3 त्रिभुज

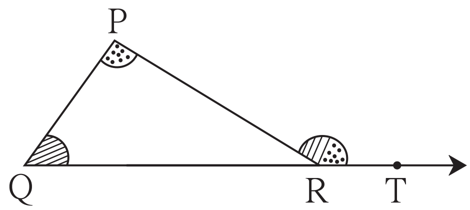
C8F8DE

आओ, सीखें

- त्रिभुज के दूरस्थ अंतःकोणों का प्रमेय
- त्रिभुजों की सर्वांगसमता
- समद्विबाहु त्रिभुज का प्रमेय
- $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$ मापवाले त्रिभुज का गुणधर्म
- त्रिभुज की माध्यिका
- समकोण त्रिभुज में कर्ण पर खींची गई माध्यिका का गुणधर्म
- लंबसमद्विभाजक का प्रमेय
- कोणसमद्विभाजक का प्रमेय
- समरूप त्रिभुज

कृति

किसी मोटे कागज पर किसी भी माप का Δ PQR बनाइए । आकृति में दर्शाए अनुसार किरण QR पर बिंदु T लें । रंगीन मोटे पेपर के $\angle P$ तथा $\angle Q$ मापवाले टुकड़े काटें । उन टुकड़ों को रखने पर $\angle PRT$ ढँक जाता है । इस बात का अनुभव कीजिए ।



आकृति 3.1

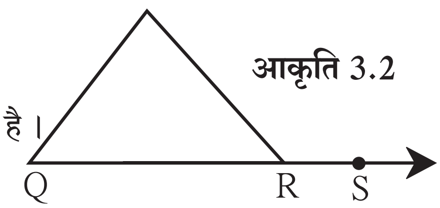
आओ, जानें

त्रिभुज के दूरस्थ अंतःकोणों का प्रमेय (Theorem of remote interior angles of a triangle)

प्रमेय : त्रिभुज के बहिष्कोण का माप उसके दूरस्थ अंतःकोणों के मापों के योगफल के बराबर होता है ।

दत्त : $\angle PRS$ यह Δ PQR का बहिष्कोण है ।

साध्य : $\angle PRS = \angle PQR + \angle QPR$



आकृति 3.2

उपपत्ति : त्रिभुज के तीनों अंतःकोणों के मापों का योगफल 180° होता है ।

$\therefore \angle PQR + \angle QPR + \angle PRQ = 180^\circ$---(I)

$\angle PRQ + \angle PRS = 180^\circ$---(II). . . . (रैखिक युगल कोण)

$\therefore$ कथन I तथा II से

$\angle PQR + \angle QPR + \angle PRQ = \angle PRQ + \angle PRS$

$\therefore \angle PQR + \angle QPR = \angle PRS$ ------(दोनों पक्षों में से $\angle PRQ$ घटाने पर)

$\therefore$ त्रिभुज के बहिष्कोण का माप उसके दूरस्थ अंतःकोणों के मापों के योगफल के बराबर होता है ।

थोड़ा, सोचें

आकृति 3.3 में बिंदु R से रेख PQ के समांतर रेखा खींच कर इस प्रमेय की अलग उपपत्ति दी जा सकती है क्या ?

आओ, जानें

त्रिभुज के बहिष्कोण के प्रमेय का गुणधर्म (Property of an exterior angle of triangle)

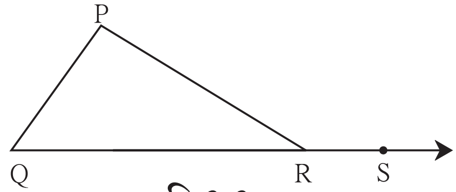
दो संख्याओं a तथा b का योगफल $(a + b)$, यह a तथा b दोनों से बड़ा होता है ।

अर्थात $a + b > a$, $a + b > b$

उपर्युक्त विधान का उपयोग करने पर त्रिभुज के बहिष्कोण का गुणधर्म प्राप्त होता हैं ।

Δ PQR मे $\angle$PRS बहिष्कोण हो तो

$\angle PRS > \angle P$, $\angle PRS > \angle Q$



आकृति 3.3

$\therefore$ त्रिभुज का बहिष्कोण का माप उसके प्रत्येक दूरस्थ अंतःकोण से बड़ा होता है ।

हल किए गए उदाहरण

उदा. (1) किसी त्रिभुज के कोणों के मापों का अनुपात 5 : 6 : 7 हो तो सभी कोणों के माप ज्ञात कीजिए ।

हल : माना उन कोणों के माप $5x$, $6x$, $7x$ है ।

$5x + 6x + 7x = 180^\circ$ ...(त्रिभुज के तीनों कोणों के मापों का योगफल 180 होता हैं ।)

$18x = 180^\circ$

$x = 10^\circ$

$5x = 5 \times 10 = 50^\circ$, $6x = 6 \times 10 = 60^\circ$, $7x = 7 \times 10 = 70^\circ$

त्रिभुज के कोणों के माप 50°, 60°, 70° है ।

उदा. (2) संलग्न आकृति 3.4 का निरीक्षण कर $\angle$PRS तथा $\angle$RTS के माप ज्ञात कीजिए ।

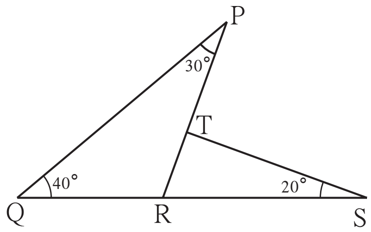
हल : $\angle$PRS यह Δ PQR का बहिष्कोण है ।

दूरस्थ अंतःकोण के प्रमेय के आधार पर,

$\angle PRS = \angle PQR + \angle QPR$

$= 40^\circ + 30^\circ$

$\angle PRS = 70^\circ$



आकृति 3.4

Δ RTS में

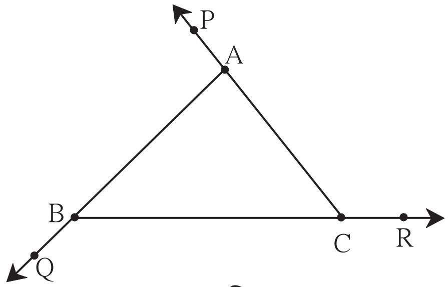
$\angle TRS + \angle RTS + \angle TSR = \boxed{}$ .... (त्रिभुज के तीनों कोणों के मापों का योगफल)

$\therefore \boxed{} + \angle RTS + \boxed{} = 180^\circ$

$\therefore \angle RTS + 90^\circ = 180^\circ$

$\therefore \angle RTS = \boxed{}$

उदा. (3) सिद्‌ध कीजिए कि त्रिभुज की भुजाओं को एक ही दिशा में बढ़ाने पर बनने वाले बहिष्कोणों के मापों का योगफल 360° होता है ।



आकृति 3.5

दत्त : $\angle PAB, \angle QBC$ तथा $\angle ACR$ यह ΔABC के बहिष्कोण हैं ।

साध्य : $\angle PAB + \angle QBC + \angle ACR = 360^\circ$.

उपपत्ति : इस प्रमेय की उपपत्ति दो विधियों से लिख सकते हैं

विधि I

ΔABC में बहिष्कोण $\angle PAB$ को ध्यान में रखने पर

$\angle ABC$ तथा $\angle ACB$ उसके दूरस्थ अंतःकोण होंगे ।

$\angle BAP = \angle ABC + \angle ACB$ ---- (I)

उसी प्रकार $\angle ACR = \angle ABC + \angle BAC$ ---- (II)

तथा $\angle CBQ = \angle BAC + \angle ACB$ ---- (III)

...(दूरस्थ अंतःकोण प्रमेय के अनुसार)

कथन (I), (II), (III) दोनों पक्षों को जोड़ने पर

$\angle BAP + \angle ACR + \angle CBQ$

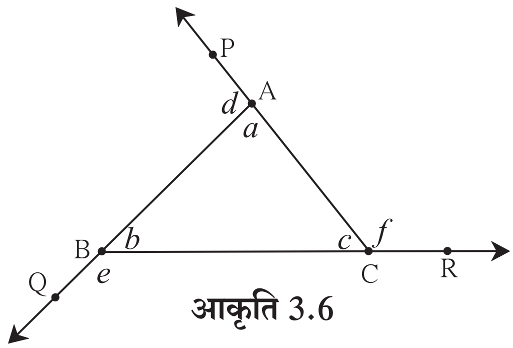
$= \angle ABC + \angle ACB + \angle ABC + \angle BAC + \angle BAC + \angle ACB$

$= 2\angle ABC + 2\angle ACB + 2\angle BAC$

$= 2(\angle ABC + \angle ACB + \angle BAC)$

$= 2 \times 180^\circ$ . . . . . (त्रिभुज के अंतःकोणों का योगफल)

$= 360^\circ$



आकृति 3.6

विधि II

$\angle c + \angle f = 180^\circ$ . . . . रैखिक युगल कोण

उसी प्रकार $\angle a + \angle d = 180^\circ$

तथा $\angle b + \angle e = 180^\circ$

$\therefore \angle c + \angle f + \angle a + \angle d + \angle b + \angle e = 180^\circ \times 3 = 540^\circ$

$\angle f + \angle d + \angle e + (\angle a + \angle b + \angle c) = 540^\circ$

$\therefore \quad \angle f + \angle d + \angle e + 180^\circ = 540^\circ$

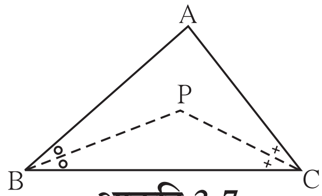
$\therefore f + d + e = 540^\circ - 180^\circ$

$= 360^\circ$

उदा. (4) आकृति 3.7 में Δ ABC के $\angle B$ तथा $\angle C$ के समद्विभाजक परस्पर बिंदु P पर प्रतिच्छेदित करते हैं तो सिद्ध कीजिए कि

$\angle BPC = 90 + \frac{1}{2}\angle BAC$

रिक्त स्थानों की पूर्ति करते हुए उपपत्ति पूर्ण कीजिए।



आकृति 3.7

उपपत्ति : Δ ABC में,

$\angle BAC + \angle ABC + \angle ACB = \boxed{}$ ...... (त्रिभुज के अंत:कोणों के मापों का योगफल)

$\therefore \frac{1}{2}\angle BAC + \frac{1}{2}\angle ABC + \frac{1}{2}\angle ACB = \frac{1}{2} \times \boxed{}$ ...(दोनों पक्षों में $\frac{1}{2}$ से गुणा करने पर)

$\therefore \frac{1}{2}\angle BAC + \angle PBC + \angle PCB = 90^\circ$

$\therefore \angle PBC + \angle PCB = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle BAC$ ......(I)

Δ BPC में

$\angle BPC + \angle PBC + \angle PCB = 180^\circ$ ...... (त्रिभुज के अंत:कोणों के मापों का योगफल)

$\therefore \angle BPC + \boxed{} = 180^\circ$ ...... (कथन I से)

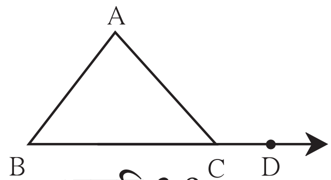
$\therefore \quad \angle BPC = 180^\circ - (90^\circ - \frac{1}{2}\angle BAC)$

$= 180^\circ - 90^\circ + \frac{1}{2}\angle BAC$

$\angle BPC = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle BAC$

प्रश्नसंग्रह 3.1

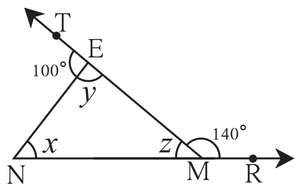
1. आकृति 3.8 में $\angle ACD$ यह Δ ABC का बहिष्कोण है। $\angle B = 40^\circ$, $\angle A = 70^\circ$ तो m $\angle ACD$ ज्ञात कीजिए।



आकृति 3.8

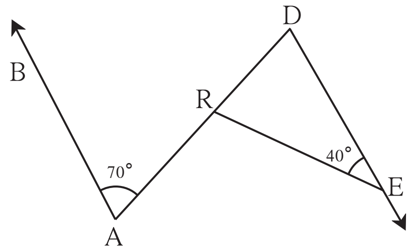
2. Δ PQR मे $\angle P = 70^\circ$, $\angle Q = 65^\circ$ तो $\angle R$ का माप ज्ञात कीजिए।
3. त्रिभुज के कोणों के माप x°, $(x-20)^\circ$, $(x-40)^\circ$ हों तो, प्रत्येक कोण का माप ज्ञात कीजिए।
4. त्रिभुज के तीन कोणों में से एक कोण सबसे छोटे कोण का दुगुना तथा दूसरा कोण सबसे छोटे कोण का तीन गुना हो तो, तीनों कोणों के माप ज्ञात कीजिए।

5. आकृति 3.9 में दिए गए कोणों के मापों के आधार पर x, y, z के मान ज्ञात कीजिए ।



आकृति 3.9

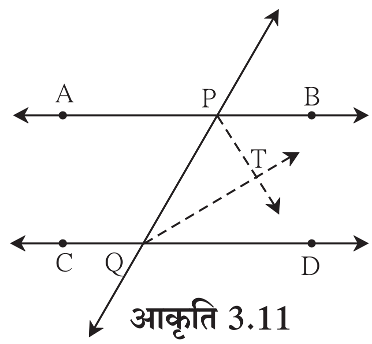
6. आकृति 3.10 में रेखा AB || रेखा DE है । दिए गए मापों के आधार पर $\angle$DRE तथा $\angle$ARE के माप ज्ञात कीजिए ।



आकृति 3.10

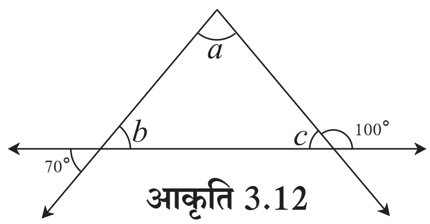
7. Δ ABC में $\angle$A तथा $\angle$B के समद्विभाजक परस्पर बिंदु O पर प्रतिच्छेदित करते हैं । यदि $\angle C = 70^\circ$ हो तो $\angle$AOB का माप ज्ञात कीजिए ।

8. आकृति 3.11 में रेखा AB || रेखा CD तथा रेखा PQ उनकी तिर्यक रेखा है । किरण PT तथा किरण QT क्रमशः $\angle$BPQ तथा $\angle$PQD के समद्विभाजक हैं, तो सिद्ध कीजिए कि $\angle PTQ = 90^\circ$



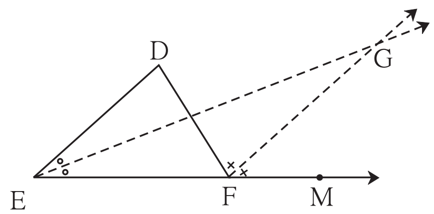
आकृति 3.11

9. आकृति 3.12 में दी गई जानकारी के आधार पर $\angle a$, $\angle b$ तथा $\angle c$ के माप ज्ञात कीजिए ।



आकृति 3.12

10*. आकृति 3.13 में रेख DE || रेख GF है । किरण EG तथा किरण FG क्रमशः $\angle$DEF तथा $\angle$DFM के समद्विभाजक है । तो सिद्ध कीजिए कि
(i) $\angle DEF = \angle EDF$ (ii) EF = FG

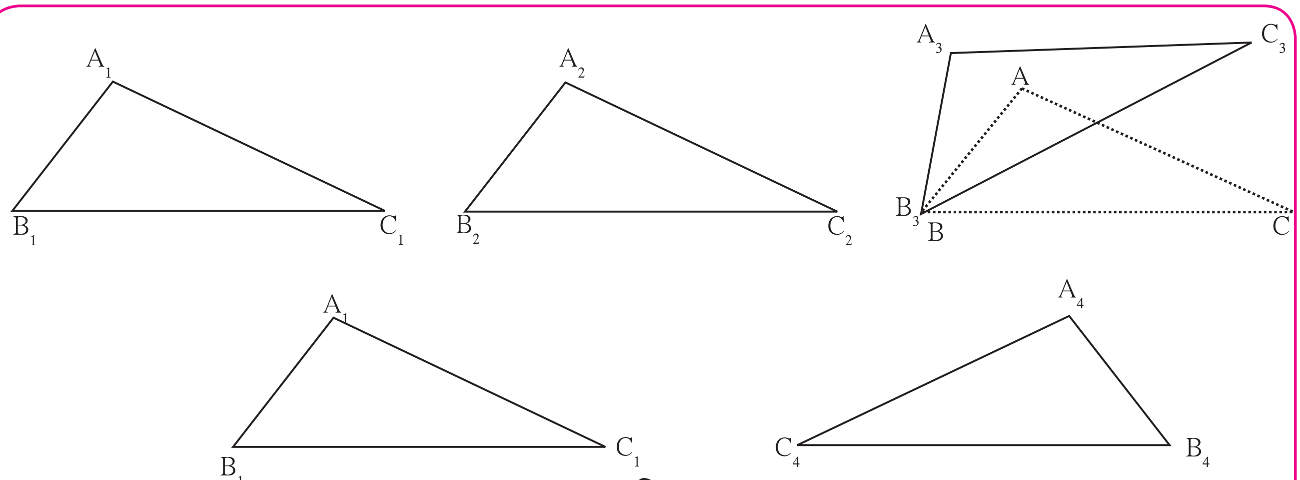


आकृति 3.13

आओ, जानें

त्रिभुजों की सर्वांगसमता (Congruence of triangles)

किसी एक रेखाखंड को दूसरे रेखाखंड पर रखने पर यदि वे एक-दूसरे को पूर्णतः ढँक लेते हैं तो दोनों रेखाखंड सर्वांगसम कहलाते हैं । उसी प्रकार किसी कोण को उठाकर दूसरे कोण पर रखने पर भी परस्पर पूर्णतः ढँक लेते हैं तो वे कोण सर्वांगसम होते हैं । उसी प्रकार एक त्रिभुज को उठाकर दूसरे त्रिभुज पर रखने पर वे परस्पर पूणर्तः ढँक लेते हैं तो वे दोनों त्रिभुज सर्वांगसम है ऐसा कहा जाता हैं । यदि Δ ABC तथा Δ PQR सर्वांगसम हों तो उसे $\Delta ABC \cong \Delta PQR$ इस प्रकार दर्शाते हैं ।



आकृति 3.14

कृति : किसी कार्डबोर्ड पर किसी भी माप का एक Δ ABC बनाकर काटें ।

उसे मोटे कागज पर रखकर उसके चारों ओर पेंसिल द्वारा आकृति बना लें । इस त्रिभुज को $\Delta A_1B_1C_1$ नाम दें । अब उस कार्डबोर्ड को खिसकाकर दूसरी आकृति बनाएँ ।

उसे $\Delta A_2B_2C_2$ नाम दें । तत्पश्चात कार्डबोर्ड को उठाकर दूसरी जगह उल्टा रखकर आकृति बनाएँ । उसे $\Delta A_3B_3C_3$ नाम दें । बाद में कार्डबोर्ड को उठाकर सीधे रखिए और उस त्रिभुज को $\Delta A_4B_4C_4$ नाम दें ।

क्या अब जान गए कि $\Delta A_1B_1C_1$, $\Delta A_2B_2C_2$, $\Delta A_3B_3C_3$ तथा $\Delta A_4B_4C_4$ सभी Δ ABC के सर्वांगसम हैं ?

क्योंकि इनमें से प्रत्येक त्रिभुज Δ ABC के साथ पूर्णतः ढँक जाता है । $\Delta A_3B_3C_3$ की जाँच करते हैं, उन्हें मिलाते समय $\angle A$ यह $\angle A_3$ पर, $\angle B$ यह $\angle B_3$ पर तथा $\angle C$ यह $\angle C_3$ पर रखने पर ही $\Delta ABC \cong \Delta A_3B_3C_3$ कहा सकता है ।

तब $AB = A_3B_3$, $BC = B_3C_3$, $CA = C_3A_3$ यह भी प्राप्त होता है ।

इस आधार पर दो त्रिभुजों की सर्वांगसमता जाँचने पर कोण तथा भुजा विशिष्ट क्रम से अर्थात किसी एकैकी संगति लिखना पड़ता है। इसे ध्यान में रखें ।

यदि $\Delta ABC \cong \Delta PQR$ हो तो $\angle A = \angle P$, $\angle B = \angle Q$, $\angle C = \angle R$ . . . . (I)

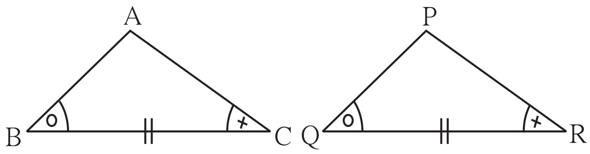
तथा AB = PQ, BC = QR, CA = RP . . . . . . (II) ऐसे छह समीकरण प्राप्त होते हैं ।

दो त्रिभुजों की सर्वांगसमता की जाँच करते समय उसके कोणों तथा भुआओं को विशिष्ट क्रम से अर्थात एकैकी संगति में लिखना होता है । इसे ध्यान में रखें ।

उपर्युक्त सभी छह समीकरण सर्वांगसम त्रिभुजों के लिए सत्य होते हैं ।

अब हम देखेंगे कि तीन विशिष्ट समीकरण समान होने पर छह समीकरण किस प्रकार सत्य होते हैं ।

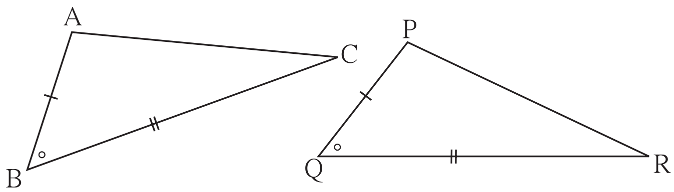
(1) यदि ΔABC तथा ΔPQR में एकैकी संगति के अनुसार एक त्रिभुज के दो कोण तथा उनमें समाविष्ट भुजा दूसरे त्रिभुज के दो कोण तथा उनमें समाविष्ट भुजा के समान हो तो वे त्रिभुज सर्वांगसम त्रिभुज होते हैं ।



इस गुणधर्म को कोण-भुजा-कोण कसौटी कहते हैं । इसे **को-भु-को कसौटी** ऐसे लिखते हैं ।

आकृति 3.15

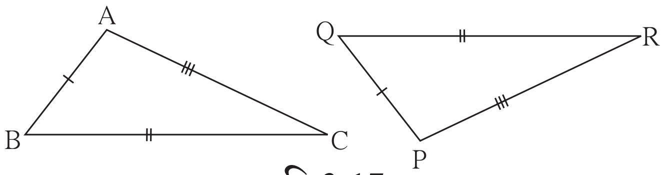
(2) यदि ΔABC तथा ΔPQR में एकैकी संगति के अनुसार एक त्रिभुज की दो भुजाएँ तथा उनमें समाविष्ट कोण दूसरे त्रिभुज की दो भुजाओं तथा उनमें समाविष्ट कोण के समान हो तो वे त्रिभुज सर्वांगसम त्रिभुज होते हैं।



आकृति 3.16

इस गुणधर्म को भुजा-कोण-भुजा कसौटी कहते हैं । तथा **भु-को-भु कसौटी** ऐसे लिखते हैं ।

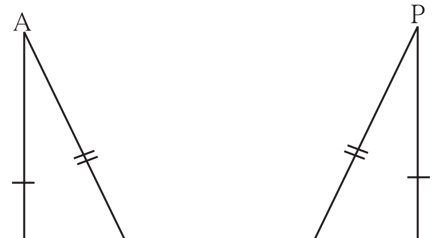
(3) यदि ΔABC तथा ΔPQR में एकैकी संगति के अनुसार एक त्रिभुज की तीनों भुजाएँ दूसरे त्रिभुज की तीनों से सर्वागसम भुजाओं के हों तो वे दोनों त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं ।



आकृति 3.17

इस गुणधर्म को भुजा-भुजा-भुजा कसौटी कहते हैं । तथा **भु-भु-भु कसौटी** ऐसे लिखते हैं ।

(4) समकोण Δ ABC तथा Δ PQR में एकैंकी संगति के अनुसार $\angle B$ तथा $\angle Q$ समकोण हो, दोनों त्रिभुज के कर्ण समान हों ओर $AB = PQ$ हो तो वे दोनों त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं ।



इस कसौटी को **कर्ण-भुजा कसौटी** कहते हैं ।

आकृति 3.18

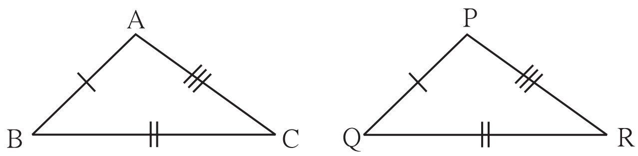
इसे ध्यान में रखें

कुछ घटक दिए जाने पर हम त्रिभुज की रचना कर सकते हैं । (उदा. दो कोण तथा उनमें समाविष्ट भुजा, तीन भुजाएँ, दो भुजा तथा उनमें समाविष्ट कोण) इनमें से किसी एक जानकारी के आधार पर त्रिभुज की रचना कर सकते हैं । दो त्रिभुजों में उपर्युक्त तीन संगत घटक समान हैं तो वे दोनों त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं । तब उनकी तीनों संगत भुजाएँ तथा तीनों संगत कोण सर्वांगसम होते हैं । सर्वांगसम त्रिभुजों की संगत भुजाएँ तथा संगत कोण सर्वांगसम होते हैं, इस गुणधर्म का उपयोग भूमिति के अनेक उदाहरणों में होता हैं ।

प्रश्नसंग्रह 3.2

1. नीचे दिए गए प्रत्येक उदाहरण में त्रिभुजों की जोड़ियों के सर्वांगसम घटक एक जैसे चिह्न से दर्शाए गए हैं । प्रत्येक जोड़ी के त्रिभुज किस कसौटी के आधार पर सर्वांगसम हैं रिक्त स्थानों में वह कसौटी लिखिए ।

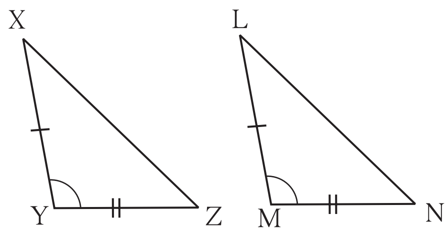
(i)



. . . . कसौटी से

Δ ABC $\cong$ Δ PQR

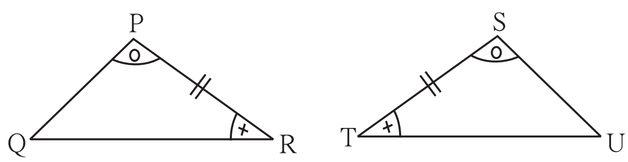
(ii)



. . . . कसौटी से

Δ XYZ $\cong$ Δ LMN

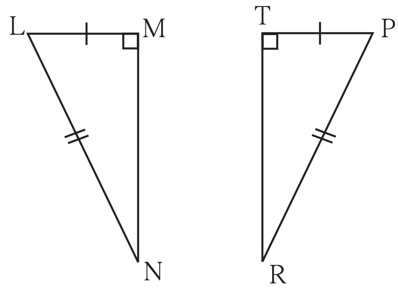
(iii)



. . . . कसौटी से

Δ PRQ $\cong$ Δ STU

(iv)



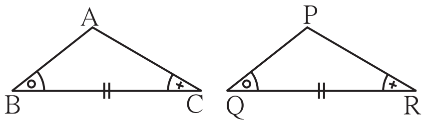
. . . . कसौटी से

Δ LMN $\cong$ Δ PTR

आकृति 3.19

2. नीचे दिए गए त्रिभुजों की जोड़ियों में दर्शाई गई जानकारी का निरीक्षण कीजिए । वे त्रिभुज किस कसौटी के आधार पर सर्वांगसम हैं । शेष सर्वांगसम घटक भी लिखिए ।

(i)



आकृति 3.20

आकृति में दर्शाई गई जानकारी के आधार पर,

Δ ABC तथा Δ PQR में

$\angle ABC \cong \angle PQR$

रेख BC $\cong$ रेख QR

$\angle ACB \cong \angle PRQ$

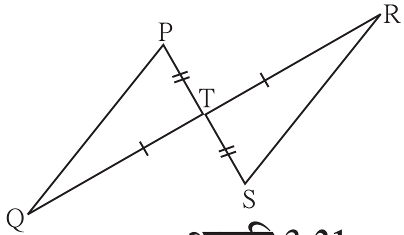
$\therefore$ Δ ABC $\cong$ Δ PQR .... $\boxed{\quad\quad}$ कसौटी

$\therefore \angle BAC \cong$ $\boxed{\quad\quad}$ ....सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत कोण

रेखAB $\cong$ $\boxed{\quad\quad}$ तथा $\boxed{\quad\quad}$ $\cong$ रेख PR

.....सर्वांगसम त्रिभुज की संगत भुजाएँ

(ii)



आकृति 3.21

आकृति में दर्शाई गई जानकारी के आधार पर,

Δ PTQ तथा Δ STR में

रेख PT $\cong$ रेख ST

$\angle PTQ \cong \angle STR$ .... शीर्षाभिमुख कोण

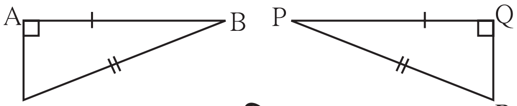
रेख TQ $\cong$ रेख TR

$\therefore$ Δ PTQ $\cong$ Δ STR .... $\boxed{\quad\quad}$ कसौटी

$\therefore \angle TPQ \cong$ $\boxed{\quad\quad}$ व $\boxed{\quad\quad}$ $\cong \angle TRS$ }..... सर्वांगसम त्रिभुज के संगत कोण

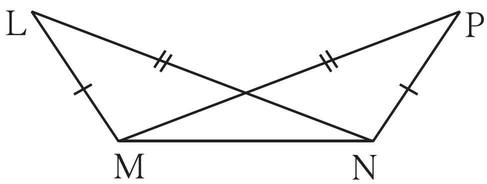
रेख PQ $\cong$ $\boxed{\quad\quad}$ सर्वांगसम त्रिभुज की संगत भुजाएँ

3. नीचे दी गई आकृति में Δ ABC तथा Δ PQR की सर्वांगसमता की कसौटी लिखकर शेष सर्वांगसम घटकों के नाम लिखिए ।



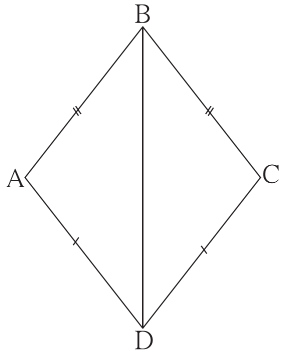
आकृति 3.22

4. नीचे दी गई आकृति में दर्शाए अनुसार Δ LMN तथा Δ PNM में LM = PN, LN = PM हो तो त्रिभुजों की सर्वांगसमता की कसौटी लिखिए । शेष सर्वांगसम घटकों के नाम भी लिखिए ।



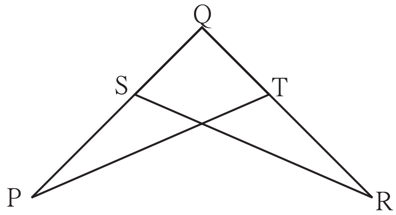
आकृति 3.23

5. आकृति 3.24 में रेख AB $\cong$ रेख BC तथा रेख AD $\cong$ रेख CD तो सिद्ध कीजिए कि Δ ABD $\cong$ Δ CBD



आकृति 3.24

6. आकृति 3.25 में $\angle P \cong \angle R$
रेख $PQ \cong$ रेख QR
तो सिद्‌ध कीजिए कि,
$\Delta\, PQT \cong \Delta\, RQS$



आकृति 3.25

आओ, जानें

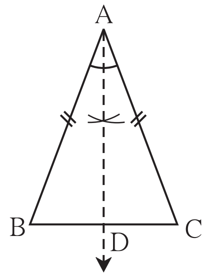
समद्‌विबाहु त्रिभुज का प्रमेय (Isosceles triangle theorem)

प्रमेय : यदि त्रिभुज की दो भुजाएँ सर्वांगसम होती उन भुजाओं के सम्मुख के कोण भी सर्वांगसम होते हैं ।

दत्त : $\Delta\, ABC$ में भुजा $AB \cong$ भुजा AC

साध्य : $\angle ABC \cong \angle ACB$

रचना : $\Delta\, ABC$ मे $\angle BAC$ का समद्‌विभाजक खींचिए जो भुजा BC को बिंदु D पर प्रतिच्छेदित करता हैं ।



आकृति 3.26

उपपत्ति : $\Delta\, ABD$ तथा $\Delta\, ACD$ में
रेख $AB \cong$ रेख AC .... दत्त
$\angle BAD \cong \angle CAD$........रचना
रेख $AD \cong$ रेख AD .... सामान्य भुजा
$\therefore\ \Delta\, ABD \cong \Delta\, ACD$ ...... $\boxed{\qquad\qquad}$
$\therefore \angle ABD \cong$ $\boxed{\qquad}$ ....सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत कोण
$\therefore \angle ABC \cong \angle ACB$ $\qquad \because\ B-D-C$

उपप्रमेय : त्रिभुज की तीनों भुजाएँ सर्वांगसम हो तो उसके तीनों कोण भी सर्वांगसम होते हैं तथा प्रत्येक कोण का माप 60° होता है । (इस प्रमेय की उपपत्ति लिखिए ।)

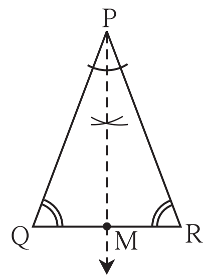
समद्‌विबाहु त्रिभुज के प्रमेय का विलोम (Converse of an isosceles triangle theorem)

प्रमेय : यदि त्रिभुज के दो कोण सर्वांगसम हो तो उन कोणों की सम्मुख भुजाएँ भी सर्वांगसम होती हैं ।

दत्त : $\Delta\, PQR$ में $\angle PQR \cong \angle PRQ$

साध्य : भुजा $PQ \cong$ भुजा PR

रचना : $\angle P$ का समद्‌विभाजक खींचिए जो भुजा QR को बिंदु M पर प्रतिच्छेदित करता है ।



आकृति 3.27

उपपत्ति : $\Delta\, PQM$ तथा $\Delta\, PRM$ में
$\angle PQM \cong$ $\boxed{\qquad}$........ दत्त
$\angle QPM \cong \angle RPM$........$\boxed{\qquad}$
रेख $PM \cong$ $\boxed{\qquad}$ .... सामान्य भुजा
$\therefore\ \Delta\, PQM \cong \Delta\, PRM$ ...... $\boxed{\qquad}$ कसौटी
$\therefore$ रेख $PQ \cong$ रेख PR.......सर्वांगसम त्रिभुज की संगत भुजा

उपप्रमेय : त्रिभुज के तीनों कोण सर्वांगसम हो तो उसकी तीनों भुजाएँ भी सर्वांगसम होती हैं ।
(इस उपप्रमेय की उपपत्ति लिखिए ।)
उपर्युक्त दोनों प्रमेयों के कथन परस्पर विलोम हैं ।
उपर्युक्त दोनों उप प्रमेय के कथन परस्पर विलोम हैं ।

थोड़ा सोचें

(1) समद्‌विबाहु त्रिभुज के प्रमेय की उपपत्ति अलग रचना करके लिख सकते हैं क्या ?
(2) समद्‌विबाहु त्रिभुज के प्रमेय की उपपत्ति बिना रचना करके लिख सकते हैं क्या ?

आओ, जानें

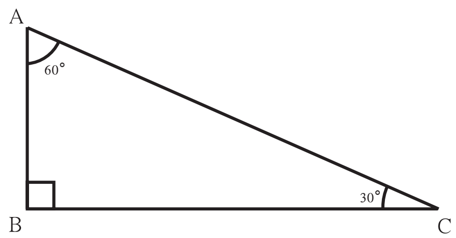
$30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$ मापवाले त्रिभुज का गुणधर्म (Property of $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$ triangle)

कृति I

समूह के प्रत्येक विद्‌यार्थी को एक समकोण त्रिभुज की रचना करनी है, जिसका एक कोण 30° हो ।

प्रत्येक विद्‌यार्थी को 30° के सामने की भुजा एवं कर्ण की लंबाई मापनी है ।

समूह के एक विद्‌यार्थी को सभी विद्‌यार्थियों द्‌वारा ज्ञात की गई जानकारी तालिका में लिखनी है ।



आकृति 3.28

त्रिभुज क्रमांक	1	2	3	4
30° के कोण की सम्मुख भुजा की लंबाई				
कर्ण की लंबाई				

उपर्युक्त तालिका के आधार पर 30°, 60° तथा 90° माप वाले त्रिभुज का कोई गुणधर्म प्राप्त होता है क्या ?

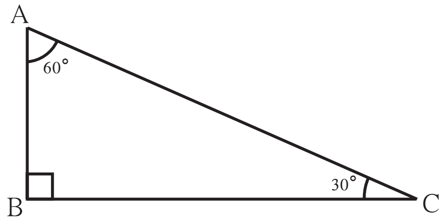
कृति II

कंपास पेटी में एक गोनिया के कोणों के माप 30°,60° तथा 90° होते हैं । उनकी भुजाओं के संदर्भ में यह गुणधर्म प्राप्त होता है क्या, इसकी जाँच कीजिए ।

इस कृति से प्राप्त एक महत्वपूर्ण गुणधर्म अब हम सिद्‌ध करेंगे ।

प्रमेय : यदि किसी समकोण त्रिभुज के न्यूनकोण 30° तथा 60° हो तो 30° की सम्मुख भुजा लंबाई में कर्ण की आधी होती है ।

(नीचे दी गई उपपत्ति में रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए ।)



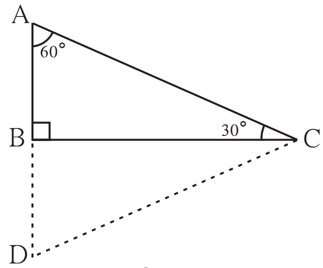
आकृति 3.29

दत्त : समकोण Δ ABC में

$\angle B = 90^\circ$, $\angle C = 30^\circ$, $\angle A = 60^\circ$

साध्य : $AB = \frac{1}{2} AC$

रचना : AB रेखाखंड को D तक बढ़ाएँ । बिंदु D इस प्रकार लें कि AB = BD, रेख DC खींचिए ।



आकृति 3.30

उपपत्ति : Δ ABC तथा Δ DBC में

रेख AB $\cong$ रेख DB .... $\boxed{}$

$\angle ABC \cong \angle DBC$ .... $\boxed{}$

रेख BC $\cong$ रेख BC .... $\boxed{}$

$\therefore \Delta ABC \cong \Delta DBC$ ..... $\boxed{}$

$\therefore \angle BAC \cong \angle BDC$ .... सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत कोण

Δ ABC में $\angle BAC = 60^\circ$ $\therefore \angle BDC = 60^\circ$

अब Δ ADC में,

$\angle DAC = \angle ADC = \angle ACD = 60^\circ$ ... ($\because$ त्रिभुज के कोणों के मापों का योगफल 180°)

$\therefore \Delta$ ADC यह समबाहु त्रिभुज होगा ।

$\therefore$ AC = AD = DC .... 'समद्विबाहु त्रिभुज के प्रमेय के विलोम का उपप्रमेय'

परंतु $AB = \frac{1}{2} AD$........ रचना $\therefore AB = \frac{1}{2} AC$ .... ($\because$ AD = AC)

कृति

उपर्युक्त आकृति 3.29 के आधार पर रिक्त स्थानों की पूर्ति कर प्रमेय की उपपत्ति पूर्ण कीजिए ।

समकोण त्रिभुज में अन्य कोण 30°, 60° हो तो 60° की सम्मुख भुजा $\frac{\sqrt{3}}{2} \times$ कर्ण होती है ।

उपर्युक्त प्रमेय में $AB = \frac{1}{2} AC$ यह हमने देखा है ।

$AB^2 + BC^2 = \boxed{}$ ... (पायथागोरस की प्रमेय से)

$\frac{1}{4} AC^2 + BC^2 = \boxed{}$ ...$[(AB)^2 = (\frac{1}{2} AC)^2]$

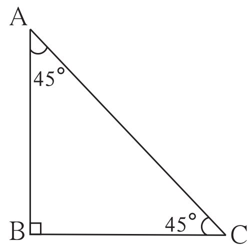
$\therefore BC^2 = AC^2 - \frac{1}{4} AC^2$

$\therefore BC^2 = \boxed{}$

$\therefore BC = \frac{\sqrt{3}}{2} AC$

कृति :

यदि समकोण त्रिभुज के कोण $45°, 45°, 90°$ हो तो समकोण बनाने वाली प्रत्येक भुजा की लंबाई $\frac{1}{\sqrt{2}} \times$ कर्ण होती है ।



आकृति 3.31

Δ ABC में, $\angle B = 90°$ तथा $\angle A = \angle C = 45°$

$\therefore$ BC = AB

पायथागोरस के प्रमेय के अनुसार,

$AB^2 + BC^2 = \boxed{}$

$AB^2 + \boxed{} = AC^2$ ... ($\because$ BC = AB)

$\therefore\ 2AB^2 = \boxed{}$

$\therefore\ AB^2 = \boxed{}$

$\therefore\ AB = \frac{1}{\sqrt{2}}$ AC

इस गुणधर्म को $45° - 45° - 90°$ के त्रिभुज का प्रमेय कहते हैं ।

इसे ध्यान में रखें

(1) त्रिभुज के कोण $30°, 60°$ तथा $90°$ हो तो $30°$ की सम्मुख भुजा कर्ण की आधी $\left(\frac{\text{कर्ण}}{2}\right)$ होती है । तथा $60°$ के कोण की सम्मुख भुजा $\frac{\sqrt{3}}{2}$ कर्ण होती है ।

इस प्रमेय को $30° - 60° - 90°$ का प्रमेय कहते हैं ।

(2) त्रिभुज के कोण $45°, 45°$ तथा $90°$ हो तो समकोण बनाने वाली प्रत्येक भुजा $\frac{\text{कर्ण}}{\sqrt{2}}$ होती है ।

इस प्रमेय को $45° - 45° - 90°$ का प्रमेय कहते हैं ।

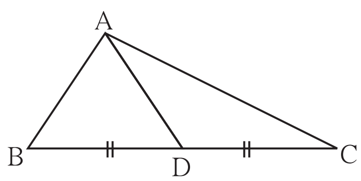
थोड़ा याद करें

त्रिभुज की माध्यिका

त्रिभुज के शीर्षबिंदु तथा उसकी सम्मुख भुजा के मध्यबिंदु को जोड़ने वाले रेखाखंड को उस त्रिभुज की माध्यिका कहते हैं ।

आकृति में बिंदु D यह भुजा BC का मध्यबिंदु है ।

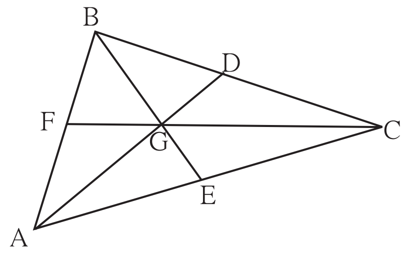
$\therefore$ रेख AD, Δ ABC की माध्यिका है ।



आकृति 3.32

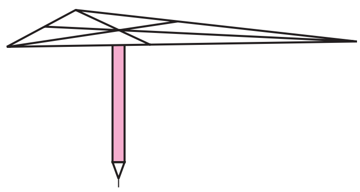
कृति I : किसी एक त्रिभुज ABC की रचना कीजिए । इस त्रिभुज की माध्यिकाएँ AD, BE, तथा CF खींचिए उनके संगामी बिंदु को G नाम दें । विभाजक की सहायता से AG तथा GD की लंबाई की तुलना कीजिए । AG की लंबाई GD की दुगुनी है । इसकी जाँच कीजिए । इसी प्रकार BG की लंबाई GE की दुगुनी है क्या, इसकी भी जाँच कीजिए ।

इस आधार पर प्राप्त गुणधर्म को ध्यान में रखिए कि माध्यिकाओं का संगामी बिंदु माध्यिकाओं को 2 : 1 के अनुपात में विभाजित करता है ।



आकृति 3.33

कृति II: कार्डबोर्ड पर Δ ABC की रचना करके उसे काट लीजिए । उसकी तीनों माध्यिकाएँ खींचिए । उनके संगमत संगामी बिंदु को G नाम दें । समतल आधार वाली एक पेंसिल लीजिए । समतल भाग को ऊपर करके उसे पकड़ें । त्रिभुज का बिंदु G पेंसिल के समतल भाग पर क्षैतिज दिशा में रखकर उसका संतुलन देखिए और उसकी जाँच कीजिए ।



आकृति 3.34

आओ, जानें

समकोण त्रिभुज मे कर्ण पर खींची गई माध्यिका का गुणधर्म

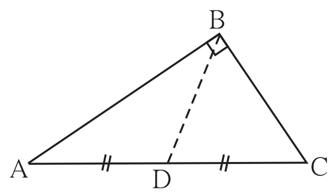
कृति : माना आकृति 3.35 में Δ ABC समकोण त्रिभुज है । रेख BD माध्यिका है ।

निम्नलिखित रेखाखंडों की लंबाई नापिए ।

l(AD) =......... l(DC) =............ l(BD) = ...

इस तरह (BD) = $\frac{1}{2}$ (AC) यह गुणधर्म मिलता है ।

इसकी जाँच कीजिए । इस गुणधर्म को सिद्ध भी कीजिए ।



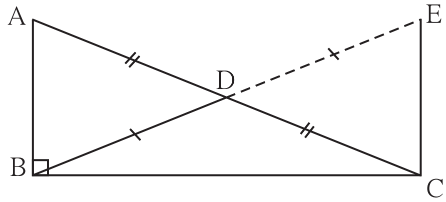
आकृति 3.35

प्रमेय : समकोण त्रिभुज में कर्ण पर खींची गई माध्यिका कर्ण की आधी होती है ।

दत्त : समकोण Δ ABC की माध्यिका रेख BD है ।

साध्य : $BD = \frac{1}{2} AC$

रचना : किरण BD पर बिंदु E इस प्रकार लें कि B – D – E तथा $l(BD) = l(DE)$, रेख EC का माप ज्ञात कीजिए ।



आकृति 3.36

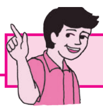
उपपत्ति : (उपपत्ति में मुख्य सोपान दर्शाए गए हैं ।
बीच के सोपान, कथन तथा कारण इस रूप में लिखकर उपपत्ति पूर्ण कीजिए ।)

Δ ADB $\cong$ Δ CDE ...... भुकोभु कसौटी

रेखा AB || रेखा EC ....एकांतर कोण कसौटी

Δ ABC $\cong$ Δ ECB ...... भुकोभु कसौटी

$BD = \frac{1}{2}(AC)$

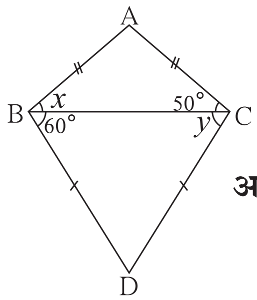


इसे ध्यान में रखें

किसी भी समकोण त्रिभुज में कर्ण पर खींची गई माध्यिका लंबाई में कर्ण की आधी होती है ।

प्रश्नसंग्रह 3.3

1. आकृति 3.37 में दी गई जानकारी देखें । x तथा y के मान ज्ञात कीजिए । इसी प्रकार $\angle ABD$ तथा $\angle ACD$ के भी माप ज्ञात कीजिए ।

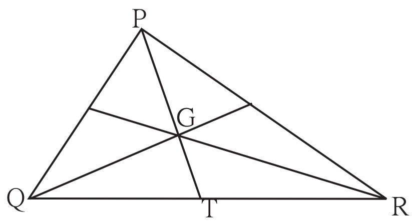


आकृति 3.37

2. समकोण त्रिभुज में कर्ण की लंबाई 15 हो तो उस पर खींची गई माध्यिका की लंबाई ज्ञात कीजिए ।

3. Δ PQR में $\angle Q = 90^\circ$, PQ = 12, QR = 5 तथा QS भुजा PR पर माध्यिका हो तो QS ज्ञात कीजिए।

4. आकृति 3.38 में बिंदु G यह Δ PQR की माध्यिकाओं का संगामी बिंदु है ।
यदि GT = 2.5 सेमी, तो PG तथा PT की लंबाई ज्ञात कीजिए ।



आकृति 3.38

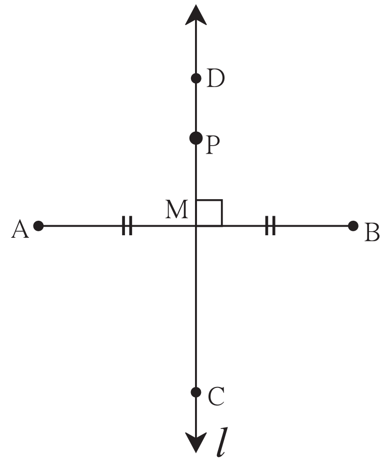
थोड़ा याद करें

कृति : सुविधाजनक लंबाईवाली रेख AB खींचिए । उसके मध्यबिंदु को M नाम दें । बिंदु M से जाने वाली रेखा l खींचिए जो रेख AB पर लंब हो । रेखा l रेख AB की लंबसमद्विभाजक रेखा है, यह ध्यान में आया क्या ?

रेखा l पर कहीं भी एक बिंदु P लीजिए । PA तथा PB इन दूरियों की तुलना विभाजक से करें । क्या पता चला PA = PB ? इससे पता चलता है कि रेखाखंड के लंबसमद्विभाजक का प्रत्येक बिंदु रेखाखंड के अंतःबिंदुओं से समदूरस्थ होता है ।

अब कंपास की सहायता से बिंदु A तथा B से समान दूरी पर स्थित बिंदु C तथा D ऐसे कुछ बिंदु लीजिए। सभी बिंदु रेखा l पर ही हैं न ? इससे ध्यान में आता है कि रेखाखंड के अंतःबिंदु से समान दूरी पर स्थित बिंदु, उस रेखाखंड के लंबसमद्विभाजक पर होता है ।

उपर्युक्त दोनों गुणधर्म लंबसमद्विभाजक के प्रमेय के दो भाग है । अब इसे सिद्ध करेंगे ।



आकृति 3.39

आओ, जानें

लंबसमद्विभाजक का प्रमेय (Perpendicular bisector theorem)

भाग I : रेखाखंड के लंबसमद्विभाजक पर स्थित प्रत्येक बिंदु उस रेखाखंड के अंतःबिंदुओं से समान दूरी पर होता है ।

दत्त : रेखा l रेख AB की लंबसमद्विभाजक रेखा है,

जो रेख AB को बिंदु M पर प्रतिच्छेदित करती है ।

बिंदु P रेखा l पर स्थित कोई एक बिंदु है ।

साध्य : l (PA) = l (PB)

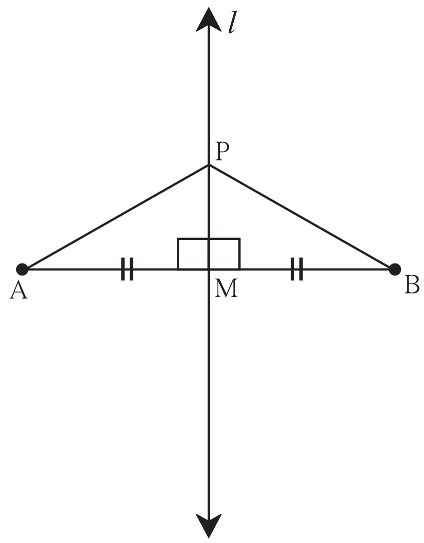
रचना : रेख AP तथा रेख BP खींचिए ।

उपपत्ति : Δ PMA तथा Δ PMB में

रेख PM $\cong$ रेख PM .... (सामान्य भुजा)

$\angle$PMA $\cong$ $\angle$PMB ....(प्रत्येक समकोण)

रेख AM $\cong$ रेख BM .... (M मध्यबिंदु है)



आकृति 3.40

$\therefore$ Δ PMA $\cong$ Δ PMB ...... (भुकोभु कसौटी)

$\therefore$ रेख PA $\cong$ रेख PB.......(सर्वांगसम त्रिभुजों की संगत भुजाएँ)

$\therefore$ l (PA) = l (PB)

इससे सिद्‌ध होता है कि किसी रेखाखंड के लंबसमद्‌विभाजक पर स्थित प्रत्येक बिंदु उसके अंत:बिंदुओं से समदूरस्थ होते हैं ।

भाग II : रेखाखंड के अंत:बिंदुओं से समदूरस्थ कोई भी बिंदु उस रेखाखंड के लंबसमद्‌विभजक पर होता है ।

दत्त : रेखाखंड AB के अंत:बिंदुओं से समान दूरी पर स्थित कोई बिंदु P है ।

अर्थात PA = PB

साध्य : बिंदु P रेख AB के लंबसमद्‌विभाजक पर है ।

रचना : रेख AB का मध्यबिंदु M लेकर रेखा PM खींची है ।

उपपत्ति : Δ PAM तथा Δ PBM में

रेख PA $\cong$ रेख PB .... $\boxed{}$

रेख AM $\cong$ रेख BM .... $\boxed{}$

रेख PM $\cong$ $\boxed{}$ .... सामान्य भुजा

$\therefore$ Δ PAM $\cong$ Δ PBM ...... $\boxed{}$ कसौटी

$\therefore$ $\angle$PMA $\cong$ $\angle$PMB.......सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत कोण

परंतु $\angle$PMA + $\boxed{}$ = 180°

$\angle$PMA + $\angle$PMA = 180° .... ($\because$ $\angle$PMB = $\angle$PMA)

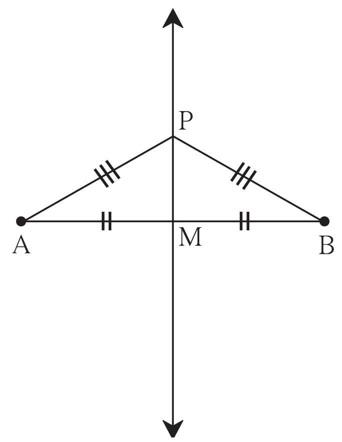
2 $\angle$PMA = $\boxed{}$

$\therefore$ $\angle$PMA = 90°

$\therefore$ रेख PM $\perp$ रेख AB ......(1)

इसी प्रकार, रेख AB का M यह मध्यबिंदु है । ......(2) (रचना)

$\therefore$ रेखा PM यह रेख AB की लंबसमद्‌विभाजक रेखा है अर्थात बिंदु P, रेख AB के लंबसमद्‌विभाजक पर है ।



आकृति 3.41

कोण समद्‌विभाजक का प्रमेय (Angle bisector theorem)

भाग I : कोण के समद्‌विभाजक पर स्थित प्रत्येक बिंदु उस कोण की भुजाओं से समदूरस्थ होते हैं ।

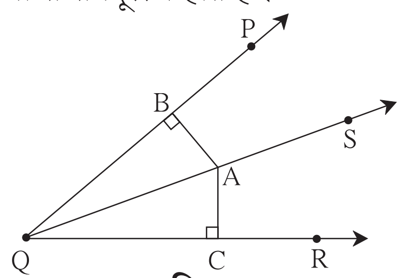
दत्त : किरण QS यह $\angle$PQR का समद्‌विभाजक है ।

कोण के समद्‌विभाजक पर कोई बिंदु A स्थित है ।

रेख AB $\perp$ किरण QP रेख AC $\perp$ किरणQR

साध्य : रेख AB $\cong$ रेख AC

उपपत्ति : त्रिभुजों की सर्वांगसमता की उचित कसौटी का उपयोग कर उपपत्ति लिखिए ।



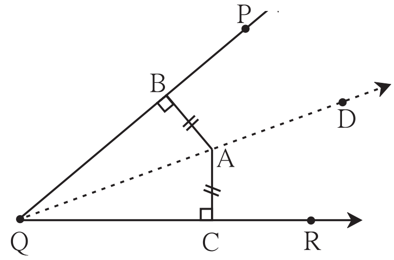
आकृति 3.42

भाग II : कोण की भुजाओं से समान दूरी पर स्थित प्रत्येक बिंदु उस कोण के समद्विभाजक पर होता है ।

दत्त : $\angle PQR$ के अंतःभाग में कोई बिंदु A इस प्रकार है कि
रेख $AC \perp$ रेख QR
रेख $AB \perp$ किरण QP
$AB = AC$

साध्य : किरण QA यह $\angle PQR$ का समद्विभाजक है ।
अर्थात $\angle BQA = \angle CQA$

उपपत्ति : त्रिभुजों की सर्वांगसमता की उचित कसौटी का उपयोग कर उपपत्ति लिखिए ।



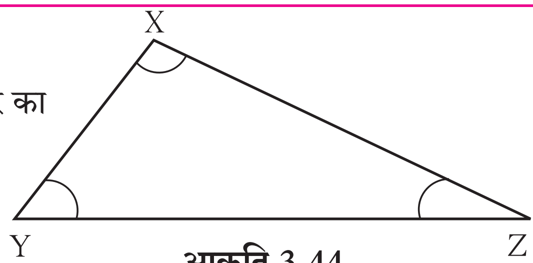
आकृति 3.43

थोड़ा याद करें

कृति

आकृति में दर्शाए अनुसार भुजा XZ > भुजा XY इस प्रकार का Δ XYZ बनाएँ ।

$\angle Z$ तथा $\angle Y$ मापिए । कौन-सा कोण बड़ा है ?



आकृति 3.44

आओ, जानें

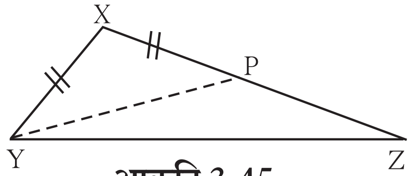
त्रिभुज की भुजाओं तथा कोणों में असमानता का गुणधर्म

प्रमेय : यदि त्रिभुज की दो भुजाओं में एक भुजा दूसरी से बड़ी हो तो बड़ी भुजा का सम्मुख कोण छोटी भुजा के सम्मुख कोण से बड़ा होता है ।

दत्त : Δ XYZ में भुजा XZ > भुजा XY

साध्य : $\angle XYZ > \angle XZY$

रचना : भुजा XZ पर बिंदु P इस प्रकार लें कि
$l(XY) = l(XP)$, रेख YP खींचें ।



आकृति 3.45

उपपत्ति : Δ XYP में

$XY = XP$ ....रचना

$\therefore$ $\angle XYP = \angle XPY$.....समान भुजाओं के सम्मुख कोण समान .....(I)

$\angle XPY$ यह Δ YPZ का बहिष्कोण है ।

$\therefore$ $\angle XPY > \angle PZY$ ....बहिष्कोण का प्रमेय

$\angle XYP > \angle PZY$ ....कथन (I) से

$\angle XYP + \angle PYZ > \angle PZY$ (यदि $a > b$ तथा $c > 0$ तो $a + c > b$)

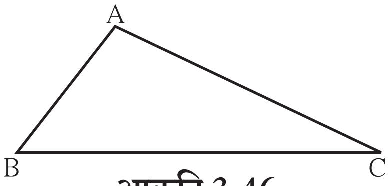
$\angle XYZ > \angle PZY$ अर्थात $\angle XYZ > \angle XZY$

प्रमेय : त्रिभुज के दो कोणों के माप असमान हो तो बड़े कोण की सम्मुख भुजा छोटे कोण की सम्मुख भुजा से बड़ी होती है ।

इस प्रमेय को अप्रत्यक्ष पद्धति से सिद्ध करते हैं । नीचे दी गई उपपत्ति में रिक्त स्थानों की पूर्ति कर उपपत्ति पूर्ण कीजिए ।

दत्त : ΔABC में $\angle B > \angle C$

साध्य : $AC > AB$



आकृति 3.46

उपपत्ति : Δ ABC की भुजाओं AB तथा भुजा AC की लंबाई में निम्नलिखित में एक और केवल एक संभावना होती है ।

(i) $AC < AB$ (ii) $\boxed{\phantom{AB < AC}}$ (iii) $\boxed{\phantom{AB < AC}}$

(i) $AC < AB$ होने पर

त्रिभुज की असमान भुजाओं में बड़ी भुजा का सम्मुख कोण छोटी भुजा के सम्मुख कोण से $\boxed{}$ होता है ।

$\therefore \angle C > \boxed{}$

परंतु $\angle C < \angle B$ .... (दत्त)

यह असंगत है ।

$\therefore \boxed{} < \boxed{}$ यह गलत है ।

(ii) यदि $AC = AB$

तो $\angle B = \angle C$

परंतु $\boxed{} > \boxed{}$ ...... दत्त

पुनः यहाँ विसंगति निर्माण हो रही है ।

$\therefore \boxed{} = \boxed{}$ यह असंगत है ।

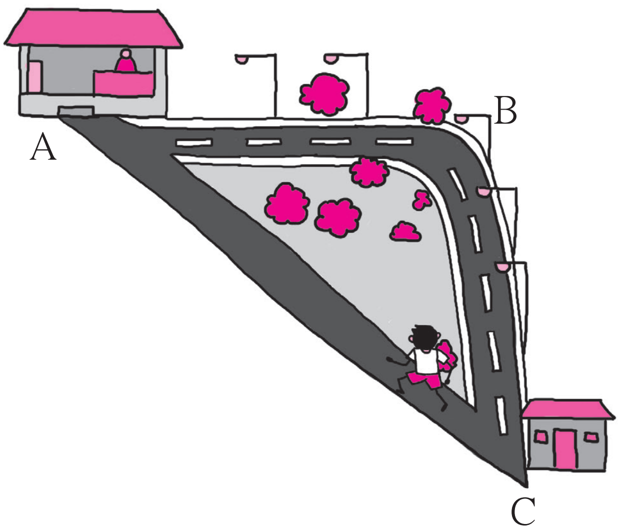
$\therefore AC > AB$ यही एक संभावना बचती है ।

$\therefore AC > AB$

थोड़ा याद करें

पिछली कक्षा में हमने एक कृति की थी । जिसके आधार पर हमने त्रिभुज का एक गुणधर्म देखा था । उसे याद कीजिए ।

संलग्न चित्र में दर्शाए अनुसार स्थान A पर एक दुकान है । समीर C स्थान पर खड़ा है । दुकान में पहुँचने के लिए उसने $C \rightarrow B \rightarrow A$ इस पक्की सड़क की बजाय $C \rightarrow A$ मार्ग चुना क्योंकि उसे लगा कि यह मार्ग कम लंबाई का है । उसे त्रिभुज के किस गुणधर्म का ध्यान आया होगा ?



त्रिभुज के किन्हीं दो भुजाओं का योग तीसरी भुजा से अधिक होता है । अब इस गुणधर्म को सिद्ध करेंगे ।

प्रमेय : त्रिभुज की किन्हीं दो भुजाओं की लंबाइयों का योगफल तीसरी भुजा की लंबाई से अधिक होता है ।

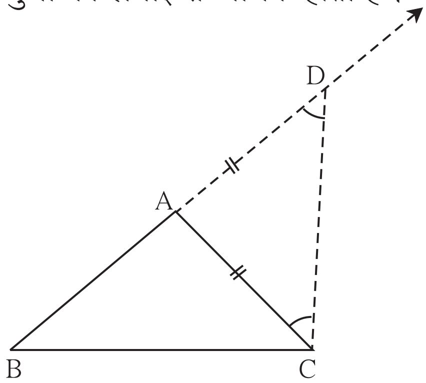
दत्त : Δ ABC किसी एक प्रकार का एक त्रिभुज है ।

साध्य : AB + AC > BC

AB + BC > AC

AC + BC > AB

रचना : किरण BA पर बिंदु D इस प्रकार लें कि AD = AC



आकृति 3.47

उपपत्ति : Δ ACD में, AC = AD ..... रचना

$\therefore$ $\angle$ACD = $\angle$ADC ...... (सर्वांगसम भुजाओं के सम्मुख कोण)

$\therefore$ $\angle$ACD + $\angle$ACB > $\angle$ADC

$\therefore$ $\angle$BCD > $\angle$ADC

$\therefore$ भुजा BD > भुजा BC ....(त्रिभुज में बड़े कोण की सम्मुख भुजा बड़ी होती है)

$\therefore$ BA + AD > BC ....($\because$ BD = BA + AD)

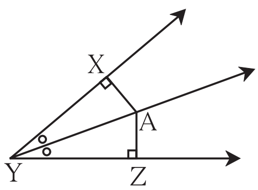
BA + AC > BC .... ($\because$ AD = AC)

इसी प्रकार हम सिद्ध कर सकते हैं कि, AB + BC > AC

तथा BC + AC > AB

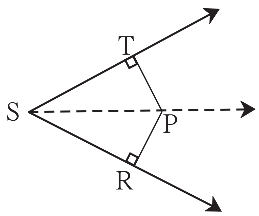
प्रश्नसंग्रह 3.4

1. आकृति 3.48 में, बिंदु A, $\angle$XYZ के समद्विभाजक पर है ।
यदि AX = 2 सेमी तो AZ की लंबाई ज्ञात कीजिए ।



आकृति 3.48

2. आकृति 3.49 में $\angle$RST = 56°, रेख PT $\perp$ किरण ST, रेख PR $\perp$ किरण SR तथा रेख PR $\cong$ रेख PT हो तो $\angle$RSP का माप ज्ञात कीजिए । कारणसहित लिखिए ।



आकृति 3.49

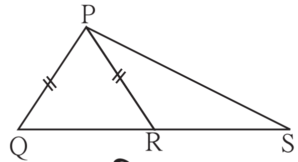
3. Δ PQR में PQ = 10 सेमी, QR = 12 सेमी, PR = 8 सेमी तो इस त्रिभुज के सबसे बड़े कोण तथा सबसे छोटे कोण को पहचानें और लिखें ।

4. Δ FAN में $\angle$F = 80°, $\angle$A = 40° तो त्रिभुज की सबसे बड़ी तथा सबसे छोटी भुजा का नाम कारण सहित लिखिए ।

5. सिद्ध कीजिए कि समबाहु त्रिभुज के सभी कोण न्यून कोण होते हैं ।

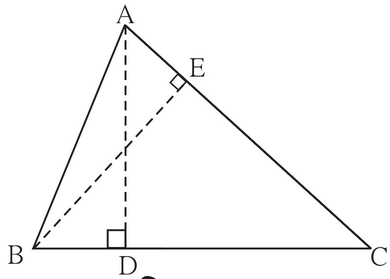
6. Δ ABC में $\angle$BAC की समद्विभाजक भुजा BC पर लंब हो तो सिद्ध कीजिए कि Δ ABC समद्विबाहु त्रिभुज है ।

7. आकृति 3.50 में यदि रेख PR $\cong$ रेख PQ तो सिद्ध कीजिए कि रेख PS > रेख PQ



आकृति 3.50

8. आकृति 3.51 में रेख AD तथा रेख BE, Δ ABC के शीर्षलंब है । AE = BD है तो सिद्ध कीजिए कि रेख AD $\cong$ रेख BE

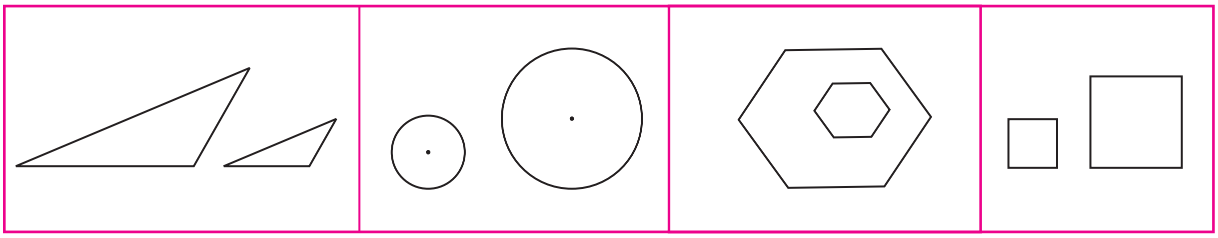


आकृति 3.51

आओ, जानें

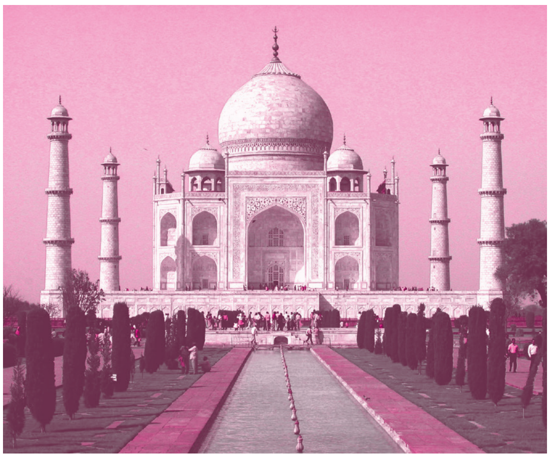
समरूप त्रिभुज (Similar triangles)

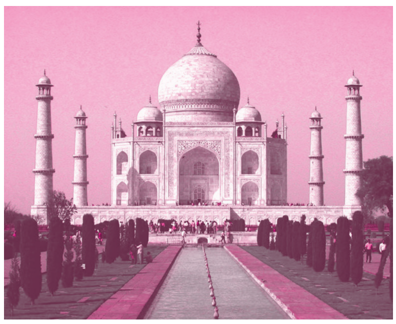
नीचे दी गई आकृतियों का निरीक्षण कीजिए ।



प्रत्येक भाग में दिखाई गई दो-दो आकृतियों का आकार समान हैं । परंतु वे आकृतियाँ छोटी-बड़ी है अर्थात वे सर्वांगसम नहीं हैं ।

ऐसी समान दिखने वाली आकृतियों के रूप समान हैं अर्थात ऐसी समानरूपवाली आकृतियों को समरूप आकृतियाँ कहते हैं ।





कोई फोटो, उस फोटो के आधार पर बनाया गया बड़ा फोटो इनमें समरूपता दिखती है । उसी प्रकार रास्ते तथा उन रास्तों के मानचित्र में समरूपता दिखाई देती है ।

दो आकृतियों में भुजाओं का समान अनुपात ही समरूप आकृतियों का महत्वपूर्ण गुणधर्म है । यदि समान आकृतियों में कोण हों तो वे सर्वांगसम तथा उसी माप के होने चाहिए । दो रास्तों के बीच जो कोण हो वही मानचित्र में भी होना चाहिए अन्यथा वह मानचित्र गलत निर्देशन करेगा ।

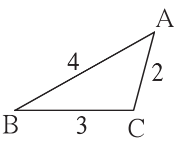
ICT Tools or Links

मोबाइल अथवा संगणक पर कोई फोटो खींचिए । याद रखिए कि उसे बड़ा-छोटा करते समय हम क्या करते हैं । उसी प्रकार किसी फोटो का कोई भाग देखने के लिए आप कौन-सी कृति करते हैं ? उसे याद करें ।

अब हम समरूप त्रिभुजों का गुणधर्म एक कृति द्वारा समझेंगे ।

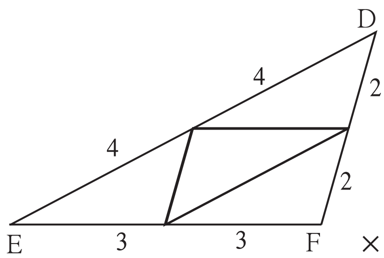
कृति : 4 सेमी, 3 सेमी तथा 2 सेमी भुजावाला एक त्रिभुज कागज पर खींचिए । उस त्रिभुज को एक मोटे कागज पर रखिए । उसके सभी ओर पेंसिल घुमाकर 14 त्रिभुज बनाकर तथा काट लीजिए ।

यह ध्यान रहें कागज के भुजाकार टुकड़े सर्वांगसम हैं । नीचे दर्शाई गई आकृति के अनुसार उन त्रिभुजाकार टुकड़ों को रखकर तीन त्रिभुज बनाएँ ।



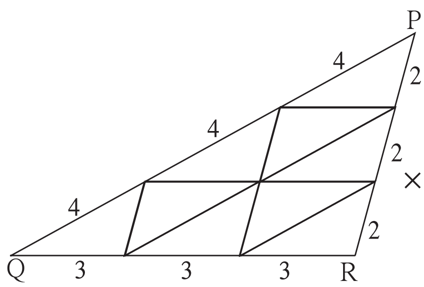
आकृति 3.52

त्रिभुजों की संख्या 1



आकृति 3.53

त्रिभुजों की संख्या 4



आकृति 3.54

त्रिभुजों की संख्या : 9

Δ ABC तथा Δ DEF में ABC $\leftrightarrow$ DEF इस संगति के अनुसार समरूप हैं ।

$\angle A \cong \angle D$, $\angle B \cong \angle E$, $\angle C \cong \angle F$

तथा $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2}$; $\dfrac{BC}{EF} = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$; $\dfrac{AC}{DF} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$, अर्थात संगत भुजाएँ समानुपात में हैं ।

इसी प्रकार Δ DEF और Δ PQR पर विचार कीजिए । DEF $\leftrightarrow$ PQR इस संगति के अनुसार क्या उसके कोण सर्वांगसम तथा भुजाएँ समानुपात में हैं ?

आओ, जानें

त्रिभुजों की समरूपता

Δ ABC तथा Δ PQR में यदि (i) $\angle A = \angle P$, $\angle B = \angle Q$, $\angle C = \angle R$ तथा

(ii) $\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{AC}{PR}$; तो Δ ABC और Δ PQR समरूप हैं, ऐसा कहा जाता है ।

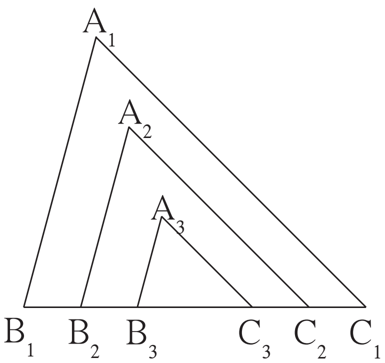
'Δ ABC तथा Δ PQR समरूप हैं' इसे '$\Delta ABC \sim \Delta PQR$' इस प्रकार लिखते हैं ।

नीचे दी गई कृति से समरूप त्रिभुजों के संगत कोण एवं संगत भुजाओं का संबंध समझ सकते हैं ।

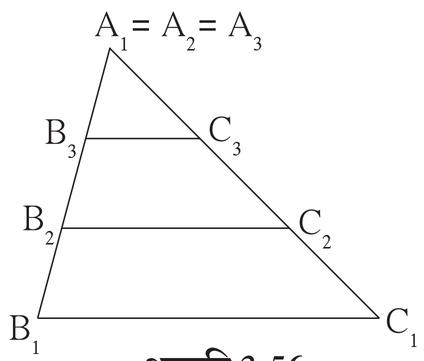
कृति : मोटे कागज पर किसी भी माप का $\Delta A_1B_1C_1$ बनाइए और काट लें । $\angle A_1, \angle B_1, \angle C_1$ मापिए । इसी प्रकार मोटे कागज पर $\Delta A_2B_2C_2$ तथा $\Delta A_3B_3C_3$ इस प्रकार बनाएँ कि

$\angle A_1 = \angle A_2 = \angle A_3$, $\angle B_1 = \angle B_2 = \angle B_3$, $\angle C_1 = \angle C_2 = \angle C_3$

एवं $B_1C_1 > B_2C_2 > B_3C_3$ अब वें दो त्रिभुजों को काटकर उसे एक तरफ रखें । अब इन त्रिभुजों की रचना, निम्नखित दोनों प्रकार से कीजिए । तीनों त्रिभुजों की भुजाओं की लंबाई नापिए ।



आकृति 3.55



आकृति 3.56

$\frac{A_1B_1}{A_2B_2}, \frac{B_1C_1}{B_2C_2}, \frac{A_1C_1}{A_2C_2}$ अनुपात की जाँच कीजिए । तीनों समान हैं जाँच करें ।

इसी प्रकार $\frac{A_1C_1}{A_3C_3}, \frac{B_1C_1}{B_3C_3}, \frac{A_1B_1}{A_3B_3}$ यह अनुपात भी समान हैं क्या, इसे देखेंगे ।

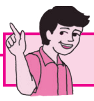
इस कृति को देखे कि जिस त्रिभुजों के संगत कोणों के माप समान है उनकी संगत भुजाएँ भी समान अनुपात में होती हैं अर्थात संगत भुजाओं का अनुपात एक ही होता है ।

हमने देखा कि Δ ABC तथा Δ PQR में यदि (i) $\angle A = \angle P$, $\angle B = \angle Q$, $\angle C = \angle R$, तो

(ii) $\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{AC}{PR}$ अर्थात यदि संगत कोण समान हो तो संगत भुजा एकही अनुपात में होती हैं ।

इस नियम को थोड़ा परिश्रम लेकर सिद्ध कर सकते हैं ।

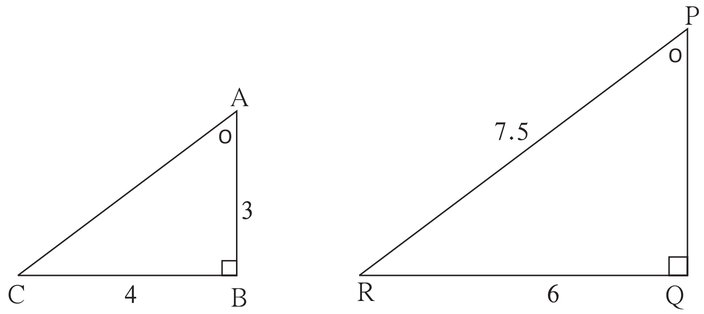
हम इसे अनेक उदाहरण में अयोग करेंगे ।



इसे ध्यान में रखें

- दो त्रिभुजों के संगत कोण समान हों तो वे त्रिभुज समरूप त्रिभुज होते हैं ।
- दो त्रिभुज समरूप हो तो उनकी संगत भुजाएँ समानुपाती में तथा संगत कोण सर्वांगसम होते हैं ।

उदा. आकृति 3.57 में Δ ABC तथा Δ PQR दर्शाए गए हैं । उन त्रिभुजों में दर्शाई गई जानकारी का निरीक्षण कीजिए । जिन भुजाओं की लंबाई नहीं दी गई है, उन्हें ज्ञात कीजिए ।



आकृति 3.57

हल : प्रत्येक त्रिभुज के तीनों कोणों के मापों का योगफल 180° होता है ।

दी गई जानकारी के अनुसार

$\angle A = \angle P$ तथा $\angle B = \angle Q$ $\quad \therefore \angle C = \angle R$

$\therefore$ Δ ABC तथा Δ PQR समरूप त्रिभुज है ।

$\therefore$ उनकी संगत भुजाएँ समानुपात में होगी ।

$$\therefore \frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{AC}{PR}$$

$$\therefore \frac{3}{PQ} = \frac{4}{6} = \frac{AC}{7.5}$$

$$\therefore 4 \times PQ = 18$$

$$\therefore PQ = \frac{18}{4} = 4.5$$

इसी प्रकार $6 \times AC = 7.5 \times 4$

$$\therefore AC = \frac{7.5 \times 4}{6} = \frac{30}{6} = 5$$

प्रश्नसंग्रह 3.5

1. यदि $\Delta XYZ \sim \Delta LMN$ तो उनके सर्वांगसम संगत कोणों के नाम लिखिए । संगत भुजाओं के अनुपात भी लिखिए ।
2. Δ XYZ मे XY = 4 सेमी, YZ = 6 सेमी, XZ = 5 सेमी, यदि $\Delta XYZ \sim \Delta PQR$ तथा PQ = 8 सेमी हो तो Δ PQR की शेष भुजाओं की लंबाई ज्ञात कीजिए ।
3. समरूप त्रिभुजों की जोड़ी की कच्ची आकृति बनाइए । उन्हें नाम दें । उनके सर्वांगसम कोण समान चिह्नों से दर्शाएँ । त्रिभुजों की संगत भुजाओं की लंबाइयाँ समानुपात में हों ऐसी संख्याएँ दर्शाइए ।

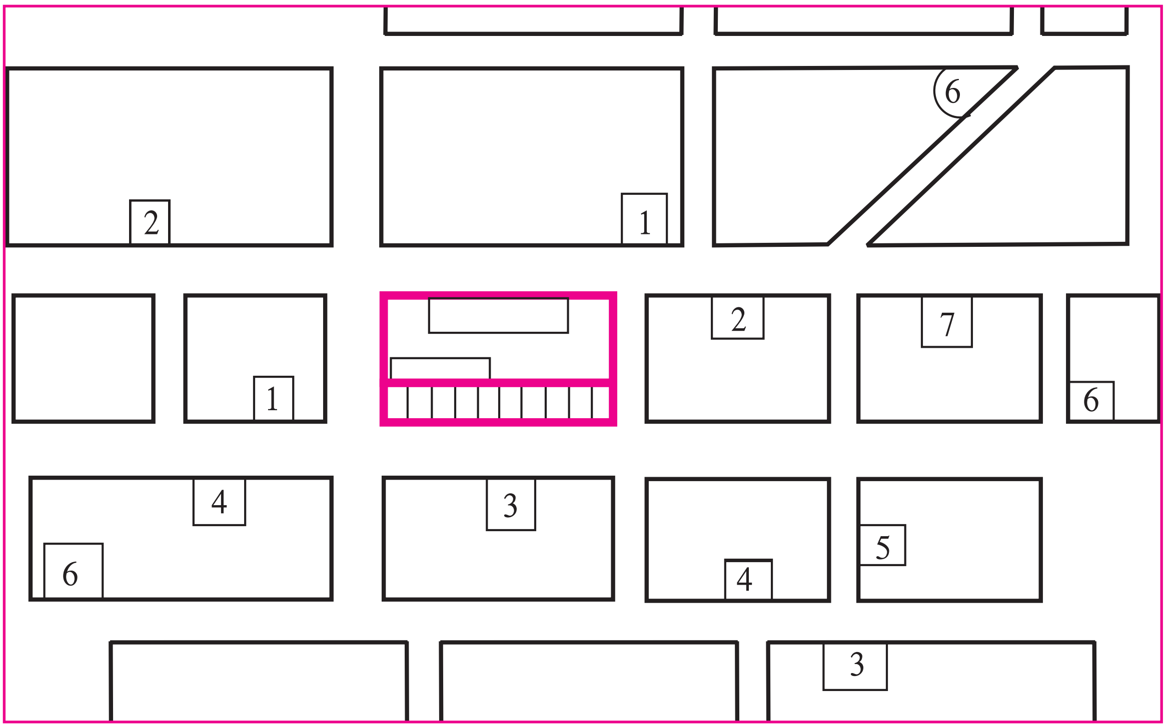
थोड़ा याद करें

मानचित्र बनाते समय मार्ग की दूरी दिखाने के लिए उचित पैमाना लेते हैं । जैसे 1 सेमी = 100 मी या 1 सेमी = 50 मी । क्या त्रिभुजों के गुणधर्म पर विचार किया? ध्यान रहें त्रिभुज के बड़े कोण की सम्मुख भुजा बड़ी होती है ।

उपक्रम :

अपने विद्‍यालय अथवा घर के चारों ओर के 500 मीटर परिसर के मार्ग का मानचित्र बनाएँ ।

मार्ग पर स्थित दो स्थानों का अंतर कैसे मापेंगे ? सामान्यतः 2 मीटर दूरी पर आपको कितने कदम (steps) चलने पड़ते हैं यह देखें । दो मीटर दूरी पर तीन कदम चलना पड़ा हो तो 90 कदम चलने पर 60 मीटर दूरी तय होगी ऐसा मानेंगे । संक्षेप में परिसर के सभी मार्ग पर चलकर अलग-अलग दूरी निश्‍चित करनी होगी । तत्पश्‍चात् जहाँ परस्पर प्रतिच्छेदित करती हैं । उस स्थान पर बनने वाले कोण माप का अनुमान कीजिए । मार्ग की मापी गई लंबाई के लिए उचित पैमाना लेकर मानचित्र बनाएँ । परिसर की दुकानें, टपरी, इमारतें, बस स्टॉप, रिक्सा स्टैंड आदि दर्शाने की कोशिश कीजिए । नीचे मानचित्र का एक नमूना सारिणी के साथ दिया गया है ।



सूची : 1. पुस्तकों की दुकान 2. बस स्टैंड 3. स्टेशनरी की दुकान 4. बैंक 5. दवाइयों की दुकान 6. उपहार गृह 7. साइकिल की दुकान

प्रकीर्ण प्रश्नसंग्रह 3

1. निम्नलिखित बहुवैकल्पिक प्रश्नों के उत्तर दिए गए उत्तर में से सही उत्तर का विकल्प चुनिए ।

   (i) किसी त्रिभुज की दो भुजाएँ 5 सेमी तथा 1.5 सेमी हो तो त्रिभुज की तीसरी भुजा की लंबाई . . . . नहीं होगी ।

   (A) 3.7 सेमी (B) 4.1 सेमी (C) 3.8 सेमी (D) 3.4 सेमी

   (ii) Δ PQR में यदि $\angle R > \angle Q$ तो . . . . होगा ।

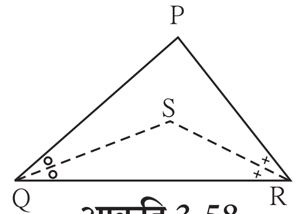
   (A) $QR > PR$ (B) $PQ > PR$ (C) $PQ < PR$ (D) $QR < PR$

   (iii) Δ TPQ में $\angle T = 65°$, $\angle P = 95°$ तो निम्नलिखित में से कौन-सा कथन सत्य है ?

   (A) $PQ < TP$ (B) $PQ < TQ$ (C) $TQ < TP < PQ$ (D) $PQ < TP < TQ$

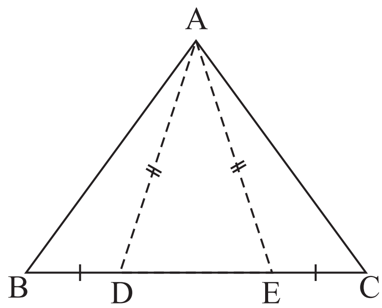
2. समद्विबाहु Δ ABC में AB = AC है । BD तथा CE दो माध्यिकाएँ हैं तो सिद्ध कीजिए कि BD = CE

3. Δ PQR में यदि $PQ > PR$ तथा $\angle Q$ तथा $\angle R$ के समद्विभाजक बिंदु S पर प्रतिच्छेदित करते हैं तो सिद्ध कीजिए कि $SQ > SR$



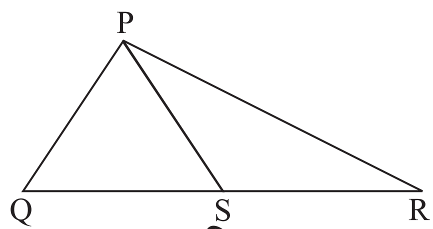
आकृति 3.58

4. आकृति 3.59 में Δ ABC की भुजा BC पर बिंदु D तथा E इस प्रकार हैं कि BD = CE तथा AD = AE तो सिद्ध कीजिए कि $\Delta ABD \cong \Delta ACE$



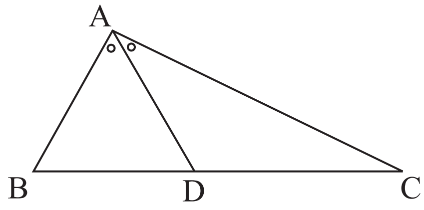
आकृति 3.59

5. आकृति 3.60 में Δ PQR में कोई बिंदु S यह भुजा QR पर स्थित है तो सिद्ध कीजिए कि $PQ + QR + RP > 2PS$



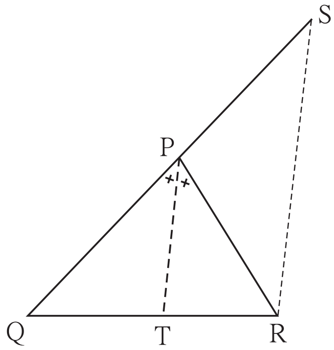
आकृति 3.60

6. आकृति 3.61 में Δ ABC के कोण $\angle$BAC की समद्विभाजक BC को बिंदु D पर प्रतिच्छेदित करती है तो सिद्ध कीजिए कि AB > BD



आकृति 3.61

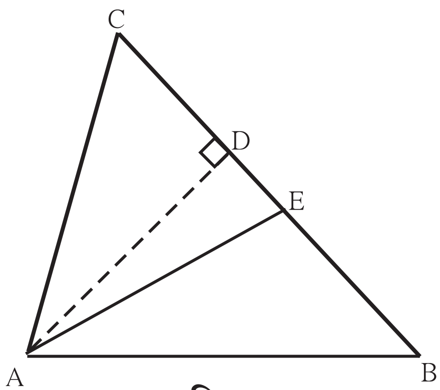
7. आकृति 3.62 में रेख PT यह $\angle$QPR की समद्विभाजक है । बिंदु R से रेख PT के समांतर खींची गई रेखा, किरण QP को बिंदु S पर प्रतिच्छेदित करती है तो सिद्ध कीजिए कि PS = PR



आकृति 3.62

8. आकृति 3.63 में रेख AD $\perp$ रेख BC
रेख AE, यह $\angle$CAB का समद्विभाजक है ।
E-D-C है
तो सिद्ध कीजिए कि

$$m\angle DAE = \frac{1}{2}\,(m\angle C - m\angle B)$$



आकृति 3.63

थोड़ा, सोचें

हमने यह सीखा कि यदि दो त्रिभुज समरूप हो तो उनकी संगत भुजाएँ समान अनुपात में होती हैं । क्या दो चतुर्भुजों समरूप हो तो उसकी संगत भुजाएँ समान अनुपात में होगी ? आकृति बनाकर जाँच कीजिए ।

अन्य बहुभुजाकृतियों के लिए भी इस गुणधर्म की जाँच कीजिए ।