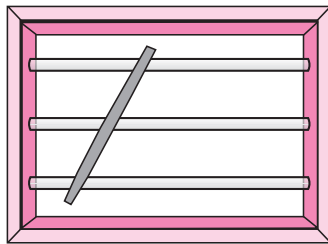
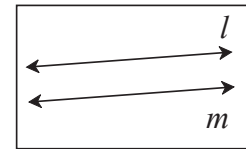




- समांतर रेखा तथा तिर्यक रेखा द्वारा निर्मित कोणों के गुणधर्म
- समांतर रेखाओं की कसौटियाँ
- समांतर रेखाओं के गुणधर्मों का उपयोग

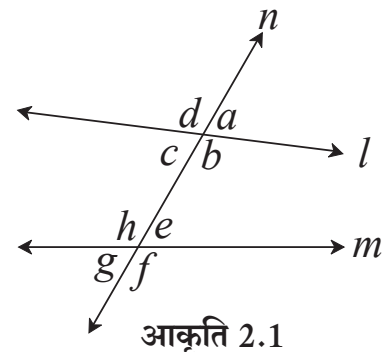


समांतर रेखा : एक ही प्रतल में स्थित परंतु परस्पर प्रतिच्छेदित न करने वाली रेखाओं को समांतर रेखाएँ कहते हैं ।



साथ में दी गई आकृति के अनुसार खिड़की के क्षैतिज समांतर दंडों पर एक लकड़ी तिरछी पकड़ कर देखिए कितने कोण बनते हैं ?

- दो रेखा तथा उनकी तिर्यक रेखा द्वारा निर्मित कोणों की जोड़ियाँ ध्यान में आती हैं क्या ?
आकृति 2.1 में रेखा l तथा रेखा m की रेखा n तिर्यक रेखा है। यहाँ कुल आठ कोण निर्मित होते हैं। उनकी जोड़ियाँ निम्नलिखित हैं।



आकृति 2.1

(i) $\angle d, \angle h$
(ii) $\angle a, \boxed{}$
(iii) $\angle c, \boxed{}$
(iv) $\angle b, \boxed{}$

- (i) $\angle c, \angle e$
- (ii) $\angle b, \angle h$

- (i) $\angle d, \angle f$
- (ii) $\angle a, \angle g$

- (i) $\angle c, \angle h$
- (ii) $\angle b, \angle e$

- (1) परस्पर प्रतिच्छेदित करने वाली दो रेखाओं द्वारा निर्मित शीर्षाभिमुख कोण सर्वांगसम होते हैं ।
- (2) रैखिक युगल कोण परस्पर संपूरक कोण होते हैं ।

- (3) यदि संगत कोणों की एक जोड़ी सर्वांगसम होती है तो संगत कोणों की अन्य जोड़ियाँ भी सर्वांगसम होती हैं ।
- (4) यदि एकांतर कोणों की एक जोड़ी सर्वांगसम होती है तो एकांतर कोणों की अन्य जोड़ियाँ भी सर्वांगसम होती हैं ।
- (5) यदि तिर्यक रेखा के एक ही ओर निर्मित अंतःकोणों का योगफल 180° होता है तो अंतःकोणों की अन्य जोड़ियों के मापों का योगफल भी 180° होता है ।

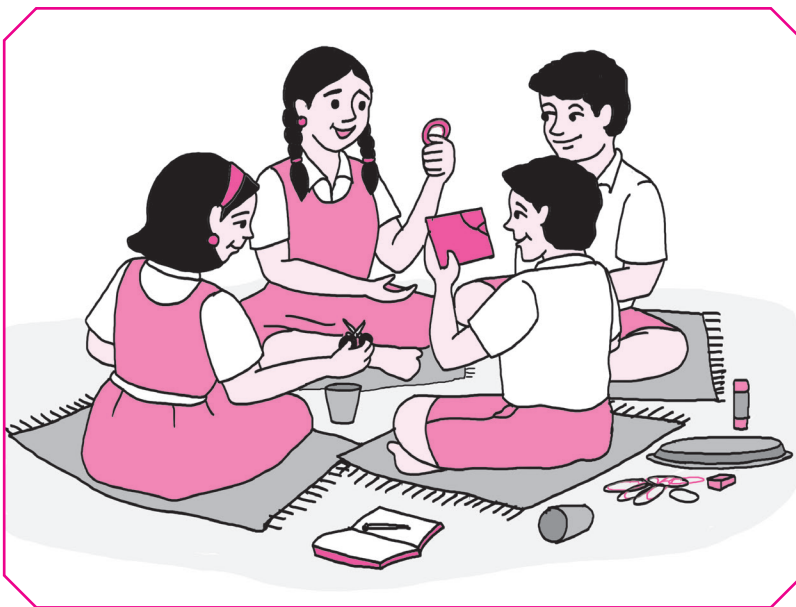
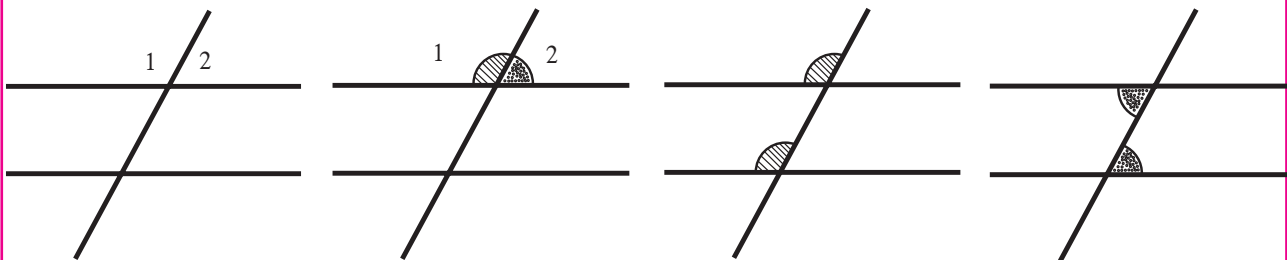


आओ, जानें

समांतर रेखाओं के गुणधर्म (Properties of parallel lines)

कृति :

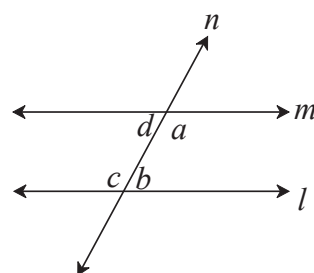
दो समांतर रेखाएँ तथा उनकी तिर्यक रेखा द्वारा बनने वाले कोणों के गुणधर्मों की जाँच ।
मोटे रंगीन कागज का एक टुकड़ा लीजिए । उसपर दो समांतर रेखाएँ तथा उनकी एक तिर्यक रेखा खींचिए ।
इन तीनों रेखाओं पर साधी लकड़ी के टुकड़े गोंद से चिपकाएँ । यहाँ बनने वाले 8 कोणों में से कोण 1 तथा कोण 2 के कोणों के माप के बराबर रंगीन पत्रिका के टुकड़े काटें (साथ की आकृति में दर्शाएनुसार) वे टुकड़े संबंधित संगत कोण, एकांतर कोण एवं अंतःकोणों पर रखकर गुणधर्मों की जाँच कीजिए ।



युक्लिड का अभिगृहीत (Eclid's Postulate) : दो रेखाएँ और उनकी तीर्थक रेखा द्वारा एक ही ओर बने अंतःकोणों के मापों का योग दो समकोणों से कम हो तो उन सरल रेखाओं को उस दिशा में आगे बढ़ाने पर परस्पर प्रतिच्छेदित करती हैं ।

प्रमेय : दो समांतर रेखाओं को किसी तिर्यक रेखा द्वारा प्रतिच्छेदित करने पर तिर्यक रेखा के एक ही ओर स्थित अंतःकोण परस्पर संपूरक होते हैं ।

तथा $\angle c, \angle d$ अंतःकोण हैं ।



आकृति 2.2

$$\angle d + \angle c = 180^\circ$$

इसमें से माना (i) $\angle a + \angle b < 180^\circ$ यह सत्य है।

तिर्यक रेखा m के जिस ओर $\angle a$ तथा $\angle b$ स्थित है उसी दिशा में आगे बढ़ाने पर रेखा l तथा रेखा m को वे परस्पर प्रतिच्छेदित करेगी.....(युक्लिड के अभिगृहीत द्वारा)

परंतु रेखा l तथा रेखा m परस्पर समांतर रेखा है ।(दत्त)

$\therefore \angle a + \angle b < 180^\circ$ यह असंभव है ।(I)

अब माना $\angle a + \angle b > 180^\circ$ यह संभव है ।

$$\therefore \angle a + \angle b > 180^\circ$$

परंतु $\angle a + \angle d = 180^\circ$

तथा $\angle c + \angle b = 180^\circ \dots\dots$ (रैखिक युगल कोण)

$$\therefore \angle a + \angle d + \angle b + \angle c = 180^\circ + 180^\circ = 360^\circ$$

$$\therefore \angle c + \angle d = 360^\circ - (\angle a + \angle b)$$

यदि $\angle a + \angle b > 180^\circ$ हो तो $[360^\circ - (\angle a + \angle b)] < 180^\circ$

$$\therefore \angle c + \angle d < 180^\circ$$

∴ ऐसा हो तो $\angle c$ तथा $\angle d$ तिर्यक रेखा के जिस ओर है उसी दिशा में

रेखा l तथा रेखा m आगे बढ़ाने पर परस्पर प्रतिच्छेदित करेंगी।

∴ $\angle c + \angle d < 180^\circ$ यह संभव नहीं है।

अर्थात् $\angle a + \angle b > 180^\circ$ यह भी संभव नहीं है। (II)

∴ $\angle a + \angle b = 180^\circ$ यही एक संभावना शेष रहती है।(I) तथा (II) से

∴ $\angle a + \angle b = 180^\circ$ इसी प्रकार $\angle c + \angle d = 180^\circ$

ध्यान रहे कि इस उपपत्ति में हमने $\angle a + \angle b > 180^\circ$, $\angle a + \angle b < 180^\circ$ इन दोनों संभावनाओं की विसंगति के कारण अस्वीकार किया है अर्थात् यह एक अप्रत्यक्ष उपपत्ति है।

संगत तथा एकांतर कोणों के गुणधर्म (Corresponding angle and alternate angle theorem)

प्रमेय : दो समांतर रेखाओं को किसी तिर्यक रेखा द्वारा प्रतिच्छेदित करने पर निर्मित संगत कोणों के माप समान होते हैं।

दत्त : रेखा $l \parallel$ रेखा m
रेखा n तिर्यक रेखा है।

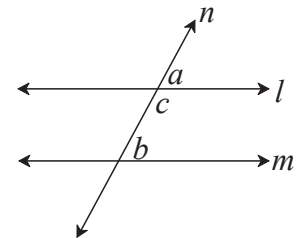
साध्य : $\angle a = \angle b$

उपपत्ति : $\angle a + \angle c = 180^\circ$ (I) रैखिक युगल कोण

$\angle b + \angle c = 180^\circ$ (II) समांतर रेखाओं के अंतःकोणों के गुणधर्म

$\angle a + \angle c = \angle b + \angle c$... कथन (I) तथा (II) से

∴ $\angle a = \angle b$



आकृति 2.3

प्रमेय : दो समांतर रेखाओं को किसी तिर्यक रेखा द्वारा प्रतिच्छेदित करने पर निर्मित एकांतर कोणों के माप समान होते हैं।

दत्त : रेखा $l \parallel$ रेखा m
रेखा n तिर्यक रेखा है।

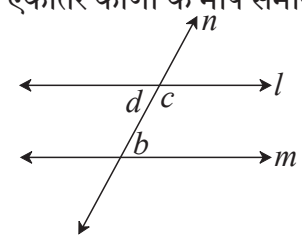
साध्य : $\angle d = \angle b$

उपपत्ति : $\angle d + \angle c = 180^\circ$ (I) रैखिक युगल कोण

$\angle c + \angle b = 180^\circ$ (II) समांतर रेखाओं के अंतःकोणों के गुणधर्म

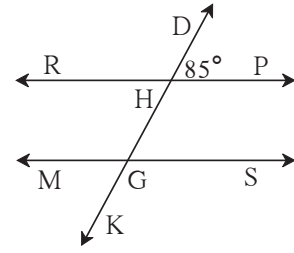
$\angle d + \angle c = \angle c + \angle b$ कथन (I) तथा (II) से

∴ $\angle d = \angle b$



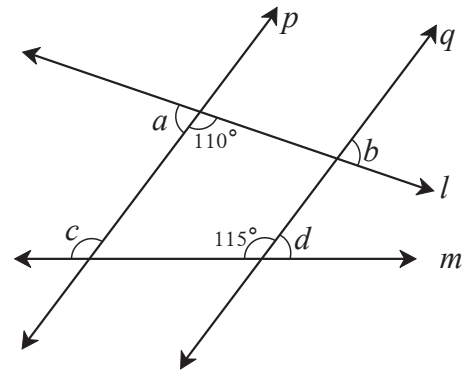
आकृति 2.4

1. आकृति 2.5 में रेखा $RP \parallel$ रेखा MS तथा रेखा DK उनकी तिर्यक रेखा है। $\angle DHP = 85^\circ$ तो निम्नलिखित कोणों के माप ज्ञात कीजिए।
 (i) $\angle RHD$ (ii) $\angle PHG$
 (iii) $\angle HGS$ (iv) $\angle MGK$

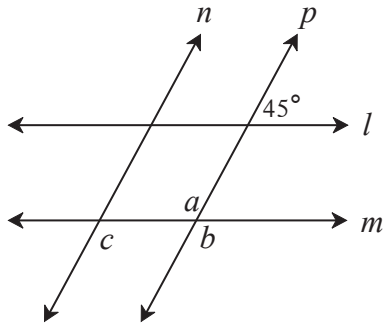


आकृति 2.5

2. आकृति 2.6 देखिए। रेखा $p \parallel$ रेखा q तथा रेखा l तथा रेखा m उनकी तिर्यक रेखाएँ हैं। कुछ कोणों के माप दर्शाए गए हैं। इस आधार पर $\angle a$, $\angle b$, $\angle c$, $\angle d$ के माप ज्ञात कीजिए।



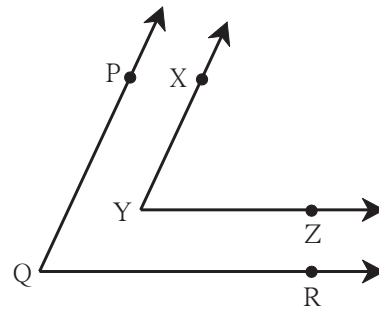
आकृति 2.6



आकृति 2.7

3. आकृति 2.7 में रेखा $l \parallel$ रेखा m तथा रेखा $n \parallel$ रेखा p है। दिए गए कोण के माप के आधार पर $\angle a$, $\angle b$, $\angle c$ के माप ज्ञात कीजिए।

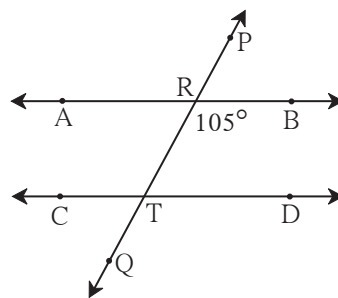
- 4*. आकृति 2.8 में, $\angle PQR$ तथा $\angle XYZ$ की भुजाएँ परस्पर समांतर हैं। तो सिद्ध कीजिए कि $\angle PQR \cong \angle XYZ$



आकृति 2.8

5. आकृति 2.9 में, रेखा $AB \parallel$ रेखा CD और रेखा PQ तिर्यक रेखा है तो आकृति में दर्शाए गए मापों के आधार पर निम्नलिखित कोणों के माप ज्ञात कीजिए।

- (i) $\angle ART$ (ii) $\angle CTQ$
(iii) $\angle DTQ$ (iv) $\angle PRB$



आकृति 2.9



आओ, जानें

समांतर रेखाओं के गुणधर्मों का उपयोग

समांतर रेखा तथा उनकी तिर्यक रेखा के द्वारा निर्मित कोणों के गुणधर्म का उपयोग करके त्रिभुज का एक गुणधर्म सिद्ध करेंगे।

प्रमेय : किसी भी त्रिभुज के तीनों कोणों के मापों का योगफल 180° होता है।

दत्त : $\triangle ABC$ कोई एक त्रिभुज है।

साध्य : $\angle ABC + \angle ACB + \angle BAC = 180^\circ$

रचना : A बिंदु से जाने वाली रेखा BC के समांतर रेखा l खींचिए।

उसपर P तथा Q बिंदु इस प्रकार लीजिए कि P-A-Q

उपपत्ति : रेखा $PQ \parallel$ रेखा BC तथा रेखा AB उनकी तिर्यक रेखा है।

$\therefore \angle ABC = \angle PAB$(एकांतर कोण).....I

रेखा $PQ \parallel$ रेखा BC तथा रेखा AC उनकी तिर्यक रेखा है।

$\therefore \angle ACB = \angle QAC$(एकांतर कोण).....II

कथन I तथा II से,

$$\angle ABC + \angle ACB = \angle PAB + \angle QAC \dots \text{III}$$

समीकरण III के दोनों पक्षों में $\angle BAC$ जोड़ने पर

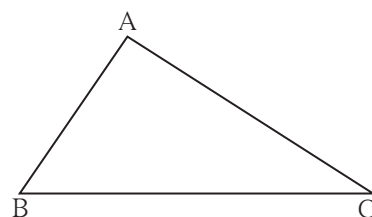
$$\angle ABC + \angle ACB + \angle BAC = \angle PAB + \angle QAC + \angle BAC$$

$$= \angle PAB + \angle BAC + \angle QAC$$

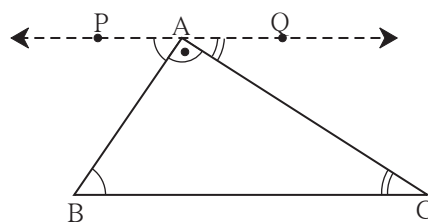
$$= \angle PAC + \angle QAC \dots (\because \angle PAB + \angle BAC = \angle PAC)$$

$$= 180^\circ \dots (\text{रैखिक युगल कोण})$$

अर्थात् त्रिभुज के तीनों कोणों के मापों का योगफल 180° होता है।



आकृति 2.10

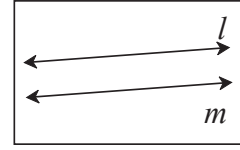


आकृति 2.11



आओ, चर्चा करें

संलग्न आकृति 2.12 के प्रतल में रेखा l तथा रेखा m परस्पर समांतर है या नहीं कैसे निश्चित करोगे ?



आकृति 2.12



आओ, जानें

समांतर रेखाओं की कसौटियाँ (Tests for parallel lines)

दो रेखाओं तथा उनकी तिर्यक रेखा द्वारा निर्मित कोणों की जाँच कर, वे रेखाएँ समांतर हैं या नहीं निश्चित कर सकते हैं।

- (1) तिर्यक रेखा के एक ही ओर बने अंतःकोणों की जोड़ी संपूरक कोणों की जोड़ी हो तो वे रेखाएँ समांतर होती है ।
- (2) एकांतर कोणों की एक जोड़ी समान हो तो वे रेखाएँ परस्पर समांतर होती हैं ।
- (3) संगत कोणों की एक जोड़ी समान हो तो वे रेखाएँ परस्पर समांतर होती हैं ।

समांतर रेखाओं की अंतःकोण कसौटी (Interior angles test)

प्रमेय : दो भिन्न रेखाओं को किसी तिर्यक रेखा द्वारा प्रतिच्छेदित करने पर उसकी तिर्यक रेखा के एक ही ओर बने अंतःकोणों का योगफल 180° हो तो वे रेखाएँ परस्पर समांतर होती हैं ।

दत्त : रेखा XY यह रेखा AB तथा रेखा CD की तिर्यक रेखा है ।
 $\angle BPQ + \angle P Q D = 180^\circ$

साध्य : रेखा AB $\parallel$ रेखा CD

उपपत्ति : यह कसौटी हम अप्रत्यक्ष पद्धति से सिद्ध करेंगे ।
 माना साध्य का कथन असत्य है ।

माना यह कथन सत्य है कि रेखा AB तथा रेखा CD परस्पर समांतर नहीं ।

$\therefore$ रेखा AB तथा रेखा CD

बिंदु T पर प्रतिच्छेदित करती हैं ।

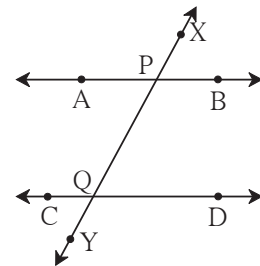
जिसके कारण ΔPQT बनता है ।

$\angle TPQ + \angle PQT + \angle PTQ = 180^\circ \dots$ त्रिभुज के तीनों कोणों के मापों का योग 180 होता है
 परंतु $\angle TPQ + \angle PQT = 180^\circ \dots \dots$ दत्त

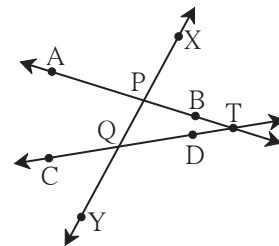
इस कारण त्रिभुज के दोनों कोणों का योगफल 180° है ।

परंतु त्रिभुज के तीनों कोणों के मापों का योगफल 180° होता है ।

$\therefore \angle PTQ = 0^\circ$ प्राप्त होता है ।



आकृति 2.13



आकृति 2.14

∴ रेखा PT तथा रेखा QT अर्थात् रेखा AB तथा रेखा CD भिन्न रेखाएँ नहीं होंगी ।

परंतु दत्त के अनुसार रेखा AB तथा रेखा CD भिन्न रेखाएँ हैं ।

अर्थात् दत्त से विसंगति प्राप्त हुई ।

∴ माना गया कथन गलत है अर्थात् रेखा AB तथा रेखा CD परस्पर समांतर हैं ।

इस आधार पर दो रेखाओं को किसी तिर्यक रेखा द्वारा प्रतिच्छेदित करने पर उनकी तिर्यक रेखा के एक ही ओर बने अंतःकोणों की जोड़ी संपूरक हो तो वे रेखाएँ परस्पर समांतर होती हैं । यह सिद्ध होता है । इस गुणधर्म को समांतर रेखाओं की **अंतःकोण कसौटी** कहते हैं ।

इस कसौटी को अभिगृहीत मानकर अन्य दो कसौटियाँ सिद्ध करेंगे ।

एकांतर कोण कसौटी (Alternate angles test)

प्रमेय : दो रेखाओं को किसी तिर्यक रेखा द्वारा प्रतिच्छेदित करने पर बने एकांतर कोणों की एक जोड़ी सर्वांगसम हो तो वे रेखाएँ परस्पर समांतर होती हैं ।

दत्त : रेखा l तथा रेखा m की तिर्यक रेखा n है ।

$\angle a$ तथा $\angle b$ एकांतर कोणों की एक जोड़ी सर्वांगसम है ।

∴ $\angle a = \angle b$

साध्य : रेखा $l \parallel$ रेखा m

उपपत्ति : $\angle a + \angle c = 180^\circ$ रैखिक युगल कोण

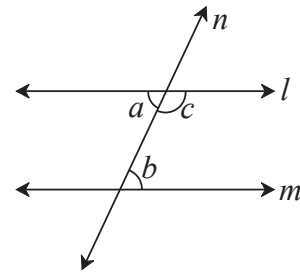
$\angle a = \angle b$ दत्त

∴ $\angle b + \angle c = 180^\circ$

परंतु $\angle b$ तथा $\angle c$ तिर्यक रेखा के एक ही ओर बने अंतःकोण हैं ।

∴ रेखा $l \parallel$ रेखा m (अंतःकोण कसौटी से)

इस गुणधर्म को समांतर रेखाओं की **एकांतर कोण कसौटी** कहते हैं ।



आकृति 2.15

संगत कोण कसौटी (Corresponding angles Test)

प्रमेय : दो रेखाओं को किसी तिर्यक रेखा द्वारा प्रतिच्छेदित करने पर बने संगत कोणों की एक जोड़ी सर्वांगसम हो तो वे रेखाएँ परस्पर समांतर होती हैं ।

दत्त : रेखा l तथा रेखा m की तिर्यक रेखा n है ।

$\angle a$ तथा $\angle b$ संगत कोणों की जोड़ी है ।

∴ $\angle a = \angle b$

साध्य : रेखा $l \parallel$ रेखा m

उपपत्ति : $\angle a + \angle c = 180^\circ$ रैखिक युगल कोण

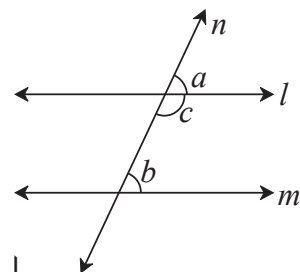
$\angle a = \angle b$ दत्त

∴ $\angle b + \angle c = 180^\circ$

अर्थात् तिर्यक रेखा के एक ही ओर बने अंतःकोण परस्पर संपूरक हैं ।

∴ रेखा $l \parallel$ रेखा m अंतःकोण कसौटी

इस गुणधर्म को समांतर रेखाओं की **संगत कोण कसौटी** कहते हैं ।



आकृति 2.16

उपप्रमेय I यदि कोई रेखा उसी प्रतल की अन्य दो रेखाओं पर लंब हो तो वे दो रेखाएँ परस्पर समांतर होती हैं।

दत्त : रेखा $n \perp$ रेखा l तथा रेखा $n \perp$ रेखा m

साध्य : रेखा $l \parallel$ रेखा m

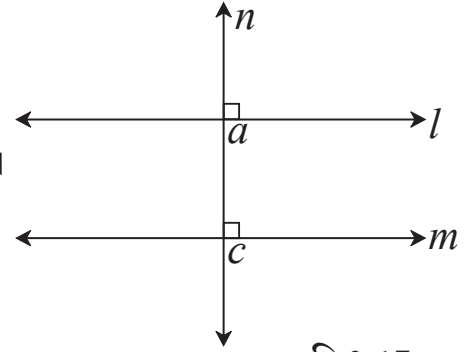
उपपत्ति : रेखा $n \perp$ रेखा l तथा रेखा $n \perp$ रेखा m दिया गया है।

$$\therefore \angle a = \angle c = 90^\circ$$

$\angle a$ तथा $\angle c$ यह रेखा l तथा रेखा m ली

तिर्यक रेखा n द्वारा निर्मित संगत कोण है।

$\therefore$ रेखा $l \parallel$ रेखा m समांतर रेखाओं की संगत कोण कसौटी

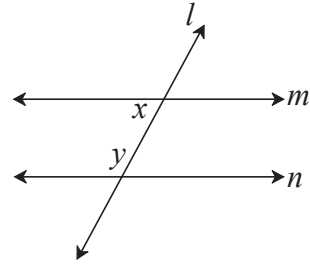


आकृति 2.17

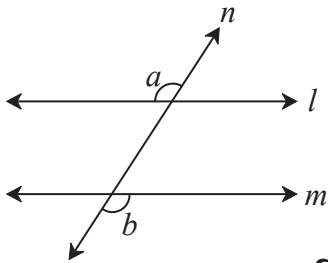
उपप्रमेय II सिद्ध कीजिए कि किसी भी प्रतल में दो रेखाएँ उसी प्रतल की तीसरी रेखा के समांतर हों तो वे रेखाएँ परस्पर समांतर होती हैं।

प्रश्नसंग्रह 2.2

1. आकृति 2.18 में $y = 108^\circ$ तथा $x = 71^\circ$
तो रेखा m तथा रेखा n समांतर होगी,
कारण लिखिए।



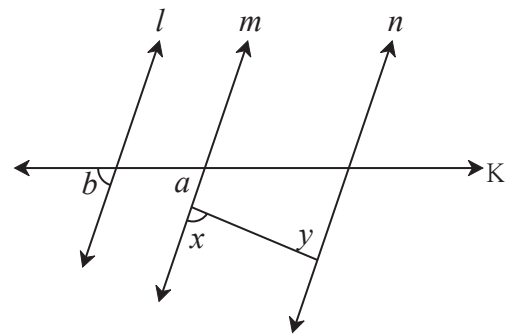
आकृति 2.18



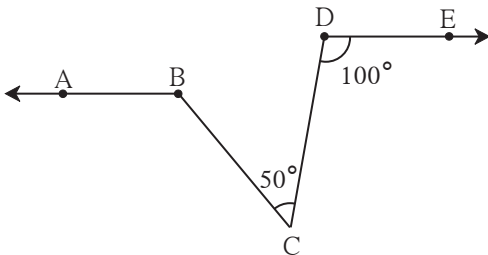
आकृति 2.19

2. आकृति 2.19 में यदि $\angle a \cong \angle b$ तो
सिद्ध कीजिए कि रेखा $l \parallel$ रेखा m

3. आकृति 2.20 में यदि $\angle a \cong \angle b$ और
 $\angle x \cong \angle y$ तो सिद्ध कीजिए कि रेखा $l \parallel$ रेखा n



आकृति 2.20

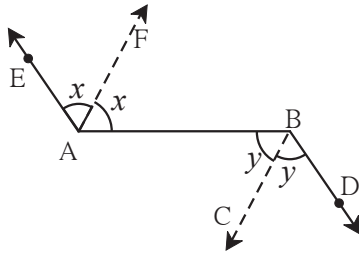


आकृति 2.21

4. आकृति 2.21 में यदि किरण $BA \parallel$ किरण DE ,
 $\angle C = 50^\circ$ तथा $\angle D = 100^\circ$ तो $\angle ABC$ का माप ज्ञात
कीजिए।

(सूचना : बिंदु C से किरण BA के समांतर रेखा खींचिए।)

5.

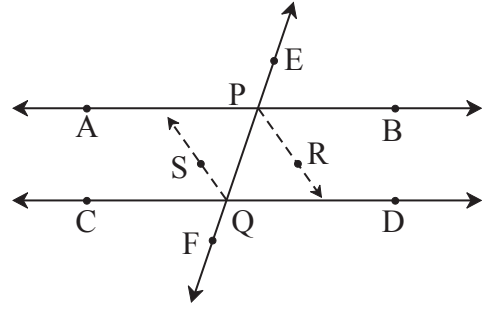


आकृति 2.22

आकृति 2.22 में किरण $AE \parallel$ किरण BD

किरण AF तथा किरण BC क्रमशः $\angle EAB$ तथा $\angle ABD$ की समद्विभाजक है तो सिद्ध कीजिए कि रेखा $AF \parallel$ रेखा BC

6. रेखा EF यह रेखा AB तथा रेखा CD को क्रमशः बिंदु P तथा Q पर प्रतिच्छेदित करती है। किरण PR तथा किरण QS परस्पर समांतर किरणें हैं तथा क्रमशः $\angle BPQ$ तथा $\angle PQC$ के समद्विभाजक है, तो सिद्ध कीजिए कि रेखा $AB \parallel$ रेखा CD



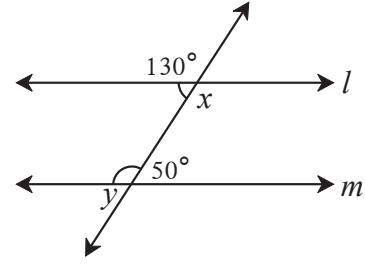
आकृति 2.23

प्रकीर्ण प्रश्नसंग्रह 2

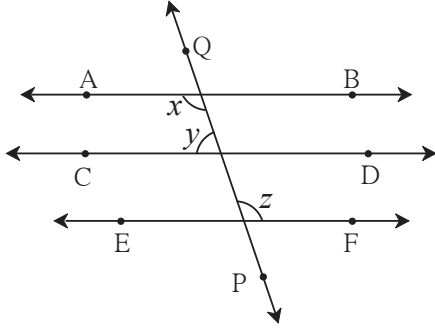
1. निम्नलिखित कथनों के रिक्त स्थानों की पूर्ति करने के लिए अचूक विकल्प चुनकर लिखिए।
 - (i) दो समांतर रेखाओं को किसी तिर्यक रेखा द्वारा प्रतिच्छेदित करने पर तिर्यक रेखा के एक ही ओर बने अंतःकोणों के मापों का योगफल होता है।
(A) 0° (B) 90° (C) 180° (D) 360°
 - (ii) दो रेखाओं को किसी तिर्यक रेखा द्वारा प्रतिच्छेदित करने पर कोण निर्मित होते हैं।
(A) 2 (B) 4 (C) 8 (D) 16
 - (iii) दो समांतर रेखाओं को किसी तिर्यक रेखा द्वारा प्रतिच्छेदित करने पर बनने वाले कोणों में से किसी एक कोण का माप 40° हो तो उसके संगत कोण का माप होता है।
(A) 40° (B) 140° (C) 50° (D) 180°
 - (iv) $\triangle ABC$ में $\angle A = 76^\circ$, $\angle B = 48^\circ$, तो $\angle C$ का माप है।
(A) 66° (B) 56° (C) 124° (D) 28°
 - (v) दो समांतर रेखाओं को किसी तिर्यक रेखा द्वारा प्रतिच्छेदित करने पर बनने वाले एकांतर कोणों की जोड़ी में से यदि एक कोण का माप 75° हो तो दूसरे कोण का माप होता है।
(A) 105° (B) 15° (C) 75° (D) 45°
- 2*. किरण PQ तथा किरण PR परस्पर लंब है। बिंदु B यह $\angle QPR$ के अंतःभाग में तथा बिंदु A यह $\angle RPQ$ के बाह्यभाग में है। किरण PB तथा किरण PA परस्पर लंब है। इस आधार पर आकृति बनाइए तथा निम्नलिखित कोणों की जोड़ियाँ लिखिए।
 - (i) कोटीपूरक (ii) संपूरक कोण (iii) सर्वांगसम कोण

3. सिद्ध कीजिए कि कोई रेखा किसी एक प्रतल की दो समांतर रेखाओं में से एक रेखा पर लंब हो तो वह रेखा दूसरी रेखा पर भी लंब होती है।

4. आकृति 2.24 में दिए गए कोणों के मापों के आधार पर $\angle x$ तथा $\angle y$ के माप ज्ञात करें तथा सिद्ध कीजिए कि रेखा $l \parallel$ रेखा m

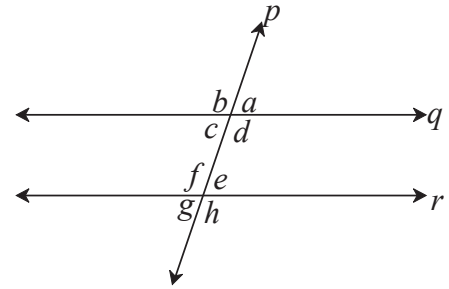


आकृति 2.24

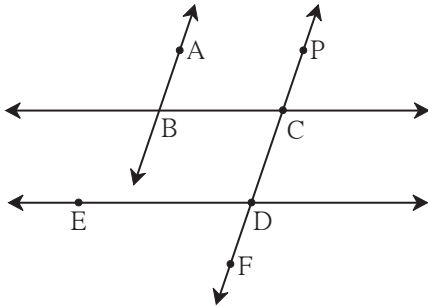


आकृति 2.25

6. आकृति 2.26 में यदि रेखा $q \parallel$ रेखा r , तथा रेखा p उसकी तिर्यक रेखा हो और $a = 80^\circ$ तो f तथा g ज्ञात कीजिए।

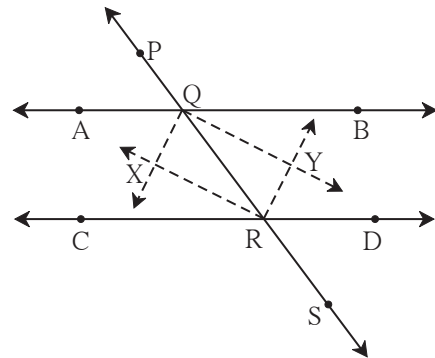


आकृति 2.26



आकृति 2.27

7. आकृति 2.27 में यदि रेखा $AB \parallel$ रेखा CF तथा रेखा $BC \parallel$ रेखा ED तो सिद्ध कीजिए कि $\angle ABC = \angle FDE$



आकृति 2.28

8. आकृति 2.28 में रेखा $AB \parallel$ रेखा CD तथा रेखा PS उसकी तिर्यक रेखा है। किरण QX , किरण QY , किरण RX तथा किरण RY यह कोणों की समद्विभाजक हो तो सिद्ध कीजिए कि $\square QXRY$ एक आयत है।

