7 सांख्यिकी

43JPTE

चला, शिकूया.

- जोडस्तंभालेख
- विभाजित स्तंभालेख
- शतमान स्तंभालेख
- प्राथमिक व दुय्यम सामग्री
- अवर्गीकृत व वर्गीकृत वारंवारता वितरण सारणी
- संचित वारंवारता सारणी
- मध्य, मध्यक आणि बहुलक (अवर्गीकृत सामग्रीसाठी)

जरा आठवूया.

मागील इयत्तांमध्ये आपण साधा स्तंभालेख व जोडस्तंभालेख कसे काढायचे हे पाहिले आहे. तसेच वर्तमानपत्रे, मासिके, दूरदर्शन इत्यादी माध्यमांतून विविध आलेख पाहून त्यांची माहिती मिळवली आहे.

माहितीच्या स्वरूपाप्रमाणे त्या माहितीचे योग्य सादरीकरण करणारा आलेख काढता येणे महत्त्वाचे असते.

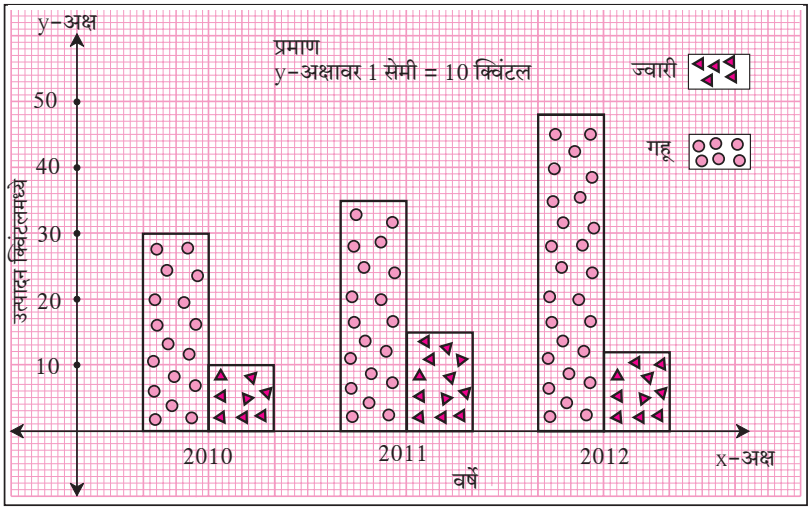
उदा. एका शेतकऱ्याला त्याच्या शेतातून गहू व ज्वारी या दोन पिकांचे तीन वर्षांत मिळालेले उत्पादन दर्शवणारा जोडस्तंभालेख काढून दाखवला आहे. त्यावरून पुढील प्रश्नांची उत्तरे लिहा.

(i) तीन वर्षांमध्ये कोणत्या धान्याचे उत्पादन सतत वाढले?

(ii) 2012 मध्ये 2011 पेक्षा ज्वारीचे उत्पादन किती कमी झाले?

(iii) 2010 मधील गव्हाचे उत्पादन व 2012 मधील गव्हाचे उत्पादन यांतील फरक किती?

(iv) या आलेखातील माहितीवरून खालील सारणी पूर्ण करा.



उत्पादन (क्विंटल) / वर्ष	गहू	ज्वारी	एकूण उत्पादन
2011			
2012	48	12	60

जाणून घेऊया.

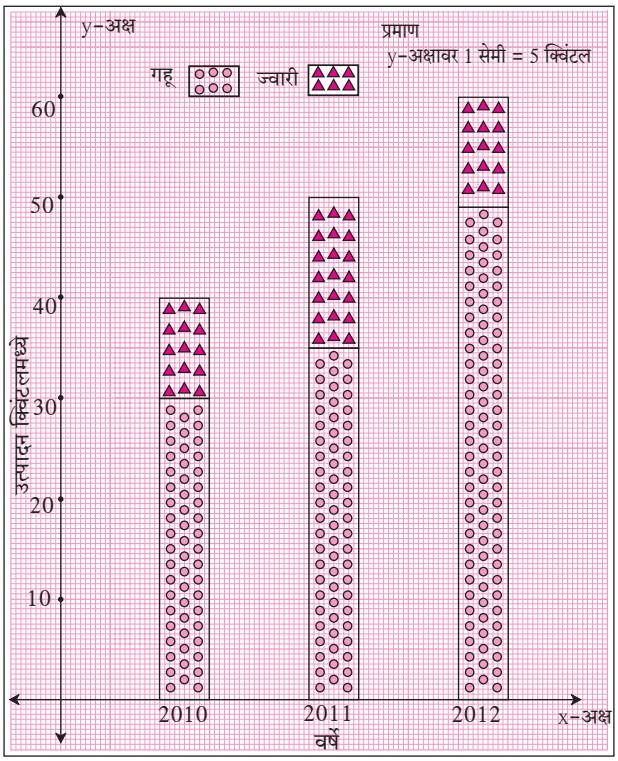
विभाजित स्तंभालेख (Sub-divided bar diagram)

सामग्रीतील माहितीची तुलना दर्शवणारा स्तंभालेख वेगळ्या पद्धतीनेही काढता येतो. त्याला विभाजित स्तंभालेख म्हणतात. त्यासाठी सामग्रीतील एकाच प्रकारच्या दोन बाबींच्या बेरजा करतात, आलेल्या बेरजा योग्य प्रमाण घेऊन स्तंभांनी दर्शवतात, स्तंभांचे प्रत्येक बाब दर्शवणारे प्रमाणबद्ध भाग करतात. मागील उदाहरणातील माहिती दर्शवणारा विभाजित स्तंभालेख कसा काढायचा हे पाहू.

(i) एकूण उत्पादनाएवढी प्रत्येक स्तंभाची उंची योग्य प्रमाणाने दाखवावी.

(ii) त्यामध्ये गव्हाचे उत्पादन हा एकूण उत्पादनाच्या स्तंभाचा एक भाग असेल. तो काही खुणेने दर्शवावा.

(iii) स्तंभाचा राहिलेला भाग हा साहजिकच ज्वारीचे उत्पादन दाखवेल. तो वेगळ्या खुणेने दर्शवावा.



या रीतीने शेजारी काढलेला विभाजित स्तंभालेख पाहा.

दोन बाबींची शतमानाने केलेली तुलना कधी कधी जास्त उपयोगी असते, हे आपण अभ्यासले आहे. उदाहरणार्थ, 2000 रुपयांवर 600 रुपये नफा आणि 1500 रुपयांवर 510 रुपये नफा, यांत 600 रुपये नफा हा जास्त दिसतो. पण दोन्ही नफ्यांची अनुक्रमे 30% आणि 34% ही शतमाने लक्षात घेतली, तर 1500 रुपयांवर 510 रुपये नफा हा व्यवहार अधिक फायदेशीर आहे, हे लक्षात येते.

शतमान स्तंभालेख (Percentage bar diagram)

दिलेल्या माहितींची तुलना वेगळ्या प्रकारे समजण्यासाठी दिलेली माहिती शतमानांत रूपांतरित करून जो विभाजित स्तंभालेख काढतात, त्याला शतमान स्तंभालेख म्हणतात. मागील उदाहरणांतील माहितीची शतमाने शेजारील सारणीत काढून दाखवली आहेत.

वर्ष	गव्हाचे उत्पादन (क्विं.)	ज्वारीचे उत्पादन (क्विं.)	एकूण उत्पादनाच्या प्रमाणात गव्हाच्या उत्पादनाचे शतमान
2010	30	10	$\frac{30}{40} \times 100 = 75\%$
2011	35	15	$\frac{35}{50} \times 100 = 70\%$
2012	48	12	$\frac{48}{60} \times 100 = 80\%$

ही माहिती दर्शवणारा स्तंभालेख खालील पायऱ्यांनी काढला आहे.

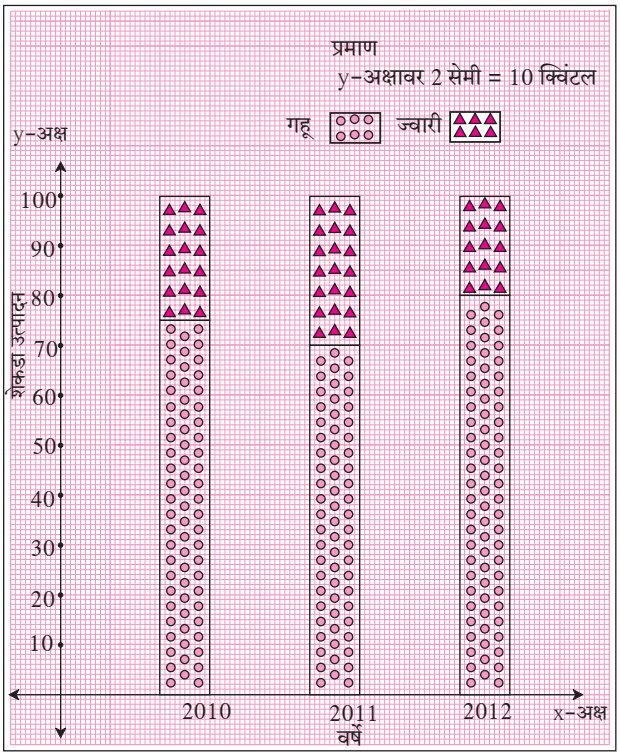
(i) प्रत्येक वर्षातील गहू व ज्वारीच्या एकूण उत्पादनात असलेले गव्हाच्या उत्पादनाचे व ज्वारीच्या उत्पादनाचे शतमान काढले.

(ii) प्रत्येक स्तंभाची Y-अक्षावरील उंची प्रमाणाने 100 घेतली.

(iii) गव्हाच्या उत्पादनाचे एकूण उत्पादनाशी असलेले शतमान, घेतलेल्या प्रमाणाने स्तंभाचा भाग खुणा करून दर्शवले.

(iv) स्तंभाचा उरलेला भाग हा एकूण उत्पादनातील ज्वारीचे शतमान दर्शवतो.

दोनपेक्षा अधिक बाबींची माहिती ही विभाजित किंवा शतमान स्तंभालेखाने दर्शवता येते.



सोडवलेली उदाहरणे

उदा (1) शेजारी शतमान स्तंभालेख दिला आहे. त्यामध्ये दोन कुटुंबांची विविध बाबींवरील खर्चांची माहिती दिली आहे. त्यावरून खालील प्रश्नांची उत्तरे लिहा.

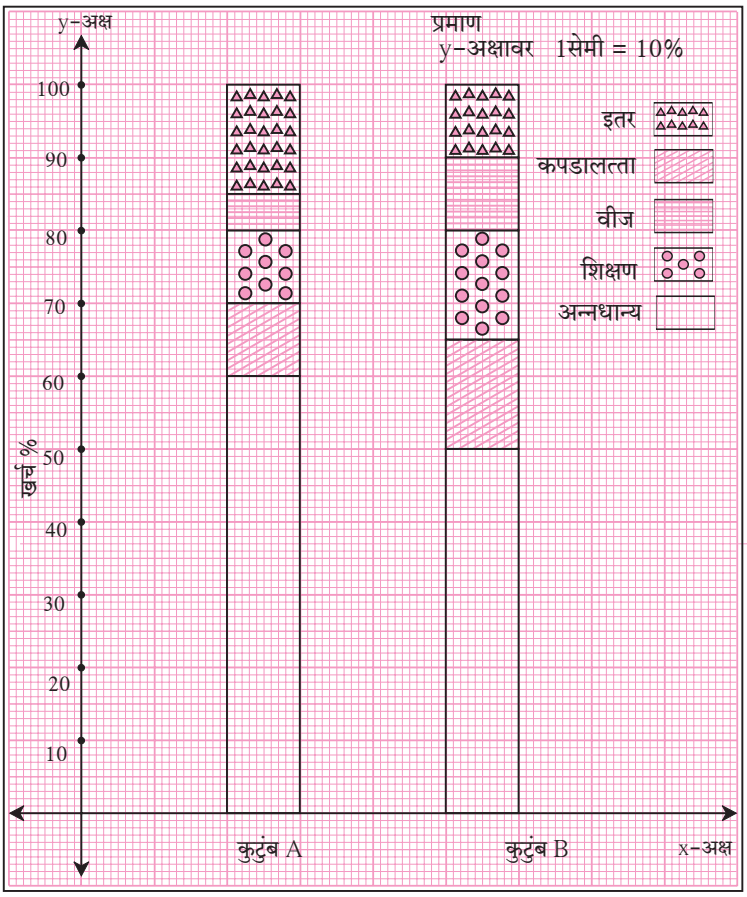
(i) प्रत्येक कुटुंबाच्या विविध बाबींवरील खर्चांची शतमाने लिहा.

(ii) कोणत्या कुटुंबाचा अन्नधान्याचा खर्च त्याच्या एकूण खर्चाच्या प्रमाणात जास्त आहे? किती टक्क्यांनी जास्त आहे?

(iii) दोन्ही कुटुंबांच्या इतर खर्चांची टक्केवारी किती किती आहे?

(iv) कोणत्या कुटुंबाच्या वीजखर्चाची टक्केवारी जास्त आहे ?

(v) कोणत्या कुटुंबाच्या शिक्षणखर्चाची टक्केवारी जास्त आहे?



उकल : (i)

कुटुंब \ खर्च	अन्नधान्य	कपडालत्ता	शिक्षण	वीज	इतर
A	60%	10%	10%	5%	15%
B	50%	15%	15%	10%	10%

(ii) कुटुंब A चा अन्नधान्याचा खर्च एकूण खर्चाच्या प्रमाणात कुटुंब B च्या खर्चापेक्षा 10% जास्त आहे.

(iii) कुटुंब A चा इतर खर्च 15% आणि कुटुंब B चा इतर खर्च 10% आहे.

(iv) कुटुंब B च्या वीजखर्चाचे शतमान जास्त आहे. (v) कुटुंब B च्या शिक्षणखर्चाचे शतमान जास्त आहे.

सरावसंच 7.1

(1) खालील सारणीमध्ये भारतातील ट्रक व बस यांची जवळच्या पूर्ण लाखांतील संख्या खाली दिली आहे. त्यावरून शतमान स्तंभालेख काढा. (शतमाने जवळच्या पूर्णांकापर्यंत घ्या.)

वर्ष	ट्रकची संख्या	बसची संख्या
2006-2007	47	9
2007-2008	56	13
2008-2009	60	16
2009-2010	63	18

(2) खालील सारणीमध्ये भारतातील पक्क्या रस्त्यांची व कच्च्या रस्त्यांची माहिती दिली आहे. त्यावरून विभाजित व शतमान स्तंभालेख काढा. (शतमाने जवळच्या पूर्णांकापर्यंत घ्या.)

वर्षे	पक्के रस्ते (लक्ष किमी)	कच्चे रस्ते (लक्ष किमी)
2000-2001	14	10
2001-2002	15	11
2002-2003	17	13
2003-2004	20	19

कृती : खालील सारणीमध्ये विविध राज्यांतील प्रत्येक 1000 मुलग्यांमागे असणारी मुलींची संख्या दिली आहे. त्यावरून दिलेल्या सारणीमधील रिकाम्या चौकटी भरा.

राज्ये	मुलग्यांची संख्या	मुलींची संख्या	एकूण	मुलग्यांचे शतमान (जवळच्या पूर्णांकापर्यंत)	मुलींचे शतमान (जवळच्या पूर्णांकापर्यंत)
आसाम	1000	960	1960	$\frac{1000}{1960} \times \frac{100}{1} = = 51\%$	100 − 51 = 49%
बिहार	1000	840	1840		
पंजाब	1000	900			
केरळ	1000	1080			
महाराष्ट्र	1000	900			

सारणीवरून मिळालेल्या माहितीचा शतमान स्तंभालेख काढा. त्यावरून निष्कर्ष काढून चर्चा करा.

विचार करूया. पृष्ठ क्रमांक 111 वरील कृतीसाठी दिलेल्या सारणीत पाच राज्यातील दर हजार मुलग्यांमागे असलेली मुलींची संख्या दिली आहे.

त्याच राज्यांतील साक्षरतेचे प्रमाण खाली दिले आहे.

आसाम (73%), बिहार (64%), पंजाब (77%), केरळ (94%) व महाराष्ट्र (83%)

सारणीतील मुलींची संख्या आणि त्या त्या राज्यातील साक्षरतेचे प्रमाण यांचा विचार करा. त्यावरून काही निष्कर्ष मिळतो का?

चला, चर्चा करूया.

पुढील माहिती दर्शवण्यासाठी कोणत्या प्रकारचा स्तंभालेख काढणे योग्य ठरेल ?

(1) चार गावांमधील साक्षरांचे शेकडा प्रमाण.

(2) एका कुटुंबाचा विविध घटकांवर होणारा खर्च.

(3) पाच तुकड्यांपैकी प्रत्येक तुकडीतील मुलगे व मुली यांच्या संख्या.

(4) तीन दिवस चाललेल्या विज्ञान प्रदर्शनाला रोज भेट देणाऱ्या व्यक्तींची संख्या.

(5) जानेवारी ते जून या प्रत्येक महिन्यातील तुमच्या गावाचे कमाल व किमान तापमान.

(6) दुचाकी चालवताना हेल्मेट वापरणाऱ्या आणि न वापरणाऱ्या 100 कुटुंबांतील व्यक्तींची संख्या

जाणून घेऊया.

सांख्यिकी (Statistics)

एखाद्या मोठ्या समूहाचा अभ्यास करण्यासाठी त्यातील काही घटकांचा पुरेसा लहान गट यादृच्छिक पद्धतीने निवडतात. हा मोठ्या गटाचा प्रातिनिधिक गट असतो. या प्रातिनिधिक गटाची अभ्यासासंबंधित माहिती जमा करतात. ही माहिती बहुतांश वेळा सांख्यिक स्वरूपात असते. तिचे विश्लेषण करून काही निष्कर्ष काढतात. या प्रकारच्या अभ्यासाला सांख्यिकी (statistics) असे नाव आहे.

Statistics हा शब्द status या लॅटिन शब्दापासून तयार झाला आहे. याचा अर्थ राज्यातील स्थिती असा होतो. यावरून पूर्वी सांख्यिकी हे शास्त्र राज्याच्या प्रशासकीय व्यवहाराशी संबंधित होते असे दिसते. परंतु सध्या या शास्त्राचा उपयोग सर्वच क्षेत्रांत केला जातो. **सर रोनाल्ड ऐल्मर फिशर (Sir Ronald Aylmer Fisher)** (17 फेब्रुवारी 1890 – 29 जुलै 1962) ह्यांना संख्याशास्त्राचे जनक मानतात.

माहितीचे संकलन (Data collection)

शिक्षिका : एका गावातील प्रत्येक कुटुंबाकडे किती शेती आहे ही माहिती संकलित करायची आहे, काय कराल?

रॉबर्ट : गावातील प्रत्येक घरी जाऊन प्रत्येकाकडे किती शेती आहे याची नोंद करू.

शिक्षिका : अगदी बरोबर, विद्यार्थी मित्रांनो एखाद्या विशिष्ट समूहाविषयी आपण जी माहिती एकत्र करतो ती प्रामुख्याने संख्यांच्या स्वरूपात असते. तिला सामग्री म्हणतात. सामग्री संकलित करण्यापूर्वी ती आपण कशासाठी वापरणार आहोत हे माहीत असायला हवे. जर एखाद्या व्यक्तीने माहिती घेण्याच्या ठिकाणी जाऊन प्रश्न विचारणे, मोजदाद करणे इत्यादी प्रकारे सामग्रीचे संकलन केले तर त्या सामग्रीला प्राथमिक सामग्री म्हणतात.

आफरीन : म्हणजेच रॉबर्टने सांगितल्याप्रमाणे प्रत्येक घरी जाऊन शेतीची संकलित केलेली माहिती ही प्राथमिक सामग्री राहील.

शिक्षिका : शाब्बास आफरीन !

रमेश : परंतु वरील माहिती अगदी कमी वेळात संकलित करायची असेल तर ?

शिक्षिका : रमेशचे म्हणणे बरोबर आहे. तर अशा वेळी माहिती संकलनाचा दुसरा उपाय काय असेल यावर विचार करा.

केतकी : आपण तलाठी कार्यालयात जाऊन त्यांच्याकडील उपलब्ध नोंदींवरून शेतीची माहिती संकलित करू शकतो.

शिक्षिका : बरोबर, काही परिस्थितीत वेळेची उपलब्धता, साधनांचा अभाव अशा कारणांमुळे सामग्रीचे संकलन व्यक्तिश: करणे शक्य होत नाही. अशा वेळी इतरांनी संकलित केलेली सामग्री, कार्यालयीन दस्तऐवजांत प्रसिद्ध झालेली सामग्री, सरकारी विभागांतील उपलब्ध माहिती, शोध निबंध, या स्वरूपांत असलेली सामग्री वापरतात. अशा सामग्रीला दुय्यम सामग्री असे म्हणतात. म्हणजेच केतकीने सुचवल्यानुसार तलाठी कार्यालयात जाऊन शेतीची संकलित केलेली माहिती ही दुय्यम सामग्री होय.

खालील उदाहरणे पाहा.

(i) वर्तमानपत्रातील माहिती वापरून केलेला तक्ता ही दुय्यम सामग्री होईल.

(ii) उपाहारगृहात पदार्थांचा दर्जा समजण्यासाठी ग्राहकांना त्यांचे अभिप्राय विचारून मिळवलेली माहिती, ही प्राथमिक सामग्री होईल.

(iii) वर्गातील विद्यार्थ्यांच्या उंचींची प्रत्यक्ष मोजून केलेली नोंद, ही प्राथमिक सामग्री होईल.

प्राथमिक सामग्री	दुय्यम सामग्री
1. संकलन करण्यास जास्त वेळ लागतो. 2. अद्ययावत व तपशीलवार असते. 3. अचूक आणि विश्वसनीय असते.	1. त्वरित उपलब्ध होऊ शकते. 2. ह्यामध्ये पूर्वी संकलित केलेली माहिती घेतल्यामुळे ती अद्ययावत असतेच असे नाही. माहितीचा तपशील क्वचित कमी पडतो. 3. ही कमी विश्वसनीय असू शकते.

कृती : तुम्ही अनेक वेळा वेगवेगळ्या कारणांसाठी माहिती गोळा करता; अशी 3 ते 4 उदाहरणे घेऊन गोळा केलेली सामग्री प्राथमिक आहे की दुय्यम आहे यांवर चर्चा करा.

सरावसंच 7.2

(1) खालीलप्रमाणे गोळा केलेल्या सामग्रीचे प्राथमिक सामग्री किंवा दुय्यम सामग्री यामध्ये वर्गीकरण करा.

(i) प्रत्यक्ष वर्गात जाऊन शाळेतील प्रत्येक वर्गातील विद्यार्थ्यांची हजेरीची माहिती गोळा केली.

(ii) प्रत्येक विद्यार्थ्याच्या उंचीची माहिती वरिष्ठ कार्यालयास तातडीने पाठवायची असल्याने शाळेतील शारीरिक शिक्षण विभागातील नोंदींवरून माहिती गोळा केली.

(iii) नांदपूर येथील प्रत्येक कुटुंबातील शालाबाह्य विद्यार्थ्यांची माहिती प्रत्यक्ष घरी जाऊन गोळा केली.

(iv) विज्ञान प्रकल्पासाठी प्रत्यक्ष जंगलात जाऊन झाडांची पाहणी करून माहिती गोळा केली.

जरा आठवूया.

सामग्रीचे वर्गीकरण (Classification of data)

उदा (1) एका शाळेतील इयत्ता 9 वीच्या 50 विद्यार्थ्यांनी प्रथम घटक चाचणीत गणितात 20 पैकी मिळवलेले गुण खालीलप्रमाणे आहेत.

20, 6, 14, 10, 13, 15, 12, 14, 17, 17, 18, 11, 19, 9, 16, 18, 14, 7, 17, 20, 8, 15, 16, 10, 15, 12, 18, 17, 12, 11, 11, 10, 16, 14, 16, 18, 10, 7, 17, 14, 20, 17, 13, 15, 18, 20, 12, 12, 15, 10

येथे संकलित केलेल्या संख्यात्मक माहितीस काय म्हणतात ?..... कच्ची सामग्री.

यातील प्रत्येक संख्येला काय म्हणतात?..... प्राप्तांक.

वरील माहितीवरून खालील प्रश्नांची उत्तरे मिळवा.

(i) 15 गुण मिळवणारे एकूण विद्यार्थी किती ?

(ii) 15 गुणांपेक्षा जास्त गुण मिळवणारे एकूण विद्यार्थी किती?

(iii) 16 गुणापेक्षा कमी गुण मिळवणारे एकूण विद्यार्थी किती ?

(iv) सर्वांत कमी गुण किती आहेत?

(v) सर्वांत जास्त गुण किती आहेत?

चला, चर्चा करूया.

(1) तुम्हांला वरील प्रश्नांची उत्तरे अगदी सहजपणे मिळाली की प्रत्येक वेळी गुणांचे निरीक्षण करावे लागले?

(2) वरील कामात सुलभता येण्यासाठी काय करता येईल ?

शमीम : वरील उत्तरे प्रत्येक वेळी निरीक्षणातून मिळत असल्यामुळे हे काम किचकट व कंटाळवाणे झाले आहे, परंतु दिलेली कच्ची सामग्री चढत्या किंवा उतरत्या क्रमाने लिहिल्यास या कामात सुलभता येऊ शकेल.

शमीमच्या म्हणण्यानुसार सामग्रीतील गुण चढत्या क्रमाने लिहू.

6, 7, 7, 8, 9, 10, 10, 10, 10, 10, 11, 11, 11, 12, 12, 12, 12, 12, 13, 13, 14, 14, 14, 14, 14, 15, 15, 15, 15, 15, 16, 16, 16, 16, 17, 17, 17, 17, 17, 17, 18, 18, 18, 18, 18, 19, 20, 20, 20, 20

माहिती चढत्या क्रमाने लिहिल्यावर उदा 1 मधील पाचही प्रश्नांची उत्तरे सुलभतेने मिळतात काय? याचा पडताळा घ्या.

पडताळ्यावरून हे स्पष्ट होईल की सामग्री चढत्या क्रमाने मांडल्यामुळे पाचही प्रश्नांची उत्तरे अगदी सहज मिळतात.

जरा आठवूया.

मार्टीन : सामग्री सारणी स्वरूपात मांडूनसुद्धा वरील कामात अधिक सुलभता आणता येते, हे आम्ही मागील इयत्तेत अभ्यासले आहे. या सारणीला वारंवारता वितरण सारणी म्हणतात.

शिक्षिका : मार्टीन, अगदी बरोबर ! आता ही सारणी आधीचेच उदा. 1 च्या आधारे तयार करा.

उदाहरण (1) मध्ये सर्वांत कमी गुण 6 आहेत आणि सर्वांत जास्त गुण 20 आहेत. म्हणून सारणीमध्ये प्राप्तांकांच्या स्तंभात 6 ते 20 प्राप्तांक लिहा. दुसऱ्या स्तंभात ताळ्याच्या खुणा करून शेवटच्या स्तंभात खुणा मोजून वारंवारता लिहा.

वारंवारता वितरण सारणी

प्राप्तांक (गुण)	ताळ्याच्या खुणा	वारंवारता (f)(विद्यार्थी संख्या)
6	|	1
7	||	2
8		
9		
10	~~||||~~	5
11		
12		
13		
14		
15		
16		
17	~~||||~~ |	6
18		
19		
20	||||	4
		एकूण N = 50

N ही सर्व वारंवारतांची बेरीज आहे.

चला, चर्चा करूया.

वर्गीकृत वारंवारता वितरण सारणी (Grouped frequency distribution table)

वरील वारंवारता वितरण सारणीमध्ये,

(1) ही सारणी खूप मोठी झाली असे वाटते काय?

(2) जेव्हा सामग्रीतील प्राप्तांकांची संख्या जास्त असेल तेव्हा ही सारणी तयार करणे कठीण होईल काय?

शिक्षिका : वरील चर्चेवरून लक्षात आले की, जेव्हा सामग्रीतील प्राप्तांकाची संख्या जास्त असते तेव्हा वारंवारता वितरण सारणीचा विस्तार मोठा होतो. ती तयार करण्यास खूप वेळ लागतो. सारणीचा विस्तार आणि वेळ कमी करण्यासाठी काही उपाय सुचवता येतील काय?

रोहित : अशा वेळी सामग्रीचे गट पाडावेत.

शिक्षिका : शाब्बास रोहित, सामग्रीचे गट पाडले म्हणजेच वर्ग तयार केले तर ती सामग्री आटोपशीर होऊन वेळही कमी लागेल.अशा सारणीलाच वर्गीकृत वारंवारता वितरण सारणी म्हणतात.

ही सारणी दोन पद्धतींनी मांडता येते. (1) समावेशक पद्धती व (2) असमावेशक पद्धती

(1) समावेशक पद्धती (खंडित वर्ग) (Inclusive method)

6, 7, 7, 8, 9, 10, 10, 10, 10, 10, 11, 11, 11, 12, 12, 12, 12, 12, 13, 13, 14, 14, 14, 14, 14, 15, 15, 15, 15, 15, 16, 16, 16, 16, 17, 17, 17, 17, 17, 17, 18, 18, 18, 18, 18, 19, 20, 20, 20, 20

वरील सामग्रीमध्ये सर्वात लहान प्राप्तांक ☐ व सर्वांत मोठा प्राप्तांक ☐ आहे. सर्वांत मोठ्या आणि सर्वांत लहान प्राप्तांकांतील फरक 20 – 6 = 14 आहे. या फरकालाच **सामग्रीचा विस्तार** असे म्हणतात. हा विस्तार लक्षात घेऊन सामग्रीचे सोईस्कर असे कोणते वर्ग तयार करता येतील ?

(i) 6 ते 8, 9 ते 11, 12 ते 14, 15 ते 17, 18 ते 20 किंवा

(ii) 6 ते 10, 11 ते15, 16 ते 20 असे वर्ग करता येतील.

6 ते 10, 11 ते15 आणि 16 ते 20 हे वर्ग घेऊन वरील सामग्रीची वारंवारता वितरण सारणी तयार करू.

वर्गीकृत वारंवारता सारणी (समावेशक पद्धती)

वर्ग	ताळ्याच्या खुणा	वारंवारता (f) (विद्यार्थी संख्या)
6 ते 10	𝍸 𝍸	**10**
11 ते 15	.....	.....
16 ते 20	.....	20
		N = 50

ही सारणी तयार करताना 6, 10 आणि त्यांमधील सर्व प्राप्तांकांचा 6 ते 10 या वर्गात समावेश झाला म्हणून सारणी तयार करण्याच्या या पद्धतीला समावेशक पद्धती म्हणतात. 6 ते 10, 11 ते 15, 16 ते 20 या वर्गांना खंडित वर्ग म्हणतात.

जाणून घेऊया.

सांख्यिकीमधील काही संज्ञा (Basic terms in statistics)

(1) **वर्ग (Class) :** प्राप्तांकाच्या सोईस्कर आकाराच्या गटांना वर्ग असे म्हणतात.
6 ते 10, 11 ते15 हे वर्ग 6–10, 11–15 असेही लिहितात.

(2) **वर्गमर्यादा (Class limits) :** वर्ग दर्शवणाऱ्या संख्यांना वर्गमर्यादा म्हणतात.
6 ते 10 या वर्गाची 6 ही खालची वर्गमर्यादा व 10 ही वरची वर्गमर्यादा आहे.

(3) **वारंवारता (Frequency) :** प्रत्येक वर्गात जेवढे प्राप्तांक येतात, त्या प्राप्तांकाच्या एकूण संख्येस त्या वर्गाची वारंवारता म्हणतात.
वरील सारणीत 11 ते 15 या वर्गात 20 प्राप्तांक येतात. 11 ते 15 या वर्गाची वारंवारता 20 आहे असे म्हणतात.

4. **वर्गांतर किंवा वर्गअवकाश (Class width) :** अखंडित वर्ग दिले असताना लगत येणाऱ्या दोन वर्गांच्या खालच्या (किंवा वरच्या) मर्यादांतील फरकाला वर्गांतर असे म्हणतात.

उदा. 5 – 10, 10 – 15, 15 – 20, ... असे वर्ग असल्यास, 5–10 चे वर्गांतर = 10 – 5 = 5 आहे.

5. **वर्गमध्य (Class mark) :** वर्गाच्या खालच्या व वरच्या वर्गमर्यादेच्या सरासरीस वर्गमध्य म्हणतात.

$$\text{वर्गमध्य} = \frac{\text{खालची वर्गमर्यादा} + \text{वरची वर्गमर्यादा}}{2}$$

$$\text{उदा. 11 ते 15 या वर्गाचा वर्गमध्य} = \frac{\square + \square}{2} = \frac{26}{2} = 13$$

(2) असमावेशक पद्धती (अखंडित वर्ग) (Exclusive method)

उदा. 6, 10, 10.3, 11, 15.7, 19, 20, 12, 13 हे प्राप्तांक दिले आहेत.
6–10, 11–15, 16–20 असे वर्ग घेऊन याची वर्गीकृत वारंवारता सारणी तयार करा.

उकल :

वर्ग (प्राप्तांक)	ताळ्याच्या खुणा	वारंवारता (f)
6–10	||	2
11–15	|||	3
16–20	||	2

वरील सारणीत दिलेल्या प्राप्तांकांपैकी 10.3 व 15.7 हे दोन प्राप्तांक समाविष्ट करता आले नाहीत.

कारण 10.3, 15.7 ह्या संख्या 6–10, 11–15, 16–20 ह्यापैकी कोणत्याही वर्गात समाविष्ट होत नाहीत. याकरिता वर्गरचना बदलावी लागेल. म्हणून हे वर्ग 5–10, 10–15, 15–20, ... याप्रमाणे सलग लिहिल्यास वरील प्रश्न निर्माण होणार नाही. परंतु 10 या प्राप्तांकांची नोंद 5–10, 10–15 यांपैकी कोणत्या वर्गात करायची हा प्रश्न निर्माण होतो. ही अडचण दूर करण्यासाठी 10 हा प्राप्तांक 5–10 या वर्गात न घेता 10–15 या वर्गात समाविष्ट करावा असा संकेत मानतात. म्हणून 10 ची नोंद 10–15 या वर्गात होईल. या पद्धतीला असमावेशक पद्धती म्हणतात. अशा प्रकारे वर्ग घेतल्यामुळे 10.3 व 15.7 या संख्यांचा सारणीमध्ये समावेश करता आला.

आता याप्रमाणे वर्ग घेऊन आणि संकेत पाळून तयार केलेली सारणी पाहा.

वर्गीकृत वारंवारता वितरण सारणी **(असमावेशक पद्धती)**

वर्ग (अखंडित) गुण	ताळ्याच्या खुणा	वारंवारता (f) (विद्यार्थी संख्या)
5–10	|	1
10–15	~~||||~~	5
15–20	||	2
20–25	|	1

हे लक्षात ठेवूया.

वारंवारता वितरण सारणी

अवर्गीकृत

इयत्ता नववीतील विद्यार्थ्यांची वये	विद्यार्थ्यांची संख्या
14	12
15	23
16	10

वर्गीकृत

समावेशक पद्धती (खंडित वर्ग)

बुटाचा क्रमांक	विद्यार्थी संख्या
2-4	12
5-7	29
8-10	7

असमावेशक पद्धती (अखंडित वर्ग)

उंची (सेमी)	विद्यार्थी संख्या
145-150	18
150-155	27
155-160	3

सरावसंच 7.3

(1) 20 ते 25 या वर्गाची खालची व वरची मर्यादा लिहा.

(2) 35 ते 40 या वर्गाचा वर्गमध्य काढा.

(3*) एका वर्गाचा मध्य 10 असून वर्गअवकाश 6 आहे, तर तो वर्ग कोणता ?

(4) खालील सारणी पूर्ण करा.

वर्ग (वय वर्षे)	ताळ्याच्या खुणा	वारंवारता (f) (विद्यार्थी संख्या)
12-13	卌	☐
13-14	卌 卌 ||||	☐
14-15		☐
15-16	||||	☐
		$N=\sum f = 35$

(5) एका शाळेच्या हरितसेनेतील 45 विद्यार्थ्यांपैकी प्रत्येकाने केलेल्या वृक्षारोपणाची संख्या खाली दिली आहे.
3, 5, 7, 6, 4, 3, 5, 4, 3, 5, 4, 7, 5 , 3, 6, 6, 5, 3, 4, 5, 7, 3, 5, 6, 4, 4, 3, 5, 6, 6, 4, 3, 5, 7, 3, 4, 5, 7, 6, 4, 3, 5, 4, 4, 7.
यावरून अवर्गीकृत वारंवारता वितरण सारणी तयार करा.

(6) π ची 50 दशांश स्थळांपर्यंत किंमत खाली दिलेली आहे.
3.14159265358979323846264338327950288419716939937510
यावरून दशांश चिन्हानंतरच्या अंकांची अवर्गीकृत वारंवारता वितरण सारणी तयार करा.

(7*) खालील सारणीतील माहितीवरून वर्गांतर काढा व अखंडित वर्ग व खंडित वर्ग असणारी वारंवारता वितरण सारणी तयार करा.

(i)

वर्गमध्य	वारंवारता
5	3
15	9
25	15
35	13

(ii)

वर्गमध्य	वारंवारता
22	6
24	7
26	13
28	4

(8) एका शाळेतील इयत्ता 9 वीच्या 46 विद्यार्थ्यांना त्यांच्या कंपासमधील पेन्सिलींची लांबी मोजावयास सांगितली. ती सेंटिमीटरमध्ये खालीलप्रमाणे आहे.

16, 15, 7, 4.5, 8.5, 5.5, 5, 6.5, 6, 10, 12,
13, 4.5, 4.9, 16, 11, 9.2, 7.3, 11.4, 12.7, 13.9, 16,
5.5, 9.9, 8.4, 11.4, 13.1, 15, 4.8, 10, 7.5, 8.5, 6.5,
7.2, 4.5, 5.7, 16, 5.7, 6.9, 8.9, 9.2, 10.2, 12.3, 13.7,
14.5, 10

0-5, 5-10, 10-15, ... याप्रमाणे वर्ग घेऊन असमावेशक पद्धतीने वर्गीकृत वारंवारता वितरण सारणी तयार करा.

(9) एका गावातील सहकारी दूध संकलन केंद्रावर 50 व्यक्तींनी प्रत्येकी किती लीटर दूध जमा केले आहे त्याची माहिती खाली दिली आहे.

27, 75, 5, 99, 70, 12, 15, 20, 30, 35, 45, 80,
77, 90, 92, 72, 4, 33, 22, 15, 20, 28, 29, 14,
16, 20, 72, 81, 85, 10, 16, 9, 25, 23, 26, 46,
55, 56, 66, 67, 51, 57, 44, 43, 6, 65, 42, 36,
7, 35

योग्य वर्ग घेऊन वर्गीकृत वारंवारता वितरण सारणी तयार करा.

(10) एका संस्थेला 'दिव्यांग विकास निधी' साठी गावातील 38 लोकांनी प्रत्येकी काही रुपये दिले, ही माहिती खाली दिली आहे.

101, 500, 401, 201, 301, 160, 210, 125, 175, 190, 450, 151,
101, 351, 251, 451, 151, 260, 360, 410, 150, 125, 161, 195,
351, 170, 225, 260, 290, 310, 360, 425, 420, 100, 105, 170,
250, 100

(i) 100-149, 150-199, 200-249, ... असे वर्ग घेऊन वर्गीकृत वारंवारता वितरण सारणी तयार करा.

(ii) सारणीवरून 350 रुपये व त्यापेक्षा अधिक निधी देणाऱ्यांची संख्या किती आहे हे लिहा.

जाणून घेऊया.

वरच्या वर्गमर्यादेपेक्षा कमी संचित वारंवारता सारणी (Less than cumulative frequency)

उदा. इयत्ता 9 वीच्या एका शाळेतील 50 विद्यार्थ्यांनी प्रथम घटक चाचणीत गणितात 40 पैकी मिळवलेल्या गुणांची वारंवारता वितरण सारणी पुढे दिली आहे.

वर्ग	वारंवारता(विद्यार्थी संख्या) (f)
0-10	02
10-20	12
20-30	20
30-40	16
	एकूण N = 50

(1) सारणीवरून खालील विधानातील रिकाम्या जागा भरा.

(i) 10 ते 20 या वर्गाची खालची वर्गमर्यादा ☐ व वरची वर्गमर्यादा ☐ आहे.

(ii) 10 पेक्षा कमी गुण मिळवणारे विद्यार्थी किती ? 2

(iii) 20 पेक्षा कमी गुण मिळवणारे विद्यार्थी किती ? 2 + ☐ = 14

(iv) 30 पेक्षा कमी गुण मिळवणारे विद्यार्थी किती ? ☐ + ☐ = 34

(v) 40 पेक्षा कमी गुण मिळवणारे विद्यार्थी किती ? ☐ + ☐ = 50

हे लक्षात ठेवूया.

एखाद्या विशिष्ट वर्गाची वारंवारता आणि त्या वर्गाच्या आधीच्या सर्व वर्गांच्या वारंवारता यांच्या बेरजेला त्या वर्गाची वरच्या मर्यादेपेक्षा कमी प्रकारची (Less than cumulative frequency) संचित वारंवारता म्हणतात. थोडक्यात हिला 'पेक्षा कमी संचित वारंवारता' सुद्धा म्हणतात.

वरच्या वर्गमर्यादेपेक्षा कमी संचित वारंवारता सारणीचा अर्थ

वर्ग (गुण)	वारंवारता	पेक्षा कमी संचित वारंवारता
0-10	2	2
10-20	12	2 + 12 = ☐
20-30	20	☐ +20=34
30-40	16	34 + ☐ =50
एकूण 50		

वर्ग	संचित वारंवारता	वरच्या वर्गमर्यादेपेक्षा कमीचा अर्थ
0-10	2	2 विद्यार्थ्यांना 10 पेक्षा कमी गुण
10-20	14	14 विद्यार्थ्यांना 20 पेक्षा कमी गुण
20-30	34	34 विद्यार्थ्यांना 30 पेक्षा कमी गुण
30-40	50	50 विद्यार्थ्यांना 40 पेक्षा कमी गुण
एकूण 50		

(2) खालच्या वर्गमर्यादेएवढी किंवा त्यापेक्षा जास्त संचित वारंवारता सारणी

वर्ग	वारंवारता	संचित वारंवारता
0-10	2	50
10-20	12	50 - 2 = 48
20-30	20	48 - 12 = 36
30-40	16	36 - 20 = 16
एकूण	50	

वर्ग	संचित वारंवारता	खालची वर्गमर्यादा किंवा खालच्या वर्गमर्यादेपेक्षा जास्तचा अर्थ
0-10	50	50 विद्यार्थ्यांना 0 किंवा 0 पेक्षा जास्त गुण मिळाले
10-20	48	48 विद्यार्थ्यांना 10 किंवा10 पेक्षा जास्त गुण मिळाले
20-30	36	36 विद्यार्थ्यांना 20 किंवा 20 पेक्षा जास्त गुण मिळाले
30-40	16	16 विद्यार्थ्यांना 30 किंवा 30 पेक्षा जास्त गुण मिळाले.

उदा. एका स्पोर्ट्स क्लबच्या टेबलटेनिसच्या सामन्यांसाठी आलेल्या खेळाडूंच्या वयांचे वर्गीकरण खालील सारणीत दिले आहे. त्यावरून खालची वर्गमर्यादा किंवा तिच्याहून जास्त वारंवारता सारणी पूर्ण करा.

उकल : खालच्या वर्गमर्यादेपेक्षा जास्त संचित वारंवारता सारणी

वय (वर्ष)	ताळ्याच्या खुणा	वारंवारता (विद्यार्थी संख्या)	खालची वर्गमर्यादा किंवा तिच्याहून जास्त संचित वारंवारता
10-12	卌 ||||	09	50
12 – 14	卌 卌 卌 卌 |||	☐	☐ - 9 = 41
14-16	卌 卌 |||	☐	41 - 23 = ☐
16 – 18	卌	05	☐ - 13 = ☐
		एकूण N = 50	

सरावसंच 7.4

(1) खालील संचित वारंवारता सारणी पूर्ण करा

वर्ग (उंची –सेमी मध्ये)	वारंवारता (विद्यार्थी संख्या)	पेक्षा कमी संचित वारंवारता
150-153	05	05
153-156	07	05+ ☐ = ☐
156-159	15	☐ + 15 = ☐
159-162	10	☐ + ☐ = 37
162-165	05	37+5=42
165-168	03	☐ + ☐ = 45
	एकूण N = 45	

(2) खालील संचित वारंवारता सारणी पूर्ण करा.

वर्ग (मासिक उत्पन्न रुपये)	वारंवारता (व्यक्तींची संख्या)	पेक्षा जास्त किंवा तेवढीच संचित वारंवारता
1000-5000	45	.....
5000-10000	19	.....
10000-15000	16	.....
15000-20000	02	.....
20000-25000	05	.....
	एकूण N = 87	

(3) एका वर्गातील 62 विद्यार्थ्यांना गणित विषयात 100 पैकी मिळालेले गुण खाली दिले आहेत.
0-10, 10-20 ..... हे वर्ग घेऊन वारंवारता सारणी आणि संचित वारंवारता सारणी (पेक्षा जास्त) तयार करा.

55, 60, 81, 90, 45, 65, 45, 52, 30, 85, 20, 10,
75, 95, 09, 20, 25, 39, 45, 50, 78, 70, 46, 64,
42, 58, 31, 82, 27, 11, 78, 97, 07, 22, 27, 36,
35, 40, 75, 80, 47, 69, 48, 59, 32, 83, 23, 17,
77, 45, 05, 23, 37, 38, 35, 25, 46, 57, 68, 45,
47, 49

तयार केलेल्या सारणीवरून खालील प्रश्नांची उत्तरे लिहा.

(i) 40 किंवा 40 पेक्षा अधिक गुण मिळवणारे विद्यार्थी किती ?
(ii) 90 किंवा 90 पेक्षा अधिक गुण मिळवणारे विद्यार्थी किती ?
(iii) 60 किंवा 60 पेक्षा अधिक गुण मिळवणारे विद्यार्थी किती
(iv) 0-10 या वर्गाची पेक्षा जास्त किंवा तेवढीच संचित वारंवारता किती ?

(4) वरील उदाहरण (3) साठी पेक्षा कमी संचित वारंवारता सारणी तयार करा यावरून खालील प्रश्नांची उत्तरे लिहा.

(i) 40 पेक्षा कमी गुण मिळवणारे विद्यार्थी किती ?
(ii) 10 पेक्षा कमी गुण मिळवणारे विद्यार्थी किती ?
(iii) 60 पेक्षा कमी गुण मिळवणारे विद्यार्थी किती ?
(iv) 50-60 या वर्गाची पेक्षा कमी संचित वारंवारता किती ?

जाणून घेऊया.

केंद्रीय प्रवृत्तीची परिमाणे : (Measures of central tendancy)

केंद्रीय प्रवृत्ती : सर्वेक्षणाने मिळवलेल्या सांख्यिक सामग्रीमध्ये सामान्यपणे एक गुणधर्म आढळतो. सामग्रीतील एखाद्या संख्येच्या आसपास इतर संख्यांची गर्दी अधिक झालेली दिसते. समूहाच्या या गुणधर्माला समूहाची केंद्रीय प्रवृत्ती म्हणतात.

समूहातील ज्या संख्येच्या आसपास इतर संख्यांची अधिक गर्दी असते, ती संख्या त्या समूहाचे प्रतिनिधित्व करते असे मानतात. अशा संख्येला केंद्रीय प्रवृत्तीचे परिमाण म्हणतात.

सांख्यिकीमध्ये केंद्रिय प्रवृत्तीची पुढील परिमाणे प्रामुख्याने वापरली जातात.

(1) मध्य (Mean) : सामग्रीतील सर्व संख्यांच्या अंकगणितीय सरासरीला त्या सामग्रीचा मध्य असे म्हणतात.

$$\text{सामग्रीचा 'मध्य'} = \frac{\text{सामग्रीतील सर्व प्राप्तांकांची बेरीज}}{\text{सामग्रीतील प्राप्तांकांची एकूण संख्या}}$$

उदा (1) 25, 30, 27, 23 आणि 25 या प्राप्तांकांचा मध्य काढा.

उकल : $\frac{25+30+27+23+25}{5} = \frac{130}{5} = 26$

उदा (2) इयत्ता नववीच्या 35 विद्यार्थ्यांना प्रथम सत्र परीक्षेत बीजगणितात 40 पैकी मिळालेले गुण खालीलप्रमाणे आहेत. त्यावरून गुणांचा मध्य काढा.

40, 35, 30, 25, 23, 20, 14, 15, 16, 20, 17, 37,
37, 20, 36, 16, 30, 25, 25, 36, 37, 39, 39, 40,
15, 16, 17, 30, 16, 39, 40, 35, 37, 23, 16.

उकल : येथे प्राप्तांकाची संख्या जास्त असल्यामुळे बेरीज तर करता येईल, परंतु आकडेमोड क्लिष्ट होईल. येथे 3 विद्यार्थ्यांना प्रत्येकी 30 गुण आहेत. त्यांच्या गुणांची बेरीज 30 + 30 + 30 = 90 अशी करण्याऐवजी 30 × 3 = 90 अशी करणे सोईचे आहे. त्यासाठी वारंवारता सारणी उपयोगी पडते.

संख्याशास्त्रात $\sum_{i=1}^{n}$ हे चिन्ह वापरणे खूप सोईचे असते. $\sum_{i=1}^{n} f_i x_i$ याचा अर्थ समजून घेऊ.

i हा धन पूर्णांक आहे.

f_i विद्यार्थ्यांना प्रत्येकी x_i गुण मिळाले असे समजू. Σ (सिग्मा) हे चिन्ह बेरजेसाठी वापरले जाते. $\sum_{i=1}^{n}$ हे चिन्ह i च्या 1 ते n या किमतींसाठी n पदांची बेरीज ठरवते.

गुण	विद्यार्थी संख्या	$f_i \times x_i$
14	1	14 × 1 = 14
15	2	15 × 2 = ...
16	5	16 × .... = ...
17	2	17 × 2 = 34
20	3	.... × 3 = ...
23	2	23 × 2 = ...
25	3	25 × 3 = ...
30	3	.... × .... = ...
35	2	35 × 2 = 70
36	2	.... × .... = ...
37	4	..... × .... = ...
39	3	39 × 3 = 117
40	3	.... × .... = 120
	N=	$\sum f_i x_i$ = 956

$$\text{मध्य } \bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{N} = \frac{956}{35}$$

$$= 27.31 \text{ (अंदाजे)}$$

∴ दिलेल्या सामग्रीचा मध्य 27.31 आहे.

(2) मध्यक (Median) : सामग्रीतील संख्या चढत्या (किंवा उतरत्या) क्रमाने मांडतात. या मांडणीतील मध्यभागी येणाऱ्या संख्येला त्या सामग्रीचा मध्यक म्हणतात.

सामग्रीतील प्राप्तांकांची संख्या सम असेल तर मध्यावर येणाऱ्या दोन संख्यांची सरासरी हा मध्यक मानतात.

उदा. (1) 72, 66, 87, 92, 63, 78, 54 या सामग्रीचा मध्यक काढा.

उकल : दिलेले प्राप्तांक चढत्या क्रमाने मांडू.

54, 63, 66, **72,** 78, 87, 92

या मांडणीत चौथी संख्या मध्यावर येते, ती 72 आहे.

∴ दिलेल्या सामग्रीचा मध्यक = 72

उदा. (2) 30, 25, 32, 23, 42, 36, 40, 33, 21, 43 या सामग्रीचा मध्यक काढा.

उकल : दिलेले प्राप्तांक चढत्या क्रमाने लिहू.

21, 23, 25, 30, **32, 33,** 36, 40, 42, 43

येथे प्राप्तांकांची संख्या 10, म्हणजे सम आहे.

∴ पाचवी व सहावी अशा दोन संख्या मध्यावर येतील. त्या अनुक्रमे 32 व 33 आहेत.

∴ सामग्रीचा मध्यक = $\frac{32+33}{2} = \frac{65}{2}$ = 32.5

विचार करूया.

सामग्रीतील प्राप्तांकांची संख्या n असताना,

(i) n विषम असेल तर कितवा प्राप्तांक त्या सामग्रीचा मध्यक असेल ?

(ii) n सम असताना कितव्या दोन प्राप्तांकांची सरासरी त्या सामग्रीचा मध्यक असेल ?

(3) बहुलक (Mode) : सामग्रीमध्ये सर्वाधिक वेळा येणारा प्राप्तांक म्हणजे त्या सामग्रीचा बहुलक होय.

उदा. (1) 90, 55, 67, 55, 75, 75, 40, 35, 55, 95 या सामग्रीचा बहुलक काढा.

उकल : सामग्रीतील प्राप्तांक चढत्या क्रमाने मांडले तर कोणता प्राप्तांक सर्वाधिक वेळा आला आहे, हे ओळखणे सोपे जाईल.

दिलेल्या सामग्रीचा चढता क्रम : 35, 40, 55, 55, 55, 67, 75, 75 90, 95

यावरून सर्वाधिक वेळा आलेला प्राप्तांक = 55

∴ दिलेल्या सामग्रीचा बहुलक 55.

उदा (2) एका कारखान्यातील कामगारांची वये खालील सारणीत दिली आहेत.

वय (वर्षे)	19	21	25	27	30
कामगार	5	15	13	15	7

यावरून त्यांच्या वयाचा बहुलक काढा.

उकल : येथे सर्वाधिक वारंवारता 15 आहे. परंतु ही वारंवारता दोन प्राप्तांकांची आहे.

∴ बहुलक = 21 व 27 ∴ वयाचा बहुलक 21 वर्षे व 27 वर्षे

सरावसंच 7.5

(1) मुकुंदचे 7 वर्षांचे सोयाबीनचे एकरी उत्पन्न क्विंटलमध्ये 10,7,5,3,9,6,9 असे आहे. यावरून एकरी उत्पन्नाचा मध्य काढा.

(2) दिलेल्या सामग्रीचा मध्यक काढा. 59,75,68,70,74,75,80

(3) गणिताच्या गृहपाठांत 7 विद्यार्थ्यांना मिळालेले 100 पैकी गुण खालीलप्रमाणे आहेत.
99, 100, 95, 100, 100, 80, 90 यावरून मिळालेल्या गुणांचे बहुलक काढा.

(4) एका कारखान्यातील 30 कामगारांना मिळत असलेला मासिक पगार रुपयांमध्ये खालीलप्रमाणे आहे.
5000, 7000, 3000, 4000, 4000, 3000, 3000, 3000, 8000, 4000,
4000, 9000, 3000, 5000, 5000, 4000, 4000, 3000, 5000, 5000,
6000, 8000, 3000, 3000, 6000, 7000, 7000, 6000, 6000, 4000
यावरून कामगारांचा मासिक पगाराचा मध्य काढा.

(5) एका टोपलीतील 10 टोमॅटोंचे वजन ग्रॅममध्ये प्रत्येकी 60, 70, 90, 95, 50, 65,70, 80, 85, 95 अशी आहेत. यावरून टोमॅटोंच्या वजनांचा मध्यक काढा.

(6) एका हॉकी खेळाडूने 9 सामन्यांत केलेले गोल खालीलप्रमाणे आहेत.
5, 4, 0, 2, 2, 4, 4, 3, 3 यावरून मध्य, मध्यक व बहुलक काढा.

(7) 50 प्राप्तांकांचा मध्य 80 आला. परंतु यांतील 19 हा प्राप्तांक चुकून 91 घेण्यात आला असे नंतर लक्षात आले, तर दुरुस्तीनंतरचा मध्य किती?

(8) येथे 10 प्राप्तांक चढत्या क्रमाने मांडलेले आहेत, 2, 3, 5, 9, $x + 1$, $x + 3$, 14, 16, 19, 20 जर त्यांचा मध्यक 11 आहे तर x ची किंमत काढा.

(9*) 35 प्राप्तांकांचा मध्य 20 आहे. यांपैकी पहिल्या 18 प्राप्तांकांचा मध्य 15 व शेवटच्या 18 प्राप्तांकांचा मध्य 25 असेल तर 18 वा प्राप्तांक काढा.

(10) पाच प्राप्तांकांचा मध्य 50 आहे. यांपैकी एक प्राप्तांक कमी झाल्यास मध्य 45 होतो, तर तो प्राप्तांक कोणता?

(11*) एका वर्गात 40 विद्यार्थी असून त्यांपैकी 15 मुलगे आहेत. एका परीक्षेत मुलग्यांना मिळालेल्या गुणांचा मध्य 33 व मुलींच्या गुणांचा मध्य 35 आहे यावरून वर्गातील एकूण विद्यार्थ्यांना मिळालेल्या गुणांचा मध्य काढा.

(12) 10 विद्यार्थ्यांची किलोग्रॅममधील वजने खालीलप्रमाणे आहेत.
40, 35, 42, 43, 37, 35, 37, 37, 42, 37 यावरून बहुलक काढा..

(13) खालील सारणीत काही कुटुंबांतील 14 वर्षांखालील अपत्यांची संख्या दर्शवली आहे. यावरून 14 वर्षाखालील अपत्यांच्या संख्यांचा बहुलक काढा.

अपत्यांची संख्या	1	2	3	4
कुटुंबे (वारंवारता)	15	25	5	5

(14) खालील सामग्रीचा बहुलक काढा.

प्राप्तांक (गुण)	35	36	37	38	39	40
विद्यार्थी संख्या	09	07	09	04	04	02

'केंद्रीय प्रवृत्तीचे कोणते परिमाण घेणे योग्य असते ?' या प्रश्नाचे उत्तर, ते कोणत्या हेतूने निवडायचे याच्याशी संबंधित असते.

समजा, एखाद्या क्रिकेटच्या खेळाडूने सलग अकरा सामन्यांमध्ये अनुक्रमे 41, 58, 35, 80, 23, 12, 63, 48, 107, 9 आणि 73 धावा काढल्या. त्याचे एकूण कर्तृत्व ठरवताना त्याने प्रत्येक सामन्यात काढलेल्या धावा विचारात घेणे आवश्यक आहे. म्हणून त्याच्या धावांची केंद्रीय प्रवृत्ती 'मध्य' या परिमाणाने ठरवणे योग्य होईल.

तसेच कपडे तयार करणाऱ्या एखाद्या कंपनीला कोणत्या मापाचे शर्ट जास्त संख्येने शिवावे ते ठरवायचे आहे. त्यासाठी (34, 36, 38, 40, 42, 44 यांपैकी) कोणत्या मापाचे शर्ट अधिकाधिक लोक वापरतात हे सर्वेक्षणाने शोधावे लागेल. म्हणजे केंद्रीय प्रवृत्तीचे 'बहुलक' हे परिमाण निवडणे योग्य होईल.

संकीर्ण प्रश्नसंग्रह 7

(1) योग्य पर्याय निवडा.

(i) खालीलपैकी कोणती सामग्री प्राथमिक सामग्री नाही ?

(A) वर्गाला भेट देऊन विद्यार्थ्यांच्या हजेरीची माहिती गोळा केली.

(B) प्रत्यक्ष भेट देऊन घरातील व्यक्तींच्या संख्येची माहिती गोळा केली.

(C) तलाठ्याकडे जाऊन गावातील प्रत्येक शेतकऱ्याचे सोयाबीनच्या लागवडीखालील क्षेत्र नोंदवले.

(D) प्रत्यक्ष पाहणी करून नाल्यांच्या स्वच्छतेची माहिती घेतली.

(ii) 25-35 ह्या वर्गाची वरची वर्गमर्यादा कोणती ?

(A) 25 (B) 35 (C) 60 (D) 30

(iii) 25-35 ह्या वर्गाचा वर्गमध्य कोणता ?

(A) 25 (B) 35 (C) 60 (D) 30

(iv) 0-10, 10-20, 20-30 ..... असे वर्ग असणाऱ्या वारंवारता सारणीत 10 हा प्रप्तांक कोणत्या वर्गात समाविष्ट करावा ?

(A) 0-10 (B) 10-20 (C) 0-10 व 10-20 ह्या दोन्ही वर्गांत (D) 20-30

(v*) जर $\bar{x}$ हा $x_1, x_2 \ldots\ldots\ldots\ldots x_n$ आणि $\bar{y}$ हा $y_1, y_2, \ldots\ldots\ldots\ldots y_n$ चा मध्य असेल आणि $\bar{z}$ हा $x_1, x_2 \ldots\ldots\ldots\ldots x_n, y_1, y_2, \ldots\ldots\ldots\ldots y_n$ यांचा मध्य असेल तर $\bar{z} =$?

(A) $\frac{\bar{x}+\bar{y}}{2}$ (B) $\bar{x}+\bar{y}$ (C) $\frac{\bar{x}+\bar{y}}{n}$ (D) $\frac{\bar{x}+\bar{y}}{2n}$

(vi*) पाच संख्यांचा मध्य 50 असून त्यांतील 4 संख्यांचा मध्य 46 आहे, तर पाचवी संख्या कोणती ?

(A) 4 (B) 20 (C) 434 (D) 66

(vii*) 100 प्राप्तांकांचा मध्य 40 आहे. जर त्यांतील 9 वा प्राप्तांक 30 आहे. त्याच्या जागी 70 घेतले व उरलेले प्राप्तांक तसेच ठेवले तर नवीन मध्य कोणता आहे ?

(A) 40.6 (B) 40.4 (C) 40.3 (D) 40.7

(viii) 19, 19, 15, 20, 25, 15, 20, 15 ह्या सामग्रीचा बहुलक कोणता ?

(A) 15 (B) 20 (C) 19 (D) 25

(ix) 7, 10, 7, 5, 9, 10 ह्या सामग्रीचा मध्यक कोणता?

(A) 7 (B) 9 (C) 8 (D) 10

(x) खालील सारणीनुसार 30-40 ह्या वर्गाची वरच्या वर्गमर्यादेपेक्षा कमी संचित वारंवारता किती?

वर्ग	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50
वारंवारता	7	3	12	13	2

(A) 13 (B) 15 (C) 35 (D) 22

(2) 20 कर्मचाऱ्यांच्या पगारांचा मध्य 10,250 रुपये आहे. जर त्यामध्ये कार्यालय प्रमुखाचा पगार मिळवला तर मध्य 750 रुपयांनी वाढतो, तर कार्यालय प्रमुखाचा पगार काढा.

(3) नऊ संख्यांचा मध्य 77 आहे, जर त्यांच्यामध्ये पुन्हा एक संख्या मिळवली असता मध्य 5 ने वाढतो, तर मिळवलेली संख्या कोणती?

(4) एका शहराचे एका महिन्याचे दररोजचे कमाल तापमान सेल्सिअस अंशांमध्ये खालीलप्रमाणे आहे. योग्य वर्ग घेऊन वर्गीकृत वारंवारता वितरण सारणी (सलग वर्ग) तयार करा.

29.2, 29.0, 28.1, 28.5, 32.9, 29.2, 34.2, 36.8, 32.0, 31.0,
30.5, 30.0, 33, 32.5, 35.5, 34.0, 32.9, 31.5, 30.3, 31.4,
30.3, 34.7, 35.0, 32.5, 33.5, 29.0, 29.5, 29.9, 33.2, 30.2

सारणीवरून खालील प्रश्नांची उत्तरे लिहा.

(i) कमाल तापमान 34°c पेक्षा कमी असणारे दिवस किती?

(ii) कमाल तापमान 34°c किंवा त्यापेक्षा जास्त असणारे दिवस किती ?

(5) जर खालील प्राप्तांकांचा मध्य 20.2 असेल तर p ची किंमत काढा-

x_i	10	15	20	25	30
f_i	6	8	p	10	6

(6) मॉडेल हायस्कूल नांदपूर येथील इयत्ता 9 वीच्या 68 विद्यार्थ्यांनी लेखी परीक्षेत गणितात 80 पैकी मिळवलेले गुण खाली दिले आहेत.

70, 50, 60, 66, 45, 46, 38, 30, 40, 47, 56, 68,
80, 79, 39, 43, 57, 61, 51, 32, 42, 43, 75, 43,
36, 37, 61, 71, 32, 40, 45, 32, 36, 42, 43, 55,
56, 62, 66, 72, 73, 78, 36, 46, 47, 52, 68, 78,
80, 49, 59, 69, 65, 35, 46, 56, 57, 60, 36, 37,
45, 42, 70, 37, 45, 66, 56, 47

30-40, 40-50 ..... हे वर्ग घेऊन वरच्या वर्ग मर्यादेपेक्षा कमी संचित वारंवारता सारणी तयार करा. त्या सारणीच्या आधारे पुढील प्रश्नांची उत्तरे लिहा.

(i) 80 पेक्षा कमी गुण मिळवणारे विद्यार्थी किती?

(ii) 40 पेक्षा कमी गुण मिळवणारे विद्यार्थी किती ?

(iii) 60 पेक्षा कमी गुण मिळवणारे विद्यार्थी किती

(7) उदा. 6 मधील सामग्रीच्या आधारे 30-40, 40-50 ..... असे वर्ग घेऊन खालच्या वर्ग मर्यादेपेक्षा जास्त संचित वारंवारता सारणी तयार करा. यावरून

(i) 70 किंवा 70 पेक्षा जास्त गुण मिळवणारे विद्यार्थी किती ?

(ii) 30 किंवा 30 पेक्षा जास्त गुण मिळवणारे विद्यार्थी किती ?

(8) खालील 10 प्राप्तांक चढत्या क्रमाने मांडलेले आहेत.

45,47,50,52,x, x+2, 60,62,63,74 यांचा मध्यक 53 आहे. यावरून x ची किंमत काढा. तसेच दिलेल्या सामग्रीचा मध्य व बहुलक काढा.

गणिती गंमत

पास्कलचा त्रिकोण किंवा मेरूप्रस्तर

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

.....

.....

.....

संख्यांचा वरील आकृतिबंध त्रिकोणाकार मांडणीत आहे. ही मांडणी पास्कलचा त्रिकोण म्हणून ओळखली जाते. या मांडणीतील पुढील तीन ओळी तुम्ही लिहा. या मांडणीत आडव्या ओळींत येणाऱ्या संख्या $(x + y)$ या द्विपदीच्या घातांच्या विस्ताराचे क्रमवार येणारे सहगुणक असतात. खालील विस्तार पाहा.

$(x + y)^0 = 1$

$(x + y)^1 = 1x + 1y$

$(x + y)^2 = 1x^2 + 2xy + 1y^2$

$(x + y)^3 = 1x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$

$(x + y)^4 = 1x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + 1y^4$

या विस्तारांतील x आणि y च्या घातांकांचे निरीक्षण करा. त्यावरून $(x + y)^{10}$ चा विस्तार लिहिण्याचा प्रयत्न करा.