (کلومیٹر میں)، ان اعداد کی نسبت مستقل ہے۔ ایسے وقت یہ دونوں مستقیم تناسب میں ہیں، یعنی ہم کہتے ہیں یہ دونوں اعداد مستقیم تغیر میں بدلتے ہیں۔

معکوس تناسب

ایک موٹر کو 50 کلومیٹر فی گھنٹہ کی رفتار سے 100 کلومیٹر جانے کے لیے دو گھنٹہ لگتا ہے۔ایک بیل گاڑی کی رفتار 5 کلومیٹر فی گھنٹہ ہے۔تو اتنا ہی فاصلہ طے کرنے کے لیے بیل گاڑی کو 20 گھنٹے لگتے ہے۔

'فاصلہ = وقت × رفتار' اسے دھیان میں رکھتے ہوئے اوپر کی معلومات جدول کی صورت میں لکھیے۔

	(x) کلومیٹر رفتار فی گھنٹہ	(y) وقت (گھنٹہ میں)	$x \times y$	$x \times y = k$
موٹر	50	2	100	
بیل گاڑی	5	20	100	

یعنی، سواریوں کی رفتار اور سفر کے لیے لگنے والا وقت، ان دونوں اعداد کا حاصل ضرب مستقل دکھائی دیتا ہے۔ایسے وقت ہم کہتے ہیں کہ یہ اعداد معکوس تناسب میں ہیں یا یہ اعداد معکوس تغیر میں بدلتے ہیں۔

اوپر کی مثال میں سواریوں کی رفتار اور دیا ہوا فاصلہ جانے کے لیے وقت معکوس تناسب میں ہیں۔

آیئے ذرا یاد کریں

نسبت کی خصوصیات :

(1) a اور b دو اعداد کی نسبت $a : b$ یا $\frac{a}{b}$ کی صورت میں لکھتے ہیں۔ یہاں a کو مقدم رکن یا پہلا رکن (Antecedent) اور b کو تالی رکن یا دوسرا رکن (Consequent) کہتے ہیں۔

(2) دو اعداد کی نسبت میں تالی 100 ہو تب اس نسبت کو فیصدی کہتے ہیں۔

(3) تناسب میں تمام اعداد کسی ایک ہی غیر صفر عدد سے ضرب دیں یا تقسیم کریں تو تناسب نہیں بدلتا۔

مثلاً $3 : 4 = 6 : 8 = 9 : 12$ اسی طرح $2 : 3 : 5 = 8 : 12 : 20$ یا k، غیر صفر عدد ہو تب

$a : b = ak : bk$ اور $a : b : c = ak : bk : ck$

(4) جن اعداد کی نسبت معلوم کرنا ہے، انھیں ایک ہی قسم کی پیائش میں ہونا چاہیے۔اسی طرح ہر ایک کی پیائش کی اکائی بھی یکساں ہونا چاہیے۔

(5) نسبت کی اکائی نہیں ہوتی۔

مثلاً 2 کلوگرام اور 300 گرام کی نسبت $2 : 300$ نہیں ہوتی بلکہ 2 کلوگرام = 2000 گرام

اس لیے وہ نسبت $2000 : 300$ یعنی $20 : 3$ ہے۔

مثال (1) سیما اور راج شری کی عمروں کی نسبت $3 : 1$ ہے۔راج شری اور اتول کی عمروں کی نسبت $3 : 2$ ہے۔تو سیما، راج شری، اور اتول کی عمروں کی نسبت معلوم کیجیے۔

حل : راج شری کی عمر : سیما کی عمر = $3 : 1$ اور اتول کی عمر : راج شری کی عمر = $2 : 3$ ←

پہلی نسبت کے تالی رکن اور دوسری نسبت کے مقدم رکن کو یکساں ہونا چاہیے۔

اس کے لیے مسلسل نسبت حاصل کرنے کے لیے پہلی نسبت کے ارکان کو 2 سے ضرب دیجیے۔یعنی 2 : 6 = 1 : 3 حاصل ہوگا۔

$$\frac{\text{سیما کی عمر}}{\text{راج شری کی عمر}} = \frac{6}{2} \quad , \quad \frac{\text{راج شری کی عمر}}{\text{اتول کی عمر}} = \frac{2}{3}$$

اتول کی عمر : راج شری کی عمر : سیما کی عمر = 6 : 2 : 3

مثال (2) ایک مستطیل کھیت کی لمبائی 1.2 کلومیٹر ہے اور اس کی چوڑائی 400 میٹر ہے تو لمبائی کی چوڑائی سے نسبت معلوم کیجیے۔

حل : یہاں مستطیل کی لمبائی کلومیٹر میں ہے اور چوڑائی میٹر میں ہے۔نسبت کے لیے دونوں اکائیاں یکساں ہونی چاہیے۔اس لیے کلومیٹر کی میٹر میں تحویل کریں گے۔

1.2 کلومیٹر = 1.2 × 1000 = 1200 میٹر

∴ 1200 میٹر کی 400 میٹر سے نسبت لیں گے۔

∴ مطلوبہ نسبت $= \frac{1200}{400} = \frac{3}{1}$, یعنی 3 : 1

مثال (3) مہیش کے ہر مہینے کے خرچ کی اس کی آمدنی سے نسبت 5 : 3 ہے۔تو اس کا خرچ اس کی آمدنی کے کتنے فیصدی ہے؟

حل : خرچ کی آمدنی سے نسبت 5 : 3 ہے۔اس کی فیصدی میں تحویل کرنا ہے یعنی دوسرے رکن کو 100 بنانا ہے۔

$$\frac{3}{5} = \frac{3\times 20}{5\times 20} = \frac{60}{100} \quad \text{یعنی} \quad \frac{\text{خرچ}}{\text{آمدنی}} = \frac{60}{100} = 60\%$$

∴ مہیش کا خرچ آمدنی کا 60% ہے۔

مثال (4) ایک باغ میں آم اور چیکو کے درختوں کی تعداد کی نسبت 3 : 2 ہے۔اگر اس باغ میں ہر قسم کے 5 درخت زیادہ لگائے جائیں تو ان کی تعداد کی نسبت 7 : 5 ہو جاتی۔تو اس باغ میں آموں کے اور چیکو کے درخت کتنے ہیں؟

حل : ابتدائی نسبت 3 : 2 ہے۔

فرض کیجیے۔ باغ میں آم کے درخت = $2x$ اور $3x$ = چیکو کے درخت

دی ہوئی شرط کے مطابق،

$$\frac{2x+5}{3x+5} = \frac{5}{7}$$

$$14x + 35 = 15x + 25$$

$$\therefore \quad x = 10$$

∴ باغ میں آم کے درخت = $2x = 2 \times 10 = 20$

∴ باغ میں چیکو کے درخت = $3x = 3 \times 10 = 30$

مثال **(5)** دو اعداد کی نسبت 7 : 5 ہے۔ اگر ہر عدد میں 40 ملائیں تو حاصل ہونے والی جمع کی نسبت 31 : 25 ہو جاتی ہے۔ تو وہ اعداد معلوم کیجیے۔

حل : فرض کیجیے $5x$ = پہلا عدد اور $7x$ = دوسرا عدد

دی ہوئی شرط کے مطابق،

$$\frac{5x+40}{7x+40} = \frac{25}{31}$$

$\therefore \quad 31(5x + 40) = 25(7x + 40)$

$\therefore \quad 155x + 1240 = 175x + 1000$

$\therefore \quad 1240 - 1000 = 175x - 155x$

$\therefore \quad 240 = 20x$

$\therefore \quad x = 12$

پہلا عدد $= 5 \times 12 = 60$

دوسرا عدد $= 7 \times 12 = 84$

$\therefore$ دیے ہوئے اعداد 60 اور 84 ہیں۔

مشقی سیٹ 4.1

(1) ذیل میں دیے ہوئے اعداد کی جوڑی میں سے پہلے عدد کی دوسرے عدد سے نسبت کو مختصر ترین صورت میں لکھیے۔

(i) 72, 60 (ii) 38,57 (iii) 52,78

(2) درج ذیل رقموں میں سے پہلے رقم کی دوسری رقم سے نسبت کو مختصر ترین صورت میں لکھیے۔

(i) 700 روپے , 308 روپے (ii) 14 روپے, 12 روپے 40 پیسے

(iii) 5 لٹر, 2500 ملی لٹر (iv) 3 سال 4 مہینے , 5 سال 8 مہینے

(v) 3.8 کلوگرام , 1900 گرام (vi) 7 منٹ 20 سیکنڈ , 5 منٹ 6 سیکنڈ

(3) درج ذیل فی صدی کو مختصر ترین نسبت کی صورت میں لکھیے۔

(i) 75 : 100 (ii) 44 : 100 (iii) 6.25% (iv) 52 : 100 (v) 0.64%

(4) ایک چھوٹا مکان 3 آدمی 8 دن میں تعمیر کر سکتے ہیں تو وہی مکان 6 دنوں میں تعمیر کرنے کے لیے کتنے آدمی لگیں گے؟

(5) ذیل کی نسبتوں کی فی صدی میں تحویل کیجیے۔

(i) 15 : 25 (ii) 47 : 50 (iii) $\frac{7}{10}$ (iv) $\frac{546}{600}$ (v) $\frac{7}{16}$

(6) آبھا اور اس کی ماں کی عمروں کی نسبت 5 : 2 ہے۔ آبھا کی پیدائش کے وقت اس کی ماں کی عمر 27 سال تھی۔ تو آبھا اور اس کی ماں کی موجودہ عمریں معلوم کیجیے۔

(7) وتسلا اور سارا کی موجودہ عمریں بالترتیب 14 سال اور 10 سال ہے تو کتنے سال بعد ان کی عمروں کی نسبت 4 : 5 ہو جائے گی؟

(8) ثریا اور اس کی ماں کی موجودہ عمروں کی نسبت 7 : 2 ہے۔ 2 سال بعد ان کی عمروں کی نسبت 3 : 1 ہو جائے گی تو ثریا کی موجودہ عمر کتنی ہے؟

آیئے سمجھ لیں

نسبتوں کا موازنہ

اگر $b > 0$ ، $d > 0$ ہو تو $\frac{a}{b}$ ، $\frac{c}{d}$ ان نسبتوں کا موازنہ ذیل کے اصول کے مطابق کر سکتے ہیں۔

(i) اگر $ad > bc$ تب $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$ (ii) اگر $ad < bc$ تب $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ (iii) اگر $ad = bc$ تب $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

درج ذیل میں دی ہوئی نسبتوں کی ہر جوڑی میں ترتیبی تعلق طے کیجیے۔

مثال **(1)** $\frac{4}{9}, \frac{7}{8}$

حل : $4 \times 8 \; \boxed{?} \; 7 \times 9$

$32 < 63$

$\therefore \quad \frac{4}{9} < \frac{7}{8}$

مثال **(2)** $\frac{\sqrt{13}}{\sqrt{8}}, \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{5}}$

$\sqrt{13} \times \sqrt{5}, \; \boxed{?} \; \sqrt{8} \times \sqrt{7}$

$\sqrt{65} \; \boxed{?} \; \sqrt{56}$

$\sqrt{65} > \sqrt{56}$

$\therefore \quad \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{8}} > \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{5}}$

مثال **(3)** اگر a اور b صحیح اعداد ہوں اور $a < b$ ، $b > 1$ تب $\frac{a+1}{b+1}$ ، $\frac{a-1}{b-1}$ نسبتوں میں ترتیبی تعلق طے کیجیے۔

حل : $a < b$

$\therefore \; a - 1 < b - 1$

اب $\frac{a+1}{b+1} - \frac{a-1}{b-1}$ ، تفریق پر غور کریں گے۔

$$\frac{a-1}{b-1} - \frac{a+1}{b+1} = \frac{(a-1)(b+1)-(a+1)(b-1)}{(b-1)(b+1)}$$

$$= \frac{(ab-b+a-1)-(ab+b-a-1)}{b^2-1}$$

$$= \frac{ab-b+a-1-ab-b+a+1}{b^2-1}$$

$$= \frac{2a-2b}{b^2-1}$$

$$= \frac{2(a-b)}{b^2-1} \qquad \dots (1)$$

اب , $a < b$, $\therefore \; a - b < 0$

کیوں کہ $b > 1$ اسی طرح $b^2-1 > 0$

$$\frac{2(a-b)}{b^2-1} < 0 \qquad \dots (2)$$

$$\frac{a-1}{b-1} - \frac{a+1}{b+1} < 0$$

[بیان (1) اور (2) سے] ...

$$\frac{a-1}{b-1} < \frac{a+1}{b+1}$$

مثال **(4)** اگر $a : b = 2 : 1$ اور $b : c = 4 : 1$ تب $\left(\frac{a^4}{32b^2c^2}\right)^3$ عبارت کی قیمت معلوم کیجیے۔

حل : $\frac{a}{b} = \frac{2}{1}$; $\therefore a = 2b$; $\frac{b}{c} = \frac{4}{1}$; $\therefore b = 4c$

$$a = 2b = 2 \times 4c = 8c \qquad \therefore a = 8c$$

اب دی ہوئی عبارت میں $a = 8c$ اور $b = 4c$ قیمت رکھیں گے۔

$$\left(\frac{a^4}{32b^2c^2}\right)^3 = \left(\frac{(8c)^4}{32 \times 4^2 \times c^2 \times c^2}\right)^3$$

$$= \left[\frac{8 \times 8 \times 8 \times 8 \times c^4}{32 \times 16 \times c^2 \times c^2}\right]^3$$

$$= (8)^3$$

$$\therefore \left(\frac{a^4}{32b^2c^2}\right)^3 = 512$$

مشقی سیٹ 4.2

(1) $\frac{a}{b} = \frac{ak}{bk}$ خصوصیت کا استعمال کر کے خالی جگہ مناسب عدد لکھیے۔

(i) $\frac{5}{7} = \frac{....}{28} = \frac{35}{....} = \frac{....}{3.5}$

(ii) $\frac{9}{14} = \frac{4.5}{....} = \frac{....}{42} = \frac{....}{3.5}$

(2) درج ذیل نسبتیں معلوم کیجیے۔

(i) دائرہ کے نصف قطر کی، اس کے محیط سے نسبت

(ii) r نصف قطر والے دائرہ کے محیط کی، اس کے رقبہ سے نسبت

(iii) 7 سم ضلع والے مربع کے وتر سے اس کے ضلع کی نسبت

(iv) 5 سم لمبائی اور 3.5 سم چوڑائی والے مستطیل کے احاطے کی اس کے رقبہ سے نسبت

(3) درج ذیل دی ہوئی نسبتوں کی جوڑیوں میں چھوٹا بڑا پن طے کیجیے۔

(i) $\frac{\sqrt{5}}{3}, \frac{3}{\sqrt{7}}$ (ii) $\frac{3\sqrt{5}}{5\sqrt{7}}, \frac{\sqrt{63}}{\sqrt{125}}$ (iii) $\frac{5}{18}, \frac{17}{121}$

(iv) $\frac{\sqrt{80}}{\sqrt{48}}, \frac{\sqrt{45}}{\sqrt{27}}$ (v) $\frac{9.2}{5.1}, \frac{3.4}{7.1}$

(4) (i) $\square$ABCD متوازی الاضلاع ہے۔ اس کے $\angle A$ اور $\angle B$ کی پیمائشوں کی نسبت $5 : 4$ ہے تو $\angle B$ کی پیمائش معلوم کیجیے۔

(ii) البرٹ اور سلیم کی موجودہ عمروں کی نسبت $5 : 9$ ہے۔ 5 سال بعد ان کی عمروں کی نسبت $3 : 5$ ہو جائے گی تو ان کی موجودہ عمریں معلوم کیجیے۔

(iii) ایک مستطیل کی لمبائی اور چوڑائی کی نسبت 3 : 1 ہے۔ مستطیل کا احاطہ 36 سم ہے تو مستطیل کی لمبائی اور چوڑائی معلوم کیجیے۔

(iv) دو اعداد کی نسبت 31 : 23 ہے ان کا مجموعہ 216 ہے۔ وہ اعداد معلوم کیجیے۔

(v) دو اعداد کا حاصل ضرب 360 ہے اور ان کی نسبت 10 : 9 ہے تو وہ اعداد معلوم کیجیے۔

(5)* اگر $a : b = 3 : 1$ اور $b : c = 5 : 1$ ہے تو (i) $\left(\frac{a^3}{15b^2c}\right)^3$ (ii) $\frac{a^2}{7bc}$ ان عبارتوں کی قیمت معلوم کیجیے۔

(6)* $\sqrt{0.04\times0.4\times a} = 0.4\times0.04\times\sqrt{b}$ ہو تو $\frac{a}{b}$ نسبت معلوم کیجیے۔

(7) $(x + 3) : (x + 11) = (x - 2) : (x + 1)$ ہو تو x کی قیمت معلوم کیجیے۔

آیئے سمجھ لیں

مساوی نسبتوں پر عمل

مساویت کی خصوصیت کا استعمال کر کے دو مساوی نسبتوں پر کچھ عمل کیا جا سکتا ہے۔ اس کا مطالعہ کریں گے۔

اگر a, b, c, d مثبت اعداد ہوں تو ان کے لیے درج ذیل خصوصیت سمجھ لیں۔

(I) عمل عکس **(Invertendo)** : اگر $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ہو تو $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ... (دیا ہوا ہے)

$\therefore \quad a\times d = b\times c$ ... (ترچھی ضرب)

$\therefore \quad b\times c = a\times d$ ... (طرفین کا باز و تبدیل کرنے پر)

$\therefore \quad \frac{b\times c}{a\times c} = \frac{a\times d}{a\times c}$ ... (طرفین کو $a \times c$ سے تقسیم کرنے پر)

$\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$

اگر $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ہو تب $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$ اس خصوصیت کو ''عمل عکس'' کہتے ہیں۔

(II) عمل تبدیل **(Alternendo)** : اگر $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ہو تب $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ... (دیا ہوا ہے)

$\therefore \quad a\times d = b\times c$ ... (ترچھی ضرب کرنے پر)

$\frac{a\times d}{c\times d} = \frac{b\times c}{c\times d}$ ... (طرفین کو $c\times d$ سے تقسیم کرنے پر)

$\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$

اگر $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ہو تب $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ اس خصوصیت کو ''عمل تبدیل'' کہتے ہیں۔

(III) عمل ترکیب **(Componendo)** : اگر $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ ہوتب $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$

(دیا ہوا ہے) ... $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

(طرفین میں 1 ملانے پر) ... $\frac{a}{b}+1=\frac{c}{d}+1$

$$\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$$

اگر $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ ہوتب $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$ اس خصوصیت کو عمل ترکیب کہتے ہیں۔

(IV) عمل تفصیل **(Dividendo)** : اگر $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ ہوتب $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$

(دیا ہوا ہے) ... $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

(طرفین سے 1 تفریق کرنے پر) ... $\therefore \quad \frac{a}{b}-1=\frac{c}{d}-1$

$$\therefore \quad \frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$$

اگر $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ ہوتب $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$ اس خصوصیت کو ''عمل تفصیل'' کہتے ہیں۔

(V) عمل ترکیب و تفصیل **(Componenedo-Dividendo)** : اگر $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ ہوتب $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$ جب $a \neq b$ اور $c \neq d$

اگر $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ ، (1) (عمل ترکیب سے) ... $\therefore \quad \frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$

(2) (عمل تفصیل سے) ... $\therefore \quad \frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$

[(1) کو (2) سے تقسیم دینے پر] ... $\therefore \quad \frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$

اگر $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ ہوتب $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$ اس خصوصیت کو عمل ترکیب و تفصیل کہتے ہیں۔

عمل ترکیب اور تفصیل کی عام صورت

اگر $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ ہوتب (ایک مرتبہ عمل ترکیب سے) ... $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$

(دو مرتبہ عمل ترکیب سے) ... $\frac{a+2b}{b}=\frac{c+2d}{d}$

.... (1) (m مرتبہ عمل ترکیب سے) ... $\frac{a+mb}{b}=\frac{c+md}{d}$, عام طور پر

اسی طرح اگر $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ ہوتب m مرتبہ عمل تفصیل سے،

... (2) (m مرتبہ عمل تفصیل سے) ... $\frac{a-mb}{b}=\frac{c-md}{d}$

اور اگر $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ ہوتب [(1) اور (2) کی تقسیم کرنے سے]

$$\frac{a+mb}{a-mb}=\frac{c+md}{c-md}$$

اسے دھیان میں رکھیں

اگر $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ ہو تب $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$ ... (عمل عکس)

اگر $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ ہو تب $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$ ... (عمل ترکیب)

اگر $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ ہو تب $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$ ... (عمل تبدیل)

اگر $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ ہو تب $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$ ... (عمل تفصیل)

اگر $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ ہو تب $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$ ... (عمل ترکیب وتفصیل)

حل کردہ مثالیں :

مثال (1) اگر $\frac{a}{b}=\frac{5}{3}$ ہو تب $\frac{a+7b}{7b}$ نسبت معلوم کیجیے۔

طریقہ I

حل : اگر $\frac{a}{b}=\frac{5}{3}$ ہو تب عمل تبدیل کرکے، $\frac{a}{5}=\frac{b}{3}=k$

$\therefore\ a = 5k,\ b = 3k$

$$\therefore\ \frac{a+7b}{7b}=\frac{5k+7\times 3k}{7\times 3k}$$

$$=\frac{5k+21k}{21k}$$

$$=\frac{26k}{21k}\quad=\frac{26}{21}$$

طریقہ II

$$\frac{a}{b}=\frac{5}{3}$$

$\therefore\ \frac{a}{7b}=\frac{5}{21}$ ... (طرفین کو $\frac{1}{2}$ سے ضرب کرنے پر)

$\therefore\ \frac{a+7b}{7b}=\frac{5+21}{21}$ ... (عمل ترکیب)

$$\therefore\ \frac{a+7b}{7b}=\frac{26}{21}$$

مثال (2) اگر $\frac{a}{b}=\frac{7}{4}$ ہو تب $\frac{5a-b}{b}$ معلوم کیجیے۔

طریقہ I

حل :

$$\frac{a}{b}=\frac{7}{4}$$

$\therefore\ \frac{a}{7}=\frac{b}{4}$ ... (عمل تبدیل)

$\therefore\ \frac{a}{7}=\frac{b}{4}=m$ ... (فرض کیجیے)

$\therefore\ a = 7m,\quad b = 4m$

$$\therefore\ \frac{5a-b}{b}=\frac{5(7m)-4m}{4m}$$

$$=\frac{35m-4m}{4m}$$

$$=\frac{31}{4}$$

طریقہ II

$$\frac{a}{b}=\frac{7}{4}$$

$\frac{5a}{b}=\frac{5\times 7}{4}$ ... (طرفین کو 5 سے ضرب کرنے پر)

$$=\frac{35}{4}$$

$\frac{5a-b}{b}=\frac{35-4}{4}$ ... (عمل تفصیل سے)

$$\frac{5a-b}{b}=\frac{31}{4}$$

مثال (3) اگر $\frac{a}{b} = \frac{7}{3}$ ہوتب $\frac{a+2b}{a-2b}$ کی قیمت معلوم کیجیے۔

طریقہ I

حل : فرض کیجیے

$a = 7m, b = 3m$ رکھنے پر

$$\therefore \frac{a+2b}{a-2b} = \frac{7m+2\times 3m}{7m-2\times 3m}$$

$$= \frac{7m+6m}{7m-6m}$$

$$= \frac{13m}{m} = \frac{13}{1}$$

طریقہ II

$$\frac{a}{b} = \frac{7}{3}$$

$$\therefore \frac{a}{2b} = \frac{7}{6} \quad \text{...}$$ (طرفین کو $\frac{1}{2}$ سے ضرب دینے پر)

$$\therefore \frac{a+2b}{a-2b} = \frac{7+6}{7-6} \quad \text{...}$$ (عمل ترکیب وتفصیل سے)

$$\therefore \frac{a+2b}{a-2b} = \frac{13}{1}$$

مثال (4) اگر $\frac{a}{3} = \frac{b}{2}$ ہوتب $\frac{5a+3b}{7a-2b}$ کی قیمت معلوم کیجیے۔

طریقہ I

حل : $\frac{a}{3} = \frac{b}{2}$ ... (دیا ہوا ہے)

$\therefore \frac{a}{b} = \frac{3}{2}$ ... (عمل تبدیل)

اب $\frac{5a+3b}{7a-2b}$ کے ہر رکن کو b سے تقسیم کریں گے۔

$$\frac{\frac{5a}{b}+\frac{3b}{b}}{\frac{7a}{b}-\frac{2b}{b}} = \frac{5\left(\frac{a}{b}\right)+3}{7\left(\frac{a}{b}\right)-2}$$

$$= \frac{5\left(\frac{3}{2}\right)+3}{7\left(\frac{3}{2}\right)-2}$$

$$= \frac{\frac{15}{2}+3}{\frac{21}{2}-2}$$

$$= \frac{15+6}{21-4}$$

$$= \frac{21}{17}$$

طریقہ II

$$\frac{a}{3} = \frac{b}{2}$$

$$\therefore \frac{a}{3} = \frac{b}{2} = t \quad \text{...}$$ (فرض کریں)

$$\therefore a = 3t \;,\; b = 2t$$

قیمت رکھنے پر،

$$\frac{5a+3b}{7a-2b} = \frac{5(3t)+3(2t)}{7(3t)-2(2t)} \quad \ldots(t \neq 0)$$

$$= \frac{15t+6t}{21t-4t}$$

$$= \frac{21t}{17t}$$

$$= \frac{21}{17}$$

مثال (5) اگر $\frac{x}{y} = \frac{4}{5}$ ہوتب $\frac{4x - y}{4x + y}$ کی قیمت معلوم کیجیے۔

حل :

(دیا ہوا ہے) ... $\frac{x}{y} = \frac{4}{5}$

(طرفین کو 4 سے ضرب دینے پر) ... $\frac{4x}{y} = \frac{16}{5}$

(عمل ترکیب و تفصیل کرنے پر) ... $\therefore \frac{4x + y}{4x = y} = \frac{16 + 5}{16 - 5}$

$\therefore \frac{4x + y}{4x - y} = \frac{21}{11}$

(عمل عکس کرنے پر) .... $\therefore \frac{4x - y}{4x + y} = \frac{11}{21}$

مثال (6) اگر $5x = 4y$ ہوتب $\frac{3x^2 + y^2}{3x^2 - y^2}$ کی قیمت معلوم کیجیے۔

حل : (دیا ہوا ہے) ... $5x = 4y$

$\frac{x}{y} = \frac{4}{5}$

(طرفین کا مربع کرنے پر) ... $\frac{x^2}{y^2} = \frac{16}{25}$

(طرفین کو 3 سے ضرب دینے پر) ... $\therefore \frac{3x^2}{y^2} = \frac{48}{25}$

(عمل ترکیب و تفصیل سے) ... $\therefore \frac{3x^2 + y^2}{3x^2 - y^2} = \frac{48 + 25}{48 - 25}$

$\therefore \frac{3x^2 + y^2}{3x^2 - y^2} = \frac{73}{23}$

آیئے سمجھ لیں

مساوی نسبتوں کی خصوصیت کا استعمال (Use of properties of equal ratios)

کچھ مساواتیں حل کرنے کے لیے دیگر طریقوں کی بجائے مساوی نسبتوں پر عمل کا استعمال کرنا سہولت بخش ہوتا ہے۔

مثال (1) مساوات حل کیجیے۔ $\frac{3x^2 + 5x + 7}{10x + 14} = \frac{3x^2 + 4x + 3}{8x + 6}$

حل : $\frac{3x^2 + 5x + 7}{10x + 14} = \frac{3x^2 + 4x + 3}{8x + 6}$

(طرفین کو 2 سے ضرب دینے پر) ... $\frac{(6x^2 + 10x + 14)}{10x + 14} = \frac{(6x^2 + 8x + 6)}{8x + 6}$

$$\frac{(6x^2+10x+14)-(10x+14)}{10x+14}=\frac{(6x^2+8x+6)-(8x+6)}{8x+6}$$ ... (عمل تفصیل سے)

$$\therefore \quad \frac{6x^2}{10x+14}=\frac{6x^2}{8x+6}$$

یہ مساوات $x=0$ قیمت سے مطمئن ہوتی ہے۔اس لیے $x=0$ ایک حل ہے۔

اگر $x \neq 0$ تب $x^2 \neq 0$

$$\frac{1}{10x+14}=\frac{1}{8x+6}$$ .... ($\therefore$ $6x^2$ سے تقسیم کرنے پر)

$$\therefore \quad 8x+6=10x+14$$ ... (عمل عکس)

$$\therefore \quad 6-14=10x-8x$$

$$\therefore \quad -8=2x$$

$$\therefore \quad x=-4$$

$\therefore$ $x=-4$ یا $x=0$ دی ہوئی مساوات کا حل ہیں۔

مثال **(2)** حل کیجیے : $\frac{\sqrt{x+7}+\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+7}-\sqrt{x-2}}=\frac{5}{1}$

حل :

$$\frac{\sqrt{x+7}+\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+7}-\sqrt{x-2}}=\frac{5}{1}$$

$$\frac{(\sqrt{x+7}+\sqrt{x-2})+(\sqrt{x+7}-\sqrt{x-2})}{(\sqrt{x+7}+\sqrt{x-2})-(\sqrt{x+7}-\sqrt{x-2})}=\frac{5+1}{5-1}$$ ... (عمل ترکیب و تفصیل سے)

$$\therefore \quad \frac{2\sqrt{x+7}}{2\sqrt{x-2}}=\frac{6}{4}$$

$$\therefore \quad \frac{\sqrt{x+7}}{\sqrt{x-2}}=\frac{3}{2}$$

$$\therefore \quad \frac{x+7}{x-2}=\frac{9}{4}$$ ... (طرفین کا مربع کرنے پر)

$$\therefore \quad 4(x+7)=9(x-2)$$

$$\therefore \quad 4x+28=9x-18$$

$$\therefore \quad 28+18=9x-4x$$

$$\therefore \quad 46=5x$$

$$\therefore \quad \frac{46}{5}=x$$

$$\therefore \quad x=\frac{46}{5}$$ ... ($\therefore$ مساوات کا حل ہے)

عملی کام :

موٹے کاغذ کے پانچ ٹکڑے لیجیے۔ ہر کاغذ پر درج ذیل میں سے ایک ایک بیان لکھیے۔

(i) $\dfrac{a+b}{b}=\dfrac{c+d}{d}$ (ii) $\dfrac{a}{c}=\dfrac{b}{d}$ (iii) $\dfrac{a}{b}=\dfrac{ac}{bd}$ (iv) $\dfrac{c}{d}=\dfrac{c-a}{d-b}$ (v) $\dfrac{a}{b}=\dfrac{rc}{rd}$

a، b، c، d مثبت اعداد ہیں اور $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$ معلومات دی ہوئی ہیں۔ درج بالا میں سے ہر بیان صحیح ہے یا غلط ہے، اسے کارڈ کے پیچھے لکھیے۔ بیان غلط ہو تو اس کی وجہ لکھیے۔

مشقی سیٹ 4.3

(1) اگر $\dfrac{a}{b}=\dfrac{7}{3}$ ہو تو درج ذیل نسبتوں کی قیمت معلوم کیجیے۔

(i) $\dfrac{5a+3b}{5a-3b}$ (ii) $\dfrac{2a^2+3b^2}{2a^2-3b^2}$ (iii) $\dfrac{a^3-b^3}{b^3}$ (iv) $\dfrac{7a+9b}{7a-9b}$

(2) اگر $\dfrac{15a^2+4b^2}{15a^2-4b^2}=\dfrac{47}{7}$ ہو تب درج ذیل نسبتوں کی قیمت طے کیجیے۔

(i) $\dfrac{a}{b}$ (ii) $\dfrac{7a-3b}{7a+3b}$ (iii) $\dfrac{b^2-2a^2}{b^2+2a^2}$ (iv) $\dfrac{b^3-2a^3}{b^3+2a^3}$

(3) اگر $\dfrac{3a+7b}{3a-7b}=\dfrac{4}{3}$ ہو تب $\dfrac{3a^2-7b^2}{3a^2+7b^2}$ نسبت کی قیمت معلوم کیجیے۔

(4) درج ذیل مساواتیں حل کیجیے۔

(i) $\dfrac{x^2+12x-20}{3x-5}=\dfrac{x^2+8x+12}{2x+3}$

(ii) $\dfrac{10x^2+15x+63}{5x^2-25x+12}=\dfrac{2x+3}{x-5}$

(iii) $\dfrac{(2x+1)^2+(2x-1)^2}{(2x+1)^2-(2x-1)^2}=\dfrac{17}{8}$

(iv*) $\dfrac{\sqrt{4x+1}+\sqrt{x+3}}{\sqrt{4x+1}-\sqrt{x+3}}=\dfrac{4}{1}$

(v) $\dfrac{(4x+1)^2+(2x+3)^2}{4x^2+12x+9}=\dfrac{61}{36}$

(vi) $\dfrac{(3x-4)^3-(x+1)^3}{(3x-4)^3+(x+1)^3}=\dfrac{61}{189}$

عملی کام : ذیل میں دیے ہوئے درمیانی خانہ میں a اور b کی قیمتیں بدل کر یعنی $a:b$ کی نسبت بدل کر مختلف مثالیں بنائی جا سکتی ہیں۔ اس طرح تبدیلی کر کے استاد بھرپور مشق دیں۔

$\dfrac{a}{b}=\dfrac{3}{4}$

$\dfrac{5a^2+2b^2}{5a^2-2b^2}=$ -----

$\dfrac{3a}{4b}=$ -----

$\dfrac{2a-b}{2a+b}=$ -----

$\dfrac{a^2+b^2}{b^2}=$ ---

$\dfrac{a}{2b}=$ -----

آیئے سمجھ لیں

مساوی نسبتوں کا مسئلہ (Theorem on equal ratios)

اگر $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ ہو تب $\frac{a}{b}=\frac{a+c}{b+d}=\frac{c}{d}$ اس خصوصیت کو مساوی نسبتوں کا مسئلہ کہتے ہیں۔

ثبوت : (فرض کریں) ... $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k$ اس لیے $a=bk$ اور $c=dk$

$$\therefore \quad \frac{a+c}{b+d}=\frac{bk+dk}{b+d}=\frac{k(b+d)}{b+d}=k$$

$$\therefore \quad \frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}$$

ہمیں معلوم ہے کہ $\frac{a}{b}=\frac{al}{bl}$

اگر $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k$ ہو تب $\frac{al}{bl}=\frac{cm}{dm}=\frac{al+cm}{bl+dm}=k$

اسی طریقے سے غور کرکے اگر (محدود ارکان) ... $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=$ ... اور اگر l، m، n ... یہ غیر صفر عدد ہوں تب

اسی طرح مساوی نسبتوں کے مسئلہ کی عام صورت ملتی ہے۔ (محدود ارکان) .... $\quad$ ہر نسبت $=\frac{al+cm+en+\ldots}{bl+dm+fn+\ldots}$

غور کیجیے

ایک جیم خانہ (ورزش گاہ) میں چھوٹے بچوں کے گروہ میں 35 لڑکیاں اور 42 لڑکے، بڑے بچوں کے گروہ میں 30 لڑکیاں اور 36 لڑکے اور جوان گروپ میں 20 لڑکیاں اور 24 لڑکے ہیں۔ تو بتایئے ہر گروہ میں لڑکیوں کی تعداد اور لڑکوں کی تعداد کے درمیان نسبت کتنی ہے؟

ٹیم قواعد کے لیے تینوں گروہ میدان پر اکٹھا ہوئے۔ اب اکٹھا ہوئے گروہوں میں لڑکیوں کی تعداد اور لڑکوں کی تعداد کی نسبت کتنی ہے۔

اوپر دیے ہوئے سوالوں کے جواب سے کیا آپ کو مساوی نسبتوں کے مسئلہ کی تصدیق ہوئی؟

مثال (1) : درج ذیل بیان میں خالی جگہ پر کیجیے۔

(i) $\frac{a}{3}=\frac{b}{7}=\frac{4a+9b}{\ldots\ldots\ldots\ldots}$ $\qquad$ (ii) $\frac{x}{3}=\frac{y}{5}=\frac{z}{4}=\frac{5x-3y+4z}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}$

حل :

(i) $\frac{a}{3}=\frac{b}{7}=\frac{4a+9b}{4\times3+9\times7}=\frac{4a+9b}{12+63}=\frac{4a+9b}{75}$

(ii) $\frac{x}{3}=\frac{y}{5}=\frac{z}{4}=\frac{5\times x}{5\times 3}=\frac{-3\times y}{-3\times 5}=\frac{4\times z}{4\times 4}$

$\therefore$ ہر نسبت $=\frac{5x}{15}=\frac{-3y}{-15}=\frac{4z}{16}$ $\qquad$ ... (مساوی نسبتوں کا مسئلہ سے)

$=\frac{5x-3y+4z}{15-15+16}$

$=\frac{5x-3y+4z}{16}$

مثال (2) : اگر $\frac{a}{(x-2y+3z)}=\frac{b}{(y-2z+3x)}=\frac{c}{(z-2x+3y)}$ اور $x+y+z\neq 0$ ہوتب دکھائیے کہ ہرنسبت $\frac{a+b+c}{2(x+y+z)}$ کے مساوی ہے۔

حل : فرض کریں، $\frac{a}{(x-2y+3z)}=\frac{b}{(y-2z+3x)}=\frac{c}{(z-2x+3y)}=k$

$\therefore$ مساوی نسبتوں کے مسئلے کی رؤ سے،

$$k=\frac{a+b+c}{(x-2y+3z)+(y-2z+3x)+(z-2x+3y)}$$

$$=\frac{a+b+c}{2x+2y+2z}$$

$$=\frac{a+b+c}{2(x+y+z)}$$

$$\therefore\ \frac{a}{x-2y+3z}=\frac{b}{y-2z+3x}=\frac{c}{z-2x+3y}=\frac{a+b+c}{2(x+y+z)}$$

مثال (3) : اگر $\frac{x}{a+b-c}=\frac{z}{c+a-b}=\frac{y}{b+c-a}$ ہوتب ثابت کیجیے کہ $\frac{c}{y+z}=\frac{b}{x+y}=\frac{a}{z+x}$

حل : پہلے دی ہوئی مساوی نسبتوں پر عمل معکوس کر کے،

$$\frac{b+c-a}{y}=\frac{c+a-b}{z}=\frac{a+b-c}{x}$$

اب، فرض کریں ... $\frac{b+c-a}{y}=\frac{c+a-b}{z}=\frac{a+b-c}{x}=k$

$\therefore$ مساوی نسبتوں کے مسئلہ سے،

$$k=\frac{(c+a-b)+(a+b-c)}{z+x}$$

$$=\frac{2a}{z+x}\quad \ldots(I)$$

$$k=\frac{(a+b-c)+(b+c-a)}{x+y}$$

$$=\frac{2b}{x+y}\quad \ldots(II)$$

$$k=\frac{(b+c-a)+(c+a-b)}{y+z}$$

$$=\frac{2c}{y+z}\quad \ldots(III)$$

$$\therefore\ \frac{2a}{z+x}=\frac{2b}{x+y}=\frac{2c}{y+z}$$

$$\therefore\ \frac{a}{z+x}=\frac{b}{x+y}=\frac{c}{y+z}$$

مثال (4) : حل کیجیے : $\frac{14x^2-6x+8}{10x^2+4x+7}=\frac{7x-3}{5x+2}$

حل : مثال کا مشاہدہ کرنے پر نظر آتا ہے کہ دائیں جانے کی نسبت میں مقدم رکن (پہلے رکن) کو اور تالی رکن (دوسرے رکن) کو $2x$ سے ضرب دیں تو پہلی نسبت کے دو ارکان ملتے ہیں۔ اس لیے دوسری نسبت کے دونوں ارکان کو $2x$ سے ضرب کریں گے۔ لیکن اس سے پہلے $x\neq 0$ یا x صفر کے برابر نہیں ہے، طے کریں گے۔

اگر $x=0$ ہوتب $\frac{14x^2-6x+8}{10x^2+4x+7} = \frac{8}{7}$ اور $\frac{7x-3}{5x+2}=\frac{-3}{2}$

(ناممکن بیان حاصل ہوتا ہے) ... $\therefore \frac{8}{7}=\frac{-3}{2}$

$\therefore x \neq 0$

$\therefore$ دوسری نسبت کے دونوں ارکان کو $2x$ سے ضرب دیں گے۔

(فرض کریں) ... $\frac{14x^2-6x+8}{10x^2+4x+7}=\frac{2x(7x-3)}{2x(5x+2)}=k$

$$\therefore \frac{14x^2-6x+8}{10x^2+4x+7}=\frac{14x^2-6x}{10x^2+4x}=k$$

$$\therefore \frac{14x^2-6x+8-14x^2+6x}{10x^2+4x+7-10x^2-4x}=\frac{8}{7}=k$$

$$\therefore k=\frac{8}{7}$$

$$\therefore \frac{7x-3}{5x+2}=\frac{8}{7}$$

$$\therefore 49x-21=40x+16$$

$$\therefore 49x-40x=16+21$$

$$\therefore 9x=37 \qquad \therefore x=\frac{37}{9}$$

مشقی سیٹ 4.4

(1) درج ذیل بیانات میں خالی جگہ پر کیجیے۔

(i) $\frac{x}{7}=\frac{y}{3}=\frac{3x+5y}{.......}=\frac{7x-9y}{......}$ (ii) $\frac{a}{3}=\frac{b}{4}=\frac{c}{7}=\frac{a-2b+3c}{......}=\frac{......}{6-8+14}$

(2) اگر $5m-n=3m+4n$ ہوتب ذیل کی عبارتوں کی قیمت معلوم کیجیے۔

(i) $\frac{m^2+n^2}{m^2-n^2}$ (ii) $\frac{3m+4n}{3m-4n}$

(3) (i) اگر $a(y+z)=b(z+x)=c(x+y)$ اور a، b، c میں سے کوئی بھی عدد مساوی نہیں ہوتو ثابت کیجیے کہ $\frac{y-z}{a(b-c)}=\frac{z-x}{b(c-a)}=\frac{x-y}{c(a-b)}$

(ii) اگر $\frac{x}{3x-y-z}=\frac{y}{3y-z-x}=\frac{z}{3z-x-y}$ اور $x+y+z\neq 0$ ہوتب دکھایئے کہ ہر نسبت کی قیمت 1 ہے۔

(iii) اگر $\dfrac{ay+bz}{y+z}=\dfrac{bx+az}{x+z}=\dfrac{ax+by}{x+y}$ اور $x+y+z \neq 0$ ہوتو تب دکھائیے کہ ہر نسبت $\dfrac{a+b}{2}$ کے مساوی ہے۔

(iv) اگر $\dfrac{x+y}{c}=\dfrac{z+x}{b}=\dfrac{y+z}{a}$ ہو تب دکھائیے کہ $\dfrac{x}{b+c-a}=\dfrac{y}{c+a-b}=\dfrac{z}{a+b-c}$

(v) اگر $\dfrac{y-z}{x-z}=\dfrac{x+5z}{y-5x}=\dfrac{3x-5y}{5z+3y}$ ہو تب دکھائیے کہ ہر نسبت $\dfrac{x}{y}$ کے مساوی ہے۔

(4) حل کیجیے۔ $\dfrac{16x^2-20x+9}{8x^2+12x+21}=\dfrac{4x-5}{2x+3}$ (ii) $\dfrac{5y^2+40y-12}{5y+10y^2-4}=\dfrac{y+8}{1+2y}$

آئیے سمجھ لیں

مسلسل تناسب (Continued Proportion)

ذیل میں دی ہوئی نسبتوں پر غور کیجیے۔

12 : 4 اور 36 : 12 یہ دونوں نسبتیں مساوی ہیں۔اس تناسب میں پہلی نسبت کا دوسرا رکن اور دوسری نسبت کا پہلا رکن مساوی ہے۔اس لیے ہم کہتے ہیں کہ 4, 12, 36 اعداد مسلسل تناسب میں ہیں۔

جب $\dfrac{b}{c}=\dfrac{a}{b}$ تب کہتے ہیں کہ a ، b ، c اعداد مسلسل تناسب میں ہیں۔

اگر $ac=b^2$ تب طرفین کو bc سے تقسیم کرکے $\dfrac{a}{b}=\dfrac{b}{c}$ مساوات حاصل ہوتی ہے۔

اس لیے $ac=b^2$ ہو تب a، b، c مسلسل تناسب میں ہوتے ہیں۔

جب a، b، c مسلسل تناسب میں ہوتے ہیں۔تب b کو a اور c کا ہندسی وسط (Geometric mean) یا درمیانی متناسب رکن (Mean proportional) کہتے ہیں۔

اس بنا پر دھیان رکھیے کہ درج ذیل تمام بیان کا مطلب یکساں ہے۔

∴ (1) $\dfrac{a}{b}=\dfrac{b}{c}$ (2) $b^2=ac$ (3) a، b، c مسلسل تناسب میں ہیں۔

(4) a اور c کا ہندسی وسط b ہے (5) a اور c کا درمیانی متناسب رکن b ہے۔

مسلسل تناسب کے تصور کو بھی توسیعی صورت دی جا سکتی ہے۔

اگر $\dfrac{e}{f}=\dfrac{d}{e}=\dfrac{c}{d}=\dfrac{b}{c}=\dfrac{a}{b}$ ہو تب a، b، c، d، e اور f اعداد مسلسل متناسب میں ہیں۔

مثال (1) 25 اور 4 کا ہندسی وسط x ہو تب x کی قیمت معلوم کیجیے۔

حل : 25 اور 4 کا ہندسی وسط x ہے۔

$$\therefore\ x^2 = 25 \times 4$$

$$\therefore\ x^2 = 100$$

$$\therefore\ x = 10$$

مثال (2) اگر $4a^2b$، $8ab^2$، p مسلسل تناسب میں ہوں تب p کی قیمت معلوم کیجیے۔

حل : دی ہوئی معلومات کی بناء پر $4a^2b$، $8ab^2$، p مسلسل تناسب میں ہیں۔

$$\therefore \quad \frac{4a^2b}{8ab^2} = \frac{8ab^2}{p}$$

$$p = \frac{8ab^2 \times 8ab^2}{4a^2b} = 16b^3$$

مثال (3) 7، 12 اور 18 ہر عدد میں سے کون سا عدد تفریق کریں تو آنے والا عدد مسلسل تناسب میں ہوتا ہے؟

حل : فرض کیجیے کہ 7، 12 اور 18 اعداد میں سے x تفریق کرتے ہیں تو حاصل ہونے والے اعداد مسلسل تناسب میں ہیں۔

$(7-x)$، $(12-x)$، $(18-x)$ مسلسل تناسب میں ہیں۔

$$\therefore \quad (12-x)^2 = (7-x)(18-x)$$

$$\therefore \quad 144 - 24x + x^2 = 126 - 25x + x^2$$

$$\therefore \quad -24x + 25x = 126 - 144$$

$$\therefore \quad x = -18$$

تصدیق

$$(7-x) = 7-(-18) = 25$$

$$(12-x) = 12-(-18) = 30$$

$$(18-x) = 18-(-18) = 36$$

$25 \times 36 = 900$ اور $30^2 = 900$

یہاں 25، 30، 36 اعداد مسلسل تناسب میں ہیں۔

$\therefore$ 7، 12، 18 سے (-18) تفریق کریں تو حاصل ہونے والے اعداد مسلسل تناسب میں ہوتے ہیں۔

k – طریقہ (k-method)

نسبتوں میں k – طریقہ، مساوی نسبتوں پر یعنی تناسب پر کچھ سوالات حل کرنے کا ایک آسان طریقہ ہے۔اس طریقہ میں دی ہوئی مساوی نسبتوں کی قیمت k فرض کرتے ہیں۔

مثال (1) اگر $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ہو تب دکھایئے کہ $\frac{5a-3c}{5b-3d} = \frac{7a-2c}{7b-2d}$

حل : فرض کیجیے $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$، اس لیے $a = bk$ اور $c = dk$

a اور c کی قیمت طرفین میں رکھ کر،

بائیں بازو $= \frac{5a-3c}{5b-3d} = \frac{5(bk)-3(dk)}{5b-3d} = \frac{k(5b-3d)}{(5b-3d)} = k$

دائیں بازو $= \frac{7a-2c}{7b-2d} = \frac{7(bk)-2(dk)}{7b-2d} = \frac{k(7b-2d)}{7b-2d} = k$

$\therefore$ بائیں بازو = دائیں بازو

$$\therefore \quad \frac{5a-3c}{5b-3d} = \frac{7a-2c}{7b-2d}$$

مثال (2) اگر a، b، c مسلسل تناسب میں ہوں تو ثابت کیجیے کہ $\frac{(a+b)^2}{ab} = \frac{(b+c)^2}{bc}$

حل : a، b، c مسلسل تناسب میں ہیں۔فرض کیجیے $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = k$

$$\therefore b = ck,\ a = bk = ck \times k = ck^2$$

a اور b کی قیمت رکھ کر

بائیں طرف $= \frac{(a+b)^2}{ab} = \frac{(ck^2+ck)^2}{(ck^2)(ck)} = \frac{c^2k^2(k+1)^2}{c^2k^3} = \frac{(k+1)^2}{k}$

دائیں طرف $= \frac{(b+c)^2}{bc} = \frac{(ck+c)^2}{(ck)c} = \frac{c^2(k+1)^2}{c^2k} = \frac{(k+1)^2}{k}$

$\therefore$ بائیں طرف = دائیں طرف ، $\therefore \frac{(a+b)^2}{ab} = \frac{(b+c)^2}{bc}$

مثال (3) اگر a، b، c مسلسل تناسب میں ہوں تو ثابت کیجیے کہ

$$\frac{a}{c} = \frac{a^2+ab+b^2}{b^2+bc+c^2}$$

حل : a، b، c مسلسل تناسب میں ہیں۔ $\therefore \frac{a}{b} = \frac{b}{c}$

فرض کیجیے $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = k$، اس لیے $b = ck$ اور $a = ck^2$

بائیں طرف $= \frac{a}{c} = \frac{ck^2}{c} = k^2$

دائیں طرف $= \frac{a^2+ab+b^2}{b^2+bc+c^2}$

$$= \frac{(k^2c)^2+k^2c(ck)+(ck)^2}{(ck)^2+(ck)(c)+c^2}$$

$$= \frac{k^4c^2+k^3c^2+c^2k^2}{c^2k^2+c^2k+c^2}$$

$$= \frac{c^2k^2(k^2+k+1)}{c^2(k^2+k+1)}$$

$$= k^2$$

$\therefore$ بائیں طرف = دائیں طرف

$$\therefore \frac{a}{c} = \frac{a^2+ab+b^2}{b^2+bc+c^2}$$

مثال (4) پانچ اعداد مسلسل تناسب میں ہیں۔ پہلا رکن 5 اور آخری رکن 80 ہے۔تو وہ اعداد معلوم کیجیے۔

حل : فرض کیجیے مسلسل تناسب والے پانچ اعداد بالترتیب

a، ak، ak^2، ak^3، ak^4 ہیں۔

یہاں $a = 5$ اور $ak^4 = 80$

$\therefore 5 \times k^4 = 80$

$\therefore k^4 = 16$

$\therefore k = 2 \quad \dots (\because 2^4 = 16)$

$ak = 5 \times 2 = 10 \qquad ak^2 = 5 \times 4 = 20$

$ak^3 = 5 \times 8 = 40 \qquad ak^4 = 5 \times 16 = 80$

$\therefore$ وہ اعداد 5، 10، 40، 80 ہیں۔

مشقی سیٹ 4.5

(1) 12، 16 اور 21 ہر عدد میں کون سا عدد ملائیں کہ حاصل ہونے والے اعداد مسلسل تناسب میں ہو جائیں؟

(2) اگر $(23-x)$ اور $(19-x)$ کا $(28-x)$ درمیانی متناسب رکن ہو تب x کی قیمت معلوم کیجیے۔

(3) تین اعداد مسلسل تناسب میں ہیں۔ان کا ہندسی وسط رکن 12 ہو اور باقی ماندہ دو اعداد کی جمع 26 ہے۔تب وہ اعداد معلوم کیجیے۔

(4) اگر $(a+b+c)(a-b+c)=a^2+b^2+c^2$ ہو تب دکھائیے کہ a، b، c اعداد مسلسل تناسب میں ہیں۔

(5) اگر $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$ اور $a, b, c > 0$ ہو تب ثابت کیجیے کہ

(i) $(a+b+c)(b-c)=ab-c^2$

(ii) $(a^2+b^2)(b^2+c^2)=(ab+bc)^2$

(iii) $\frac{a^2+b^2}{ab}=\frac{a+c}{b}$

(6) $\frac{x+y}{x-y}$ اور $\frac{x^2-y^2}{x^2y^2}$ کا ہندسی وسط رکن معلوم کیجیے۔

عملی کام :

جغرافیہ کی کتاب میں بھارت کا سیاسی نقشہ دیکھیے ۔اس میں دیے ہوئے فاصلہ کے پیمانہ پر غور کیجیے۔اس کی مدد سے مختلف شہروں کے درمیان مستقیم خطی فاصلہ معلوم کیجیے۔

مثلاً : (i) نئی دہلی سے بنگلور (ii) ممبئی سے کولکاتہ (iii) جے پور سے بھونیشور

مجموعہ سوالات 4

(1) درج ذیل سوالوں کے لیے متبادل جواب سے صحیح متبادل جواب منتخب کیجیے۔

(i) اگر $6:5=y:20$ ہو تب y کی قیمت درج ذیل میں سے کون سی ہے؟

(A) 15 (B) 24 (C) 18 (D) 22.5

(ii) 1 ملی لٹر کی 1 سینٹی میٹر سے نسبت ذیل میں سے کون سی ہے؟

(A) 1 : 100 (B) 10 : 1 (C) 1 : 10 (D) 100 : 1

(iii) جتن، نیتن اور محسن کی عمریں بالترتیب 16، 24 اور 36 سال ہیں تو بتائیے نیتن کی عمر، محسن کی عمر سے کون سی نسبت ہے؟

(A) 3 : 2 (B) 2 : 3 (C) 4 : 3 (D) 3 : 4

(iv) شبھم اور انیل کے درمیان 5 : 3 کی نسبت میں 24 کیلے تقسیم کیے، تو بتائیے شبھم کو کتنے کیلے ملے؟

(A) 8 (B) 15 (C) 12 (D) 9

(v) 4 اور 25 کا ہندسی وسط رکن درج ذیل میں سے کون سا ہے؟

(A) 6 (B) 8 (C) 10 (D) 12

(2) درج ذیل دیئے ہوئے اعداد کی جوڑیوں میں پہلے عدد کی دوسرے عدد سے نسبت مختصر ترین صورت میں لکھیے۔

(i) 21 ,48 (ii) 36, 90 (iii) 65, 117 (iv) 138, 161 (v) 114, 133

(3) درج ذیل نسبتوں کو مختصر ترین صورت میں لکھیے۔

(i) دائرہ کے نصف قطر اور قطر کے درمیان نسبت

(ii) مستطیل کی لمبائی 4 سم اور چوڑائی 3 سم ہو تو مستطیل کے وتر کی اس کی لمبائی سے نسبت

(iii) مربع کا ضلع 4 سم ہو تب مربع کا احاطہ کی اس کے رقبہ سے نسبت

(4) بتائیے کہ ذیل کے اعداد مسلسل تناسب میں ہیں یا نہیں؟

(i) 2 , 4, 8 (ii) 1, 2, 3 (iii) 9, 12, 16 (iv) 3, 5, 8

(5) a، b، c یہ تینوں اعداد مسلسل تناسب میں ہیں۔ اگر $a = 3$ اور $c = 27$ ہو تب $b =$ کتنا ؟

(6) ذیل کی نسبتوں کی فی صدی میں تحویل کیجیے۔

(i) 37 : 500 (ii) $\frac{5}{8}$ (iii) $\frac{22}{30}$ (iv) $\frac{5}{16}$ (v) $\frac{144}{1200}$

(7) پہلی مقدار کی دوسری مقدار سے نسبت مختصر ترین صورت میں لکھیے۔

(i) 1024MB, 1.2GB ... [(1024 MB = 1 GB)]

(ii) 17 روپے , 25 روپے 60 پیسے

(iii) 5 درجن , 120 عدد

(iv) 4 مربع میٹر , 800 مربع سم

(v) 1.5 کلوگرام , 2500 گرام

(8) اگر $\frac{a}{b} = \frac{2}{3}$ ہو تب ذیل کی عبارتوں کی قیمت معلوم کیجیے۔

(i) $\frac{4a+3b}{3b}$ (ii) $\frac{5a^2+2b^2}{5a^2-2b^2}$

(iii) $\frac{a^3+b^3}{b^3}$ (iv) $\frac{7b-4a}{7b+4a}$

(9) a، b، c، d تناسب میں ہو تو ثابت کیجیے کہ

(i) $$\frac{11a^2+9ac}{11b^2+9bd} = \frac{a^2+3ac}{b^2+3bd}$$

(ii*) $$\sqrt{\frac{a^2+5c^2}{b^2+5d^2}} = \frac{a}{b}$$

(iii) $$\frac{a^2+ab+b^2}{a^2-ab+b^2} = \frac{c^2+cd+d^2}{c^2-cd+d^2}$$

(10) a، b، c مسلسل تناسب میں ہوتو ثابت کیجیے۔

(i) $\dfrac{a}{a+2b}=\dfrac{a-2b}{a-4c}$ (ii) $\dfrac{b}{b+c}=\dfrac{a-b}{a-c}$

(11) حل کیجیے : $\dfrac{12x^2+18x+42}{18x^2+12x+58}=\dfrac{2x+3}{3x+2}$

(12) اگر $\dfrac{x+3z}{2y-3x}=\dfrac{z-y}{z-x}=\dfrac{2x-3y}{3z+y}$ ہوتو ثابت کیجیے کہ ہر نسبت $\dfrac{x}{y}$ کے مساوی ہے۔

(13) اگر $\dfrac{ax+by}{a^2+b^2}=\dfrac{cz+ax}{c^2+a^2}=\dfrac{by+cz}{b^2+c^2}$ ہوتو ثابت کیجیے کہ $\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c}$