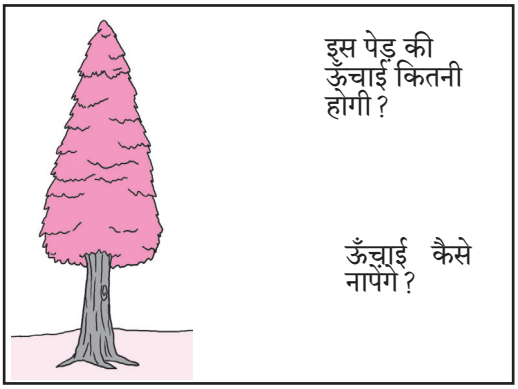
8 त्रिकोणमिति

CHGIE5

आओ, सीखें

- त्रिकोणमिति का परिचय
- त्रिकोणमितीय अनुपात
- त्रिकोणमितीय अनुपातों में संबंध
- विशेष कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपात

त्रिकोणमिति का परिचय (Introduction to trigonometry)



हम भूखंड की दूरी रस्सी से, चलकर नाप सकते हैं किंतु समुद्र में जहाजों से दीपस्तंभ की दूरी कैसे नापेंगे ?

उपर्युक्त चित्रों का निरीक्षण कीजिए । चित्र में दिए गए प्रश्न गणित से संबंधित है । इन प्रश्नों के उत्तर प्राप्त करने के लिए गणित विषय के त्रिकोणमिति इस शाखा का उपयोग होता हैं । त्रिकोणमिति का उपयोग अभियांत्रिकी, खगोलशास्त्र, नौकाशास्त्र आदि शाखाओं में किया जाता है ।

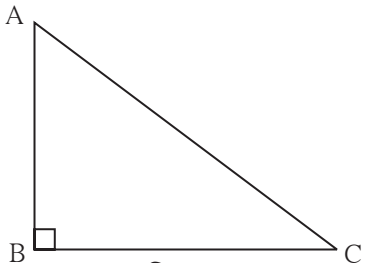
त्रिकोणमिति (Trigonometry) यह शब्द तीन ग्रीक शब्द से बना गया है । Tri का अर्थ तीन, gona अर्थात भुजा, metron अर्थात माप करना ।

थोड़ा याद करें

हमने त्रिभुज का अध्ययन किया है, समकोण त्रिभुज, पायथागोरस का प्रमेय तथा समरूप त्रिभुज के गुणधर्म के आधार पर त्रिकोणमिति विषय का आरंभ होता है ।

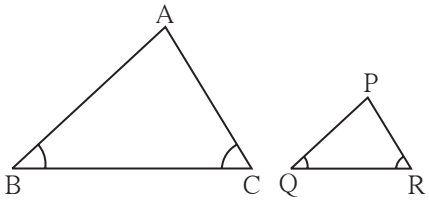
उनका पुनरावर्तन कीजिए ।

- Δ ABC में $\angle B$ यह समकोण है तो $\angle B$ इस समकोण की सम्मुख भुजा AC यह विकर्ण है ।
  $\angle A$ की सम्मुख भुजा BC है, $\angle C$ सम्मुख भुजा AB है ।
  इस त्रिभुज के संदर्भ में पायथागोरस प्रमेय के कथन द्वारा $(AB)^2 + (BC)^2 = (AC)^2$



आकृति 8.1

- यदि Δ ABC ~ Δ PQR तो इनकी संगत भुजाएँ समानुपात में होती हैं अर्थात $\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{AC}{PR}$



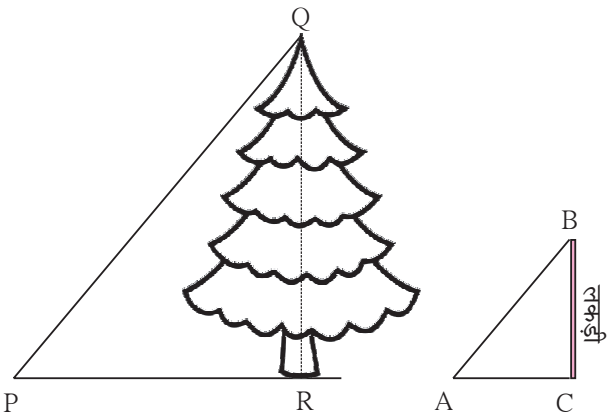
आकृति 8.2

किसी बड़े पेड़ की ऊँचाई मापनी हो तो समरूप त्रिभुज के गुणधर्म का उपयोग कर उसे कैसे मापा जा सकता है, वह देखेंगे ।

कृति : अच्छी धूपवाले दिन इस प्रयोग को करते हैं । संलग्न आकृति देखें ।
दी गई आकृति में QR यह पेड़ की ऊँचाई है, BC एक लकड़ी की ऊँचाई है ।

छोटी लकड़ी को जमीन पर खड़ी रख कर उसकी ऊँचाई तथा उसकी छाया की लंबाई माप कर लिखिए । पेड़ की छाया की लंबाई नापिए । सूर्य की किरण समांतर होने के कारण Δ PQR तथा Δ ABC यह समकोण तथा समरूप त्रिभुज हैं, इसे समझें । समरूप त्रिभुज की संगत भुजाएँ समानुपात में होती हैं इसका उपयोग कर $\frac{QR}{PR} = \frac{BC}{AC}$ प्राप्त होता है । इसलिए पेड़ की ऊँचाई

$QR = \frac{BC}{AC} \times PR$ यह समीकरण प्राप्त होता है ।



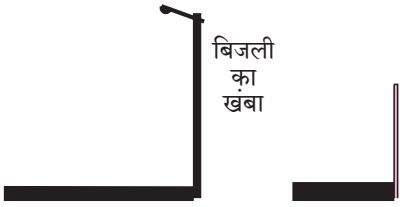
आकृति 8.3

PR, BC तथा AC के मान हम जानते हैं । यह मान समीकरण में रखकर QR की लंबाई अर्थात पेड़ की ऊँचाई निश्चित कर सकते हैं ।

थोड़ा, सोचें

यह प्रयोग प्रातः 8 बजे न करके दोपहर 11:30 या 1:30 को करना सुविधाजनक होगा क्या ?

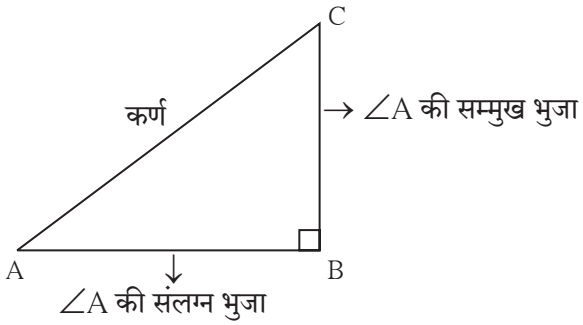
कृति : उपर्युक्त कृति कर आप स्वयं परिसर के ऊँचे पेड़ की ऊँचाई ज्ञात कीजिए ।
परिसर में पेड़ न हो तो किसी खंबे की ऊँचाई ज्ञात कीजिए ।



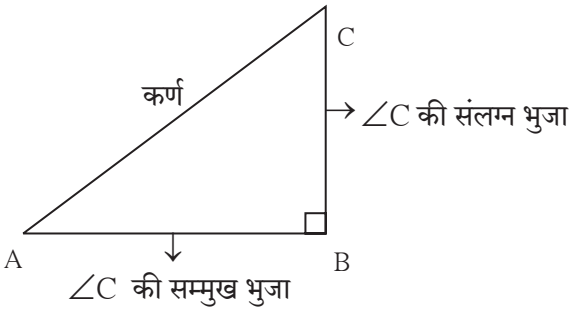
आकृति 8.4

त्रिभुज के संदर्भ में कुछ संबोध (Terms related to triangle)

समकोण Δ ABC में $\angle B = 90°$ है तो $\angle A$ तथा $\angle C$ न्यूनकोण है ।

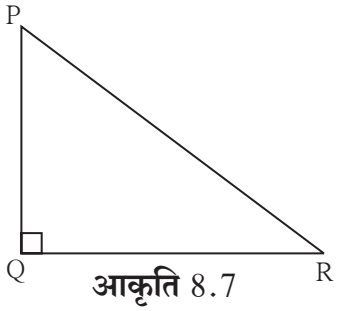


आकृति 8.5



आकृति 8.6

उदा. समकोण Δ PQR में



आकृति 8.7

$\angle P$ की सम्मुख भुजा = . . . $\angle P$ की संलग्न भुजा = ...

$\angle R$ सम्मुख भुजा = . . . $\angle R$ की संलग्न भुजा = ...

त्रिकोणमितीय अनुपात (Trigonometic ratios)

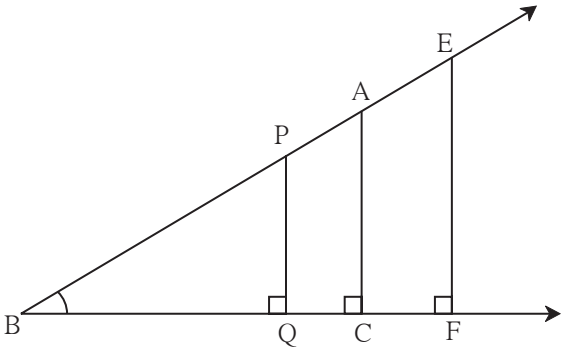
संलग्न आकृति 8.8 में कुछ समकोण त्रिभुज दिखाए गए है । जिनका $\angle B$ सामान्य कोण है । इसलिए सभी समकोण त्रिभुज समरूप है ।

यहाँ Δ PQB ~ Δ ACB है ।

$\therefore \quad \frac{PB}{AB} = \frac{PQ}{AC} = \frac{BQ}{BC}$

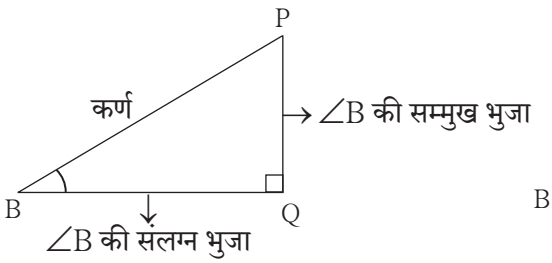
$\frac{PQ}{AC} = \frac{PB}{AB} \quad \therefore \quad \frac{PQ}{PB} = \frac{AC}{AB}$ . . . . . एकांतरानुपात से

$\frac{QB}{BC} = \frac{PB}{AB} \quad \therefore \quad \frac{QB}{PB} = \frac{BC}{AB}$ . . . . . एकांतरानुपात से

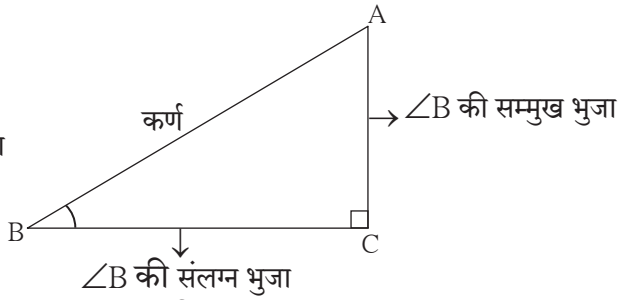


आकृति 8.8

निम्नलिखित आकृति 8.9 तथा 8.10 ये आकृतियाँ 8.8 से अलग किए त्रिभुज की हैं ।



आकृति 8.9



आकृति 8.10

(i) Δ PQB में,

$$\frac{PQ}{PB} = \frac{\angle B \text{ की सम्मुख भुजा}}{\text{कर्ण}}$$

Δ ACB में,

$$\frac{AC}{AB} = \frac{\angle B \text{ की सम्मुख भुजा}}{\text{कर्ण}}$$

$\frac{PQ}{PB}$ तथा $\frac{AC}{AB}$ यह अनुपात समान है ।

$$\frac{PQ}{PB} = \frac{AC}{AB} = \frac{\angle B \text{ की सम्मुख भुजा}}{\text{कर्ण}}$$

इस अनुपात को कोण B का साईन (sine) अनुपात कहते हैं । इसे संक्षेप में **sin B** ऐसा लिखते हैं ।

(ii) Δ PQB तथा Δ ACB में

$$\frac{BQ}{PB} = \frac{\angle B \text{ की संलग्न भुजा}}{\text{कर्ण}} \quad \text{तथा} \quad \frac{BC}{AB} = \frac{\angle B \text{ की संलग्न भुजा}}{\text{कर्ण}}$$

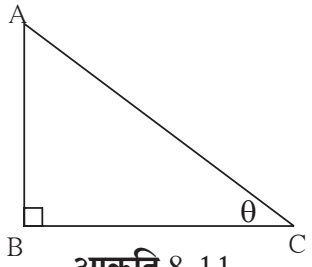
$$\frac{BQ}{PB} = \frac{BC}{AB} = \frac{\angle B \text{ की संलग्न भुजा}}{\text{कर्ण}}$$

इस अनुपात को कोण B का कोसाईन (cosine) अनुपात कहते हैं । इस अनुपात को संक्षेप में **cosB** ऐसा लिखा जाता है ।

(iii) $\frac{PQ}{BQ} = \frac{AC}{BC} = \frac{\angle B \text{ की सम्मुख भुजा}}{\angle B \text{ की संलग्न भुजा}}$

इस अनुपात को कोण B का टैंजंट (tangent) अनुपात कहते हैं । इस अनुपात को संक्षेप में **tanB** ऐसा लिखते हैं ।

उदा.



आकृति 8.11

कई बार समकोण त्रिभुज के न्यूनकोणों के माप θ(थीटा), α (अल्फा), β (बीटा) आदि ग्रीक अक्षरों से दर्शाया जाता है । दी गई आकृति Δ ABC में C इस न्यूनकोण का माप θ इस अक्षर से दिखाया गया है ऐसे समय sinC, cosC, tanC यह अनुपात क्रमशः sinθ, cosθ, tan θ ऐसा भी लिखते हैं ।

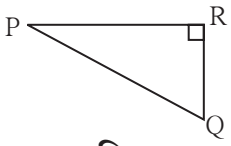
$$\sin C = \sin\theta = \frac{AB}{AC}, \quad \cos C = \cos\theta = \frac{BC}{AC}, \quad \tan C = \tan\theta = \frac{AB}{BC}$$

इसे ध्यान में रखें

- sin अनुपात $= \dfrac{\text{कोण की सम्मुख भुजा}}{\text{कर्ण}}$
- cos अनुपात $= \dfrac{\text{कोण की संलग्न भुजा}}{\text{कर्ण}}$
- tan अनुपात $= \dfrac{\text{कोण की सम्मुख भुजा}}{\text{कोण की संलग्न भुजा}}$

प्रश्नसंग्रह 8.1

1.

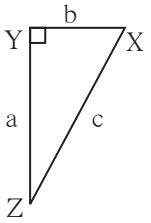


आकृति 8.12

संलग्न आकृति 8.12 में Δ PQR का $\angle$R यह समकोण है तो निम्नलिखित अनुपात लिखिए।

(i) sin P (ii) cos Q (iii) tan P (iv) tan Q

2.

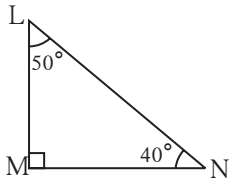


आकृति 8.13

आकृति 8.13 में Δ XYZ यह समकोण त्रिभुज है। $\angle XYZ = 90°$ है। भुजा की लंबाई क्रमशः a,b,c इस प्रकार दी गई है। इस आधार पर निम्नलिखित अनुपात लिखिए।

(i) sin X (ii) tan Z (iii) cos X (iv) tan X

3.

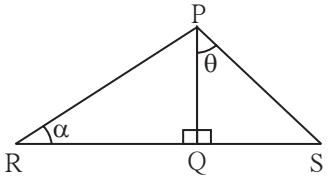


आकृति 8.14

समकोण Δ LMN में, $\angle LMN = 90°$
$\angle L = 50°$ तथा $\angle N = 40°$ है। इस आधार पर निम्नलिखित अनुपात लिखिए।

(i) sin 50° (ii) cos 50°
(iii) tan 40° (iv) cos 40°

4.



आकृति 8.15

दी गई आकृति में $\angle PQR = 90°$,
$\angle PQS = 90°$, $\angle PRQ = \alpha$ तथा $\angle QPS = \theta$ तो निम्नलिखित त्रिकोणमितीय अनुपात लिखिए।

(i) sin α, cos α, tan α
(ii) sin θ, cos θ, tan θ

आओ, जानें

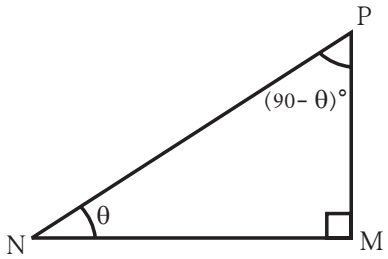
त्रिकोणमितीय अनुपातों में संबंध (Relations between trigonometric ratios)

आकृति 8.16 में,

Δ PMN यह समकोण त्रिभुज है ।

$m\angle M = 90°$, $\angle P$ तथा $\angle N$ परस्पर कोटिपूरक है ।

$\therefore$ यदि $m\angle N = \theta$ तो $m\angle P = 90 - \theta$



आकृति 8.16

$\sin\theta = \frac{PM}{PN}$ .....(1)

$\cos\theta = \frac{NM}{PN}$ .....(2)

$\tan\theta = \frac{PM}{NM}$ .....(3)

$\sin(90 - \theta) = \frac{NM}{PN}$ .....(4)

$\cos(90 - \theta) = \frac{PM}{PN}$ .....(5)

$\tan(90 - \theta) = \frac{NM}{PM}$ .....(6)

$\therefore \sin\theta = \cos(90 - \theta)$ ..... (1) तथा (5) से

$\cos\theta = \sin(90 - \theta)$ ..... (2) तथा (4) से

अब इसे भी समझिए $\tan\theta \times \tan(90 - \theta) = \frac{PM}{NM} \times \frac{NM}{PM}$ ..... (3) तथा (6) से

$\therefore \tan\theta \times \tan(90 - \theta) = 1$

इसी प्रकार $\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\frac{PM}{PN}}{\frac{NM}{PN}} = \frac{PM}{PN} \times \frac{PN}{NM} = \frac{PM}{NM} = \tan\theta$

इसे ध्यान में रखें

$\cos(90 - \theta) = \sin\theta$, $\quad \sin(90 - \theta) = \cos\theta$

$\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta$, $\quad \tan\theta \times \tan(90 - \theta) = 1$

*** अधिक जानकारी हेतु**

$\frac{1}{\sin\theta} = \text{cosec}\,\theta$, $\frac{1}{\cos\theta} = \sec\theta$, $\frac{1}{\tan\theta} = \cot\theta$

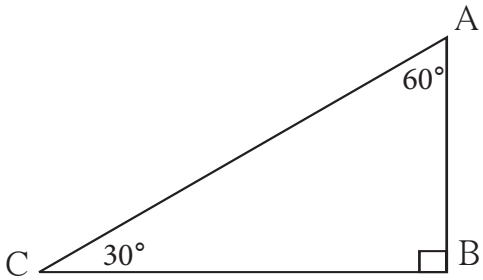
अर्थात cosec θ, sec θ और cot θ यह क्रमशः sin θ, cos θ तथा tan θ इनके प्रतिलोम अनुपात है ।

- $\sec\theta = \text{cosec}\,(90 - \theta)$
- $\text{cosec}\,\theta = \sec(90 - \theta)$
- $\tan\theta = \cot(90 - \theta)$
- $\cot\theta = \tan(90 - \theta)$

थोड़ा याद करें

30°– 60°–90° मापवाले त्रिभुज का गुणधर्म

किसी त्रिभुज के कोणों के माप 30°,60°, 90° हो तो हम जानते हैं कि, 30° कोण की सम्मुख भुजा कर्ण की आधी होती है और 60 ° कोण की सम्मुख भुजा कर्ण की लंबाई में $\frac{\sqrt{3}}{2}$ गुणा होती है ।



आकृति 8.17

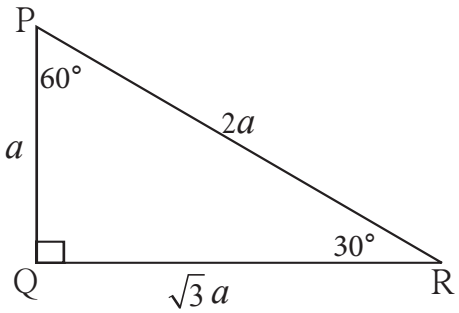
दी गई आकृति में, समकोण Δ ABC में

∠C = 30°, ∠A = 60°, ∠B = 90° है ।

$\therefore$ AB = $\frac{1}{2}$ AC तथा BC = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ AC

आओ, जानें

30° तथा 60° मापवाले कोणों का त्रिकोणमितीय अनुपात (Trignometric ratios of 30° and 60°)



आकृति 8.18

समकोण Δ PQR में यदि ∠R = 30°,

∠P = 60°, ∠Q = 90° तथा

माना PQ = a

तो PQ = $\frac{1}{2}$ PR

$a = \frac{1}{2}$ PR

$\therefore$ PR = $2a$

QR = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ PR

QR = $\frac{\sqrt{3}}{2} \times 2a$

QR = $\sqrt{3}\,a$

$\therefore$ यदि PQ = a तो PR = $2a$ तथा QR = $\sqrt{3}\,a$

(I) $30°$ मापवाले कोण के त्रिकोणमितीय अनुपात

$$\sin 30° = \frac{PQ}{PR} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30° = \frac{QR}{PR} = \frac{\sqrt{3}a}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 30° = \frac{PQ}{QR} = \frac{a}{\sqrt{3}a} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

(II) $60°$ मापवाले कोण के त्रिकोणमितीय अनुपात

$$\sin 60° = \frac{QR}{PR} = \frac{\sqrt{3}\,a}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60° = \frac{PQ}{PR} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$$

$$\tan 60° = \frac{QR}{PQ} = \frac{\sqrt{3}\,a}{a} = \sqrt{3}$$

समकोण Δ PQR में $\angle Q = 90°$ दिया है । $\angle P$ तथा $\angle R$ परस्पर कोटिपूरक कोण हैं इसलिए कोटिपूरक कोण के साइन तथा कोसाइन अनुपातों के संबंधों की जाँच कीजिए ।

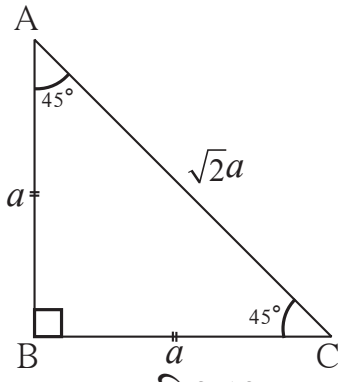
$\sin\theta = \cos(90-\theta)$
$\sin 30° = \cos(90° - 30°) = \cos 60°$
$\sin 30° = \cos 60°$

$\cos\theta = \sin(90-\theta)$
$\cos 30° = \sin(90° - 30°) = \sin 60°$
$\cos 30° = \sin 60°$

इसे ध्यान में रखें

$\sin 30° = \frac{1}{2}$	$\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$
$\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cos 60° = \frac{1}{2}$	$\tan 60° = \sqrt{3}$

(III) $45°$ मापवाले कोण के त्रिकोणमितीय अनुपात



आकृति 8.19

समकोण Δ ABC में $\angle B = 90°$, $\angle A = 45°$, $\angle C = 45°$ ∴ यह समद्विबाहु समकोण त्रिभुज है ।
माना, AB = a तो BC = a
पायथागोरस के प्रमेय द्वारा AC की लंबाई ज्ञात कीजिए ।

$AC^2 = AB^2 + BC^2$
$= a^2 + a^2$
$AC^2 = 2a^2$
$\therefore AC = \sqrt{2}\,a$

आकृति 8.19 में $\angle C = 45°$ है ।

$$\sin 45° = \frac{AB}{AC} = \frac{a}{\sqrt{2}\,a} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

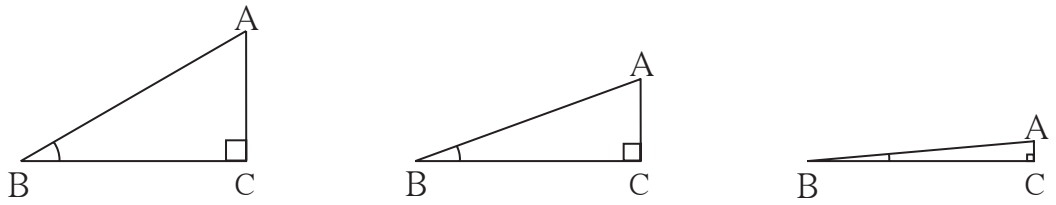
$$\cos 45° = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{\sqrt{2}\,a} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\tan 45° = \frac{AB}{BC} = \frac{a}{a} = 1$$

इसे ध्यान में रखें

$\sin 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\tan 45° = 1$

(IV) $0°$ तथा $90°$ मापवाले कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपात



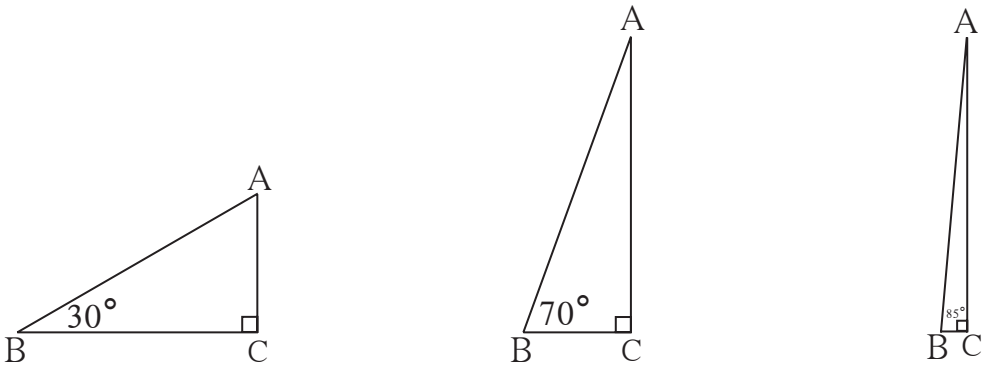
आकृति 8.20

समकोण Δ ACB में $\angle C = 90°$ और $\angle B = 30°$ है । $\sin 30° = \frac{AC}{AB}$ यह हमें ज्ञात है । AB की लंबाई स्थिर रखकर, $\angle B$ के माप जैसे-जैसे कम होते हैं वैसे-वैसे $\angle B$ की सम्मुख भुजा AC की लंबाई कम होती है अर्थात $\angle B$ का माप कम होने से $\sin \theta$ का मान कम होगा ।

$\therefore$ $\angle B$ का माप $0°$ होगा तब AC की लंबाई 0 होगी ।

$\therefore \sin 0° = \frac{AC}{AB} = \frac{0}{AB}$

$\therefore \sin 0° = 0$



आकृति 8.21

अब आकृति 8.21 देखिए । इस समकोण त्रिभुज में $\angle B$ का माप जैसे-जैसे बढ़ते जाएगा वैसे-वैस AC की लंबाई में बढ़ोत्तरी दिखाई देगी । $\angle B$ का माप यदि 90° हुआ तो AC की लंबाई AB की लंबाई के बराबर होगी ।

$\therefore \sin 90^\circ = \frac{AC}{AB}$ $\quad\quad$ $\therefore \sin 90^\circ = 1$

हमने कोटिपूरक कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपात देखे हैं ।

$\sin \theta = \cos (90 - \theta)$ तथा $\cos \theta = \sin (90 - \theta)$

$\therefore \cos 0^\circ = \sin (90 - 0)^\circ = \sin 90^\circ = 1$

तथा $\cos 90^\circ = \sin (90 - 90)^\circ = \sin 0^\circ = 0$

इसे ध्यान में रखें

$\sin 0^\circ = 0$, $\quad$ $\sin 90^\circ = 1$, $\quad$ $\cos 0^\circ = 1$, $\quad$ $\cos 90^\circ = 0$

हम जानते हैं कि,

$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ $\quad\quad$ $\therefore \tan 0 = \frac{\sin 0}{\cos 0} = \frac{0}{1} = 0$

परंतु $\tan 90^\circ = \frac{\sin 90^\circ}{\cos 90^\circ} = \frac{1}{0}$

किंतु $\frac{1}{0}$ यह भाग किया नहीं जा सकता । θ न्यूनकोण से बड़ा होते-होते 90° के निकट पहुँचने लगता है । वैसे-वैसे $\tan \theta$ का मान अनियंत्रित रूप से बढ़ता जाता है किंतु $\tan 90$ का मान निश्चित नहीं कर सकते ।

इसे ध्यान में रखें

विशेष मापवाले कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपात

अनुपात \ कोणों के माप	0°	30°	45°	60°	90°
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
tan	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	अपरिभाषित

हल किए हुए प्रश्न

उदा. 1 मान ज्ञात कीजिए : $2\tan 45^\circ + \cos 30^\circ - \sin 60^\circ$

हल : $2\tan 45^\circ + \cos 30^\circ - \sin 60^\circ$

$= 2 \times 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$

$= 2 + 0$

$= 2$

उदा. 2 मान ज्ञात कीजिए । $\frac{\cos 56^\circ}{\sin 34^\circ}$

हल : $56^\circ + 34^\circ = 90^\circ$ अर्थात 56 तथा 34 कोटिपूरक कोण के माप है ।

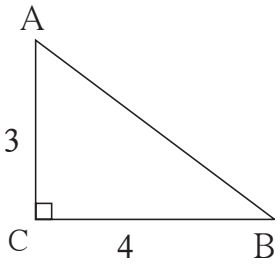
$\sin\theta = \cos(90 - \theta)$

$\therefore \quad \sin 34^\circ = \cos(90 - 34)^\circ = \cos 56^\circ$

$\therefore \quad \frac{\cos 56^\circ}{\sin 34^\circ} = \frac{\cos 56^\circ}{\cos 56^\circ} = 1$

उदा. 3 समकोण Δ ACB में यदि $\angle C = 90^\circ$, AC = 3, BC = 4 तब $\angle A$ तथा $\angle B$ के निम्नलिखित त्रिकोणमितीय अनुपात ज्ञात कीजिए ।

$\sin A, \sin B, \cos A, \tan B$



आकृति 8.22

हल: समकोण Δ ACB में पायथागोरस के प्रमेय से,

$AB^2 = AC^2 + BC^2$

$= 3^2 + 4^2$

$= 5^2$

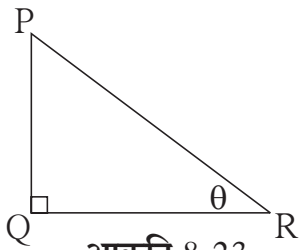
$AB = 5$

$\sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{4}{5}$ $\qquad$ $\cos A = \frac{AC}{AB} = \frac{3}{5}$

$\sin B = \frac{AC}{AB} = \frac{3}{5}$ $\qquad$ $\tan B = \frac{AC}{BC} = \frac{3}{4}$

उदा. 4 समकोण Δ PQR में $\angle Q = 90^\circ$, $\angle R = \theta$ तथा यदि $\sin\theta = \frac{5}{13}$ तो $\cos\theta, \tan\theta$ ज्ञात कीजिए ।

हल :



आकृति 8.23

समकोण Δ PQR मे $\angle R = \theta$

$\sin\theta = \frac{5}{13}$

$\therefore \quad \frac{PQ}{PR} = \frac{5}{13}$

$\therefore$ माना PQ = $5k$ तथा PR = $13k$

पायथागोरस के प्रमेय के आधार QR का मान ज्ञात कीजिए ।

$PQ^2 + QR^2 = PR^2$

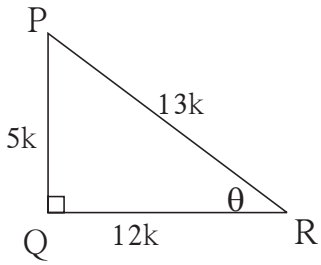
$(5k)^2 + QR^2 = (13k)^2$

$25k^2 + QR^2 = 169\ k^2$

$QR^2 = 169\ k^2 - 25k^2$

$QR^2 = 144\ k^2$

$QR = 12k$



आकृति 8.24

अब समकोण Δ PQR में PQ = $5k$ और PR = $13k$, QR = $12k$

$\cos\theta = \frac{QR}{PR} = \frac{12k}{13k} = \frac{12}{13}$, $\tan\theta = \frac{PQ}{QR} = \frac{5k}{12k} = \frac{5}{12}$

थोड़ा, सोचें

(1) उपर्युक्त उदाहरण हल करने के लिए PQ तथा PR इन भुजाओं की लंबाई 5k तथा 13k क्यों ली गई है?

(2) PQ तथा PR की लंबाई क्रमशः 5 तथा 13 ले सकते हैं? क्या यदि हाँ, तो उपर्युक्त में कुछ बदलाव करना होगा क्या?

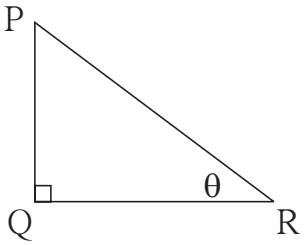
त्रिकोणमितीय के महत्त्वपूर्ण समीकरण

Δ PQR यह समकोण त्रिभुज है

$\angle PQR = 90°$, माना $\angle R = \theta$

$\sin\theta = \frac{PQ}{PR}$ .....(1)

$\cos\theta = \frac{QR}{PR}$ .....(2)



आकृति 8.25

पायथागोरस के प्रमेय के अनुसार

$PQ^2 + QR^2 = PR^2$

$\therefore \frac{PQ^2}{PR^2} + \frac{QR^2}{PR^2} = \frac{PR^2}{PR^2}$ .... प्रत्येक पद को PR^2 से भाग देने पर

$\therefore \left(\frac{PQ}{PR}\right)^2 + \left(\frac{QR}{PR}\right)^2 = 1$

$\therefore (\sin\theta)^2 + (\cos\theta)^2 = 1$.... (1) तथा (2) से

इसे ध्यान में रखें

$(\sin\theta)^2$ अर्थात $\sin\theta$ का वर्ग, यह $\sin^2\theta$ ऐसे लिखते हैं ।

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ यह समीकरण हम पायथागोरस के प्रमेय का उपयोग कर θ यह एक न्यूनकोण हैं ऐसे समकोण त्रिभुज की सहायता से सिद्ध किया है । $\theta = 0°$ या $\theta = 90°$ हो तब भी यह समीकरण सत्य होता है इसकी जाँच कीजिए ।

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ यह समीकरण किसी भी माप के कोणों के लिए सत्य होने के कारण इसे त्रिकोणमिति की मूलभूत नित्य समिकाएँ कहते हैं ।

(i) $0 \leq \sin\theta \leq 1, 0 \leq \sin^2\theta \leq 1$ (ii) $0 \leq \cos\theta \leq 1, 0 \leq \cos^2\theta \leq 1$

प्रश्नसंग्रह 8.2

1. निम्नलिखित तालिका के प्रत्येक स्तंभ में एक अनुपात दिया गया है इसके आधार पर अन्य दो अनुपात ज्ञात कीजिए तथा रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए ।

$\sin\theta$		$\frac{11}{61}$		$\frac{1}{2}$				$\frac{3}{5}$	
$\cos\theta$	$\frac{35}{37}$				$\frac{1}{\sqrt{3}}$				
$\tan\theta$			1			$\frac{21}{20}$	$\frac{8}{15}$		$\frac{1}{2\sqrt{2}}$

2. मान ज्ञात कीजिए ।

(i) $5\sin 30° + 3\tan 45°$

(ii) $\frac{4}{5}\tan^2 60° + 3\sin^2 60°$

(iii) $2\sin 30° + \cos 0° + 3\sin 90°$

(iv) $\frac{\tan 60}{\sin 60 + \cos 60}$

(v) $\cos^2 45° + \sin^2 30°$

(vi) $\cos 60° \times \cos 30° + \sin 60° \times \sin 30°$

3. यदि $\sin\theta = \frac{4}{5}$ तो $\cos\theta$ का मान ज्ञात कीजिए ।

4. यदि $\cos\theta = \frac{15}{17}$ तो $\sin\theta$ का मान ज्ञात कीजिए ।

प्रकीर्ण प्रश्नसंग्रह 8

1. नीचे दिए गए बहुवैकल्पिक प्रश्नों के उत्तर का सही विकल्प चुनकर लिखिए ।

(i) निम्नलिखित में से कौन-से कथन सत्य है ।

(A) $\sin\theta = \cos(90-\theta)$ (B) $\cos\theta = \tan(90-\theta)$

(C) $\sin\theta = \tan(90-\theta)$ (D) $\tan\theta = \tan(90-\theta)$

(ii) निम्नलिखित में से $\sin 90°$ का मान कौन-सा है?

(A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (B) 0 (C) $\frac{1}{2}$ (D) 1

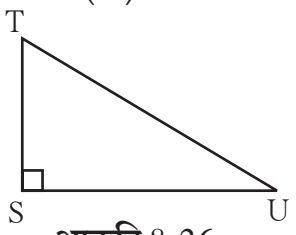
(iii) $2\tan 45° + \cos 45° - \sin 45° =$ कितना?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

(iv) $\frac{\cos 28°}{\sin 62°} =$ कितना?

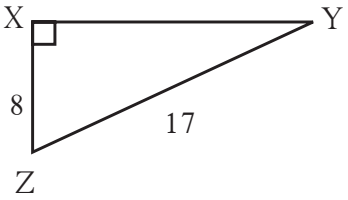
(A) 2 (B) -1 (C) 0 (D) 1

2. समकोण Δ TSU में TS = 5, $\angle S = 90°$, SU = 12 तो sin T, cos T, tan T का मान ज्ञात कीजिए । इसी प्रकार sin U, cos U, tan U का भी मान ज्ञात कीजिए ।



आकृति 8.26

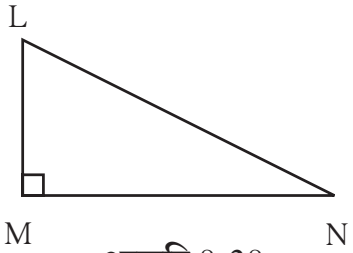
3. समकोण Δ YXZ में, $\angle X = 90°$, XZ = 8 सेमी, YZ = 17 सेमी तो sin Y, cos Y, tan Y, sin Z, cos Z, tan Z का मान ज्ञात कीजिए ।



आकृति 8.27

4. समकोण Δ LMN में $\angle N = \theta$, $\angle M = 90°$, $\cos\theta = \frac{24}{25}$ तो $\sin\theta$ तथा $\tan\theta$ इस अनुपात का मान ज्ञात कीजिए ।

इसी प्रकार $\sin^2\theta$ तथा $\cos^2\theta$ का मान ज्ञात कीजिए ।



आकृति 8.28

5. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए ।

(i) $\sin 20° = \cos \square°$

(ii) $\tan 30° \times \tan \square° = 1$

(iii) $\cos 40° = \sin \square°$