1 संच

चला, शिकूया.

- संच : ओळख
- संचाचे प्रकार
- वेन चित्रे
- समान संच, उपसंच
- विश्वसंच, पूरक संच
- छेद संच, संयोग संच
- संचातील घटकांची संख्या

जरा आठवूया.

खाली काही चित्रे दिली आहेत. त्यांमध्ये आपल्या परिचयाचे वस्तुसमूह आहेत.

				1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, ...
फुलांचा गुच्छ	किल्ल्यांचा जुडगा	पक्ष्यांचा थवा	वह्यांचा गठ्ठा	संख्यांचा गट

वरील प्रत्येक वस्तुसमूहासाठी आपण विशिष्ट शब्द वापरतो. या सर्व उदाहरणांत समूहांतील घटक आपणांस अचूक व नेमकेपणाने सांगता येतात. वस्तूंच्या अशा समूहांना 'संच' असे म्हणतात.

आता हे समूह पाहा. 'गावातील आनंदी मुले', 'वर्गातील हुशार मुले.' समूहाच्या या दोन्ही उदाहरणांमध्ये 'आनंदी' आणि 'हुशार' या दोन्ही शब्दांचे अर्थ सापेक्ष आहेत म्हणजे 'आनंदी' वृत्ती व 'हुशारी' या दोन्ही शब्दांचे अर्थ नेमकेपणाने सांगता येत नाहीत म्हणून या समूहांना संच म्हणता येणार नाही.

आता पुढे काही उदाहरणे दिली आहेत. त्यांतील कोणत्या समूहांना संच म्हणता येईल ते सांगा.

(1) आठवड्याचे सात वार

(2) एका वर्षाचे महिने

(3) वर्गातील शूर मुले

(4) पहिल्या 10 मोजसंख्या

(5) महाराष्ट्रातील बळकट गड-किल्ले

(6) आपल्या सूर्यमालेतील ग्रह

जाणून घेऊया.

संच (Sets)

ज्या समूहांतील घटक अचूक व नेमकेपणाने सांगता येतात, त्या समूहांना संच असे म्हणतात.

संचाला नाव देण्यासाठी सर्वसाधारणपणे A, B, C,.....,Z यांपैकी इंग्रजी वर्णमालेतील पहिल्या लिपीतील अक्षरे वापरतात.

संचाचे घटक दाखवण्यासाठी a, b, c,... यांपैकी इंग्रजी अक्षरे वापरतात.

a हा संच A चा घटक आहे हे '$a \in$ A' असे लिहितात आणि a हा संच A चा घटक नाही हे दाखवण्यासाठी '$a \notin$ A' असे लिहितात.

आता आपण संख्यांचे संच पाहू.

N = { 1, 2, 3, . . .} हा नैसर्गिक संख्यासंच (Set of natural numbers) आहे.

W = {0, 1, 2, 3, . . .} हा पूर्ण संख्यासंच (Set of whole numbers) आहे.

I = {..., −3, −2, −1, 0, 1, 2, ...} हा पूर्णांक संख्यासंच (Set of integers) आहे.

Q हा सर्व परिमेय संख्यांचा संच (Set of rational numbers) आहे.

R हा वास्तव संख्यांचा संच (Set of real numbers) आहे.

संच लिहिण्याच्या पद्धती

संच लिहिण्याच्या दोन पद्धती आहेत.

(1) यादी पद्धती (Listing method or roster method)

या पद्धतीत संचाचे सर्व घटक महिरपी कंसात लिहितात व प्रत्येक घटक वेगळा दाखवण्यासाठी दोन लगतच्या घटकांमध्ये स्वल्पविराम देतात. यामध्ये घटकांचा क्रम महत्त्वाचा नसतो, पण सगळे घटक दर्शवणे आवश्यक असते.

उदा. 1 ते 10 मधील विषम संख्यांचा संच यादी पद्धतीने पुढीलप्रमाणे लिहिता येईल.

जसे, A = {3, 5, 7, 9} किंवा A = {7, 3, 5, 9}

जसे, remember या शब्दातील अक्षरांचा संच {r, e, m, b} असा लिहितात. येथे remember या शब्दात r, m, e ही अक्षरे एकापेक्षा अधिक वेळा आली असली तरी संचात ती एकदाच लिहिली आहेत .

(2) गुणधर्म पद्धती (Rule method or set builder form)

या पद्धतीत घटकांची यादी न करता संचाचा सर्वसाधारण घटक चलाने दर्शवून त्याच्यापुढे उभी रेघ काढतात. उभ्या रेघेपुढे त्या चलाचा गुणधर्म लिहितात. **उदा.** $A = \{x \mid x \in N, 1 < x < 10\}$ याचे वाचन संच A चे घटक x असे आहेत की, x ही 1 व 10 च्या दरम्यानची नैसर्गिक संख्या आहे, असे करतात.

उदा. B = { x | x ही 1 ते 10 मधील मूळ संख्या आहे.} यामध्ये 1 ते 10 मधील सर्व मूळसंख्यांचा समावेश होईल म्हणून B हा संच {2, 3, 5, 7} असा यादी पद्धतीनेही लिहिता येईल.

Q हा परिमेय संख्या संच गुणधर्म पद्धतीने पुढीलप्रमाणे लिहिता येतो.

$$Q = \left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in I, q \neq 0 \right\}$$

याचे वाचन $\frac{p}{q}$ या स्वरूपाच्या अशा संख्या आहेत की, p ही कोणतीही पूर्णांक संख्या आणि q ही शून्येतर पूर्णांक संख्या असेल.

नमुना उदाहरणे : खालील उदाहरणांत प्रत्येक संच दोन्ही पद्धतींनी लिहिला आहे.

गुणधर्म पद्धत	यादी पद्धत
A = { x | x हा DIVISION या शब्दातील अक्षर आहे.}	A = {D, I, V, S, O, N}
B = { y | y ही संख्या अशी आहे की $y^2 = 9$}	B = { −3, 3}
C = { z | z ही 5 च्या पटीतील 30 पेक्षा लहान नैसर्गिक संख्या आहे.}	C = { 5, 10, 15, 20, 25}

उदा. : पुढील सारणीतील रिकाम्या जागा भरून ती सारणी पूर्ण करा

यादी पद्धत	गुणधर्म पद्धत
A = { 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14}	A = { x | x ही 15 पेक्षा लहान सम नैसर्गिक संख्या आहे.}
....	B = { x | x ही 1 ते 20 मधील पूर्ण वर्गसंख्या आहे.}
C = { a, e, i, o, u}	....
....	D = { y | y हा इंद्रधनुष्यातील रंग आहे.}
....	P = { x | x ही पूर्णांक संख्या अशी आहे की, $-3 < x < 3$}
M = {1, 8, 27, 64, 125.......}	M = { x | x हा धन पूर्णांकांचा घन आहे.}

सरावसंच 1.1

(1) पुढील संच यादी पद्धतीने लिहा.

(i) सम नैसर्गिक संख्यांचा संच (ii) 1 ते 50 मधील सम मूळ संख्यांचा संच

(iii) सर्व ऋण पूर्णांकांचा संच (iv) संगीतातील सात मूळ स्वरांचा संच

(2) खाली चिन्हांत दिलेली विधाने शब्दांत लिहा.

(i) $\frac{4}{3} \in Q$ (ii) $-2 \notin N$ (iii) P = { p | p ही विषम संख्या आहे.}

(3) कोणतेही दोन संच यादी पद्धतीने आणि गुणधर्म पद्धतीने लिहा.

(4) खालील संच यादी पद्धतीने लिहा.

(i) भारतीय सौर वर्षातील सर्व महिन्यांचा संच.

(ii) 'COMPLEMENT' या शब्दातील अक्षरांचा संच.

(iii) मानवाच्या सर्व ज्ञानेंद्रियांचा संच.

(iv) 1 ते 20 मधील मूळ संख्यांचा संच.

(v) पृथ्वीवरील खंडांचा संच.

(5) खालील संच गुणधर्म पद्धतीने लिहा.

(i) A = { 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100}

(ii) B = { 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48}

(iii) C = {S, M, I, L, E}

(iv) D = {रविवार, सोमवार, मंगळवार, बुधवार, गुरुवार, शुक्रवार, शनिवार}

(v) X = {a, e, t}

जाणून घेऊया.

संचांचे प्रकार (Types of sets)

संचाचे नाव	व्याख्या	उदाहरण
एकघटक संच (Singleton Set)	ज्या संचात फक्त एकच घटक असतो, अशा संचास 'एकघटक संच' असे म्हणतात.	A = {2} A हा सम मूळ संख्यांचा संच आहे.
रिक्त संच (Null Set) (Empty Set)	ज्या संचात दिलेल्या गुणधर्माचा एकही घटक नसतो, त्यास 'रिक्त संच' म्हणतात. हा संच { } किंवा ϕ (फाय) या चिन्हाने दाखवतात.	B = {x|x ही 2 व 3 मधील नैसर्गिक संख्या आहे.} $\therefore$ B = { } किंवा ϕ
सांत संच (Finite Set)	जो संच रिक्त आहे किंवा ज्या संचातील घटकांची संख्या मर्यादित असते व मोजता येते, त्याला 'सांत संच' म्हणतात.	C = {p| p ही 1 ते 22 मधील 4 ने विभाज्य संख्या आहे.} C = {4, 8, 12, 16, 20}
अनंत संच (Infinite Set)	ज्या संचातील घटकांची संख्या अमर्याद असते व मोजता येत नाही त्याला 'अनंत संच' म्हणतात.	N = {1, 2, 3, . . . }

उदा. पुढील संच यादी पद्धतीने लिहून त्यांचे सांत संच व अनंत संच असे वर्गीकरण करा.

(i) A = $\{x \mid x \in N$ आणि x ही विषम संख्या आहे.$\}$ (ii) B = $\{x \mid x \in N$ आणि $3x - 1 = 0\}$

(iii) C = $\{x \mid x \in N$ आणि x ही 7 ने विभाज्य संख्या आहे.$\}$

(iv) D = $\{(a, b) \mid a, b \in W, a + b = 9\}$ (v) E = $\{x \mid x \in I, x^2 = 100\}$

(vi) F = $\{(a, b) \mid a, b \in Q, a + b = 11\}$

उकल : (i) A = $\{x \mid x \in N$ आणि x ही विषम संख्या आहे.$\}$

A = $\{1, 3, 5, 7, \ldots\ldots\}$ हा अनंत संच आहे.

(ii) B = $\{x \mid x \in N$ आणि $3x - 1 = 0\}$

$3x - 1 = 0 \quad \therefore 3x = 1 \quad x = \frac{1}{3}$

पण $\frac{1}{3} \notin N \quad \therefore B = \{\ \ \}$ $\therefore$ B हा सांत संच आहे.

(iii) C = $\{x \mid x \in N$ आणि x ही 7 ने विभाज्य संख्या आहे.$\}$

C = $\{7, 14, 21, \ldots\}$ हा अनंत संच आहे.

(iv) D = $\{(a, b) \mid a, b \in W, a + b = 9\}$

आपण a आणि b च्या अशा जोड्या शोधू शकतो की, a, b पूर्ण संख्या असून a + b = 9 आहे. आधी a ची आणि नंतर b ची किंमत, असा क्रम ठेवून D हा संच यादी पद्धतीने पुढीलप्रमाणे लिहिता येईल.

D = $\{(0, 9), (1, 8), (2, 7), (3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3), (7, 2), (8, 1), (9, 0)\}$, या संचाचे घटक म्हणजेच संख्यांच्या जोड्या मोजता येतात व निश्चित आहेत.

$\therefore$ D हा संच, सांत संच आहे.

(v) E = $\{x \mid x \in I, x^2 = 100\}$

E = $\{-10, 10\}$. $\therefore$ E हा सांत संच आहे.

(vi) F = $\{(a, b) \mid a, b \in Q, a + b = 11\}$

F = $\{(6, 5), (3, 8), (3.5, 7.5), (-15, 26), \ldots\}$ अशा असंख्य जोड्या मिळतात.

$\therefore$ F हा अनंत संच आहे.

हे लक्षात घ्या !

संख्यांचे N, W, I, Q, R हे सगळे संच अनंत संच आहेत.

जाणून घेऊया.

समान संच (Equal sets)

संच A मधील प्रत्येक घटक संच B मध्ये आणि B या संचातील प्रत्येक घटक हा संच A मध्ये असेल तर ते संच समान आहेत असे म्हणतात.

'A आणि B हे समान संच आहेत' हे चिन्हात A = B असे लिहितात.

उदा (1) A = { x | x हे 'listen' या शब्दातील अक्षर आहे.} $\therefore$ A = { l, i, s, t, e, n}

B = { y | y हे 'silent' या शब्दातील अक्षर आहे.} $\therefore$ B = { s, i, l, e, n, t}

A आणि B यांतील घटकांचा क्रम वेगवेगळा आहे, पण घटक तेच आहेत म्हणून A व B हे संच समान आहेत. म्हणजेच A = B आहे.

उदा (2) $A = \{x \mid x = 2n, n \in N, 0 < x \leq 10\}$, $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$

B = { y | y ही समसंख्या आहे, $1 \leq y \leq 10$}, $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$

$\therefore$ A व B हे समान संच आहेत.

आता खालील संचांचा विचार करू.

$C = \{1, 3, 5, 7\}$ $D = \{2, 3, 5, 7\}$

C आणि D समान संच आहेत असे म्हणता येईल का? अर्थातच नाही.

कारण $1 \in C$, $1 \notin D$, $2 \in D$, $2 \notin C$

म्हणून C व D समान संच नाहीत. म्हणजेच $C \neq D$

उदा (3) जर $A = \{1, 2, 3\}$ आणि $B = \{1, 2, 3, 4\}$ तर $A \neq B$ याचा पडताळा घ्या.

उदा (4) A = { x | x ही मूळ संख्या व $10 < x < 20$} आणि $B = \{11, 13, 17, 19\}$

येथे A = B आहे याचा पडताळा घ्या.

सरावसंच 1.2

(1) खालीलपैकी कोणते संच समान आहेत व कोणते नाहीत ते सकारण लिहा.

$A = \{x \mid 3x - 1 = 2\}$

B = { x | x नैसर्गिक संख्या आहे पण x मूळही नाही व संयुक्तही नाही.}

$C = \{x \mid x \in N, x < 2\}$

(2) A व B समान आहेत का ते सकारण लिहा.

A = सम असलेल्या मूळसंख्या $B = \{x \mid 7x - 1 = 13\}$

(3) खालीलपैकी कोणते संच रिक्त आहेत ते सकारण लिहा.

(i) A = { a | a ही शून्यापेक्षा लहान असणारी नैसर्गिक संख्या आहे.}

(ii) $B = \{x \mid x^2 = 0\}$ (iii) $C = \{x \mid 5x - 2 = 0, x \in N\}$

(4) खालीलपैकी कोणते संच सांत व कोणते अनंत आहेत ते सकारण लिहा.

(i) A = { x | x < 10, x ही नैसर्गिक संख्या}

(ii) B = {y | y < −1, y ही पूर्णांक संख्या}

(iii) C = तुमच्या शाळेतील 9 वी मधील सर्व विद्यार्थ्यांचा संच

(iv) तुमच्या गावातील रहिवाशांचा संच

(v) प्रयोगशाळेतील उपकरणांचा संच

(vi) पूर्ण संख्यासंच

(vii) परिमेय संख्यासंच

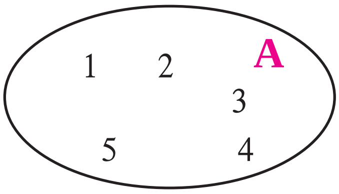
जाणून घेऊया.

वेन आकृती (Venn diagrams)

संच लिहिण्यासाठी बंदिस्त आकृत्यांचा उपयोग ब्रिटिश तर्कशास्त्रज्ञ जॉन वेन यांनी प्रथम केला. म्हणून अशा आकृत्यांना 'वेन आकृती' म्हणतात. वेगवेगळ्या संचांतील संबंध समजण्यासाठी आणि संचांवर आधारित उदाहरणे सोडवण्यासाठी या आकृत्यांचा चांगला उपयोग होतो. वेन आकृत्यांनी संच कसे दाखवले जातात ते खालील उदाहरणांवरून समजून घ्या.

उदा. A = { 1, 2, 3, 4, 5}

वेन आकृतीने A हा संच खाली दाखवला आहे.

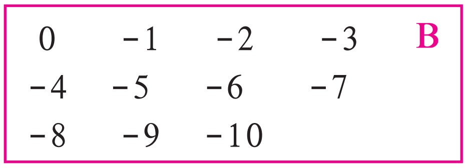


1834-1923

तर्कशास्त्र व संभाव्यता या विषयांना गणिती रूप देण्याचे काम जॉन वेन यांनी प्रथम केले. **'लॉजिक ऑफ चान्स'** हे त्यांचे प्रसिद्ध पुस्तक आहे.

B = {x | −10 ≤ x ≤ 0, x पूर्णांक}

शेजारील वेन आकृती B हा संच दर्शवते.



उपसंच (Subset)

जर A आणि B हे दोन संच असतील आणि संच B चा प्रत्येक घटक, संच A चा देखील घटक असेल तर संच B ला संच A चा उपसंच म्हणतात आणि B ⊆ A अशा चिन्हाने दाखवतात. त्याचे वाचन 'B उपसंच A' असे किंवा 'B हा A चा उपसंच आहे' असे करतात.

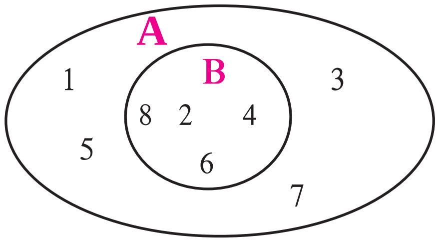
उदा (1) A = { 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}

B = {2, 4, 6, 8}

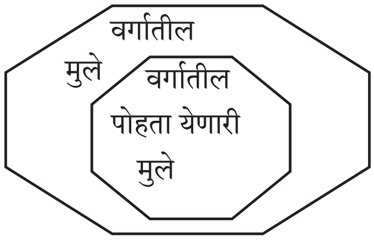
B मधील प्रत्येक घटक A चा देखील घटक आहे.

म्हणजेच B ⊆ A.

ही माहिती वेन आकृतीने कशी दाखवली आहे ते पाहा.



कृती : वर्गातील मुलांचा संच व त्याच वर्गातील पोहता येणाऱ्या मुलांचा संच वेन आकृतीने दाखवले आहेत.



त्याप्रमाणे खालील उपसंचांसाठी वेन आकृत्या काढा.

(1) (i) वर्गातील मुलांचा संच

(ii) वर्गातील सायकल चालवू शकणाऱ्या मुलांचा संच

(2) खाली काही फळांचा एक संच दिला आहे.

{पेरू, संत्रे, आंबा, फणस, चिकू, जांभूळ, सीताफळ, पपई, करवंद}

पुढील उपसंच दाखवा. (i) एक बी असणारी फळे (ii) एकापेक्षा जास्त बिया असणारी फळे

आता आणखी काही उपसंच पाहू.

उदा (2) N = नैसर्गिक संख्या संच. I = पूर्णांक संख्या संच.

येथे $N \subseteq I$. कारण सर्व नैसर्गिक संख्या ह्या पूर्णांक संख्या सुद्धा असतात हे आपल्याला माहीत आहे.

उदा (3) P = { x | x हे 25 चे वर्गमूळ आहे.} $S = \{ y \mid y \in I, -5 \leq y \leq 5\}$

यादी पद्धतीने P हा संच लिहू. $P = \{-5, 5\}$

यादी पद्धतीने S हा संच लिहू. $S = \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

येथे P चा प्रत्येक घटक S चा घटक आहे.

$\therefore P \subseteq S$

हे लक्षात ठेवूया.

(i) प्रत्येक संच स्वत:चा उपसंच असतो. म्हणजेच $A \subseteq A$

(ii) रिक्त संच हा प्रत्येक संचाचा उपसंच असतो. म्हणजेच $\phi \subseteq A$

(iii) जर $A = B$ तर $A \subseteq B$ आणि $B \subseteq A$

(iv) जर $A \subseteq B$ व $B \subseteq A$ तर $A = B$

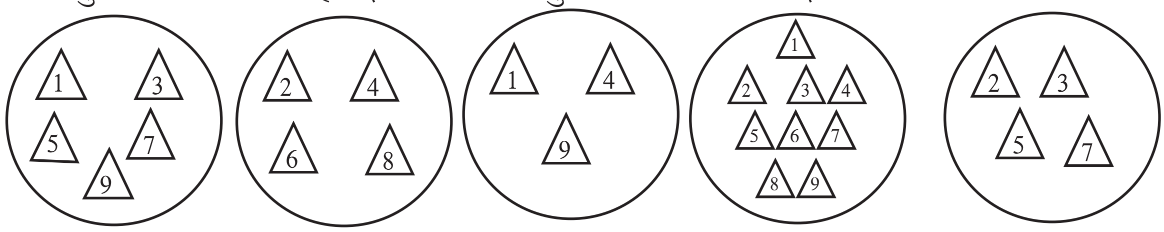
उदा. $A = \{1, 3, 4, 7, 8\}$ या संचाचे उपसंच पाहू.

जसे $P = \{1, 3\}$, $T = \{4, 7, 8\}$, $V = \{1, 4, 8\}$, $S = \{1, 4, 7, 8\}$

असे आणखी अनेक उपसंच तयार करता येतील. त्यांपैकी कोणतेही पाच उपसंच लिहा.

कृती : प्रत्येक विद्यार्थ्याने कागदाचे साधारण सारख्या आकाराचे नऊ त्रिकोण आणि एक थाळी घ्यावी. त्रिकोणावर 1 ते 9 या संख्या लिहाव्यात. मग प्रत्येकाने आपापल्या थाळीत संख्या लिहिलेले काही त्रिकोणी कागद ठेवावेत. आता प्रत्येकाजवळ 1 ते 9 या संख्या असणाऱ्या संचाचा उपसंच तयार होईल.

सुजाता हमीद मुक्ता नंदिनी जोसेफ



सुजाता, हमीद, मुक्ता, नंदिनी आणि जोसेफ यांच्या थाळ्यांमधून कोणकोणत्या संख्या दिसत आहेत ते पाहा. प्रत्येकाने कोणता विचार करून संख्या निवडल्या आहेत हे ओळखा. त्यावरून प्रत्येक संच गुणधर्म पद्धतीने लिहा.

चला, चर्चा करूया.

उदा. खाली काही संच दिलेले आहेत.

A = { ..., −4, −2, 0, 2, 4, 6, ...} B = {1, 2, 3, ...}

C = {..., −12, −6, 0, 6, 12, 18.....} D = {..., −8, −4, 0, 4, 8, ...}

I = { ....., −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3, 4, ...}

यावरून पुढीलपैकी कोणती विधाने सत्य आहेत यावर चर्चा करा.

(i) A हा B, C, D या प्रत्येक संचाचा उपसंच आहे. (ii) B हा वरील सर्व संचांचा उपसंच आहे.

जाणून घेऊया.

विश्वसंच (Universal set)

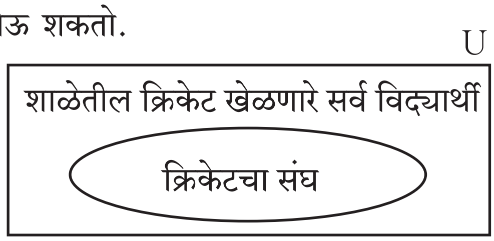
आपण ज्या संचांचा विचार करणार आहोत त्या सर्वांना सामावून घेणारा एक मोठा संच **विश्वसंच** म्हणून घेता येतो. त्याच्या बाहेरील घटकांचा आपण विचार करत नाही. विचारात घेतलेला प्रत्येक संच विश्वसंचाचा उपसंच असतो.

उदा (1) आपल्याला शाळेतील वारंवार अनुपस्थित राहणाऱ्या 9 वीच्या काही विद्यार्थ्यांच्या अनुपस्थितीचा अभ्यास करायचा आहे. त्यासाठी 9वी या इयत्तेतील विद्यार्थ्यांच्या संचाचा विचार करावा लागेल. येथे त्या इयत्तेतील सर्व विद्यार्थ्यांचा संच किंवा शाळेतील सर्व विद्यार्थ्यांचा संच हा विश्वसंच घेता येईल.

आता दुसरे उदाहरण पाहू.

उदा (2) आपल्याला शाळेतील क्रिकेट खेळणाऱ्या मुलांतून 15 मुलांचा संघ निवडायचा आहे; तर शाळेतील क्रिकेट खेळणाऱ्या सर्व खेळाडूंचा संच हा विश्वसंच होऊ शकतो.

त्यांतील योग्य त्या 15 खेळाडूंचा संघ हा त्या विश्वसंचाचा उपसंच आहे.



विश्वसंच साधारणपणे ‘U’ या अक्षराने दर्शवतात.

वेन आकृतीमध्ये विश्वसंच सामान्यत: आयताने दाखवतात.

पूरक संच (Complement of a set)

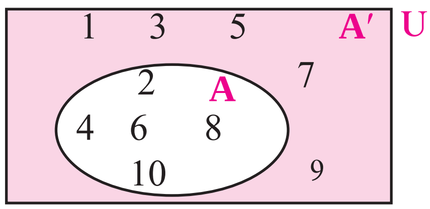
समजा U हा विश्वसंच आहे. जर $B \subseteq U$, तर संच B मध्ये नसलेल्या परंतु विश्वसंच U मध्ये असलेल्या घटकांच्या संचाला संच B चा पूरक संच म्हणतात. संच B चा पूरक संच B' किंवा B^C ने दर्शवतात.

$\therefore B' = \{x \mid x \in U$, आणि $x \notin B\}$ असे B' चे वर्णन करता येईल.

उदा (1) $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

$A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$

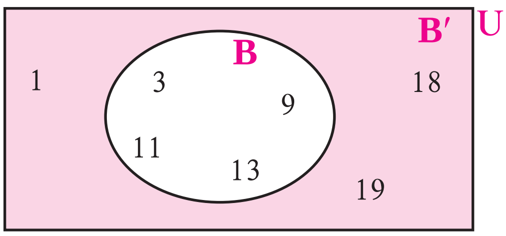
$\therefore A' = \{1, 3, 5, 7, 9\}$



उदा (2) समजा $U = \{1, 3, 9, 11, 13, 18, 19\}$

$B = \{3, 9, 11, 13\}$

$\therefore B' = \{1, 18, 19\}$



आता $(B')'$ काढा. त्यावरून काय निष्कर्ष निघतो?

$(B')'$ हा संच म्हणजे B' मध्ये नसलेल्या परंतु U मध्ये असलेल्या घटकांचा संच.

$(B')' = B$ मिळाले का?

वरील माहिती वेन आकृतीवरून समजून घ्या.

पूरक संचाचा पूरक संच म्हणजे दिलेला संच असतो.

हे लक्षात ठेवूया.

पूरक संचाचे गुणधर्म

(i) A आणि A' यांच्यामध्ये सामाईक घटक नसतो.

(ii) $A \subseteq U$ आणि $A' \subseteq U$

(iii) विश्वसंचाचा पूरक संच हा रिक्तसंच असतो. $U' = \phi$

(iv) रिक्तसंचाचा पूरक संच हा विश्वसंच असतो. $\phi' = U$

सरावसंच 1.3

(1) जर A = $\{a, b, c, d, e\}$, B = $\{c, d, e, f\}$, C = $\{b, d\}$, D = $\{a, e\}$ तर पुढीलपैकी कोणती विधाने सत्य व कोणती विधाने असत्य आहेत ते लिहा.

(i) $C \subseteq B$ (ii) $A \subseteq D$ (iii) $D \subseteq B$ (iv) $D \subseteq A$ (v) $B \subseteq A$ (vi) $C \subseteq A$

(2) 1 ते 20 मधील नैसर्गिक संख्यांचा विश्वसंच घेऊन X आणि Y वेन आकृतीने दाखवा.

(i) X = $\{x \mid x \in N$, आणि $7 < x < 15\}$

(ii) Y = $\{y \mid y \in N$, y ही 1 ते 20 मधील मूळसंख्या आहे.$\}$

(3) U = $\{1, 2, 3, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$

P = $\{1, 3, 7, 10\}$

तर (i) U, P आणि P' वेन आकृतीने दाखवा. (ii) $(P')' = P$ याचा पडताळा घ्या.

(4) जर A = $\{1, 3, 2, 7\}$ तर A या संचाचे कोणतेही तीन उपसंच लिहा.

(5) (i) पुढील संचांपैकी कोणते संच दुसऱ्या कोणत्या संचांचे उपसंच आहेत, ते लिहा.

P हा पुण्यातील रहिवाशांचा संच आहे. M हा मध्यप्रदेशातील रहिवाशांचा संच आहे.

I हा इंदौरमधील रहिवाशांचा संच आहे. B हा भारतातील रहिवाशांचा संच आहे.

H हा महाराष्ट्रातील रहिवाशांचा संच आहे.

(ii) वरीलपैकी कोणता संच या उदाहरणात विश्वसंच म्हणून घेता येईल?

(6*) खाली काही संच दिले आहेत. त्यांचा अभ्यास करताना कोणता संच त्या संचांसाठी विश्वसंच घेता येईल?

(i) A = 5 च्या पटीतील संख्यांचा संच, B = 7 च्या पाढ्यातील संख्यांचा संच.

C = 12 च्या पटीतील संख्यांचा संच.

(ii) P = 4 च्या पटीतील पूर्णांक संख्यांचा संच. T = सर्व सम वर्ग संख्यांचा संच.

(7) वर्गातील सर्व विद्यार्थ्यांचा संच हा विश्वसंच मानू. गणितात 50% किंवा त्यापेक्षा अधिक गुण मिळवणाऱ्या विद्यार्थ्यांचा संच A मानला तर A चा पूरक संच लिहा.

जाणून घेऊया.

संचांवरील क्रिया

दोन संचांचा छेद (Intersection of two sets)

समजा A आणि B हे दोन संच आहेत. A आणि B या संचांमधील सामाईक घटकांच्या संचाला A आणि B या संचांचा छेदसंच असे म्हणतात. तो $A \cap B$ असा लिहितात आणि त्याचे वाचन A छेद B असे करतात.

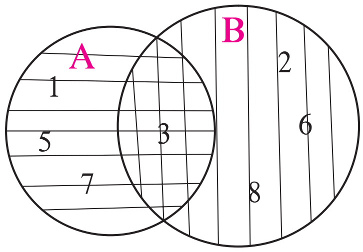
$\therefore \quad A \cap B = \{x \mid x \in A$ आणि $x \in B\}$

उदा (1) A = { 1, 3, 5, 7}   B = { 2, 3, 6, 8}

आता वेन आकृती काढू.

A आणि B या दोन्ही संचांतील 3 हा सामाईक घटक आहे.

$\therefore A \cap B = \{3\}$



उदा (2) A = {1, 3, 9, 11, 13}   B = {1, 9, 11}

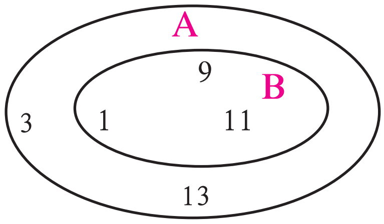
संच A व संच B मध्ये 1, 9, 11 हे सामाईक घटक आहेत.

$\therefore A \cap B = \{1, 9, 11\}$ परंतु $B = \{1, 9, 11\}$

$\therefore A \cap B = B$

येथे B हा A चा उपसंच आहे, हे लक्षात ठेवूया.

$\therefore$ जर $B \subseteq A$ तर $A \cap B = B$.   तसेच   जर $B \cap A = B$, तर $B \subseteq A$



हे लक्षात ठेवूया.

छेदसंचाचे गुणधर्म

(1) $A \cap B = B \cap A$

(2) जर $A \subseteq B$ तर $A \cap B = A$

(3) जर $A \cap B = B$ तर $B \subseteq A$

(4) $A \cap B \subseteq A$ आणि $A \cap B \subseteq B$

(5) $A \cap A' = \phi$

(6) $A \cap A = A$

(7) $A \cap \phi = \phi$

कृती : वेगवेगळी उदाहरणे घेऊन वरील गुणधर्मांचा पडताळा घ्या.

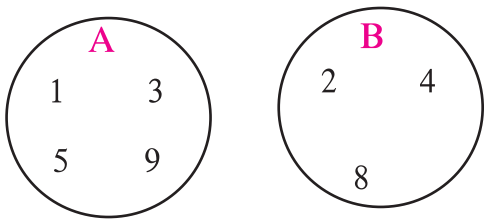
जाणून घेऊया.

विभिन्न संच (Disjoint sets)

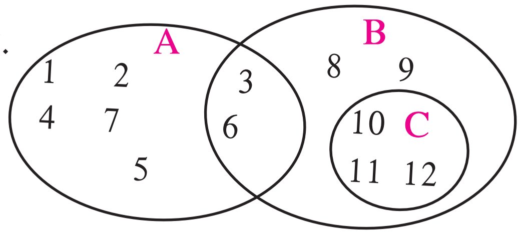
समजा, A = { 1, 3, 5, 9}

आणि B = {2, 4, 8} हे दोन संच दिले आहेत.

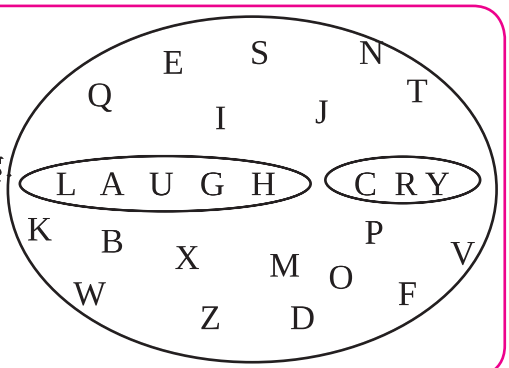
संच A व B मध्ये एकही सामाईक घटक नाही. म्हणजेच ते संच पूर्णपणे भिन्न किंवा विभक्त आहेत. म्हणून त्यांना 'विभक्त' किंवा 'विभिन्न' संच असे म्हणतात. या संचांची वेन आकृती पाहा.



कृती I : येथे A, B, C हे संच वेन आकृत्यांनी दाखवले आहेत. त्यांपैकी कोणते दोन संच विभिन्न आहेत ते लिहा.



कृती II : इंग्रजी अक्षरांचा संच हा विश्वसंच आहे असे समजा.
येथे संचांचे घटक इंग्रजी अक्षरे आहेत.
समजा, LAUGH या शब्दातील अक्षरांचा एक संच आहे
आणि CRY या शब्दातील अक्षरांचा दुसरा संच आहे.
हे विभक्त संच आहेत, असे म्हणता येईल.
या दोन्ही संचांचा छेद रिक्त आहे हे अनुभवा.



दोन संचांचा संयोग (Union of two sets)

समजा, A आणि B हे दोन संच आहेत. या दोन्ही संचातील घटकांनी मिळून होणाऱ्या संचाला A आणि B या संचांचा संयोग संच म्हणतात. तो $A \cup B$ असा लिहितात आणि A संयोग B असा वाचतात.

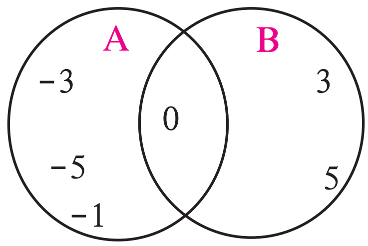
$A \cup B = \{x \mid x \in A$ किंवा $x \in B\}$

उदा (1) $A = \{-1, -3, -5, 0\}$

$B = \{0, 3, 5\}$

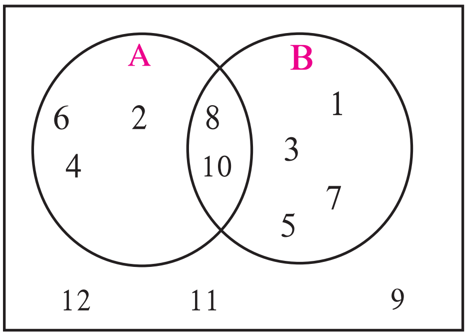
$A \cup B = \{-3, -5, 0, -1, 3, 5\}$

लक्षात घ्या की, $A \cup B = B \cup A$



उदा (2)

U



शेजारील वेन आकृतीत दर्शवलेल्या संचांवरून खालील संच यादी पद्धतीने लिहा.

(i) U (ii) A (iii) B (iv) $A \cup B$ (v) $A \cap B$

(vi) A' (vii) B' (viii) $(A \cup B)'$ (ix) $(A \cap B)'$

उकल : $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$

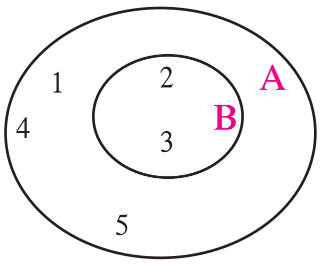
$A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, $B = \{1, 3, 5, 7, 8, 10\}$

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10\}$ $A \cap B = \{8, 10\}$

$A' = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 12\}$ $B' = \{2, 4, 6, 9, 11, 12\}$

$(A \cup B)' = \{9, 11, 12\}$ $(A \cap B)' = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 11, 12\}$

उदा (3)



$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ $B = \{2, 3\}$

आता या उदाहरणाची वेन आकृती पाहू.

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

संच A आणि संच $A \cup B$ मध्ये नेमके तेच घटक आहेत.

यावरून, जर $B \subseteq A$ तर $A \cup B = A$

हे लक्षात ठेवूया.

संयोग संचाचे गुणधर्म

(1) $A \cup B = B \cup A$ (2) जर $A \subseteq B$ तर $A \cup B = B$

(3) $A \subseteq A \cup B$, $B \subseteq A \cup B$ (4) $A \cup A' = U$

(5) $A \cup A = A$ (6) $A \cup \phi = A$

जाणून घेऊया.

संचातील घटकांची संख्या (Number of elements in a set)

समजा $A = \{3, 6, 9, 12, 15\}$ हा दिलेला संच आहे. या संचात 5 घटक आहेत.

संच A मधील घटकांची संख्या $n(A)$ अशी दाखवतात. $\therefore n(A) = 5$

समजा $B = \{6, 12, 18, 24, 30, 36\}$ $\therefore n(B) = 6$

संयोग संच आणि छेद संच यांतील घटकांच्या संख्या

वरील संच A आणि संच B विचारात घेतल्यास,

$n(A) + n(B) = 5 + 6 = 11$ ----(1)

$A \cup B = \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 24, 30, 36\}$ $\therefore n(A \cup B) = 9$--------(2)

$A \cap B$ काढू. म्हणजेच संच A आणि संच B मधील सामाईक घटक पाहू.

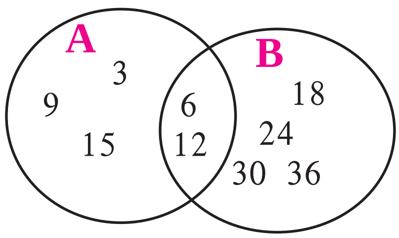
$A \cap B = \{6, 12\}$ $\therefore n(A \cap B) = 2$--------(3)

लक्षात घ्या, $n(A)$ आणि $n(B)$ मोजताना $A \cap B$ चे घटक दोनदा मोजले आहेत.

$n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 5 + 6 - 2 = 9$ तसेच $n(A \cup B) = 9$

समीकरणे (1), (2) आणि (3) वरून असे दिसते की,

$\therefore n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$



वरील नियमाचा पडताळा सोबतच्या वेन आकृतीवरून घ्या.

$n(A) = \square$, $n(B) = \square$

$n(A \cup B) = \square$, $n(A \cap B) = \square$

$\therefore n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

हे लक्षात ठेवूया.

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

म्हणजेच $n(A) + n(B) = n(A \cup B) + n(A \cap B)$

आता $A = \{1, 2, 3, 5, 7, 9, 11, 13\}$ $B = \{1, 2, 4, 6, 8, 12, 13\}$

हे संच घेऊन वरील नियमाचा पडताळा घ्या.

जाणून घेऊया.

संचांवर आधारित शाब्दिक उदाहरणे

उदा. एका वर्गात 70 विद्यार्थी आहेत. त्यांपैकी 45 विद्यार्थ्यांना क्रिकेट हा खेळ आवडतो. 52 विद्यार्थ्यांना खो-खो हा खेळ आवडतो. असा एकही विद्यार्थी नाही की ज्याला यांपैकी एकही खेळ आवडत नाही. तर क्रिकेट आणि खो-खो हे दोन्ही खेळ आवडणाऱ्या मुलांची संख्या काढा. फक्त क्रिकेट आवडणारी मुले किती ?

उकल : हे उदाहरण आपण दोन रीतींनी सोडवू.

रीत I : वर्गातील एकूण विद्यार्थी = 70

क्रिकेट आवडणाऱ्या विद्यार्थ्यांचा संच A मानू. खो-खो आवडणाऱ्या विद्यार्थ्यांचा संच B मानू.

प्रत्येक विद्यार्थ्याला क्रिकेट व खो-खो पैकी एक तरी खेळ आवडतो.

क्रिकेट किंवा खो-खो आवडणाऱ्या विद्यार्थ्यांची संख्या म्हणजेच $n(A \cup B)$

$\therefore\ n(A \cup B) = 70$

क्रिकेट आणि खो-खो हे दोन्ही खेळ आवडणाऱ्या मुलांची संख्या = $n(A \cap B)$

$n(A) = 45,\qquad n(B) = 52$

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ हे आपल्याला माहीत आहे.

$\therefore\ n(A \cap B) = n(A) + n(B) - n(A \cup B)$

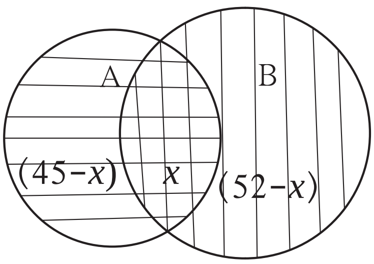
$= 45 + 52 - 70 = 27$

$\therefore$ दोन्ही खेळ आवडणारी मुले 27, क्रिकेट आवडणारी मुले 45 आहेत. $\therefore$ फक्त क्रिकेट आवडणारी मुले

$= 45 - 27 = 18$

$A \cap B$ हा दोन्ही खेळ आवडणाऱ्या विद्यार्थ्यांचा संच आहे. $\therefore\ n(A \cap B) = 27$

रीत II : दिलेली माहिती वेन आकृतीत दर्शवूनही दोन्ही खेळ आवडणाऱ्या मुलांची संख्या पुढीलप्रमाणे काढता येते.



$n(A \cap B) = x$ मानू. $n(A) = 45$, $n(B) = 52$,

$n(A \cup B) = 70$ हे आपल्याला माहित आहे.

$\therefore\ n(A \cap B) = x = n(A) + n(B) - n(A \cup B)$

$= 45 + 52 - 70 = 27$

वेन आकृती वरून फक्त क्रिकेट आवडणारी मुले $= 45 - 27$

$= 18$

सरावसंच 1.4

(1) जर $n(A) = 15$, $n(A \cup B) = 29$, $n(A \cap B) = 7$ तर $n(B)$ = किती ?

(2) एका वसतिगृहात 125 विद्यार्थी आहेत, त्यांपैकी 80 विद्यार्थी चहा घेतात, 60 विद्यार्थी कॉफी घेतात आणि 20 विद्यार्थी चहा व कॉफी ही दोन्ही प्रकारची पेये घेतात, तर एकही पेय न घेणाऱ्या विद्यार्थ्यांची संख्या काढा.

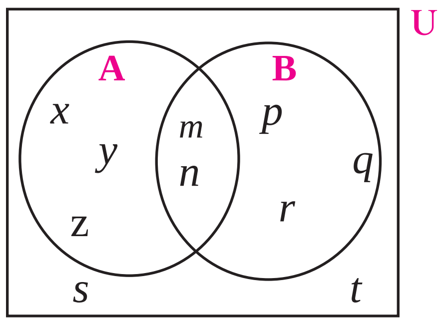
(3) एका स्पर्धा परीक्षेला 50 विद्यार्थी इंग्रजीत उत्तीर्ण झाले. 60 विद्यार्थी गणित विषयात उत्तीर्ण झाले. 40 विद्यार्थी दोन्ही विषयांत उत्तीर्ण झाले. एकही विद्यार्थी दोन्ही विषयांत अनुत्तीर्ण झाला नाही. तर एकूण विद्यार्थी किती होते ?

(4*) एका शाळेतील इयत्ता नववीच्या 220 विद्यार्थ्यांच्या आवडींचे सर्वेक्षण केले. त्यांपैकी 130 विद्यार्थ्यांनी गिरिभ्रमणाची आवड आहे असे सांगितले व 180 विद्यार्थ्यांनी आकाशदर्शनाची आवड आहे असे सांगितले. 110 विद्यार्थ्यांनी गिरिभ्रमण आवडते व आकाशदर्शनही आवडते असे सांगितले. तर किती विद्यार्थ्यांना या दोन्हींपैकी कशाचीच आवड नाही ? किती विद्यार्थ्यांना फक्त गिरिभ्रमण आवडते ? किती विद्यार्थ्यांना फक्त आकाशदर्शन आवडते ?

(5) शेजारील वेन आकृतीवरून पुढील सर्व संच लिहा.

(i) A (ii) B (iii) $A \cup B$ (iv) U

(v) A' (vi) B' (vii) $(A \cup B)'$



संकीर्ण प्रश्नसंग्रह 1

(1) खालील प्रश्नांसाठी अचूक पर्याय निवडा.

(i) $M = \{1, 3, 5\}$, $N = \{2, 4, 6\}$, तर $M \cap N$ = ?

(A) {1, 2, 3, 4, 5, 6} (B) {1, 3, 5} (C) ϕ (D) {2, 4, 6}

(ii) $P = \{x \mid x$ ही विषम नैसर्गिक संख्या, $1 < x \leq 5\}$ हा संच यादीपद्धतीने कसा लिहिला जाईल ?

(A) {1, 3, 5} (B) {1, 2, 3, 4, 5} (C) {1, 3} (D) {3, 5}

(iii) P = {1, 2, ...10}, हा कोणत्या प्रकारचा संच आहे ?

(A) रिक्त संच (B) अनंत संच (C) सांत संच (D) यांपैकी नाही

(iv) $M \cup N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ आणि $M = \{1, 2, 4\}$ तर खालीलपैकी N हा संच कोणता ?

(A) {1, 2, 3} (B) {3, 4, 5, 6} (C) {2, 5, 6} (D) {4, 5, 6}

(v) जर $P \subseteq M$, तर $P \cap (P \cup M)$ हा खालीलपैकी कोणता संच आहे?

(A) P (B) M (C) $P \cup M$ (D) $P' \cap M$

(vi) खालीलपैकी कोणता संच रिक्त संच आहे?

(A) समांतर रेषांच्या छेदन बिंदूंचा संच (B) सम मूळसंख्यांचा संच

(C) 30 पेक्षा कमी दिवस असलेल्या इंग्रजी महिन्यांचा संच

(D) $P = \{x | x \in I, -1 < x < 1\}$

(2) खालील उपप्रश्नांसाठी अचूक पर्याय निवडा.

(i) खालीलपैकी कोणता समूह संच आहे?

(A) इंद्रधनुष्यातील रंग (B) शाळेच्या आवारातील उंच झाडे

(C) गावातील श्रीमंत लोक (D) पुस्तकातील सोपी उदाहरणे

(ii) $N \cap W$ हा संच खालीलपैकी कोणता?

(A) {1, 2, 3, ...} (B) {0, 1, 2, 3, ...} (C) {0} (D) { }

(iii) P = {x | x हे indian या शब्दातील अक्षर आहे} तर P हा संच यादी पद्धतीने खालीलपैकी कोणता ?

(A) {i, n, d} (B) {i, n, d, a} (C) {i, n, a} (D) {n, d, a}

(iv) जर T = {1, 2, 3, 4, 5} व M = {3, 4, 7, 8} तर $T \cup M$ = ?

(A) {1, 2, 3, 4, 5, 7} (B) {1, 2, 3, 7, 8}

(C) {1, 2, 3, 4, 5, 7, 8} (D) {3, 4}

(3) एका गटातील 100 लोकांपैकी 72 लोक इंग्रजी बोलतात आणि 43 लोक फ्रेंच बोलतात. हे 100 लोक इंग्रजी किंवा फ्रेंच यांपैकी किमान एक भाषा बोलतात, तर किती लोक फक्त इंग्रजी बोलतात? किती लोक फक्त फ्रेंच बोलतात? आणि किती लोक इंग्रजी आणि फ्रेंच या दोन्ही भाषा बोलतात?

(4) पार्थने वृक्षसंवर्धन सप्ताहात 70 झाडे लावली तर प्रज्ञाने 90 झाडे लावली. त्यांपैकी 25 झाडे दोघांनीही मिळून लावली, तर पार्थ किंवा प्रज्ञा यांनी एकूण किती झाडे लावली?

(5) जर $n(A) = 20$, $n(B) = 28$ व $n(A \cup B) = 36$ तर $n(A \cap B)$ = ?

(6) एका वर्गातील 28 विद्यार्थ्यांपैकी 8 विद्यार्थ्यांच्या घरी फक्त कुत्रा पाळला आहे, 6 विद्यार्थ्यांच्या घरी फक्त मांजर पाळले आहे. 10 विद्यार्थ्यांच्या घरी कुत्रा आणि मांजर दोन्हीही पाळले आहे तर किती विद्यार्थ्यांच्या घरी कुत्रा किंवा मांजर यांपैकी एकही प्राणी पाळलेला नाही?

(7) पुढील प्रत्येक उदाहरणातील संचांचा छेद संच वेन आकृतीच्या साहाय्याने दाखवा.

(i) A ={3, 4, 5, 7} B ={1, 4, 8}

(ii) P = {a, b, c, e, f} Q ={l, m, n , e, b}

(iii) X = $\{x \mid x$ ही 80 व 100 यांच्या दरम्यानची मूळसंख्या आहे $\}$

Y = $\{y \mid y$ ही 90 व 100 मधील विषम संख्या आहे $\}$

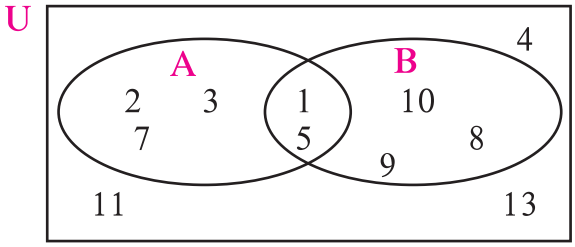
(8) खालीलपैकी कोणते संच कोणत्या संचांचे उपसंच आहे ते लिहा.

X = सर्व चौकोनांचा संच. Y = सर्व समभुज चौकोनांचा संच.

S = सर्व चौरसांचा संच. T = सर्व समांतरभुज चौकोनांचा संच.

V = सर्व आयतांचा संच.

(9) जर M हा कोणताही एक संच असेल, तर $M \cup \phi$ आणि $M \cap \phi$ लिहा.

(10*) 

शेजारील वेन आकृतीवरून U, A, B, $A \cup B$ आणि $A \cap B$ हे संच लिहा.

(11) जर $n(A) = 7$, $n(B) = 13$, $n(A \cap B) = 4$, तर $n(A \cup B) = ?$

कृती I : रिकाम्या जागी संचाचे घटक लिहा.

U = {1, 3, 5, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 15}

A = {1, 11, 13} B = {8, 5, 10, 11, 15} A' = {........} B' = {........}

$A \cap B$ = {...........} $A' \cap B'$ = {...............}

$A \cup B$ = {...........} $A' \cup B'$ = {...........}

$(A \cap B)'$ = {...........} $(A \cup B)'$ = {...........}

पडताळा घ्या : $(A \cap B)' = A' \cup B'$, $(A \cup B)' = A' \cap B'$

कृती II : तुमच्या आसपासच्या 20 कुटुंबाकडून पुढील माहिती मिळवा.

(i) मराठी वर्तमानपत्रे घेणाऱ्या कुटुंबांची संख्या.

(ii) इंग्रजी वर्तमानपत्रे घेणाऱ्या कुटुंबांची संख्या.

(iii) इंग्रजी व मराठी या दोन्ही भाषांतील वर्तमानपत्रे घेणाऱ्या कुटुंबांची संख्या.

मिळवलेली माहिती वेन आकृतीने दाखवा.