



# Polynomials کثیررکنی

3

آئیے، سیکھیں



- کثیررکنی کا درجہ
- کثیررکنیوں پر عمل
- کثیررکنی کی تعریف
- کثیررکنی کی قیمت
- ترکیبی تقسیم
- مسئلہ باقی

آئیے، بحث کریں



یہ تمام الجبری عبارتیں ہیں۔  $6, m^2 + 2n^3 - \sqrt{3}m^5, p^3 - \frac{1}{2}p^2 + p$

استاد : عزیز طلبہ،  $6, m^2 + 2n^3 - \sqrt{3}m^5, p^3 - \frac{1}{2}p^2 + p$  ہر الجبری عبارت سے ایک ایک رکن لیجیے۔ اس رکن میں متغیروں کی قوت بتائیے۔

مادھوری :  $p^3 - \frac{1}{2}p^2 + p$  اس عبارت میں ارکان کے متغیروں کی قوت بالترتیب 1, 2, 3 ہیں۔

دویک : سر،  $m^2 + 2n^3 - \sqrt{3}m^5$  اس عبارت میں ارکان کے متغیروں کی قوت بالترتیب 5, 3, 2 ہیں۔

روہت : سر، 6 اس عبارت میں متغیر نہیں ہے۔ یہاں  $6 = 6 \times 1 = 6 \times x^0$  لکھ سکتے ہیں، اس لیے 6 اس عبارت میں متغیر کی قوت 0 ہے۔

استاد : یعنی مذکورہ بالا سب عبارتوں میں متغیروں کی قوت مثبت صحیح عدد یا صفر یعنی مکمل اعداد ہیں۔

جس الجبری عبارت میں متغیروں کی قوت مکمل اعداد ہوتی ہیں۔ اس عبارت کو کثیررکنی (Polynomials) کہتے ہیں۔ 6 بھی کثیررکنی ہے۔

6, -7, 0,  $\frac{1}{2}, \sqrt{3}$  وغیرہ اعداد کو مستقل کثیررکنی (Constant Polynomials) کہتے ہیں۔

کیا  $\sqrt{y} + 5$  اور  $\frac{1}{y} - 3$  یہ کثیررکنی ہیں؟

سارا : سر،  $\sqrt{y} + 5$  یہ کثیررکنی نہیں ہے۔ کیوں کہ  $\sqrt{y} + 5 = y^{\frac{1}{2}} + 5$  اس میں  $y$  کی قوت  $\frac{1}{2}$  ہے جو مکمل عدد نہیں ہے۔

جان : سر،  $\frac{1}{y} - 3$  یہ بھی کثیررکنی نہیں ہے۔ کیوں کہ  $\frac{1}{y} - 3 = y^{-1} - 3$ ، یہاں  $y$  کی قوت -1 ہے، جو مکمل عدد نہیں ہے۔

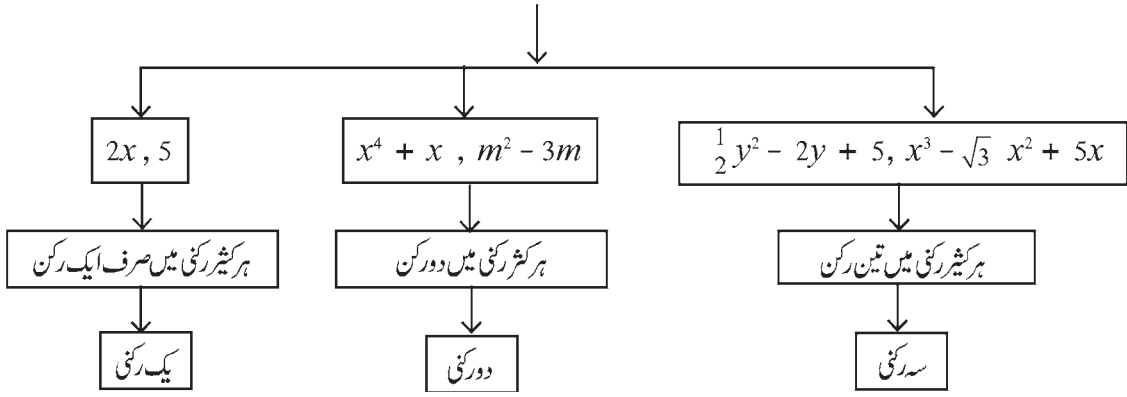
استاد : ایسی کوئی بھی پانچ الجبری عبارت لکھیے جو کثیررکنی نہیں ہے۔ وہ کثیررکنی کیوں نہیں ہے؟ وضاحت کیجیے۔

درج ذیل سوالات کے جوابات مختلف مثالیں دے کر اور ان پر بحث کر کے معلوم کیجیے۔

• کیا ہر الجبری عبارت کثیررکنی ہوتی ہے؟

• کیا ہر کثیررکنی الجبری عبارت ہوتی ہے؟

کثیررکنیوں کی قسمیں (ارکان کی تعداد کی لحاظ سے)



ایک متغیری کثیررکنی کو اس میں موجود متغیر کے لحاظ سے  $p(x)$ ،  $q(m)$ ،  $r(y)$  اس طرح ظاہر کرتے ہیں۔

$$\text{مثلاً } 3 - x^3 + 5x + 2x^2 = p(x) \text{، } m^2 + \frac{1}{2}m - 7 = q(m) \text{، } y^2 + 5 = r(y)$$

آئیے سمجھ لیں



ایک متغیری کثیررکنی کا درجہ (Degree of a polynomial in one variable)

استاد :  $2x^7 - 5x + 9$  اس کثیررکنی میں متغیر کی سب سے بڑی قوت کون سی ہے؟

چیجا : سر، سب سے بڑی قوت 7 ہے۔

استاد : ایک متغیری کثیررکنی میں متغیر کی سب سے بڑی قوت کو اس کثیررکنی کا درجہ کہتے ہیں۔

پھر بتائیے تو، اوپر دی ہوئی کثیررکنی کا درجہ کتنا ہے؟

اشوک : سر،  $2x^7 - 5x + 9$  اس کثیررکنی کا درجہ 7 ہے۔

استاد : 10، اس کثیررکنی کا درجہ کتنا ہے؟

رادھا :  $10 = 10 \times 1 = 10 \times x^0$  لہذا کثیررکنی 10 کا درجہ '0' ہے۔

استاد : 10 کی طرح کسی بھی غیر صفر مستقل کثیررکنی کا درجہ '0' ہوتا ہے۔

صفر کثیررکنی کا درجہ طے نہیں کیا جاسکتا۔

ایک سے زائد متغیروں والی کثیررکنی کا درجہ

کثیررکنی میں ہر رکن میں موجود متغیروں کی قوتوں کی جو جمع سب سے زیادہ ہوتی ہے، اس جمع کو اس کثیررکنی کا درجہ کہتے ہیں۔

مثال :  $3m^3n^6 + 7m^2n^3 - mn$  یہ دو متغیروں والی کثیررکنی ہے۔ اس کثیررکنی کا درجہ 9 ہے۔

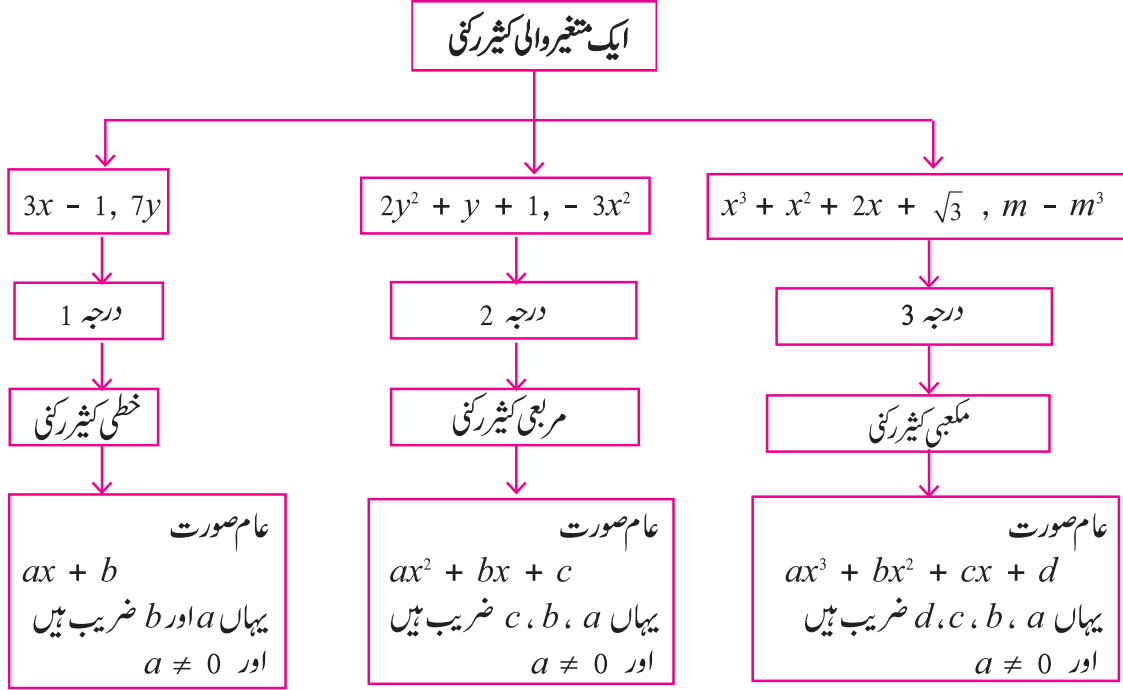
( $2 + 3 = 5$ ،  $1 + 1 = 2$ ) قوتوں کی جمع، یہاں)

عملی کام I : متغیر  $x$  اور درجہ 5 والی ایک رکنی، دو رکنی اور سہ رکنی ہر ایک کی ایک مثال لکھیے۔

یک رکنی:  ، دو رکنی  ، سہ رکنی

عملی کام II : 5 درجہ والی دو متغیری دو رکنی کی ایک مثال بنائیے۔

کثیر رکنی کی قسمیں (درجہ کی لحاظ سے)



کثیر رکنی :  $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$  یہ  $x$  متغیر کی  $n$  درجہ والی کثیر رکنی ہے۔

یہاں  $a_n, a_{n-1}, \dots, a_2, a_1, a_0$  یہ تمام ضریب ہیں اور  $a_n \neq 0$

کثیر رکنی کی معیاری صورت، ضریبی صورت اور قوت والی صورت

(Standard form, Coefficient form and Index form of a Polynomial)

یہ  $p(x) = x - 3x^2 + 5 + x^4$  اس کثیر رکنی کو  $x$  کی قوت کی اترتی ترتیب میں  $x^4 - 3x^2 + x + 5$  لکھ سکتے ہیں۔ یہ معیاری صورت ہے اس کثیر رکنی میں  $x$  کی تیسری قوت والا رکن نہیں ہے۔ لہذا اسے  $0x^3$  فرض کریں گے۔ اس رکن کو لے کر  $p(x)$  کثیر رکنی کو  $x^4 + 0x^3 - 3x^2 + x + 5$  لکھ سکتے ہیں۔ اس طرح قوتوں کی اترتی ترتیب میں لکھی ہوئی اور قوتوں کے تمام ارکان اترتی ترتیب والی کثیر رکنی کو قوت نمائی صورت کہتے ہیں۔

کبھی کبھی قوت نمائی صورت والی کثیررکنی کے متغیر غائبانہ طور پر فرض کر کے اس کے صرف ضریب کو ترتیب سے لکھتے ہیں، مثلاً  $x^3 - 3x^2 + 0x - 8$  اس کثیررکنی کو  $(1, -3, 0, -8)$  کی طرح لکھتے ہیں۔ اس کو کثیررکنی کی ضریبی صورت کہتے ہیں۔  
یعنی  $4y^4 + 0y^3 - 5y^2 + 0y + 1$  اس کثیررکنی کو  $y$  متغیر کا استعمال کر کے قوت نمائی صورت میں  $4y^4 - 5y^2 + 1$  لکھ سکتے ہیں۔ اس صورت کو کثیررکنی کی قوت نمائی صورت کہتے ہیں۔

### کثیررکنی کی ضریبی صورت اور معیاری صورت

مثال :  $p(m) = 3m^5 - 7m + 5m^3 + 2$

$3m^5 + 5m^3 - 7m + 2$	کثیررکنی کو معیاری صورت میں لکھیے۔
$3m^5 + 0m^4 + 5m^3 + 0m^2 - 7m + 2$	کثیررکنی میں غیر موجود رکن کو 0 ضریب لے کر شامل کیجیے اور قوت نمائی صورت میں لکھیے۔
$(3, 0, 5, 0, -7, 2)$	دی ہوئی کثیررکنی کی ضریبی صورت لکھیے۔
5	کثیررکنی کا درجہ لکھیے۔

مثال (1)  $x^3 + 3x - 5$  اس کثیررکنی کو ضریبی صورت میں لکھیے۔

حل :  $x^3 + 3x - 5 = x^3 + 0x^2 + 3x - 5$

دی ہوئی کثیررکنی کی ضریبی صورت  $(1, 0, 3, -5)$

مثال (2)  $(2, -1, 0, 5, 6)$  اس ضریبی صورت کو کثیررکنی کی قوت نمائی صورت میں لکھیے۔

حل : کثیررکنی کی ضریبی صورت  $(2, -1, 0, 5, 6)$  ہے۔

$\therefore$  قوت نمائی صورت میں کثیررکنی =  $2x^4 - x^3 + 0x^2 + 5x + 6$

=  $2x^4 - x^3 + 5x + 6$

### مشقی سیٹ 3.1

(1) ذیل کی عبارت کثیررکنی ہے یا نہیں لکھیے۔ وضاحت کیجیے۔

(i)  $y + \frac{1}{y}$  (ii)  $2 - 5\sqrt{x}$  (iii)  $x^2 + 7x + 9$

(iv)  $2m^2 + 7m - 5$  (v) 10

(2) درج ذیل ہر کثیررکنی میں  $m^3$  کا ضریب لکھیے۔

(i)  $m^3$  (ii)  $\frac{-3}{2} + m - \sqrt{3}m^3$  (iii)  $\frac{-2}{3}m^3 - 5m^2 + 7m - 1$

(3) درج ذیل معلومات کی بناء پر  $x$  متغیر کا استعمال کر کے ہر ایک کثیررکنی لکھیے۔

(i) درجہ 7 والی یک رکنی (ii) درجہ 35 والی دورکنی (iii) درجہ 8 والی سدرکنی

(4) درج ذیل ہر کثیررکنی کا درجہ لکھیے۔

(i)  $\sqrt{5}$       (ii)  $x^0$       (iii)  $x^2$       (iv)  $\sqrt{2}m^{10} - 7$       (v)  $2p - \sqrt{7}$

(vi)  $7y - y^3 + y^5$       (vii)  $xyz + xy - z$       (viii)  $m^3n^7 - 3m^5n + mn$

(5) درج ذیل کثیررکنیوں کی خطی، مربعی اور مکعبی کثیررکنیوں میں جماعت بندی کیجیے۔

(i)  $2x^2 + 3x + 1$       (ii)  $5p$       (iii)  $\sqrt{2}y - \frac{1}{2}$

(iv)  $m^3 + 7m^2 + \frac{5}{2}m - \sqrt{7}$       (v)  $a^2$       (vi)  $3r^3$

(6) درج ذیل کثیررکنیوں کو معیاری صورت میں لکھیے۔

(i)  $m^3 + 3 + 5m$       (ii)  $-7y + y^5 + 3y^3 - \frac{1}{2} + 2y^4 - y^2$

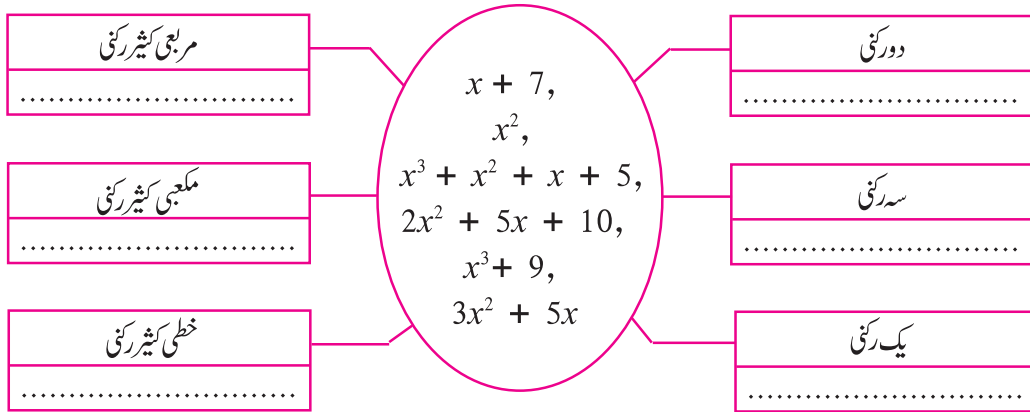
(7) درج ذیل کثیررکنیوں کو ضربی صورت میں لکھیے۔

(i)  $x^3 - 2$       (ii)  $5y$       (iii)  $2m^4 - 3m^2 + 7$       (iv)  $-\frac{2}{3}$

(8) درج ذیل ضربی صورت والی کثیررکنیوں کو  $x$  متغیر کا استعمال کر کے معیاری صورت میں لکھیے۔

(i) (1, 2, 3)      (ii) (5, 0, 0, 0, -1)      (iii) (-2, 2, -2, 2)

(9) ذیل میں کچھ کثیررکنیاں دی ہوئی ہیں۔ وہ کثیررکنی دیے ہوئے خانوں میں مناسب جگہ لکھیے۔



آئیے ذرا یاد کریں



(1) دو مشابہ الجبری ارکان کی جمع یا تفریق کرتے وقت ان کے ضربیوں کی جمع یا تفریق کرتے ہیں۔

$$5m^3 - 7m^3 = (5 - 7)m^3 = -2m^3 \quad \text{مثلاً}$$

(2) دو الجبری ارکان کا ضرب یا تقسیم کرتے وقت ان کے ضربیوں کی ضرب یا تقسیم کرتے ہیں۔ اسی طرح قوت نما کے اصولوں کا بھی استعمال ہوتا ہے۔

$$-4y^3 \times 2y^2z = -8y^5z ; 12a^2b \div 3ab^2 = \frac{4a}{b} \quad \text{مثلاً}$$



## کثیررکنیوں پر عمل (Operations on polynomials)

کثیررکنیوں کی جمع، تفریق، ضرب اور تقسیم یہ اعمال الجبری عبارتوں پر بھی اسی طرح کرتے ہیں۔

مثال (1)  $7a^2 + 5a + 6$  میں سے  $5a^2 - 2a$  تفریق کیجیے۔

$$(7a^2 + 5a + 6) - (5a^2 - 2a) \quad \text{حل :}$$

$$= 7a^2 + 5a + 6 - 5a^2 + 2a$$

$$= \underline{7a^2 - 5a^2} + \underline{5a + 2a} + 6$$

$$= 2a^2 + 7a + 6$$

$$- 2a \times 5a^2 = -10a^3 \quad \text{مثال (2)}$$

$$(m^2 - 5) \times (m^3 + 2m - 2) = ? \quad \text{مثال (3)}$$

$$(m^2 - 5) \times (m^3 + 2m - 2) \quad \text{حل :}$$

$$= m^2 (m^3 + 2m - 2) - 5 (m^3 + 2m - 2) \dots \text{ (پہلی کثیررکنی کے ہر رکن سے دوسری کثیررکنی کو ضرب دیا گیا۔)}$$

$$= m^5 + 2m^3 - 2m^2 - 5m^3 - 10m + 10$$

$$= m^5 + 2m^3 - 5m^3 - 2m^2 - 10m + 10 \quad \dots \text{ (مشابہ ارکان کی یکجا ترتیب دیا۔)}$$

$$= m^5 - 3m^3 - 2m^2 - 10m + 10$$

یاد رکھیے کہ یہاں حاصل ضرب کا درجہ 5 ہے۔

مثال (4)  $3m^2n + 5mn^2 - 7mn$  اور  $2m^2n - mn^2 + mn$  کی جمع کیجیے۔

$$(3m^2n + 5mn^2 - 7mn) + (2m^2n - mn^2 + mn) \quad \text{حل :}$$

$$= 3m^2n + 5mn^2 - 7mn + 2m^2n - mn^2 + mn$$

$$= \underline{3m^2n + 2m^2n} + \underline{5mn^2 - mn^2} - \underline{7mn + mn} \quad \dots \text{ (مشابہ ارکان کی یکجا ترتیب دی گئی۔)}$$

$$= 5m^2n + 4mn^2 - 6mn \quad \dots \text{ (مشابہ ارکان کی جمع کیے۔)}$$

## آئیے ذرا یاد کریں



ایک کثیررکنی کا درجہ 3 اور دوسری کثیررکنی کا درجہ 5 ہو تب کثیررکنیوں کے حاصل ضرب کا درجہ کتنا ہوگا؟

مضروب اور مضروب فیہ کثیررکنیوں کا درجہ اور ان کے حاصل ضرب کا درجہ کے درمیان کون سا تعلق ہے؟

مثال (5)  $(2 + 2x^2) \div (x + 2)$  تقسیم کیجیے اور 'باقی + خارج قسمت  $\times$  مقسوم الیہ = مقسوم' کی صورت میں جواب لکھیے۔

حل : پہلے  $p(x) = 2 + 2x^2$  اس مقسوم کثیررکنی کو معیاری صورت میں لکھیے۔

$$\therefore 2 + 2x^2 = 2x^2 + 0x + 2$$

$$\begin{array}{r} 2x - 4 \\ x + 2 \overline{) 2x^2 + 0x + 2} \\ \underline{- 2x^2 + 4x} \phantom{+ 2} \\ - 4x + 2 \\ \underline{- - 4x - 8} \\ 10 \end{array}$$

طریقہ I : باقی + خارج قسمت  $\times$  مقسوم الیہ = مقسوم

$$2 + 2x^2 = (x + 2) \times (2x - 4) + 10$$

$$q(x), \text{ مقسوم الیہ} = (x + 2)$$

$$s(x), \text{ خارج قسمت} = 2x - 4, r(x), \text{ باقی} = 10$$

$$\therefore p(x) = q(x) \times s(x) + r(x)$$

طریقہ II : خارج قسمت کا خطی طریقہ

$$(2x^2 + 2) \div (x + 2) \text{ تقسیم کیجیے۔}$$

رکن  $2x^2$  حاصل کرنے کے لیے  $(x + 2)$  کو  $2x$  سے ضرب دے کر  $4x$  تفریق کیجیے۔

$$2x(x+2) - 4x = 2x^2$$

$$\therefore \text{مقسوم} = 2x^2 + 2 = 2x(x+2) - 4x + 2 \quad \dots (I)$$

اب  $-4x$  رکن حاصل کرنے کے لیے  $(x + 2)$  کو  $-4$  سے ضرب دیں اور  $8$  حاصل کریں گے۔

$$-4(x+2) + 8 = -4x$$

$$\therefore (2x^2 + 2) = 2x(x+2) - 4(x+2) + 8 + 2 \quad \dots (\text{بیان I سے})$$

$$\therefore (2x^2 + 2) = (x + 2) (2x - 4) + 10$$

$$\text{باقی} + \text{خارج قسمت} \times \text{مقسوم الیہ} = \text{مقسوم}$$



### اقلیس کے تقسیم کا اصول

اگر  $s(x)$  اور  $p(x)$  یہ دو کثیررکنی ہو اور  $s(x)$  کا درجہ  $p(x)$  کے درجہ کے مساوی یا اس سے زیادہ ہو، اور  $s(x)$  کو  $p(x)$  سے تقسیم کریں تو حاصل ہونے والا خارج قسمت  $q(x)$  ہو تب،

$$s(x) = p(x) q(x) + r(x)$$

یہاں  $r(x) = 0$  یا  $r(x)$  کا درجہ  $p(x)$  کے درجے سے کم ہوتا ہے۔

### مشقی سیٹ 3.2

1. دیے ہوئے حروف کا استعمال کر کے جوابات لکھیے۔

(i) ناند پور گاؤں میں  $a$  درخت ہیں۔ درختوں کی تعداد ہر سال  $b$  سے بڑھتی ہے تو  $x$  سال بعد اس گاؤں میں کتنے درخت ہو جائیں گے؟

(ii) قواعد کے لیے ایک قطار میں  $y$  بچے، اس طرح  $x$  قطاریں بنائی گئیں۔ تو بتائیے قواعد کے لیے کل کتنے بچے حاضر تھے؟

(iii) ایک دو ہندسی عدد کے اکائی اور دہائی مقام کے ہندسے بالترتیب  $m$  اور  $n$  ہیں تو اس دو ہندسی عدد کو ظاہر کرنے والا کثیررکنی کون سا؟

2. درج ذیل کثیررکنیوں کی جمع کیجیے۔

(i)  $x^3 - 2x^2 - 9$  ;  $5x^3 + 2x + 9$

(ii)  $-7m^4 + 5m^3 + \sqrt{2}$  ;  $5m^4 - 3m^3 + 2m^2 + 3m - 6$

(iii)  $2y^2 + 7y + 5$  ;  $3y + 9$  ;  $3y^2 - 4y - 3$

3. پہلی کثیررکنی سے دوسری کثیررکنی تفریق کیجیے۔

(i)  $x^2 - 9x + \sqrt{3}$  ;  $-19x + \sqrt{3} + 7x^2$

(ii)  $2ab^2 + 3a^2b - 4ab$  ;  $3ab - 8ab^2 + 2a^2b$

4. درج ذیل کثیررکنیوں کی ضرب کیجیے۔

(i)  $2x$  ;  $x^2 - 2x - 1$  (ii)  $x^5 - 1$  ;  $x^3 + 2x^2 + 2$  (iii)  $2y + 1$  ;  $y^2 - 2y^3 + 3y$

5. پہلی کثیررکنی کو دوسری کثیررکنی سے تقسیم کیجیے اور جواب 'باقی + خارج قسمت  $\times$  مقسوم الیہ = مقسوم' کی صورت میں لکھیے۔

(i)  $x^3 - 64$  ;  $x - 4$  (ii)  $5x^5 + 4x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 2$  ;  $x^2 - x$

6. درج ذیل معلومات کثیررکنی کی صورت میں لکھیے۔ کثیررکنی کو مختصر ترین صورت دیجیے۔

ایک مستطیلی کھیت کی لمبائی  $(2a^2 + 3b^2)$  میٹر اور چوڑائی  $(a^2 + b^2)$  میٹر ہے۔ کسان نے کھیت میں  $(a^2 - b^2)$  میٹر ضلع والے مربع جگہ پر گھر

تعمیر کیا، تو بتائیے باقی ماندہ کھیت کا رقبہ کتنا ہے؟



**عملی کام :** درج ذیل عبارت پڑھیے اور خالی خانوں میں صحیح عبارت لکھیے اور بحث کیجیے۔

شٹلر گاؤں میں بنجر زمین پر کھیتی کرنے والے گونیند کی 5 ایکڑ زمین ہے۔ اس کے گھر میں بیوی، 2 بچے اور اس کی ضعیف والدہ ہے۔ اس نے کھیتی کے لیے بینک سے سوا لاکھ روپے قرض 10 فیصدی فی سال شرح سے لیے۔ اس نے کھیت کی  $x$  ایکڑ زمین میں سویا بین اور  $y$  ایکڑ زمین میں کپاس اور تور (ارہر) کی فصل نکالی۔ کھیتی کے لیے ہونے والا خرچ ذیل کے مطابق ہے۔

بیج کے لیے اس نے کل ₹10,000 دیے۔ سویا بین کی فصل کے لیے کھاد اور کیڑے مار دوا  $2000x$  روپے، مزدوری اور مشاگت کے لیے  $4000x^2$  روپے خرچ ہوا۔ کپاس اور تور کی فصل کے لیے کھاد اور کیڑے مار دوا پر  $8000y$  روپے، اور مزدوری اور مشاگت کے لیے  $9000y^2$  روپے خرچ ہوا۔

کھیتی کے لیے کل کتنا خرچ ہوا، اسے  $x$  اور  $y$  کا استعمال کر کے لکھیے۔

$$\boxed{\phantom{0000}} + \boxed{2000x} + \boxed{4000x^2} + \boxed{8000y} + \boxed{\phantom{0000}} \text{ روپے}$$

اس کے کھیت میں سویا بین کی  $5x^2$  کوئٹل پیداوار ہوئی۔ وہ ₹2800 فی کوئٹل کے نرخ سے فروخت ہوا۔ کپاس کی  $\frac{5}{3}y^2$  کوئٹل پیداوار ہوئی اور ₹5000 فی کوئٹل کے نرخ سے فروخت ہوئی۔ تور  $4y$  کوئٹل پیداوار ہوئی اور ₹4000 فی کوئٹل کے نرخ سے فروخت ہوئی۔ تمام کھیتی کی پیداوار فروخت ہونے پر اس سے کل کتنے روپے آمدنی ہوئی اسے  $x$  اور  $y$  کے ارکان کی صورت میں لکھیے۔

$$\boxed{\phantom{0000}} + \boxed{\phantom{0000}} + \boxed{\phantom{0000}} \text{ روپے}$$

آئیے سمجھ لیں

ترکیبی تقسیم کا طریقہ (Synthetic Division Method)

ہمیں معلوم ہے کہ ایک کثیررکنی کو دوسری کثیررکنی سے کس طرح تقسیم کرتے ہیں۔ اب ہم مقسوم الیہ  $x + a$  یا  $x - a$  کثیررکنی ہو تو تقسیم کے آسان طریقے کو سمجھیں گے۔

مثال (1) : کثیررکنی  $(3x^3 + 2x^2 - 1)$  کو  $(x + 2)$  سے تقسیم کیجیے۔

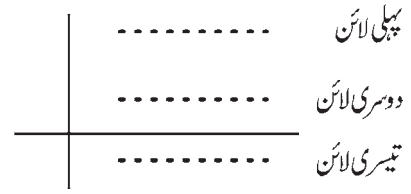
حل : پہلے مقسوم کثیررکنی کو قوت نمائی صورت میں اور بعد میں ضربی صورت میں لکھیں گے۔

$$\text{مقسوم کی معیاری صورت} = 3x^3 + 2x^2 - 1 = 3x^3 + 2x^2 + 0x - 1$$

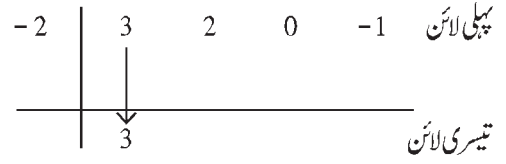
$$\therefore \text{مقسوم کی ضربی صورت} = (3, 2, 0, -1)$$

$$\text{مقسوم الیہ کثیررکنی} = x + 2$$

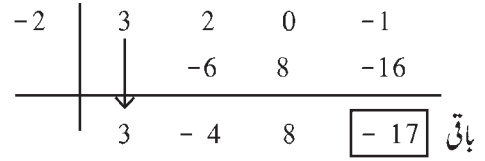
درج ذیل مراحل کے مطابق ترکیبی تقسیم کے طریقے سے تقسیم کریں گے۔  
 (1) بازو میں دیے ہوئے کہ مطابق ایک عمودی اور ایک افقی اس طرح دو خط کھینچیں گے۔



(2) مقسوم الیہ  $x + 2$  ہو تو 2 کے متضاد عدد -2  
 پہلی لائن میں عمودی خط کے بائیں جانب -2 لکھیں گے۔  
 پہلی لائن میں مقسوم کثیررکنی کے ضربی صورت عمودی خط کے دائیں جانب لکھیں گے۔  
 (3) افقی خط کے نیچے یعنی تیسری لائن میں مقسوم کا پہلا ضربی ویسا ہی لکھیں گے۔



(4) تیسری لائن میں 3 اور مقسوم الیہ کے -2 کا حاصل ضرب -6 - اسے  
 دوسری لائن میں 2 ضربی کے نیچے لکھیں گے۔ بعد میں 2 اور -6 کی جمع  
 -4 ، تیسری لائن میں افقی خط کے نیچے لکھیں گے۔



اسی طرح ضرب اور جمع کریں گے۔ آخر کی جمع کر کے آنے والا عدد ہی تقسیم کا باقی ہے۔ یہاں باقی -17 ہے۔  
 تیسری لائن میں آنے والا (3, -4, 8) یہ خارج قسمت کی ضربی صورت ہے۔

$$\therefore \text{خارج قسمت} = 3x - 4x + 8 \text{ اور باقی} = -17$$

$$\therefore 3x^3 + 2x^2 - 1 = (x + 2)(3x^2 - 4x + 8) - 17$$

اس طریقے کو ترکیبی تقسیم کا طریقہ کہتے ہیں۔  
 اس تقسیم کو خطی طریقہ سے ذیل کے مطابق کر سکتے ہیں۔

$$\begin{aligned} 3x^3 + 2x^2 - 1 &= 3x^2(x + 2) - 6x^2 + 2x^2 - 1 \\ &= 3x^2(x + 2) - 4x^2 - 1 \\ &= 3x^2(x + 2) - 4x^2 - 8x + 8x - 1 \\ &= 3x^2(x + 2) - 4x(x + 2) + 8x - 1 \\ &= 3x^2(x + 2) - 4x(x + 2) + 8x + 16 - 16 - 1 \\ &= 3x^2(x + 2) - 4x(x + 2) + 8(x + 2) - 17 \end{aligned}$$

$$\therefore 3x^3 + 2x^2 - 1 = (x + 2)(3x^2 - 4x + 8) - 17$$

مثال (2) تقسیم کیجیے :  $(2y^4 - 3y^3 + 5y - 4) \div (y - 1)$

حل : ترکیبی تقسیم کا طریقہ :  $2y^4 - 3y^3 + 5y - 4 = 2y^4 - 3y^3 + 0y^2 + 5y - 4$  = مقسوم

$(-1)$  کا متضاد عدد 1 ہے۔ ... ) مقسوم الیہ =  $y - 1$

1	2	-3	0	5	-4
		2	-1	-1	4
	2	-1	-1	4	0

باقی 0

خارج قسمت کی ضربی صورت  $(2, -1, -1, 4)$  ہے۔

$\therefore$  باقی = 0 اور  $\text{خارج قسمت} = 2y^3 - y^2 - y + 4$

$$\begin{aligned} \text{خطی طریقہ : } 2y^4 - 3y^3 + 5y - 4 &= 2y^3(y - 1) + 2y^3 - 3y^3 + 5y - 4 \\ &= 2y^3(y - 1) - y^2(y - 1) - y^2 + 5y - 4 \\ &= 2y^3(y - 1) - y^2(y - 1) - y(y - 1) + 4y - 4 \\ &= 2y^3(y - 1) - y^2(y - 1) - y(y - 1) + 4(y - 1) \\ &= (2y^3 - y^2 - y + 4)(y - 1) \end{aligned}$$

اسے دھیان میں رکھیں



ترکیبی تقسیم کے طریقے سے تقسیم کرتے وقت صرف  $x + a$  یا  $x - a$  کی صورت میں جس کثیررکنی کا درجہ 1 ہوتا ہے۔ اسے مقسوم الیہ کے طور پر لیتے ہیں۔

### مشقی سیٹ 3.3

• درج ذیل تقسیم ترکیبی تقسیم کے طریقے سے اور خطی طریقے سے کیجیے۔ خارج قسمت اور باقی لکھیے۔

(i)  $(2m^2 - 3m + 10) \div (m - 5)$  (ii)  $(x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 4x + 5) \div (x + 2)$

(iii)  $(y^3 - 216) \div (y - 6)$  (iv)  $(2x^4 + 3x^3 + 4x - 2x^2) \div (x + 3)$

(v)  $(x^4 - 3x^2 - 8) \div (x + 4)$  (vi)  $(y^3 - 3y^2 + 5y - 1) \div (y - 1)$

آئیے سمجھ لیں



کثیررکنی کی قیمت (Value of Polynomial)

کثیررکنی میں متغیر کی کوئی ایک قیمت رکھیں تو اس کثیررکنی کی بھی کوئی ایک قیمت حاصل ہوتی ہے۔ مثلاً  $x + 7$  کثیررکنی میں  $x$  کی قیمت 2 رکھیں تو اس کثیررکنی کی قیمت 9 حاصل ہوتی ہے۔

$p(x)$  کثیررکنی میں  $x$  کو  $a$  قیمت دے کر حاصل ہونے والی کثیررکنی کی قیمت  $p(a)$  سے ظاہر کرتے ہیں۔

مثال (1)  $p(x) = 2x^2 - 3x + 5$  کثیررکنی کی قیمت  $x = 2$  ہو تو معلوم کیجیے۔

حل :  $p(x) = 2x^2 - 3x + 5$  کثیررکنی

اس کثیررکنی میں  $x = 2$  رکھنے پر

$$\begin{aligned}\therefore p(2) &= 2 \times 2^2 - 3 \times 2 + 5 \\ &= 2 \times 4 - 6 + 5 \\ &= 8 - 6 + 5 \\ \therefore p(2) &= 7\end{aligned}$$

$\therefore x = 2$  ہے تب کثیررکنی کی قیمت 7 ہے۔

مثال (2)  $p(y) = 2y^3 - 2y + \sqrt{7}$  ہو تو کثیررکنی  $y = -2$  کی قیمت معلوم کیجیے۔

حل :  $p(y) = 2y^3 - 2y + \sqrt{7}$

$$\begin{aligned}\therefore p(-2) &= 2 \times (-2)^3 - 2 \times (-2) + \sqrt{7} \\ &= 2 \times (-8) - 2 \times (-2) + \sqrt{7} \\ &= -16 + 4 + \sqrt{7} \\ &= -12 + \sqrt{7}\end{aligned}$$

$\therefore y = -2$  ہو تو کثیررکنی کی قیمت  $-12 + \sqrt{7}$  ہے۔

مثال (3)  $p(x) = 2x^2 - x^3 + x + 2$  کثیررکنی کے لیے  $p(0)$  معلوم کیجیے۔

حل :  $p(x) = 2x^2 - x^3 + x + 2$

$$\begin{aligned}\therefore p(0) &= 2 \times 0^2 - 0^3 + 0 + 2 \\ &= 2 \times 0 - 0 + 0 + 2 \\ &= 2\end{aligned}$$

مثال (4) اگر کثیررکنی  $m^2 - am + 7$  کی قیمت  $m = -1$  لینے پر 10 ہوتی ہے تب  $a$  کی قیمت معلوم کیجیے۔

حل :

$\begin{aligned}p(m) &= m^2 - am + 7 \\ \therefore p(-1) &= (-1)^2 - a \times (-1) + 7 \\ &= 1 + a + 7 \\ &= 8 + a\end{aligned}$		<p>(دیا ہوا ہے) ... <math>p(-1) = 10</math> لیکن</p> $\begin{aligned}\therefore 8 + a &= 10 \\ \therefore a &= 10 - 8 \\ \therefore a &= 2\end{aligned}$
--	--	--

### مشقی سیٹ 3.4

(1)  $x = 0$  ہو تو  $x^2 - 5x + 5$  کثیررکنی کی قیمت معلوم کیجیے۔

(2) اگر  $p(y) = y^2 - 3\sqrt{2}y + 1$  ہو تب  $p(3\sqrt{2})$  معلوم کیجیے۔

(3) اگر  $p(m) = m^3 + 2m^2 - m + 10$  ہو تب  $p(a) + p(-a) = ?$

(4) اگر  $p(y) = 2y^3 - 6y^2 - 5y + 7$  ہو تب  $p(2)$  معلوم کیجیے۔



متغیر کی کوئی ایک قیمت کے لیے کثیررکنی کی قیمت معلوم کرتے وقت ہر رکن میں  $x$  کی جگہ دی ہوئی قیمت رکھ کر اس کثیررکنی (عبارت) کی قیمت معلوم کرنا ہوتی ہے۔



### مسئلہ باقی (Remainder Theorem)

$p(x)$  کثیررکنی کو  $(x + a)$  سے تقسیم کریں تو بچ رہنے والا باقی اور اس کثیررکنی میں  $x$  کی قیمت  $-a$  دے کر حاصل ہونے والی کثیررکنی کی قیمت ان دونوں کا آپس میں تعلق ہوتا ہے۔ اس تعلق کو معلوم کرنے کے لیے ذیل کی مثال کا مطالعہ کیجیے۔

مثال :  $p(x) = 4x^2 - x + 2$  کو  $x + 1$  سے تقسیم دیجیے۔

[یہاں  $(x + a)$  یعنی  $(x + 1)$  کو ذہن نشین کیجیے]

یہاں،  $4x^2 - x + 2$  = مقسوم کثیررکنی

$x + 1$  = مقسوم الیہ کثیررکنی

$$\begin{array}{r}
 \text{خارج قسمت} \leftarrow 4x - 5 \\
 \text{مقسوم} \leftarrow x + 1 \Big) 4x^2 - x + 2 \\
 \underline{-(4x^2 + 4x)} \phantom{+ 2} \\
 -5x + 2 \\
 \underline{-( -5x - 5)} \\
 \phantom{-} 7 \leftarrow \text{باقی}
 \end{array}$$

خارج قسمت =  $4x - 5$

باقی = 7 ... (I)

اس مثال کو ترکیبی تقسیم کے طریقے سے کریں گے۔

$p(x) = (4, -1, 2)$  کی ضربی صورت

مقسوم الیہ =  $x + 1$

$1 = -1$  کا متضاد عدد

$$\begin{array}{r|rrrr}
 -1 & 4 & -1 & 2 & \\
 & & -4 & 5 & \\
 \hline
 & 4 & -5 & 7 & \text{باقی}
 \end{array}$$

خارج قسمت =  $4x - 5$

باقی = 7

اب ہم باقی اور مقسوم کثیررکنی کی قیمت کے درمیان تعلق کو دیکھیں گے۔

مقسوم کثیررکنی یعنی  $4x^2 - x + 2$  کی  $x = -1$  کے لیے قیمت معلوم کریں گے۔

$$p(x) = 4x^2 - x + 2$$

$$\therefore p(-1) = 4 \times (-1)^2 - (-1) + 2$$

$$= 4 \times 1 + 1 + 2$$

$$= 4 + 1 + 2$$

$$= 7$$

اس لیے  $x = -1$  ہو تب کثیررکنی  $p(x)$  کی قیمت 7 ہے۔ ... (II)

لہذا (I) اور (II) کی بنا پر،  $p(x) = 4x^2 - x + 2$  کثیررکنی کو  $(x+a)$  سے یعنی یہاں  $(x+1)$  سے تقسیم کرنے سے حاصل ہونے والا باقی

اور  $x = -1$  ہو تب  $p(x)$  کثیررکنی کی قیمت یعنی  $p(-1)$  یکساں ہیں۔

اس بناء پر درج ذیل خصوصیت سمجھ میں آتی ہے۔

$p(x)$  کثیررکنی کو  $(x+a)$  سے تقسیم کرنے پر بچ رہنے والا باقی  $p(-a)$  کے مساوی ہوتا ہے۔

یعنی  $p(x)$  میں  $x = -a$  رکھ کر آنے والی کثیررکنی کی قیمت کے مساوی ہوتی ہے۔

اس خصوصیت کو مسئلہ باقی کہتے ہیں۔

افلیدس کے تقسیم کا اصول استعمال کر کے اس خصوصیت کو ثابت کریں گے۔

$p(x)$  کو  $(x+a)$  سے تقسیم کریں تو

$$p(x) = q(x) \times (x+a) + r(x) \quad \dots [r(x) = \text{باقی اور } q(x) = \text{خارج قسمت}]$$

اگر  $r(x) \neq 0$ ، ہو تب اصول کے مطابق  $r(x)$  کا درجہ 1 سے کم یعنی 0 ہے۔ لہذا  $r(x)$  حقیقی عدد ہے۔

$\therefore r(-a)$  بھی حقیقی عدد ہے۔

$$p(x) = q(x) \times (x+a) + r(x) \quad \dots (1) \quad \text{اب،}$$

میں  $x = -a$  قیمت رکھ کر،

$$p(-a) = q(-a) \times (a-a) + r(-a)$$

$$= q(-a) \times 0 + r(-a) \quad \dots (2)$$

$$\therefore p(-a) = r(-a) \quad \dots [(1) \text{ اور } (2) \text{ سے}]$$

عملی کام : درج ذیل مثال کی تصدیق کیجیے۔

(1)  $p(x) = 3x^2 + x + 7$  کثیررکنی کو  $x + 2$  کثیررکنی سے تقسیم کیجیے اور باقی معلوم کیجیے۔

(2)  $x = -2$  ہو تب  $p(x) = 3x^2 + x + 7$  کثیررکنی کی قیمت معلوم کیجیے۔

(3) کیا اب تقسیم سے ملنے والا باقی،  $p(-2)$  کی قیمت کے برابر ہے؟

مزید ایک مثال لے کر مذکورہ طریقے سے تصدیق کیجیے۔

مثال (1)  $x^4 - 5x^2 - 4x$  کثیررکنی کو  $(x + 3)$  سے تقسیم دینے پر حاصل ہونے والا باقی معلوم کیجیے۔

ترکیبی تقسیم کے طریقے سے

معیاری صورت  $x^4 + 0x^3 - 5x^2 - 4x + 0$

ضربتی صورت  $= (1, 0, -5, -4, 0)$

-3	1	0	-5	-4	0
		-3	9	-12	48
	1	-3	4	-16	48

باقی = 48

مسئلہ باقی سے

حل :

$p(x) = x^4 - 5x^2 - 4x$  مقسوم کثیررکنی

مقسوم الیہ  $= x + 3$

$\therefore x = -3$

$\therefore p(x) = x^4 - 5x^2 - 4x$

$p(-3) = (-3)^4 - 5(-3)^2 - 4(-3)$

$= 81 - 45 + 12$

$p(-3) = 48$

مثال (2) مسئلہ باقی کا استعمال کر کے کثیررکنی  $x^3 - 2x^2 - 4x - 1$  کو  $(x - 1)$  سے تقسیم کر کے حاصل ہونے والا باقی معلوم کیجیے۔

$p(x) = x^3 - 2x^2 - 4x - 1$

حل :

مقسوم الیہ  $= x - 1$  ;  $\therefore x = 1$

$\therefore$  باقی، مسئلہ باقی سے  $p(1) = 1^3 - 2 \times 1^2 - 4 \times 1 - 1$

$= 1 - 2 \times 1 - 4 - 1$

$p(1) = 1 - 2 - 4 - 1 = -6$

$\therefore$  باقی = -6

(مسئلہ باقی کے لحاظ سے) ...

مثال (3) اگر  $t^3 - 3t^2 + kt + 50$  کثیررکنی کو  $t - 3$  سے تقسیم دینے پر باقی 62 بچتا ہو تب  $k$  کی قیمت معلوم کیجیے۔

حل : دی ہوئی کثیررکنی کو  $(t - 3)$  سے تقسیم کرنے پر باقی 62 بچتا ہے (دیا ہوا ہے۔) اس لیے دی ہوئی کثیررکنی کی قیمت  $t = 3$  رکھ کر معلوم کریں گے۔

$p(t) = t^3 - 3t^2 + kt + 50$

∴ مسئلہ باقی سے،

$$\begin{aligned}\therefore 3k + 50 &= 62 \\ \therefore 3k &= 62 - 50 \\ \therefore 3k &= 12 \\ \therefore k &= \frac{12}{3} \\ \therefore k &= 4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{باقی} = p(3) &= 3^3 - 3 \times 3^2 + k \times 3 + 50 \\ &= 27 - 3 \times 9 + 3k + 50 \\ &= 27 - 27 + 3k + 50 \\ &= 3k + 50\end{aligned}$$

لیکن باقی 62 دیا ہوا ہے۔

اسے دھیان میں رکھیں



مسئلہ باقی :  $p(x)$  کوئی بھی کثیررکنی ہو اور 'a' کوئی حقیقی عدد ہے اور اگر  $p(x)$  کو  $(x+a)$  سے تقسیم کریں تو حاصل ہونے والا باقی  $p(-a)$  کے برابر ہوتا ہے۔

$$p(x) = s(x)(x-a) + r(x) \quad \dots \text{ یا } r(x) < 1 \text{ کا درجہ ...}$$

اس مساوات میں  $x = a$  رکھ کر  $p(a) = 0 + r(a) = r(a)$  حاصل ہوتا ہے۔

∴  $r(a) = 0$  یا  $r(a) = 0$  کا درجہ، یعنی ایسا سمجھ میں آتا ہے کہ  $(x-a)$  کثیررکنی  $p(x)$  کا جز ضربی ہے۔

آئیے سمجھ لیں



مسئلہ جز ضربی (Factor Theorem)

اگر 21 کو 7 سے تقسیم کرتے ہیں تو باقی 0 آتا ہے۔ اس لیے ہم 7 کو 21 کا جز ضربی کہتے ہیں۔

اسی طرح دی ہوئی کثیررکنی کو مقسوم الیہ کثیررکنی سے تقسیم کریں تو باقی 0 آتا ہے تب اس کثیررکنی کو دی ہوئی کثیررکنی کا جز ضربی کہتے ہیں۔

مثال (2) کثیررکنی  $p(x) = x^3 + 4x - 5$  کو  $(x+2)$  سے تقسیم کریں تو آنے والا باقی معلوم کیجیے۔

طے کیجیے کہ  $(x+2)$  کثیررکنی  $p(x)$  کا جز ضربی ہے۔

$$p(x) = x^3 + 4x - 5 \quad \text{حل :}$$

$$p(-2) = (-2)^3 + 4(-2) - 5$$

$$p(-2) = -8 - 8 - 5$$

$$= -21$$

یہاں، مسئلہ باقی کے مطابق باقی -21 آیا ہے۔

یعنی، باقی  $\neq 0$

∴  $(x+2)$ ، کثیررکنی  $p(x)$  کا جز ضربی نہیں ہے۔

مثال (1) کثیررکنی  $p(x) = x^3 + 4x - 5$  کو  $(x-1)$  سے تقسیم کرنے سے آنے والا باقی معلوم کیجیے۔

طے کیجیے کہ  $(x-1)$  کثیررکنی  $p(x)$  کا جز ضربی ہے۔

$$p(x) = x^3 + 4x - 5 \quad \text{حل :}$$

$$p(1) = (1)^3 + 4(1) - 5$$

$$= 1 + 4 - 5$$

$$= 0$$

یہاں، مسئلہ باقی کے مطابق،  $0 =$  باقی

∴  $(x-1)$ ، کثیررکنی  $p(x)$  کا جز ضربی ہے۔

عملی کام : تصدیق کیجیے کہ  $(x-1)$ ، کثیررکنی  $x^3 + 4x - 5$  کا جز ضربی ہے۔



## اسے دھیان میں رکھیں



$p(x)$  ایک کثیررکنی ہے اور  $a$  کوئی بھی حقیقی عدد ہے اور اگر  $p(a) = 0$  ہو تب  $(x-a)$  کثیررکنی  $p(x)$  کا جزو ضربی ہوتا ہے۔  
اس کے برعکس  $(x-a)$  کثیررکنی  $p(x)$  کا جزو ضربی ہو تب  $p(a) = 0$  ہوتا ہے۔

مثال (1) مسئلہ جزو ضربی استعمال کر کے طے کیجیے کہ  $(x-2)$  کثیررکنی  $x^3 - x^2 - 4$  کا جزو ضربی ہے۔

حل :  $x - 2 =$  مقسوم الیہ ;  $p(x) = x^3 - x^2 - 4$

مسئلہ  $\therefore p(2) = (2)^3 - (2)^2 - 4 = 8 - 4 - 4 = 0$

مسئلہ جزو ضربی کے رُو سے،  $(x-2)$ ، کثیررکنی  $(x^3 - x^2 - 4)$  کا جزو ضربی ہے۔

مثال (2) اگر  $(x-1)$  کثیررکنی  $(x^3 - 2x^2 + mx - 4)$  کا جزو ضربی ہو تب  $m$  کی قیمت معلوم کیجیے۔

حل :  $(x-1)$ ، کثیررکنی  $p(x)$  کا جزو ضربی ہے۔  $\therefore p(1) = 0$

$$p(x) = x^3 - 2x^2 + mx - 4$$

$$p(1) = 1^3 - 2 \times 1^2 + m \times 1 - 4 = 0$$

$$\therefore 1 - 2 \times 1 + m - 4 = 0$$

$$\therefore 1 - 2 + m - 4 = 0 \quad , \quad \therefore m - 5 = 0 \quad , \quad \therefore m = 5$$

**عملی کام :** ہم بنجر زمین پر کھیتی کرنے والے گوند کے کھیت کے متعلق کثیررکنیوں کی صورت میں کھیتی کا خرچ اور آمدنی کے بارے میں دیکھ چکے ہیں۔ اس نے بینک سے سو لاکھ روپے قرض لیا تھا اور 10% فی سال سود کی شرح سے ادا کیا تھا۔ بیج کے لیے خرچ 10,000 روپے، سویا بین کی فصل کے لیے کھاد اور کیڑے مار دوا پر  $2000x$  روپے اور اس کی مشاگت کے لیے  $4000x^2$  روپے خرچ ہوا تھا۔ کپاس اور تور (ارہر) کی فصل کے لیے کھاد اور کیڑے مار دوا کے لیے  $8000y$  روپے اور مشاگت کے  $9000y^2$  روپے خرچ کیا تھا۔

$$\text{کل آمدنی } 14000x^2 + \frac{25000}{3}y^2 + 16000y \text{ روپے ہوئی تھی۔}$$

$x = 2$  اور  $y = 3$  قیمتیں لے کر گوند کی کھیتی کا جمع خرچ لکھ کر معلوم کیجیے۔

جمع		خرچ	
بینک سے قرض لیے	₹1,25,000	بینک میں سود کے ساتھ ادائیگی	₹1,37,000
سویا بین سے آمدنی	₹ <input type="text"/>	بیج کے لیے	₹ <input type="text"/>
کپاس سے آمدنی	₹ <input type="text"/>	سویا بین : کھاد اور کیڑے مار دوا	₹ <input type="text"/>
تور سے آمدنی	₹ <input type="text"/>	سویا بین : مشاگت	₹ <input type="text"/>
کل آمدنی	₹ <input type="text"/>	کپاس اور تور : کھاد اور کیڑے مار دوا	₹ <input type="text"/>
		کپاس اور تور : مشاگت	₹ <input type="text"/>
		کل خرچ	₹ <input type="text"/>

### مشقی سیٹ 3.5

(1)  $x$  کی دی ہوئی قیمت لے کر کثیررکنی  $2x - 2x^3 + 7$  کی قیمت معلوم کیجیے۔

(i)  $x = 3$                       (ii)  $x = -1$                       (iii)  $x = 0$

(2) درج ذیل ہر کثیررکنی کے لیے  $p(1)$ ،  $p(0)$  اور  $p(-2)$  معلوم کیجیے۔

(i)  $p(x) = x^3$                       (ii)  $p(y) = y^2 - 2y + 5$                       (iii)  $p(x) = x^4 - 2x^2 - x$

(3) اگر کثیررکنی  $m^3 + 2m + a$  کی قیمت  $m = 2$  کے لیے 12 ہے، تب  $a$  کی قیمت معلوم کیجیے۔

(4) اگر کثیررکنی  $mx^2 - 2x + 3$  کے لیے  $p(-1) = 7$  ہو تب  $m$  کی قیمت معلوم کیجیے۔

(5) درج ذیل میں سے پہلی کثیررکنی کو دوسری کثیررکنی سے تقسیم کر کے حاصل ہونے والا باقی، مسئلہ باقی کا استعمال کر کے معلوم کیجیے۔

(i)  $(x^2 - 7x + 9)$  ;  $(x + 1)$                       (ii)  $(2x^3 - 2x^2 + ax - a)$  ;  $(x - a)$

(iii)  $(54m^3 + 18m^2 - 27m + 5)$  ;  $(m - 3)$

(6) کثیررکنی  $y^3 - 5y^2 + 7y + m$  کو  $y + 2$  سے تقسیم کریں تو باقی 50 پچتا ہے تب  $m$  کی قیمت معلوم کیجیے۔

(7) مسئلہ جز ضربی کا استعمال کر کے، بتائیے کہ  $x + 3$ ، کثیررکنی  $x^2 + 2x - 3$  کا جز ضربی ہے۔

(8) اگر  $x - 2$  کثیررکنی  $x^3 - mx^2 + 10x - 20$  کا جز ضربی ہے تب  $m$  کی قیمت معلوم کیجیے۔

(9) مسئلہ جز ضربی کے ذریعے بتائیے کہ  $q(x)$  یہ  $p(x)$  کا جز ضربی ہے یا نہیں۔

(i)  $p(x) = x^3 - x^2 - x - 1$ ،  $q(x) = x - 1$

(ii)  $p(x) = 2x^3 - x^2 - 45$ ،  $q(x) = x - 3$

(10)  $(x + 1)$  سے  $(x^{31} + 31)$  کو تقسیم کر کے باقی معلوم کیجیے۔

(11) دکھائیے کہ  $m - 1$  کثیررکنیوں  $m^{21} - 1$  اور  $m^{22} - 1$  کا جز ضربی ہے،

(12) اگر  $x - 2$  اور  $x - \frac{1}{2}$  یہ دونوں کثیررکنی  $nx^2 - 5x + m$  کے جز ضربی ہوں تو دکھائیے کہ  $m = n = 2$

(13) (i) اگر  $p(x) = 2 + 5x$  تب  $p(2) + p(-2) - p(1)$  معلوم کیجیے۔

(ii) اگر  $p(x) = 2x^2 - 5\sqrt{3}x + 5$  ہو تو تب  $p(5\sqrt{3}) = ?$



گذشتہ جماعت میں ہم نے کثیررکنیوں کے جز ضربی کیسے نکالتے ہیں، کا مطالعہ کر چکے ہیں۔ کچھ مثالیں دیکھتے ہیں۔

اجزائے ضربی کیجیے۔

مثال (1)  $4x^2 - 25$

حل :

$4x^2 - 25$

$= (2x)^2 - (5)^2$

$= (2x + 5)(2x - 5)$

مثال (2)  $3x^2 + 7x + 2$

حل :

$3x^2 + 7x + 2$

$= \underline{3x^2 + 6x} + \underline{x + 2}$

$= 3x(x + 2) + 1(x + 2)$

$= (x + 2)(3x + 1)$

مثال (4)  $6x^2 - 5x - 6$

$$\begin{aligned} & 6x^2 - 5x - 6 \\ & = 6x^2 - 9x + 4x - 6 \\ & = 3x(2x - 3) + 2(2x - 3) \\ & = (2x - 3)(3x + 2) \end{aligned}$$

مثال (3)  $63x^2 + 5x - 2$

$$\begin{aligned} & 63x^2 + 5x - 2 \\ & = 63x^2 + 14x - 9x - 2 \\ & = 7x(9x + 2) - 1(9x + 2) \\ & = (9x + 2)(7x - 1) \end{aligned}$$

آئیے سمجھ لیں



کثیر رکنیوں کے اجزائے ضربی (Factors of Polynomials)

کبھی کبھی دی ہوئی کثیر رکنی کی تحویل  $ax^2 + bx + c$  میں کی جاسکتی ہے۔ جس کی وجہ سے اس کے اجزائے ضربی کرنا آسان ہو جاتا ہے۔

مثال (1)  $(y^2 - 3y)^2 - 5(y^2 - 3y) - 50$  کے اجزائے ضربی معلوم کیجیے۔

حل : فرض کیجیے دی ہوئی کثیر رکنی میں  $y^2 - 3y = x$

$$\begin{aligned} \therefore (y^2 - 3y)^2 - 5(y^2 - 3y) - 50 & = x^2 - 5x - 50 \\ & = x^2 - 10x + 5x - 50 \\ & = x(x - 10) + 5(x - 10) \\ & = (x - 10)(x + 5) \\ & = (y^2 - 3y - 10)(y^2 - 3y + 5) \quad \dots \text{ (رکھنے پر } x = y^2 - 3y) \\ & = [y^2 - 5y + 2y - 10](y^2 - 3y + 5) \\ & = [y(y - 5) + 2(y - 5)](y^2 - 3y + 5) \\ & = (y - 5)(y + 2)(y^2 - 3y + 5) \end{aligned}$$

مثال (2) اجزائے ضربی معلوم کیجیے :  $(x + 2)(x - 3)(x - 7)(x - 2) + 64$

$$\begin{aligned} & (x + 2)(x - 3)(x - 7)(x - 2) + 64 \\ & = (x + 2)(x - 7)(x - 3)(x - 2) + 64 \\ & = (x^2 - 5x - 14)(x^2 - 5x + 6) + 64 \\ & = (m - 14)(m + 6) + 64 \quad \dots \text{ (فرض کیجیے } x^2 - 5x = m) \\ & = m^2 - 14m + 6m - 84 + 64 \\ & = m^2 - 8m - 20 \\ & = (m - 10)(m + 2) \\ & = (x^2 - 5x - 10)(x^2 - 5x + 2) \quad \dots \text{ (م } m \text{ کی جگہ } x^2 - 5x \text{ رکھنے پر)} \end{aligned}$$

### مشقی سیٹ 3.6

(1) درج ذیل کثیر رکنیوں کے اجزائے ضربی معلوم کیجیے۔

(i)  $2x^2 + x - 1$

(ii)  $2m^2 + 5m - 3$

(iii)  $12x^2 + 61x + 77$

(iv)  $3y^2 - 2y - 1$

(v)  $\sqrt{3}x^2 + 4x + \sqrt{3}$

(vi)  $\frac{1}{2}x^2 - 3x + 4$

(2) درج ذیل کثیررکنیوں کے اجزائے ضربی معلوم کیجیے۔

- (i)  $(x^2 - x)^2 - 8(x^2 - x) + 12$  (ii)  $(x - 5)^2 - (5x - 25) - 24$   
 (iii)  $(x^2 - 6x)^2 - 8(x^2 - 6x + 8) - 64$  (iv)  $(x^2 - 2x + 3)(x^2 - 2x + 5) - 35$   
 (v)  $(y + 2)(y - 3)(y + 8)(y + 3) + 56$   
 (vi)  $(y^2 + 5y)(y^2 + 5y - 2) - 24$   
 (vii)  $(x - 3)(x - 4)^2(x - 5) - 6$



مجموعہ سوالات 3



(1) درج ذیل ہر سوال کے لیے دیے ہوئے متبادل میں سے صحیح متبادل منتخب کیجیے۔

- (i) درج ذیل میں سے کثیررکنی کون سی ہے؟  
 (A)  $\frac{x}{y}$  (B)  $x^{\sqrt{2}} - 3x$  (C)  $x^{-2} + 7$  (D)  $\sqrt{2}x^2 + \frac{1}{2}$
- (ii) کثیررکنی  $\sqrt{7}$  کا درجہ کتنا ہے؟  
 (A)  $\frac{1}{2}$  (B) 5 (C) 2 (D) 0
- (iii) کثیررکنی 0 کا درجہ کتنا ہوتا ہے؟  
 (A) 0 (B) 1 (C) متعین نہیں کیا جاسکتا (D) کوئی بھی حقیقی عدد
- (iv) کثیررکنی  $2x^2 + 5x^3 + 7$  کا درجہ کتنا ہے؟  
 (A) 3 (B) 2 (C) 5 (D) 7
- (v) کثیررکنی  $x^3 - 1$  کی ضربی صورت کون سی ہے؟  
 (A) (1, -1) (B) (3, -1) (C) (1, 0, 0, -1) (D) (1, 3, -1)
- (vi)  $p(7\sqrt{7}) = ?$  ہو تب  $p(x) = x^2 - 7\sqrt{7}x + 3$   
 (A) 3 (B)  $7\sqrt{7}$  (C)  $42\sqrt{7} + 3$  (D)  $49\sqrt{7}$
- (vii) کثیررکنی  $2x^3 + 2x$  کی  $x = -1$  ہو تو قیمت کتنی ہے؟  
 (A) 4 (B) 2 (C) -2 (D) -4
- (viii) کثیررکنی  $3x^2 + mx$  کا  $(x-1)$  جز ضربی ہو تب  $m$  کی قیمت کتنی ہے؟  
 (A) 2 (B) -2 (C) -3 (D) 3
- (ix)  $(x^2 - 3)(2x - 7x^3 + 4)$  کا ضرب کر کے حاصل ہونے والی کثیررکنی کا درجہ کتنا ہوگا؟  
 (A) 5 (B) 3 (C) 2 (D) 0

(x) درج ذیل میں سے خطی کثیررکنی کون سی ہے؟

(A)  $x + 5$  (B)  $x^2 + 5$  (C)  $x^3 + 5$  (D)  $x^4 + 5$

(2) درج ذیل ہر کثیررکنی کا درجہ لکھیے۔

(i)  $5 + 3x^4$  (ii) 7 (iii)  $ax^7 + bx^9$  ... (یہاں  $a$  اور  $b$  غیر صفر مستقل اعداد ہیں۔)

(3) درج ذیل کثیررکنیوں کو معیاری صورت میں لکھیے۔

(i)  $4x^2 + 7x^4 - x^3 - x + 9$  (ii)  $p + 2p^3 + 10p^2 + 5p^4 - 8$

(4) درج ذیل کثیررکنیوں کو ضربی صورت میں لکھیے۔

(i)  $x^4 + 16$  (ii)  $m^5 + 2m^2 + 3m + 15$

(5) درج ذیل ضربی صورت والی کثیررکنیوں کو  $x$  متغیر کا استعمال کر کے قوت نمائی صورت میں لکھیے۔

(i) (3, -2, 0, 7, 18) (ii) (6, 1, 0, 7) (iii) (4, 5, -3, 0)

(6) جمع کیجیے۔

(i)  $7x^4 - 2x^3 + x + 10$  ;  $3x^4 + 15x^3 + 9x^2 - 8x + 2$  (ii)  $3p^3q + 2p^2q + 7$  ;  $2p^2q + 4pq - 2p^3q$

(7) تفریق کیجیے۔

(i)  $5x^2 - 2y + 9$  ;  $3x^2 + 5y - 7$  (ii)  $2x^2 + 3x + 5$  ;  $x^2 - 2x + 3$

(8) درج ذیل ضرب کیجیے۔

(i)  $(m^3 - 2m + 3)(m^4 - 2m^2 + 3m + 2)$  (ii)  $(5m^3 - 2)(m^2 - m + 3)$

(9) کثیررکنی  $3x^3 - 8x^2 + x + 7$  کو کثیررکنی  $x - 3$  سے ترکیبی تقسیم کے طریقے سے تقسیم کیجیے اور باقی معلوم کیجیے۔

(10)  $m$  کی کس قیمت کے لیے  $x + 3$ ، کثیررکنی  $x^3 - 2mx + 21$  کا جز ضربی ہوگا؟

(11) 2016 سال کے آخر میں کیواڑ، روڑ اور چکھلی گاؤں کی آبادی بالترتیب  $5x^2 - 3y^2$ ،  $7y^2 + 2xy$  اور  $9x^2 + 4xy$  تھی۔ 2017 سال کی

ابتدا میں تینوں گاؤں میں تعلیم اور روزگار کے لیے بالترتیب  $x^2 + xy - y^2$ ،  $5xy$  اور  $3x^2 + xy$  آدمی دوسرے گاؤں چلے گئے۔ تو 2017 کی

ابتدا میں ان تینوں گاؤں کی کل آبادی کتنی تھی؟

(12) کثیررکنیوں  $bx^2 + x + 5$  اور  $bx^3 - 2x + 5$  کو  $x - 3$  سے تقسیم کریں تو باقی بالترتیب  $m$  اور  $n$  آتا ہے۔ اگر  $m - n = 0$  ہو تب  $b$  کی

قیمت معلوم کیجیے۔

(13) مختصر کیجیے :  $(8m^2 + 3m - 6) - (9m - 7) + (3m^2 - 2m + 4)$

(14) کثیررکنی  $x^2 + 13x + 7$  میں سے کون سی کثیررکنی منہا کریں تو کثیررکنی  $3x^2 + 5x - 4$  ملے گی؟

(15) الجبری عبارت  $4m + 2n + 3$  میں کون سی عبارت ملائیں کہ کثیررکنی  $6m + 3n + 10$  حاصل ہو؟

