

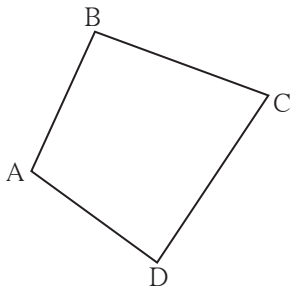


आओ, सीखें

- समांतर चतुर्भुज
- समांतर चतुर्भुज की कसौटियाँ
- समचतुर्भुज
- आयत
- वर्ग
- समलंब चतुर्भुज
- त्रिभुज की दो भुजाओं के मध्यबिंदुओं का प्रमेय



थोड़ा याद करें

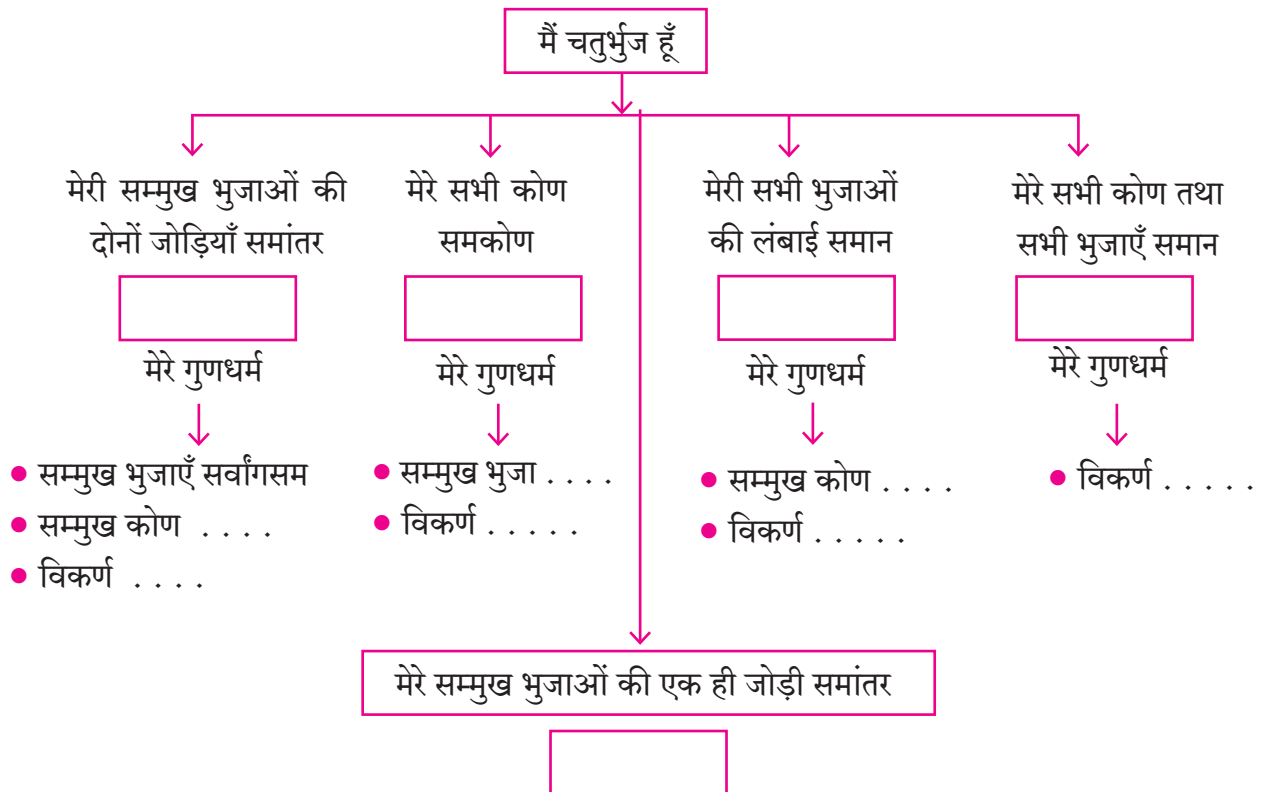


आकृति 5.1

1. □ABCD के संदर्भ में निम्नलिखित जोड़ियाँ लिखिए ।

- संलग्न भुजाओं की जोड़ियाँ : संलग्न कोणों की जोड़ियाँ :
- (1) ... , ... (2) ... , ... (1) ... , ... (2) ... , ...
- (3) ... , ... (4) ... , ... (3) ... , ... (4) ... , ...
- सम्मुख भुजाओं की जोड़ियाँ (1) , (2) ,
- सम्मुख कोणों की जोड़ियाँ (1) , (2) ,

जरा याद करते हैं मेरा प्रकार तथा मेरे गुणधर्म हैं ।



दूसरी विधि से बनाए गए चतुर्भुज में हमने सम्मुख भुजाओं को समान लेकर रचना की है । इसकी सम्मुख भुजाएँ समांतर क्यों होती है, यह प्रमेय सिद्ध करने पर समझ में आएगा ।

कृति I संलग्न भुजाओं और कोणों के भिन्न-भिन्न माप लेकर पाँच विभिन्न समांतर चतुर्भुज बनाइए ।

समांतर चतुर्भुज का प्रमेय सिद्ध करने के लिए सर्वांगसम त्रिभुजों का उपयोग होता है । उसे किस प्रकार करना है यह समझने के लिए निम्नलिखित कृति कीजिए ।

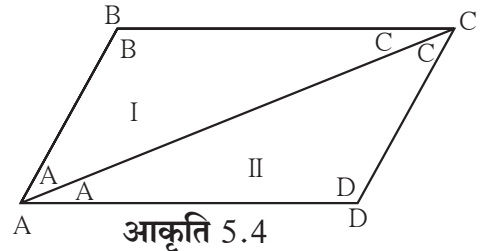
कृति II

- एक मोटे कागज पर समांतर चतुर्भुज ABCD बनाइए । इसका विकर्ण AC खींचें । आकृति में दर्शाए अनुसार चतुर्भुज के शीर्षबिंदुओं के नाम चतुर्भुज के अंदर भी लिखिए ।
- □ABCD को विकर्ण AC पर मोड़ने से $\triangle ADC$ तथा $\triangle CBA$ एक-दूसरे को पूर्णतः ढँकते हैं क्या, देखें ।
- □ABCD को विकर्ण AC पर काटकर $\triangle ADC$ तथा $\triangle CBA$ अलग कीजिए । $\triangle CBA$ को घुमाकर देखिए कि वे $\triangle ADC$ को पूर्णतः ढँकते हैं क्या? देखें ।

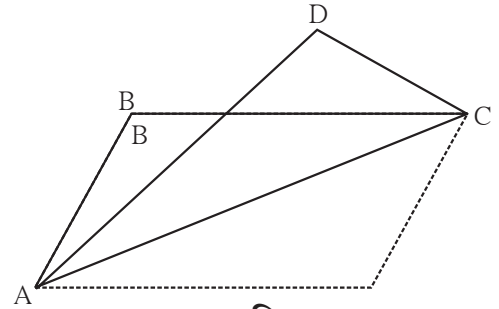
क्या समझें ? $\triangle CBA$ की कौन-सी भुजाएँ $\triangle ADC$ की कौन-सी भुजाओं को पूर्णतः ढँकती हैं? $\triangle CBA$ का कौन-सा कोण यह $\triangle ADC$ के कौन-से कोण को पूर्णतः ढँकता है?

भुजा DC यह भुजा AB को और भुजा AD यह भुजा CB को पूर्णतः ढँकती है । उसी प्रकार $\angle B$ यह $\angle D$ से मिलता है ।

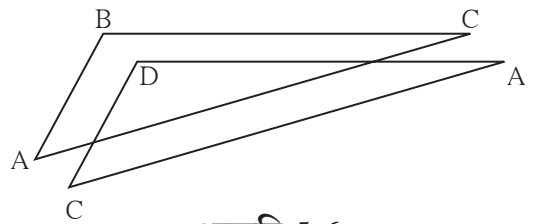
अर्थात् ऐसा दिखता है कि समांतर चतुर्भुज की सम्मुख भुजाएँ तथा सम्मुख कोण सर्वांगसम होते हैं । समांतर चतुर्भुज के इसी गुणधर्म को अब हम सिद्ध करेंगे ।



आकृति 5.4

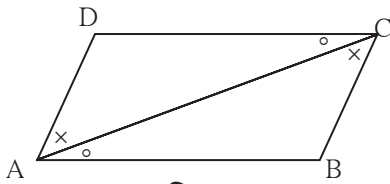


आकृति 5.5



आकृति 5.6

प्रमेय 1. समांतर चतुर्भुज की सम्मुख भुजाएँ तथा सम्मुख कोण सर्वांगसम होते हैं ।



आकृति 5.7

दत्त : □ABCD समांतर चतुर्भुज है ।

अर्थात् भुजा AB ∥ भुजा DC, भुजा AD ∥ भुजा BC

साध्य : रेख AD ≅ रेख BC ; रेख DC ≅ रेख AB

∠ADC ≅ ∠CBA, तथा ∠DAB ≅ ∠BCD

रचना : कर्ण AC खींचिए ।

उपपत्ति : रेख DC ∥ रेख AB तथा विकर्ण AC तिर्यक रेखा है ।

∴ ∠DCA ≅ ∠BAC(1)
तथा ∠DAC ≅ ∠BCA(2) }एकांतर कोण

अब, ΔADC तथा ΔCBA में,

∠DAC ≅ ∠BCA कथन (2) से

∠DCA ≅ ∠BAC कथन (1) से

भुजा AC ≅ भुजा CA सामान्य भुजा

∴ ΔADC ≅ ΔCBA कोभुको कसौटी

∴ भुजा AD ≅ भुजा CB सर्वांगसम त्रिभुज की संगत भुजाएँ

तथा भुजा DC ≅ भुजा AB सर्वांगसम त्रिभुज की संगत भुजाएँ

इसी प्रकार, ∠ADC ≅ ∠CBA सर्वांगसम त्रिभुज का संगत कोण

इसी प्रकार ∠DAB ≅ ∠BCD सिद्ध कर सकते हैं ।



थोड़ा, सोचें

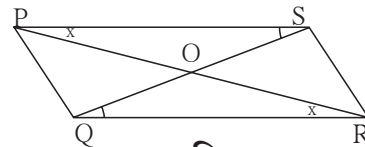
उपर्युक्त प्रमेय में ∠DAB ≅ ∠BCD सिद्ध करने के लिए रचना में परिवर्तन करना पड़ेगा क्या? वह परिवर्तन कर उपपत्ति किस प्रकार लिखेंगे ।

समांतर चतुर्भुज का एक और गुणधर्म समझने के लिए निम्नलिखित कृति कीजिए ।

कृति : समांतर चतुर्भुज □PQRS बनाइए ।

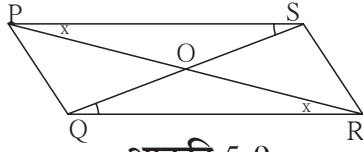
विकर्ण PR तथा विकर्ण QS खींचिए । उनके प्रतिच्छेद बिंदु को O यह नाम दीजिए ।

प्रत्येक विकर्ण के हुए दो भागों की लंबाई की तुलना विभाजक की सहायता से कीजिए, क्या समझा?



आकृति 5.8

प्रमेय : समांतर चतुर्भुज के विकर्ण परस्पर एक-दूसरे को समद्विभाजित करते हैं ।



आकृति 5.9

दत्त : □PQRS समांतर चतुर्भुज है ।

विकर्ण PR तथा विकर्ण QS परस्पर बिंदु O पर प्रतिच्छेदित करते हैं ।

साध्य : रेख $PO \cong$ रेख RO , रेख $SO \cong$ रेख QO

उपपत्ति : $\triangle POS$ तथा $\triangle ROQ$ में

$\angle OPS \cong \angle ORQ$ एकांतर कोण

भुजा $PS \cong$ भुजा RQ समांतर चतुर्भुज की सम्मुख भुजाएँ

$\angle PSO \cong \angle RQO$ एकांतर कोण

$\therefore \triangle POS \cong \triangle ROQ$ कोभुको कसौटी

$\therefore$ रेख $PO \cong$ रेख RO
तथा रेख $SO \cong$ रेख QO } सर्वांगसम त्रिभुजों की संगत भुजाएँ



इसे ध्यान में रखें

- समांतर चतुर्भुज की सम्मुख भुजाएँ सर्वांगसम होती हैं ।
- समांतर चतुर्भुज के सम्मुख कोण सर्वांगसम होते हैं ।
- समांतर चतुर्भुज के विकर्ण परस्पर एक-दूसरे को समद्विभाजित करते हैं ।

हल किए गए उदाहरण

उदा. (1) □PQRS एक समांतर चतुर्भुज है । $PQ = 3.5$, $PS = 5.3$ $\angle Q = 50^\circ$ तो □PQRS की अन्य भुजाओं तथा कोणों के माप ज्ञात कीजिए ।

हल : □PQRS समांतर चतुर्भुज है ।

$\therefore \angle Q + \angle P = 180^\circ$ अंतःकोण

$\therefore 50^\circ + \angle P = 180^\circ$

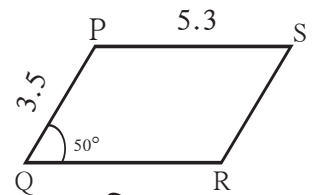
$\therefore \angle P = 180^\circ - 50^\circ = 130^\circ$

अब, $\angle P = \angle R$ तथा $\angle Q = \angle S$ समांतर चतुर्भुज के सम्मुख कोण

$\therefore \angle R = 130^\circ$ तथा $\angle S = 50^\circ$

उसी प्रकार, $PS = QR$ तथा $PQ = SR$ समांतर चतुर्भुज की सम्मुख भुजाएँ

$\therefore QR = 5.3$ तथा $SR = 3.5$



आकृति 5.10



थोड़ा याद करें

समांतर रेखाओं की कसौटियाँ

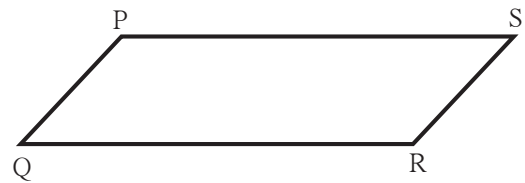
1. यदि दो रेखाओं को एक तिर्यक रेखा द्वारा प्रतिच्छेदित करने पर तथा बनने वाली संगत कोणों की एक जोड़ी सर्वांगसम हो तो वे रेखाएँ परस्पर समांतर होती हैं।
2. यदि दो रेखाओं को एक तिर्यक रेखा द्वारा प्रतिच्छेदित करने पर बनने वाले एकांतर कोणों की जोड़ी सर्वांगसम हो तो वे रेखाएँ परस्पर समांतर होती हैं।
3. यदि दो रेखाओं को एक तिर्यक रेखा द्वारा प्रतिच्छेदित करने पर बनने वाले अंतःकोणों को एक जोड़ी संपूरक हो तो वे रेखाएँ परस्पर समांतर होती हैं।



आओ, जानें

समांतर चतुर्भुज की कसौटियाँ (Tests for parallelogram)

माना, $\square PQRS$ में $PS = QR$ और $PQ = SR$ है। सिद्ध करना है कि $\square PQRS$ समांतर चतुर्भुज है।
उसके लिए चतुर्भुज के भुजाओं की कौन-सी जोड़ी समांतर है यह दिखाना होगा ? उसके लिए समांतर रेखाओं की किस कसौटी का उपयोग करना पड़ेगा ?



आकृति 5.14

कसौटी के लिए आवश्यक कोण प्राप्त करने के लिए किस तिर्यक रेखा का उपयोग सुविधाजनक होगा ?

प्रमेय : चतुर्भुज की सम्मुख भुजाओं की जोड़ियाँ सर्वांगसम हो तो वह चतुर्भुज समांतर चतुर्भुज होता है।

दत्त : $\square PQRS$ में
भुजा $PS \cong$ भुजा QR
भुजा $PQ \cong$ भुजा SR

साध्य : $\square PQRS$ समांतर चतुर्भुज है।

रचना : विकर्ण PR खींचें

उपपत्ति : $\triangle SPR$ तथा $\triangle QRP$ में,

भुजा $SP \cong$ भुजा QR (दत्त)

भुजा $SR \cong$ भुजा QP (दत्त)

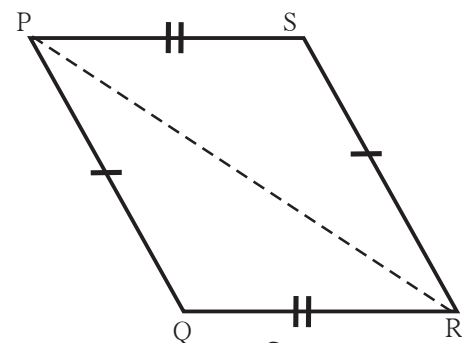
भुजा $PR \cong$ भुजा RP सामान्य भुजा

$\therefore \triangle SPR \cong \triangle QRP$ भुभुभु कसौटी

$\therefore \angle SPR \cong \angle QRP$ सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत कोण

उसी प्रकार $\angle PRS \cong \angle RPQ$ सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत कोण

$\angle SPR$ और $\angle QRP$ यह रेख QR और रेख PS की तिर्यक रेखा PR द्वारा बने एकांतर कोण है।



आकृति 5.15

∴ भुजा PS ∥ भुजा QR(I) समांतर रेखाओं की एकांतर कोण कसौटी

उसी प्रकार $\angle PRS$ और $\angle RPQ$ रेख PQ तथा रेख SR की तिर्यक रेखा PR द्वारा बने एकांतर कोण है ।

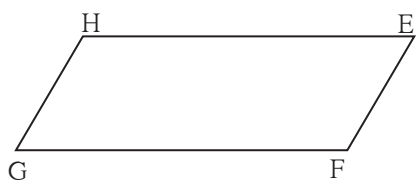
∴ भुजा PQ ∥ भुजा SR(II) समांतर रेखाओं की एकांतर कोण कसौटी

∴ (I) तथा (II) के आधार पर □PQRS यह समांतर चतुर्भुज है ।

प्रारंभ में समांतर चतुर्भुज की रचनाओं की दो विधियाँ दी गई हैं । दूसरी विधि में समान सम्मुख भुजाओंवाले चतुर्भुज की रचना की है ।

ऐसा चतुर्भुज समांतर चतुर्भुज क्यों होता है, यह ध्यान में आया क्या ?

प्रमेय : चतुर्भुज की सम्मुख कोणों की जोड़ियाँ सर्वांगसम हो तो वह चतुर्भुज समांतर चतुर्भुज होता है ।



आकृति 5.16

नीचे दिए गए दत्त, साध्य तथा उपपत्ति में रिक्त स्थान की पूर्ति कीजिए ।

दत्त : □EFGH में $\angle E \cong \angle G$

तथा $\angle \dots \cong \angle \dots$

साध्य : □EFGH यह

उपपत्ति : माना $\angle E = \angle G = x$ तथा $\angle H = \angle F = y$

चतुर्भुज के चारों कोणों के मापों का योगफल होता है ।

$$\therefore \angle E + \angle G + \angle H + \angle F = \dots\dots\dots$$

$$\therefore x + y + \dots\dots\dots + \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$$

$$\therefore \square x + \square y = \dots\dots$$

$$\therefore x + y = 180^\circ$$

$$\therefore \angle G + \angle H = \dots\dots\dots$$

रेख HE तथा रेख GF की तिर्यक रेखा HG के प्रतिच्छेदन से $\angle G$ तथा $\angle H$ यह अंतःकोण बनते हैं ।

∴ भुजा HE ∥ भुजा GF (I) समांतर रेखाओं की अंतःकोण कसौटी

उसी प्रकार $\angle G + \angle F = \dots\dots\dots$

∴ भुजा ∥ भुजा (II) समांतर रेखाओं की अंतःकोण कसौटी

∴ (I) तथा (II) से □EFGH यह है ।

प्रमेय : यदि चतुर्भुज के विकर्ण परस्पर समद्विभाजित करते हों तो वह चतुर्भुज समांतर चतुर्भुज होता है ।

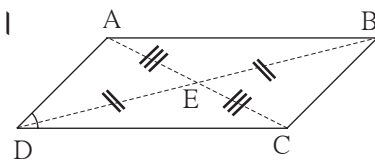
दत्त : □ABCD के विकर्ण परस्पर बिंदु E पर समद्विभाजित करते हैं ।

अर्थात् रेख $AE \cong$ रेख CE , रेख $BE \cong$ रेख DE

साध्य : □ABCD यह समांतर चतुर्भुज है ।

उपपत्ति : नीचे दिए गए प्रश्नों के उत्तर ज्ञात कर तथा उपपत्ति स्वयं लिखिए ।

आकृति 5.17



1. रेख $AB \parallel$ रेख DC यह सिद्ध करने हेतु एकांतर कोणों की कौन-सी जोड़ी सर्वांगसम दर्शानी होगी? एकांतर कोणों की वह जोड़ी कौन-सी तिर्यक रेखा द्वारा प्राप्त होगी ?
2. एकांतर कोणों की चुनी गई जोड़ियों के कोण कौन-से त्रिभुजों के कोण हैं?
3. उनमें से कौन-से त्रिभुज किस कसौटी के अनुसार सर्वांगसम हैं?
4. इस प्रकार विचार कर रेख $AD \parallel$ रेख BC सिद्ध कर सकते हैं । ना ?

कोई चतुर्भुज समांतर चतुर्भुज है यह सिद्ध करने के लिए उपर्युक्त प्रमेय का उपयोग होता है ।
इसीलिए इन प्रमेयों को समांतर चतुर्भुज की कसौटियाँ कहते हैं ।

एक प्रमेय का उपयोग समांतर चतुर्भुज की कसौटी के रूप में होता है ।

प्रमेय : किसी चतुर्भुज के सम्मुख भुजाओं की एक जोड़ी सर्वांगसम तथा समांतर हो तो वह चतुर्भुज समांतर चतुर्भुज होता है ।

दत्त : □ABCD में रेख $CB \cong$ रेख DA तथा रेख $CB \parallel$ रेख DA

साध्य : □ABCD समांतर चतुर्भुज है ।

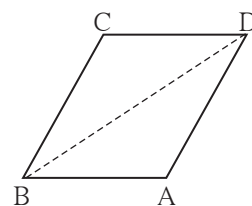
रचना : विकर्ण BD खींचिए ।

नीचे दी गई संक्षिप्त उपपत्ति को विस्तार से लिखिए ।

$\Delta CBD \cong \Delta ADB$ भु-को-भु कसौटी

$\therefore \angle CDB \cong \angle ABD$ सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत कोण

$\therefore$ रेख $CD \parallel$ रेख BA समांतर रेखाओं की एकांतर कोण कसौटी



आकृति 5.18



इसे ध्यान में रखें

- जिस चतुर्भुज की सम्मुख कोणों की जोड़ियाँ सर्वांगसम हो, वह चतुर्भुज समांतर चतुर्भुज होता है ।
- जिस चतुर्भुज की सम्मुख भुजाओं की जोड़ियाँ सर्वांगसम होती हैं वह चतुर्भुज समांतर चतुर्भुज होता है ।
- जिस चतुर्भुज के विकर्ण परस्पर समद्विभाजित करते हो, वह चतुर्भुज समांतर चतुर्भुज होता है ।
- जिस चतुर्भुज की सम्मुख भुजाओं की एक जोड़ी सर्वांगसम तथा समांतर हो तो वह चतुर्भुज समांतर चतुर्भुज होता है ।

इन प्रमेयों को समांतर चतुर्भुज की कसौटियाँ कहते हैं ।



थोड़ा, सोचें

कॉपी में छपी गई रेखाएँ परस्पर समांतर होती हैं । इन रेखाओं का उपयोग कर समांतर चतुर्भुज की रचना कैसे कर सकते हैं?

हल किए गए उदाहरण

उदा. (1) □PQRS एक समांतर चतुर्भुज है। बिंदु M यह भुजा PQ का तथा बिंदु N भुजा RS का मध्यबिंदु है। तो सिद्ध कीजिए कि □MQRN समांतर चतुर्भुज हैं।

दत्त : □PQRS समांतर चतुर्भुज है। भुजा PQ तथा भुजा RS के मध्यबिंदु क्रमशः M तथा N है।

साध्य : □PMNS समांतर चतुर्भुज है।
□MQRN समांतर चतुर्भुज है।

उपपत्ति : भुजा PQ ∥ भुजा SR

∴ भुजा PM ∥ भुजा SN (∵ P-M-Q; S-N-R)(I)

उसी प्रकार भुजा PQ ≅ भुजा SR

∴ $\frac{1}{2} PQ = \frac{1}{2} SR$ (∵ PQ = SR)

∴ PM = SN

∴ भुजा PM ≅ भुजा SN (∵ M तथा N मध्यबिंदु हैं).....(II)

∴ (I) तथा (II) से □PMNQ यह समांतर चतुर्भुज है,

इसी प्रकार हम सिद्ध कर सकते हैं कि □MQRN समांतर चतुर्भुज हैं।

उदा. (2) Δ ABC की भुजाओं AB तथा AC के मध्यबिंदु क्रमशः D तथा E है। किरण ED पर बिंदु F इस प्रकार है कि ED = DF। तो सिद्ध कीजिए कि □AFBE समांतर चतुर्भुज है। इस उदाहरण के लिए दत्त तथा साध्य स्वयं लिखें और उपपत्ति में रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए।

दत्त : -----

साध्य : -----

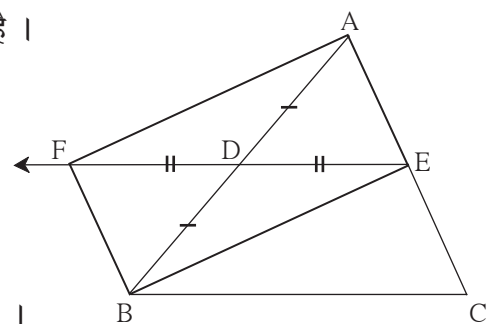
उपपत्ति : रेख AB तथा रेख EF यह □AFBE का है।

रेख AD ≅ रेख DB.....

रेख ≅ रेख रचना।

∴ □AFBE के विकर्ण एक-दूसरे का

∴ कसौटी से □AFBE समांतर चतुर्भुज है।



आकृति 5.20

उदा. (3) सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक समचतुर्भुज, समांतर चतुर्भुज होता है।

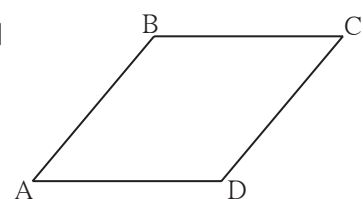
दत्त : □ABCD समचतुर्भुज है

साध्य : □ABCD समांतर चतुर्भुज है।

उपपत्ति : AB = BC = CD = AD (दत्त)

∴ भुजा AB ≅ भुजा CD तथा भुजा BC ≅ भुजा AD

∴ □ABCD समांतर चतुर्भुज है।.... (समांतर चतुर्भुज की सम्मुख भुजा कसौटी)



आकृति 5.21

-
- A diagram of a parallelogram $ABCD$. The vertices are labeled A (top-left), B (bottom-left), C (bottom-right), and D (top-right). A line segment PQ is drawn inside the parallelogram, with point P on side AB and point Q on side CD . The segment PQ is parallel to the bases AD and BC .

आकृति 5.22

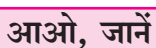
-

↑

-
- The diagram shows a parallelepiped with vertices labeled A, B, C, D, P, Q, R, and S. The vertices A, B, C, and D form the base, while P, Q, R, and S are positioned above them. A dashed line passes through P and S, and another dashed line passes through Q and R. Arrows on these lines indicate a direction of flow or vector field.

-

आकृति 5.25



आयत, समचतुर्भुज तथा वर्ग के विशिष्ट गुणधर्म
(Properties of rectangle, rhombus and square)

आयत, समचतुर्भुज तथा वर्ग भी समांतर चतुर्भुज ही होते हैं। इसीलिए उनकी सम्मुख भुजाओं का समान होना, सम्मुख कोणों का समान होना तथा विकर्णों का परस्पर समद्विभाजित होना ये गुणधर्म तीनों प्रकार के चतुर्भुजों में होते हैं।

किंतु इनसे भी अधिक गुणधर्म इन तीनों प्रकार के चतुर्भुजों में होते हैं । उसे हम देखेंगे । आगे इन गुणधर्मों की उपपत्ति संक्षेप में दी गई है । दिए गए सोपानों को ध्यान में रखते हुए उपपत्ति को विस्तार में लिखिए ।

प्रमेय : आयत के विकर्ण सर्वांगसम होते हैं ।

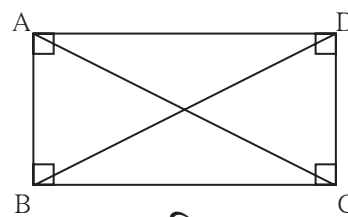
दत्त : $\square ABCD$ एक आयत है ।

साध्य : विकर्ण $AC \cong$ विकर्ण BD

उपपत्ति : संक्षिप्त में दी गई उपपत्ति को कारण सहित लिखिए ।

$\Delta ADC \cong \Delta DAB$ भुकोभु कसौटी

विकर्ण $AC \cong$ विकर्ण BD (सर्वांगसम त्रिभुज के संगत भुजा)



आकृति 5.26

प्रमेय : वर्ग के विकर्ण परस्पर सर्वांगसम होते हैं ।

दत्त, साध्य तथा उपपत्ति स्वयं लिखिए ।

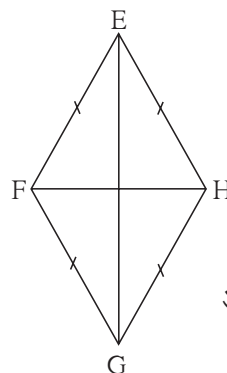
प्रमेय : समचतुर्भुज के विकर्ण परस्पर लंबसमद्विभाजक होते हैं ।

दत्त : $\square EFGH$ एक समचतुर्भुज है ।

साध्य : (i) विकर्ण EG , विकर्ण HF का लंबसमद्विभाजक है ।

(ii) विकर्ण HF , विकर्ण EG का लंबसमद्विभाजक है ।

उपपत्ति : (i) रेख $EF \cong$ रेख EH
रेख $GF \cong$ रेख GH } दत्त



आकृति 5.27

रेखाखंड के अंतःबिंदुओं से समदूरस्थ प्रत्येक बिंदु उस रेखाखंड के लंबसमद्विभाजक पर होता है ।

$\therefore$ बिंदु E तथा बिंदु G यह रेख HF के लंबसमद्विभाजक पर है ।

दो भिन्न बिंदु से एक और केवल एक ही रेखा जाती है ।

$\therefore$ रेखा EG यह विकर्ण HF की लंबसमद्विभाजक रेखा है ।

$\therefore$ विकर्ण EG यह विकर्ण HF की लंबसमद्विभाजक है ।

(ii) इसी प्रकार हम सिद्ध कर सकते हैं कि विकर्ण HF यह विकर्ण EG का लंबसमद्विभाजक है ।

नीचे दिए गए प्रमेयों की उपपत्ति स्वयं लिखिए ।

- वर्ग के विकर्ण परस्पर लंबसमद्विभाजक होते हैं ।
- समचतुर्भुज के विकर्ण उसके सम्मुख कोणों को समद्विभाजित करते हैं ।
- वर्ग के विकर्ण उसके सम्मुख कोणों को समद्विभाजित करते हैं ।



इसे ध्यान में रखें

- आयत के विकर्ण परस्पर सर्वांगसम होते हैं ।
- समचतुर्भुज के विकर्ण परस्पर लंबसमद्विभाजक होते हैं ।
- समचतुर्भुज के विकर्ण सम्मुख कोणों को समद्विभाजित करते हैं ।
- वर्ग के विकर्ण परस्पर सर्वांगसम होते हैं ।
- वर्ग के विकर्ण परस्पर लंबसमद्विभाजक होते हैं ।
- वर्ग के विकर्ण उसके सम्मुख कोण को समद्विभाजित करते हैं ।

प्रश्नसंग्रह 5.3

1. आयत ABCD के विकर्ण परस्पर बिंदु O पर प्रतिच्छेदित करते हैं। यदि $AC = 8$ सेमी तो $BO = ?$
यदि $\angle CAD = 35^\circ$ तो $\angle ACB = ?$
2. समचतुर्भुज PQRS में, यदि $PQ = 7.5$ सेमी, तो $QR = ?$
यदि $\angle QPS = 75^\circ$ तो $\angle PQR = ?$, $\angle SRQ = ?$
3. वर्ग IJKL के विकर्ण बिंदु M पर परस्पर प्रतिच्छेदित करते हैं तो $\angle IMJ$, $\angle JIK$ तथा $\angle LJK$ के माप ज्ञात कीजिए।
4. किसी समचतुर्भुज के विकर्णों की लंबाई क्रमशः 20 सेमी, 21 सेमी है तो उस चतुर्भुज की भुजा तथा परिमिति ज्ञात कीजिए।
5. नीचे दिए गए कथन सत्य हैं या असत्य, कारण सहित लिखिए।
(i) प्रत्येक समांतर चतुर्भुज समचतुर्भुज होता है। (ii) प्रत्येक समचतुर्भुज आयत होता है।
(iii) प्रत्येक आयत समांतर चतुर्भुज होता है। (iv) प्रत्येक वर्ग आयत होता है।
(v) प्रत्येक वर्ग समचतुर्भुज होता है। (vi) प्रत्येक समांतर चतुर्भुज, आयत होता है।



आओ, जानें

समलंब चतुर्भुज (Trapezium)

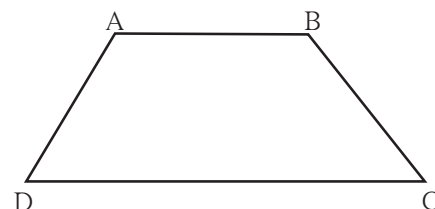
जिस चतुर्भुज के सम्मुख भुजाओं की एक ही जोड़ी समांतर होती है उस चतुर्भुज को समलंब चतुर्भुज कहते हैं।

संलग्न आकृति में □ABCD की केवल भुजा AB तथा भुजा DC यह जोड़ी परस्पर समांतर है अर्थात् यह समलंब चतुर्भुज है।

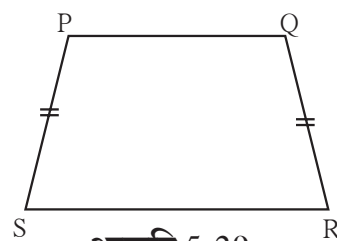
समांतर रेखाओं के गुणधर्म के अनुसार संलग्न कोणों की जोड़ी $\angle A$ तथा $\angle D$ संपूरक है। इसी प्रकार $\angle B$ तथा $\angle C$ संलग्न कोणों की जोड़ी भी संपूरक होती है।

समलंब चतुर्भुज में संलग्न कोणों की दोनों जोड़ियाँ संपूरक होती हैं।

जिस समलंब चतुर्भुज की असमांतर भुजाओं की जोड़ी सर्वांगसम हो तो उस चतुर्भुज को समद्विबाहु समलंब चतुर्भुज (Isosceles trapezium) कहते हैं।



आकृति 5.28



आकृति 5.29

किसी भी समलंब चतुर्भुज की असमांतर भुजाओं के मध्यबिंदुओं को जोड़ने वाले रेखाखंड को उस समलंब चतुर्भुज की माध्यिका होती है।

हल किए गए उदाहरण :

उदा. (1) □ABCD के कोणों के मापों का अनुपात 4 : 5 : 7 : 8 है। तो सिद्ध कीजिए कि □ABCD समलंब चतुर्भुज है।

हल : माना, $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$, $\angle D$ के माप क्रमशः $(4x)^\circ$, $(5x)^\circ$, $(7x)^\circ$, तथा $(8x)^\circ$ है।

चतुर्भुज के चारों कोणों के मापों का योगफल 360° होता है।

$$\therefore 4x + 5x + 7x + 8x = 360$$

$$\therefore 24x = 360 \quad \therefore x = 15$$

$$\angle A = 4 \times 15 = 60^\circ, \angle B = 5 \times 15 = 75^\circ, \angle C = 7 \times 15 = 105^\circ,$$

$$\text{तथा } \angle D = 8 \times 15 = 120^\circ$$

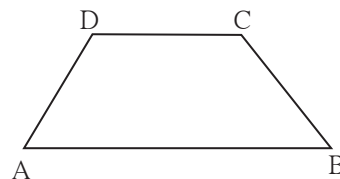
$$\text{अब, } \angle B + \angle C = 75^\circ + 105^\circ = 180^\circ$$

$$\therefore \text{भुजा } CD \parallel \text{भुजा } BA \dots\dots (I) \text{ (समांतर रेखाओं की अंतःकोणों की कसौटी)}$$

$$\text{परंतु } \angle B + \angle A = 75^\circ + 60^\circ = 135^\circ \neq 180^\circ$$

$$\therefore \text{भुजा } BC \text{ तथा भुजा } AD \text{ परस्पर समांतर नहीं है।} \dots\dots (II)$$

$$\therefore \square ABCD \text{ समलंब चतुर्भुज है।} \dots\dots (I) \text{ तथा } (II) \text{ से}$$



आकृति 5.30

उदा. (2) समलंब □PQRS में भुजा PS $\parallel$ भुजा QR तथा भुजा PQ $\cong$ भुजा SR,

भुजा QR > भुजा PS तो सिद्ध कीजिए कि $\angle PQR \cong \angle SRQ$

दत्त : □PQRS में भुजा PS $\parallel$ भुजा QR

तथा भुजा PQ $\cong$ भुजा SR

साध्य : $\angle PQR \cong \angle SRQ$

रचना : बिंदु S से भुजा PQ के समांतर एक रेखाखंड खींचिए।
जो भुजा QR को बिंदु T पर प्रतिच्छेदित करती है।

उपपत्ति : □PQRS में,

रेख PS $\parallel$ रेख QTदत्त तथा Q-T-R

रेख PQ $\parallel$ रेख STरचना

$\therefore \square PQTS$ समांतर चतुर्भुज है।

$\therefore \angle PQT \cong \angle STR$ संगत कोण (I)

इसी प्रकार रेख PQ $\cong$ रेख ST

परंतु रेख PQ $\cong$ रेख SR(दत्त)

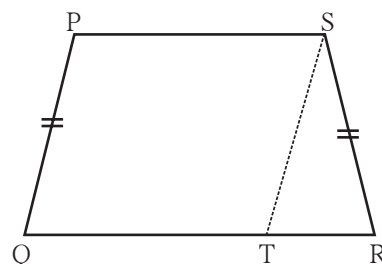
$\therefore$ रेख ST $\cong$ रेख SR

$\therefore \angle STR \cong \angle SRT$ समद्विबाहु त्रिभुज का प्रमेय (II)

$\therefore \angle PQT \cong \angle SRT$ (I) तथा (II) से

$\therefore \angle PQR \cong \angle SRQ$ Q-T-R

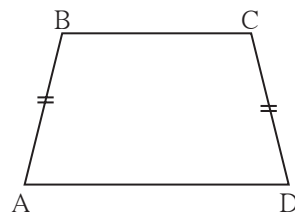
इस आधार पर सिद्ध होता है कि समद्विबाहु समलंब चतुर्भुज के आधार के कोण सर्वांगसम होते हैं।



आकृति 5.31

प्रश्नसंग्रह 5.4

- यदि $\square IJKL$ में भुजा $IJ \parallel$ भुजा KL हो और $\angle I = 108^\circ$ $\angle K = 53^\circ$ तो $\angle J$ तथा $\angle L$ के माप ज्ञात कीजिए।
- $\square ABCD$ में भुजा $BC \parallel$ भुजा AD , हो और भुजा $AB \cong$ भुजा DC , $\angle A = 72^\circ$ तो $\angle B$, तथा $\angle D$ के माप निश्चित कीजिए।
- आकृति 5.32 में $\square ABCD$ में भुजा $BC <$ भुजा AD ,
भुजा $BC \parallel$ भुजा AD तथा यदि
भुजा $BA \cong$ भुजा CD हो
तो सिद्ध कीजिए कि $\angle ABC \cong \angle DCB$



आकृति 5.32



आओ, जानें

त्रिभुज की दो भुजाओं के मध्यबिंदुओं का प्रमेय (Theorem of midpoints of two sides of a triangle)

कथन : त्रिभुज की किन्हीं दो भुजाओं के मध्यबिंदुओं को जोड़ने वाला रेखाखंड तीसरी भुजा के समांतर होता है तथा लंबाई में तीसरी भुजा का आधा होता है।

दत्त : $\triangle ABC$ की भुजाओं AB तथा BC के मध्यबिंदु क्रमशः P तथा Q है।

साध्य : रेख $PQ \parallel$ रेख BC तथा $PQ = \frac{1}{2} BC$

रचना : रेख PQ को बिंदु R तक इस प्रकार बढ़ाइए कि $PQ = QR$ रेख RC खींचें।

उपपत्ति : $\triangle AQP$ तथा $\triangle CQR$ में

रेख $PQ \cong$ रेख QR रचना

रेख $AQ \cong$ रेख QC Q यह AC का मध्यबिंदु है

$\angle AQP \cong \angle CQR$ शीर्षाभिमुख कोण

$\therefore \triangle AQP \cong \triangle CQR$ भुकोभु कसौटी

$\angle PAQ \cong \angle RCQ$ (1) सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत कोण

$\therefore$ रेख $AP \cong$ रेख CR (2) सर्वांगसम त्रिभुजों की संगत भुजाएँ

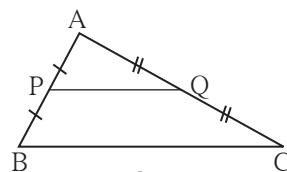
कथन (1) से रेखा $AB \parallel$ रेखा CRएकांतर कोण कसौटी

कथन (2) से रेख $AP \cong$ रेख CR

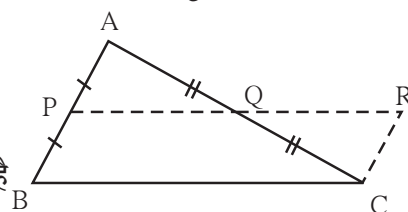
किंतु रेख $AP \cong$ रेख $PB \cong$ रेख CR तथा रेख $PB \parallel$ रेख CR

$\therefore \square PBCR$ समांतर चतुर्भुज है।

$\therefore$ रेख $PQ \parallel$ रेख BC तथा $PR = BC$ (समांतर चतुर्भुज की सम्मुख भुजाएँ लंबाई में समान होती हैं)



आकृति 5.33



आकृति 5.34

$$PQ = \frac{1}{2} PR \text{ रचना}$$

$$\therefore PQ = \frac{1}{2} BC \quad \because PR = BC$$

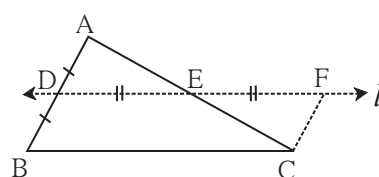
त्रिभुज की दो भुजाओं के मध्यबिंदुओं के प्रमेय का विलोम

प्रमेय : त्रिभुज की एक भुजा के मध्यबिंदु से जाने वाला तथा दूसरी भुजा के समांतर रेखाखंड तीसरी भुजा को समद्विभाजित करती है।

इस कथन के लिए आकृति, दत्त, साध्य, रचना दी गई है। इस आधार पर उस कथन की उपपत्ति लिखने का प्रयत्न कीजिए।

दत्त : $\triangle ABC$ में बिंदु D यह भुजा AB का मध्यबिंदु है।

बिंदु D से भुजा BC के समांतर खींची गई रेखा यह भुजा AC को बिंदु E पर प्रतिच्छेदित करती है।



आकृति 5.35

रचना : बिंदु C से रेखा AB के समांतर रेखा खींचिए। यह रेखा रेखा l को जिस बिंदु में प्रतिच्छेदित करती है उस बिंदु को F नाम दीजिए।

उपपत्ति : रेखा $l \parallel$ रेखा BC (दत्त) तथा की गई रचना का उपयोग कर सिद्ध कीजिए कि $\square BCFD$ समांतर चतुर्भुज है। $\triangle ADE \cong \triangle CFE$ सिद्ध कर उस आधार पर साध्य सिद्ध कीजिए।

हल किए गए उदाहरण

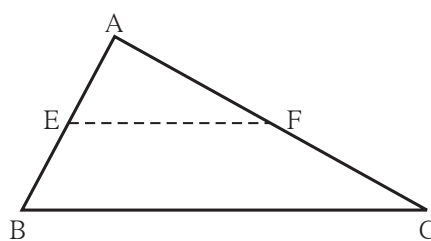
उदा. (1) $\triangle ABC$ में बिंदु E तथा बिंदु F यह क्रमशः भुजा AB तथा AC के मध्यबिंदु हैं।

यदि $EF = 5.6$ तो BC की लंबाई ज्ञात कीजिए।

हल : $\triangle ABC$ में बिंदु E तथा बिंदु F क्रमशः भुजा AB तथा भुजा AC के मध्यबिंदु हैं।

$$EF = \frac{1}{2} BC \text{ मध्यबिंदु का प्रमेय}$$

$$5.6 = \frac{1}{2} BC \quad \therefore BC = 5.6 \times 2 = 11.2$$



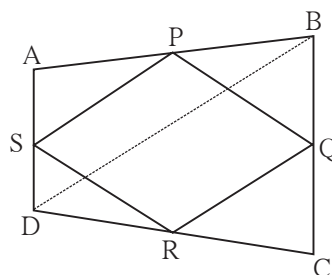
आकृति 5.36

उदा. (2) सिद्ध करें कि किसी भी चतुर्भुज के भुजाओं के मध्यबिंदुक्रम से जोड़ने पर बनने वाला चतुर्भुज समांतर चतुर्भुज होता है।

दत्त : $\square ABCD$ में बिंदु P, Q, R तथा S यह क्रमशः भुजाओं AB, BC, CD तथा AD के मध्यबिंदु हैं।

साध्य : $\square PQRS$ यह समांतर चतुर्भुज है।

रचना : विकर्ण BD खींचिए।



आकृति 5.37

उपपत्ति: $\triangle ABD$ में बिंदु S तथा बिंदु P यह क्रमशः भुजा AD तथा AB के मध्यबिंदु हैं ।

$\therefore$ मध्यबिंदु के प्रमेयानुसार, $PS \parallel DB$ तथा $PS = \frac{1}{2} BD$ (1)

उसी प्रकार $\triangle DBC$ में बिंदु Q तथा बिंदु R यह क्रमशः भुजा BC तथा भुजा DC के मध्यबिंदु हैं ।

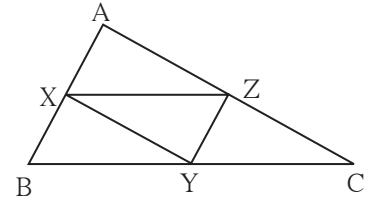
$\therefore QR \parallel BD$, $QR = \frac{1}{2} BD$ (2) मध्यबिंदु के प्रमेयानुसार

$\therefore PS \parallel QR$, $PS = QR$ (1) तथा (2) से

$\therefore \square PQRS$ यह समांतर चतुर्भुज है ।

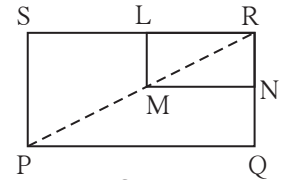
प्रश्नसंग्रह 5.5

1. आकृति 5.38 में $\triangle ABC$ में बिंदु X, Y, Z यह क्रमशः भुजाओं AB, BC तथा AC के मध्यबिंदु हैं ।
AB = 5 सेमी, AC = 9 सेमी तथा
BC = 11 सेमी, तो XY, YZ, XZ की लंबाई ज्ञात कीजिए ।



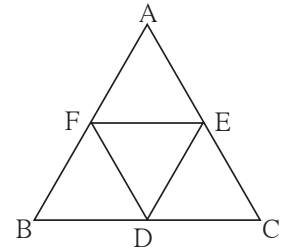
आकृति 5.38

2. आकृति 5.39 में $\square PQRS$ तथा $\square MNRL$ आयत है । बिंदु M यह PR का मध्यबिंदु है ।
तो सिद्ध कीजिए कि (i) $SL = LR$, (ii) $LN = \frac{1}{2} SQ$ ।



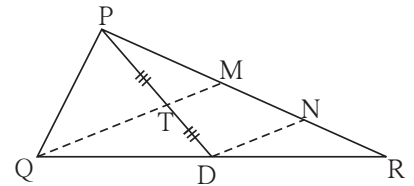
आकृति 5.39

3. आकृति 5.40 में $\triangle ABC$ समबाहु त्रिभुज है जिसमें बिंदु F, D, E यह क्रमशः भुजा AB, भुजा BC, भुजा AC के मध्यबिंदु हैं तो सिद्ध कीजिए कि $\triangle FED$ यह समबाहु त्रिभुज है ।



आकृति 5.40

4. आकृति 5.41 में रेख PD यह $\triangle PQR$ की माध्यिका है । बिंदु T यह PD का मध्यबिंदु है । QT को आगे बढ़ाने पर यह PR को बिंदु M पर प्रतिच्छेदित करता है ।
तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{PM}{PR} = \frac{1}{3}$
[सूचना : $DN \parallel QM$ खींचें ।]



आकृति 5.41

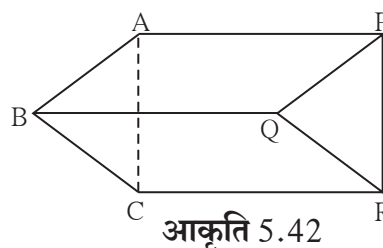
प्रकीर्ण प्रश्नसंग्रह 5

1. नीचे दिए गए बहु वैकल्पिक प्रश्नों के उत्तरों में से सही विकल्प चुनिए ।
(i) जिस चतुर्भुज की संलग्न भुजाओं की सभी जोड़ियाँ सर्वांगसम हों तो उस चतुर्भुज का नाम क्या होगा?
(A) आयत (B) समांतर चतुर्भुज (C) समलंब चतुर्भुज (D) समचतुर्भुज

(A) 100° (B) 80° (C) 160° (D) 40°

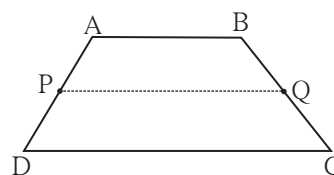
2. किसी आयत की संलग्न भुजाएँ क्रमशः 7 सेमी तथा 24 सेमी हैं तो उस चतुर्भुज की विकर्ण की लंबाई ज्ञात कीजिए ।
3. वर्ग के विकर्ण की लंबाई 13 सेमी है तो वर्ग की भुजा की लंबाई ज्ञात कीजिए ।
4. समांतर चतुर्भुज की दो संलग्न भुजाओं का अनुपात 3:4 है । उसकी परिमिति 112 सेमी हो तो उसकी प्रत्येक भुजा की लंबाई ज्ञात कीजिए ।
5. समचतुर्भुज PQRS के विकर्ण PR तथा विकर्ण QS की लंबाई क्रमशः 20 सेमी तथा 48 सेमी है तो समचतुर्भुज की भुजा PQ की लंबाई ज्ञात कीजिए ।
6. आयत PQRS के विकर्ण परस्पर बिंदु M पर प्रतिच्छेदित करते हैं । यदि $\angle QMR = 50^\circ$ तो $\angle MPS$ का माप ज्ञात कीजिए ।

रेख $BC \parallel$ रेख QR तथा रेख $BC \cong$ रेख QR



आकृति 5.42

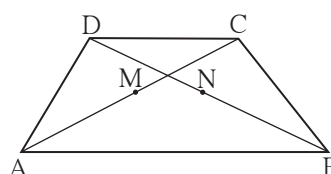
8*. संलग्न आकृति 5.43 में $\square ABCD$ समलंब चतुर्भुज है। $AB \parallel DC$ है। रेखा AD तथा रेखा BC के मध्यबिंदु क्रमशः P तथा Q हैं, तो सिद्ध कीजिए कि



आकृति 5.43

$$PQ \parallel AB \text{ तथा } PQ = \frac{1}{2}(AB + DC)$$

9. संलग्न आकृति 5.44 में $\square ABCD$ यह समलंब चतुर्भुज है। $AB \parallel DC$, बिंदु M तथा बिंदु N क्रमशः विकर्ण AC तथा विकर्ण DB के मध्यबिंदु है तो सिद्ध कीजिए कि $MN \parallel AB$



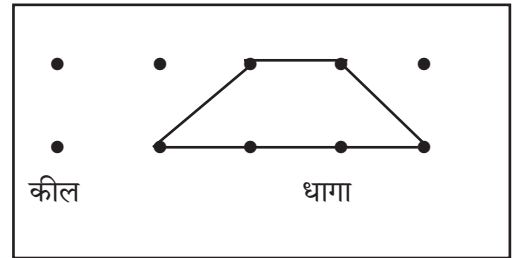
आकृति 5.44

कृति

चतुर्भुज की विभिन्न प्रमेयों की जाँच करना ।

साहित्य : 15 सेमी × 10 सेमी का प्लायवुड का टुकड़ा; 12 से 15 किल, मोटा धागा, कैंची

सूचना : 15 सेमी × 10 सेमी प्लायवुड के टुकड़े पर सरल रेखा में 2 सेमी की दूरी पर 5 कील ठोकिए उसी तरह नीचे की सरल रेखा में भी 2 सेमी की दूरी पर कील ठोकिए । धागे से भिन्न-भिन्न चतुर्भुज (किल का आधार लेकर) बनाइए । भुजा संबंधी गुणधर्मों की जाँच धागे से कीजिए । इस आधार पर कोण संबंधी गुणधर्मों की जाँच कीजिए ।



आकृति 5.45

अधिक जानकारी हेतु

त्रिभुज की माधिकाओं का संगामी बिंदु, माधिकाओं को 2 : 1 के अनुपात में विभाजित करता है ।

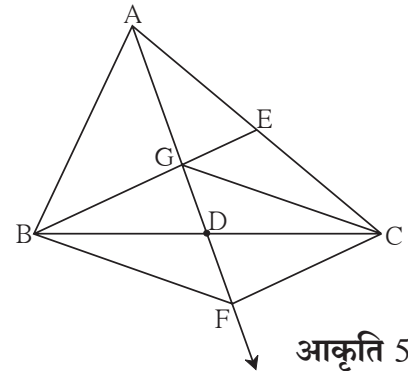
इस गुणधर्म की जानकारी आपको है ।

इसे सिद्ध करने की विधि का अध्ययन कीजिए ।

दत्त : ΔABC की माधिकाएँ रेख AD तथा रेख BE परस्पर बिंदु G पर प्रतिच्छेदित करती हैं ।

साध्य : $AG : GD = 2 : 1$

रचना : किरण AD पर बिंदु F इस प्रकार लीजिए कि $G-D-F$ तथा $GD = DF$



आकृति 5.46

उपपत्ति : $\square BGCF$ के विकर्ण परस्पर समद्विभाजित करते हैं । दत्त तथा रचना

$\therefore \square BGCF$ समांतर चतुर्भुज है ।

$\therefore$ रेखा $BE \parallel$ रेखा FC समांतर चतुर्भुज की सम्मुख भुजाओं को समाविष्ट करने वाली रेखा अब ΔAFC में बिंदु E, भुजा AC का मध्यबिंदु है । (दत्त)

रेख $EB \parallel$ रेखा FC

त्रिभुज की किसी एक भुजा के मध्यबिंदु से दूसरी भुजा के समांतर खींची गई रेखा तीसरी भुजा को समद्विभाजित करती है ।

$\therefore$ रेख AF का G यह मध्यबिंदु है ।

$\therefore AG = GF$

परंतु $AG = 2 GD$

$\frac{AG}{GD} = \frac{2}{1}$ अर्थात् $AG : GD = 2 : 1$

