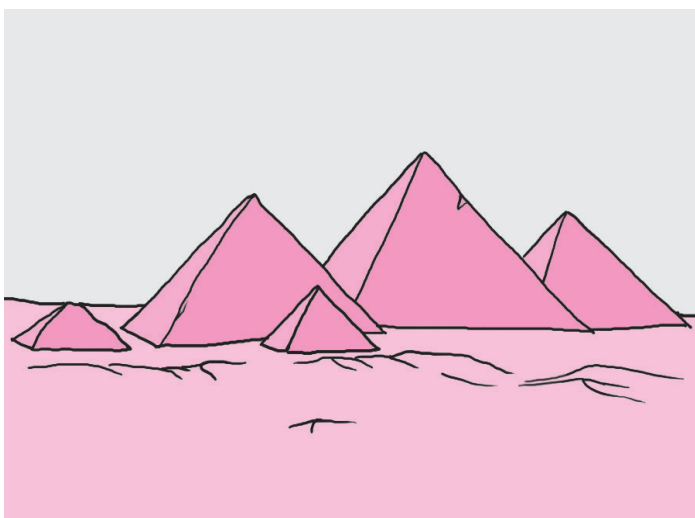




આઓ, સીખેં

- बिंदु, रेखा तथा प्रतल
- बिंदु के निर्देशांक तथा दूरी
- मध्यता
- सशर्त कथन
- उपपत्ति



क्या आप इस चित्र को पहचानते हैं ? यह इजिप्त के पिरामिड का चित्र है । इ.स.पूर्व 3000 वर्ष में इतना विशाल निर्माण लोगों ने कैसे किया होगा ? वास्तु विज्ञान और भूमिति के क्षेत्र में विकास हुए बिना ऐसी रचना नहीं की जा सकती ।

भूमिति नाम से ही इस विषय का उद्गम समझ में आता है। 'भू' अर्थात् भूमि तथा मिति अर्थात् मापन - इस आधार पर भूमि (जमीन) के मापन की आवश्यकता के कारण इस विषय की निर्मित हुई होगी।

कई देशों में भूमिति का विकास विविध कालखंडों में विविध निर्माणों के लिए हुआ

ऐसा कहा जाता है कि थेल्स नामक आद्य ग्रीक गणितज्ञ जब इजिप्त गए तब उन्होंने पिरामिड की छाया का मापन कर एवं समरूप त्रिभुजों के गुणधर्म का उपयोग करके पिरामिड की ऊँचाई निश्चित की थी । ऐसा कहा जाता है कि पाइथागोरस थेल्स का विद्यार्थी था ।

प्राचीन भारतीयों को भी भूमिति का समग्र ज्ञान था। वैदिक काल में भारत के लोग यज्ञकुंड का निर्माण करने के लिए भूमितीय गुणधर्मों का उपयोग करते थे। रस्सी की सहायता से मापन कैसे करें तथा विविध आकार कैसे बनाएँ इनका उल्लेख शुल्बसूत्र में मिलता है। बाद के कालखंड में आर्यभट्ट, वराहमिहिर, ब्रह्मगुप्त भास्कराचार्य आदि गणितज्ञों ने इस विषय में महत्वपूर्ण योगदान दिया है।



આઓ, જાનેં

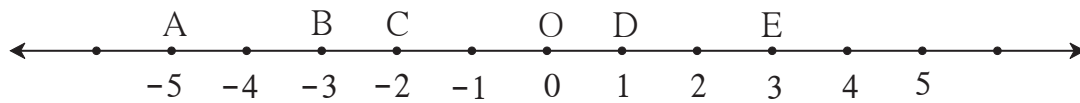
भूमिति के मूलभूत संबोध : बिंदु, रेखा तथा प्रतल

(Basic concepts in geometry : point, line and plane)

जिस प्रकार हम संख्या को परिभाषित नहीं कर पाते उसी प्रकार बिंदु, रेखा तथा प्रतल को भी परिभाषित नहीं किया जा सकता। भूमिति में यह मूलभूत संबोध है। रेखा तथा प्रतल बिंदुओं का समुच्चय है। ध्यान रहे, यहाँ रेखा का अर्थ है सरल रेखा।

बिंदुओं के निर्देशांक तथा दूरी (Co-ordinates of points and distance)

नीचे दी गई संख्या रेखा देखिए।



आकृति 1.1

आकृति में बिंदु D यह संख्या रेखा पर 1 दर्शाता है अर्थात् 1 यह बिंदु D का निर्देशांक है। बिंदु B यह संख्या रेखा पर -3 दर्शाता है अतः बिंदु B का निर्देशांक -3 है। इसी प्रकार A का निर्देशांक -5 तथा E का निर्देशांक 3 है।

बिंदु D से बिंदु E, 2 इकाई की दूरी पर है अर्थात् E तथा D के बीच की दूरी 2 इकाई है। यहाँ इकाई गिनकर हम दो बिंदुओं के बीच की दूरी ज्ञात कर सकते हैं। इस संख्या रेखा पर बिंदु A तथा B के बीच दूरी भी 2 इकाई है।

अब हम देखेंगे कि बिंदुओं के निर्देशांक का उपयोग करके दूरी कैसे ज्ञात करते हैं।

दो बिंदुओं के बीच की दूरी ज्ञात करना अर्थात् दिए गए बिंदुओं के निर्देशांकों में बड़े निर्देशांक में से छोटे निर्देशांक को घटाना।

बिंदु D का निर्देशांक 1 है, बिंदु E का निर्देशांक 3 है तथा $3 > 1$ हम जानते हैं।

अतः बिंदु E तथा D के बीच की दूरी $3 - 1$ अर्थात् 2 है।

बिंदु E तथा D के बीच की दूरी $d(E, D)$ द्वारा दर्शाते हैं। यह दूरी अर्थात् $l(ED)$, रेख ED कि लंबाई है।

$$d(E, D) = 3 - 1 = 2$$

$$\therefore l(ED) = 2$$

$$d(E, D) = l(ED) = 2$$

$$\text{इसी प्रकार } d(D, E) = 2$$

$$d(C, D) = 1 - (-2)$$

$$= 1 + 2 = 3$$

$$\therefore d(C, D) = l(CD) = 3$$

$$\text{इसी प्रकार } d(D, C) = 3$$

$d(A, B)$ ज्ञात कीजिए। A का निर्देशांक -5 है, B का निर्देशांक -3 है तथा $-3 > -5$

$$\therefore d(A, B) = -3 - (-5) = -3 + 5 = 2$$

उपर्युक्त सभी उदाहरणों से स्पष्ट है कि दो भिन्न बिंदुओं के बीच की दूरी धनात्मक होती है।

इसी प्रकार यदि P, Q एक ही बिंदु हों तो $d(P, Q) = 0$ इसे ध्यान में रखें।



इसे ध्यान में रखें

- दो बिंदुओं के बीच की दूरी दिए गए निर्देशांकों में बड़े निर्देशांक में से छोटा निर्देशांक घटाने पर प्राप्त होती है।
- किन्हीं दो बिंदुओं के बीच की दूरी ऋणेत्तर वास्तविक संख्या होती है।



आओ, जानें

मध्यता (Betweenness)

यदि P, Q, R एकरेखीय भिन्न बिंदु हो तो निम्नानुसार तीन संभावनाएँ प्राप्त होती हैं।



आकृति 1.2

(i) बिंदु Q यह P तथा R के मध्य है।

(ii) बिंदु R यह P तथा Q के मध्य है।

(iii) बिंदु P यह R तथा Q के मध्य है।

यदि $d(P, Q) + d(Q, R) = d(P, R)$ हो तो Q यह बिंदु P तथा R के मध्य है ऐसा कहा जाता है। इस मध्यता को P - Q - R द्वारा दर्शाया जाता है।

उदा. (1) किसी संख्या रेखा पर A, B तथा C बिंदु इस प्रकार हैं कि $d(A, B) = 5$, $d(B, C) = 11$ तथा $d(A, C) = 6$ तो इनमें से कौन-सा बिंदु अन्य दो बिंदुओं के मध्य में होगा ?

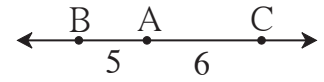
हल : यहाँ A, B तथा C इनमें से कौन-सा बिंदु अन्य दो बिंदुओं के मध्य में है यह निम्नलिखित प्रकार से निश्चित कर सकते हैं।

$$d(B, C) = 11 \dots (I)$$

$$d(A, B) + d(A, C) = 5 + 6 = 11 \dots (II)$$

$$\therefore d(B, C) = d(A, B) + d(A, C) \dots (I) \text{ तथा } (II) \text{ से}$$

अर्थात् बिंदु A यह बिंदु B तथा बिंदु C के मध्य में है।



आकृति 1.3

उदा. (2) किसी रास्ते पर सरल रेखा में U, V तथा A शहर हैं। U तथा A के बीच की दूरी 215 किमी, V तथा A के बीच की दूरी 140 किमी तथा U तथा V के बीच की दूरी 75 किमी है। ज्ञात कीजिए कि कौन-सा शहर किन दो शहरों के मध्य स्थित है ?

$$\text{हल : } d(U, A) = 215; \quad d(V, A) = 140; \quad d(U, V) = 75$$

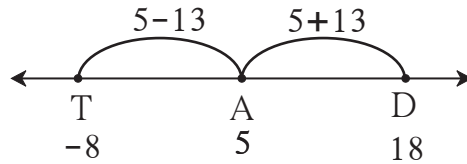
$$d(U, V) + d(V, A) = 75 + 140 = 215; \quad d(U, A) = 215$$

$$\therefore d(U, A) = d(U, V) + d(V, A)$$

$\therefore$ शहर V यह शहर U तथा A शहरों के मध्य स्थित है।

उदा. (3) किसी संख्यारेखा पर A बिंदु का निर्देशांक 5 है। उसी रेखा पर A से 13 इकाई की दूरी पर स्थित बिंदुओं के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

हल : संख्या रेखा पर A से 13 इकाई की दूरी पर आकृति में दर्शाए अनुसार A के बाईं ओर T तथा दाईं ओर D ऐसे दो बिंदु लीजिए।



आकृति 1.4

बिंदु A के बाईं ओर स्थित बिंदु T का निर्देशांक $5 - 13 = -8$ होगा।

बिंदु A के दाईं ओर स्थित बिंदु D का निर्देशांक $5 + 13 = 18$ होगा।

∴ बिंदु A से 13 इकाई की दूरी पर स्थित बिंदुओं के निर्देशांक -8 तथा 18 हैं।

जाँच कीजिए : $d(A, D) = d(A, T) = 13$

कृति :

- (1) दी गई आकृति में A, B, C बिंदु एकरेखीय बिंदु है क्या ? धागे की सहायता से धागा खींचकर जाँच कीजिए। यदि बिंदु एक रेखा में हों तो बताइए कौन-सा बिंदु, अन्य दो बिंदुओं के मध्य में है ?

• A • B • C

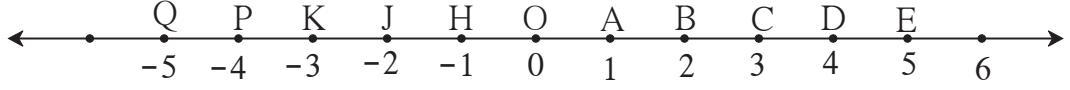
- (2) दिए गए चार बिंदुओं P, Q, R, S में से कौन-से तीन बिंदु एकरेखीय हैं और कौन-से तीन बिंदु अरेखीय हैं। जाँच कीजिए। एकरेखीय तीन बिंदुओं के बीच की मध्यता लिखिए।

• Q • S
• R
• P

- (3) व्यायाम के लिए विद्यार्थियों को सीधी कतार में खड़े रहने के लिए कहा गया है। प्रत्येक कतार के विद्यार्थी सरल रेखा में हैं इसकी जाँच कैसे करेंगे ?
- (4) प्रकाश की किरण एक सरल रेखा में जाती है इसकी जाँच आपने कैसे की ? पूर्व कक्षाओं में किया गया विज्ञान का प्रयोग याद कीजिए।

प्रश्नसंग्रह 1.1

1. नीचे दी गई संख्या रेखा के आधार पर दूरियाँ ज्ञात कीजिए ।



आकृति 1.5

- (i) $d(B, E)$ (ii) $d(J, A)$ (iii) $d(P, C)$ (iv) $d(J, H)$
 (v) $d(K, O)$ (vi) $d(O, E)$ (vii) $d(P, J)$ (viii) $d(Q, B)$
2. बिंदु A का निर्देशांक x तथा बिंदु B का निर्देशांक y है तो निम्नलिखित प्रश्नों में $d(A, B)$ ज्ञात कीजिए ।
 (i) $x = 1, y = 7$ (ii) $x = 6, y = -2$ (iii) $x = -3, y = 7$
 (iv) $x = -4, y = -5$ (v) $x = -3, y = -6$ (vi) $x = 4, y = -8$
3. नीचे दी गई जानकारी के आधार पर बताइए कौन-सा बिंदु अन्य दो बिंदुओं के मध्य है । यदि बिंदु एकरेखीय न हो तो वैसा लिखिए ।
 (i) $d(P, R) = 7,$ $d(P, Q) = 10,$ $d(Q, R) = 3$
 (ii) $d(R, S) = 8,$ $d(S, T) = 6,$ $d(R, T) = 4$
 (iii) $d(A, B) = 16,$ $d(C, A) = 9,$ $d(B, C) = 7$
 (iv) $d(L, M) = 11,$ $d(M, N) = 12,$ $d(N, L) = 8$
 (v) $d(X, Y) = 15,$ $d(Y, Z) = 7,$ $d(X, Z) = 8$
 (vi) $d(D, E) = 5,$ $d(E, F) = 8,$ $d(D, F) = 6$
4. संख्या रेखा पर A, B, C बिंदु ऐसे है कि $d(A, C) = 10, d(C, B) = 8$ तो $d(A, B)$ ज्ञात कीजिए । सभी विकल्पों पर विचार कीजिए ।
5. X, Y, Z एकरेखीय बिंदु है, $d(X, Y) = 17, d(Y, Z) = 8$ तो $d(X, Z)$ ज्ञात कीजिए ।
6. आकृति बनाकर प्रश्नों के उत्तर लिखिए ।
 (i) यदि A-B-C तथा $l(AC) = 11, l(BC) = 6.5,$ तो $l(AB) = ?$
 (ii) यदि R-S-T तथा $l(ST) = 3.7, l(RS) = 2.5,$ तो $l(RT) = ?$
 (iii) यदि X-Y-Z तथा $l(XZ) = 3\sqrt{7}, l(XY) = \sqrt{7},$ तो $l(YZ) = ?$
7. तीन अरेखीय बिंदुओं से कौन-सी आकृति बनती है ?



आओ, जानें

नौवीं कक्षा के गणित भाग I के समुच्चय इस प्रकरण में हमने संघ समुच्चय तथा प्रतिच्छेदन समुच्चय का अध्ययन किया है। इनका उपयोग करके रेखाखंड, किरण तथा रेखा का वर्णन, बिंदु समुच्चय के रूप में करेंगे।

(1) रेखाखंड (Line segment) :

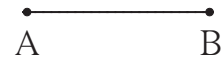
बिंदु A, बिंदु B तथा इन दो बिंदुओं के मध्य स्थित समस्त

बिंदुओं का संघ समुच्चय ही रेखाखंड AB होता है।

रेखाखंड AB को संक्षेप में रेख AB भी लिखते हैं।

रेख AB अर्थात् रेख BA।

बिंदु A तथा बिंदु B रेख AB के अंतःबिंदु हैं। रेखाखंड के अंतःबिंदुओं के बीच की दूरी को रेखाखंड की लंबाई कहते हैं। $l(AB) = d(A, B)$ $l(AB) = 5$ इसे $AB = 5$ ऐसा भी लिखते हैं।



आकृति 1.6

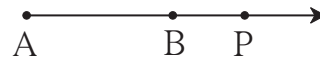
(2) किरण AB (Ray AB) :

माना A तथा B दो भिन्न बिंदु हैं। रेख AB पर के

सभी बिंदु तथा A - B- P ऐसे समस्त बिंदु P का

संघ समुच्चय ही किरण AB है। यहाँ बिंदु A को

किरण का आरंभ बिंदु कहते हैं।



आकृति 1.7

(3) रेखा AB (Line AB) :

किरण AB का बिंदु समुच्चय तथा उसकी विपरीत किरण का बिंदु समुच्चय मिलकर जो संघ समुच्चय बनता है। वही रेखा AB का बिंदु समुच्चय है।

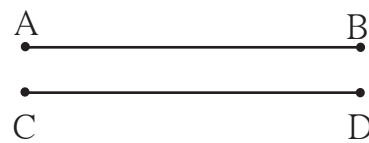
रेख AB का बिंदु समुच्चय, रेखा AB के बिंदु समुच्चय का उप समुच्चय है।

(4) सर्वांगसम रेखाखंड (Congruent segments) :

यदि दिए गए दो रेखाखंडों की लंबाई समान हो

तो वे रेखाखंड सर्वांगसम होते हैं।

यदि $l(AB) = l(CD)$ तो रेख $AB \cong$ रेख CD



आकृति 1.8

(5) रेखाखंडों की सर्वांगसमता के गुणधर्म (Properties of congruent segments) :

(i) परावर्तकता (Reflexivity) रेख $AB \cong$ रेख AB

(ii) सममिति (Symmetry) यदि रेख $AB \cong$ रेख CD तो रेख $CD \cong$ रेख AB

(iii) संक्रमकता (Transitivity) यदि रेख $AB \cong$ रेख CD तथा रेख $CD \cong$ रेख EF तो रेख $AB \cong$ रेख EF

(6) रेखाखंड का मध्यबिंदु (Midpoint of a segment) :

यदि A-M-B तथा रेख $AM \cong$ रेख MB , तो बिंदु M को रेख

AB का मध्यबिंदु कहते हैं। प्रत्येक रेखाखंड का केवल एक ही

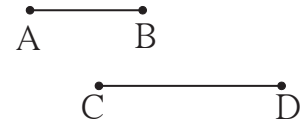
मध्यबिंदु होता है।



आकृति 1.9

(7) रेखाखंडों की तुलना (Comparison of segments) :

रेख AB की लंबाई रेख CD से कम हो अर्थात
यदि $l(AB) < l(CD)$ हो तो रेख AB < रेख CD
या रेख CD > रेख AB ऐसा लिखते हैं।
रेखाखंडों का क्रमसंबंध उनकी लंबाई पर आधारित होता है।



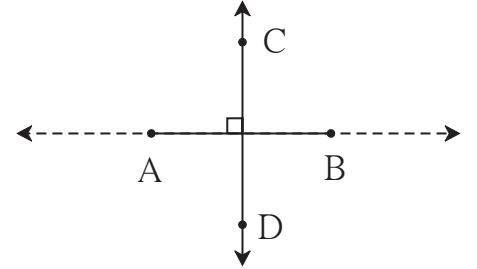
आकृति 1.10

(8) रेखाखंडों की या किरणों की लंबता

(Perpendicularity of segments or rays) :

दो रेखाखंड, दो किरण या एक किरण तथा एक रेखाखंड को समाविष्ट करने वाली रेखा परस्पर लंब हो तो हम कह सकते हैं कि दोनों रेखाखंड, वे दो किरण अथवा एक किरण और एक रेखाखंड परस्पर लंब हैं।

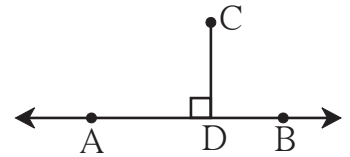
आकृति 1.11 में रेख AB $\perp$ रेख CD,
रेख AB $\perp$ किरण CD।



आकृति 1.11

(9) बिंदु की रेखा से दूरी (Distance of a point from a line) :

यदि रेख CD $\perp$ रेखा AB तथा बिंदु D यह रेखा AB पर हो
तो रेख CD की लंबाई बिंदु C की रेखा AB से दूरी कहलाती हैं।
बिंदु D को लंब CD का लंबपाद कहते हैं।
यदि $l(CD) = a$, तो बिंदु C रेखा AB से a दूरी पर हैं।
ऐसा कहते हैं।



आकृति 1.12

प्रश्नसंग्रह 1.2

1. नीचे दी गई सारिणी में संख्यारेखा पर स्थित बिंदुओं के निर्देशांक दिए गए हैं। सारिणी के आधार पर बताइए कि दिए गए रेखाखंड सर्वांगसम है या नहीं ?

बिंदु	A	B	C	D	E
निर्देशांक	-3	5	2	-7	9

(i) रेख DE तथा रेख AB

(ii) रेख BC तथा रेख AD

(iii) रेख BE तथा रेख AD

2. बिंदु M यह रेख AB का मध्यबिंदु है तथा AB = 8 तो AM = कितना ?

3. बिंदु P यह रेख CD का मध्यबिंदु है तथा CP = 2.5 तो रेख CD की लंबाई ज्ञात कीजिए।

4. यदि AB = 5 सेमी, BP = 2 सेमी तथा AP = 3.4 सेमी तो रेखाखंडों में क्रमसंबंध निश्चित कीजिए।

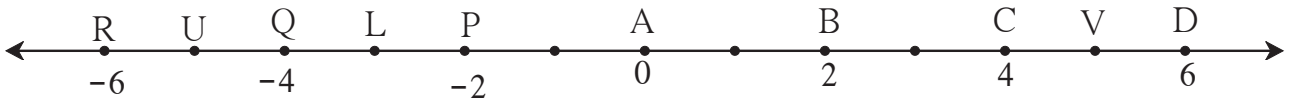
5. आकृति 1.13 के आधार पर निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर लिखिए ।

- किरण RP के विपरीत किरण का नाम लिखिए ।
- किरण PQ तथा किरण RP का प्रतिच्छेदन समुच्चय लिखिए ।
- रेख PQ तथा रेख QR का संघ समुच्चय लिखिए ।
- रेख QR यह कौन-कौन-से किरणों का उपसमुच्चय है ?
- R आरंभबिंदुवाली विपरीत किरणों की जोड़ी लिखिए ।
- S आरंभबिंदुवाले किन्हीं दो किरणों के नाम लिखिए ।
- किरण SP तथा किरण ST का प्रतिच्छेदन समुच्चय लिखिए ।



आकृति 1.13

6. नीचे दी गई आकृति 1.14 के आधार पर प्रश्नों के उत्तर लिखिए ।



आकृति 1.14

- बिंदु B से समदूरस्थ बिंदु कौन-से हैं ?
- बिंदु Q से समदूरस्थ बिंदुओं की एक जोड़ी लिखिए ।
- $d(U, V)$, $d(P, C)$, $d(V, B)$, $d(U, L)$ ज्ञात कीजिए ।



आओ, जानें

सशर्त कथन और विलोम (Conditional statements and converse)

जो कथन यदि-तो के रूप में लिखे जाते हैं उन्हें सशर्त कथन कहते हैं । सशर्त कथनों में 'यदि' से आरंभ होने वाले कथन को 'पूर्वार्ध' और 'तो' से आरंभ होने वाले कथन को 'उत्तरार्ध' कहते हैं ।

उदाहरणार्थ : समचतुर्भुज के विकर्ण परस्पर लंबसमद्विभाजक होते हैं ।

सशर्त कथन : यदि दिया गया चतुर्भुज समचतुर्भुज हो तो उसके विकर्ण परस्पर लंबसमद्विभाजक होते हैं ।

विलोम (Converse) : दिए गए सशर्त कथन के पूर्वार्ध और उत्तरार्ध की अदला-बदली करने पर प्राप्त कथन को मूल कथन का **विलोम (Converse)** कहते हैं ।

दिया गया सशर्त कथन सत्य हो तो उसका विलोम भी सत्य होगा यह जरूरी नहीं है । नीचे दिए गए उदाहरण देखिए ।

- सशर्त कथन** : यदि कोई चतुर्भुज समचतुर्भुज हो तो उसके विकर्ण परस्पर लंबसमद्विभाजक होते हैं ।
- विलोम** : यदि किसी चतुर्भुज के विकर्ण परस्पर लंबसमद्विभाजक हो तो वह चतुर्भुज समचतुर्भुज होता है ।
उपर्युक्त उदाहरण में मूल कथन तथा उसका विलोम दोनों भी सत्य है ।
- सशर्त कथन** : यदि कोई संख्या अभाज्य संख्या हो तो वह संख्या सम या विषम होती है ।
- विलोम** : यदि कोई संख्या सम या विषम हो तो वह संख्या अभाज्य संख्या होती है ।
इस उदाहरण में दिया गया मूल कथन सत्य है परंतु विलोम असत्य है ।



आओ, जानें

उपपत्ति (Proofs)

हमने कोण, त्रिभुज, चतुर्भुज इन आकृतियों के गुणधर्मों का अध्ययन किया है । यह गुणधर्म हमने प्रात्यक्षिक पद्धति से सीखे हैं । इस कक्षा में हम भूमिति विषय को अलग दृष्टिकोण से देखने वाले हैं । इसका श्रेय ईसापूर्व तीसरी शताब्दी में हुए ग्रीक गणितज्ञ युक्लिड को जाता है । उस कालखंड में भूमिति संबंधी जो जानकारी उपलब्ध थी उसका उन्होंने सुसंगत संकलन किया और उसमें सुसूत्रता लाई । उन्होंने प्रमुखता से ऐसा दर्शाया कि यदि कुछ स्वयंसिद्ध तथा सर्वमान्य कथनों को **अभिगृहीत** (Postulates) के रूप में स्वीकार किया जाए तो उसके आधार पर तर्कशुद्ध रचना द्वारा नवीन गुणधर्म सिद्ध किए जा सकते हैं । सिद्ध किए गए गुणधर्मों को **प्रमेय** (Theorems) कहते हैं ।

युक्लिड द्वारा बताए गए अभिगृहीत में से कुछ अभिगृहीत निम्नलिखित प्रकार से हैं ।

- (1) एक बिंदु से होकर असंख्य रेखाएँ जाती हैं ।
- (2) दो भिन्न बिंदुओं से एक और केवल एक रेखा जाती है ।
- (3) किसी भी बिंदु को केंद्र मानकर दी गई त्रिज्या का वृत्त बनाया जा सकता है ।
- (4) सभी समकोण परस्पर सर्वांगसम होते हैं ।
- (5) दो रेखा तथा उनकी तिर्यक रेखा खींचने पर, तिर्यक रेखा के एक ही ओर बनने वाले अंतः कोणों का योग, दो समकोणों से कम हो तो वे रेखाएँ उसी दिशा में आगे बढ़ाने पर परस्पर प्रतिच्छेदित करती हैं ।



युक्लिड

उपर्युक्त में से कुछ अभिगृहीतों की हमने कृति द्वारा जाँच की हैं ।

कोई गुणधर्म यदि तर्कसंगत रूप से सिद्ध होता है तो वह गुणधर्म सत्य माना जाता है । इसके लिए किए गए तर्कसंगत विन्यास को उस गुणधर्म की अर्थात् प्रमेय की **उपपत्ति** (Proof) कहते हैं ।

कोई सशर्त कथन सत्य है ऐसा सिद्ध करना हो तो कथन के पूर्वार्ध को **दत्त** तथा उत्तरार्ध को **साध्य** कहते हैं ।

उपपत्ति के **प्रत्यक्ष** तथा **अप्रत्यक्ष** ऐसे दो प्रकार होते हैं ।

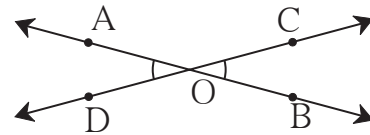
एक-दूसरे को प्रतिच्छेदित करने वाली दो रेखाओं द्वारा बनने वाले कोणों के गुणधर्म की प्रत्यक्ष उपपत्ति दी गई है ।



प्रमेय : परस्पर प्रतिच्छेदित करने वाली दो रेखाओं द्वारा निर्मित शीर्षाभिमुख कोणों के माप समान होते हैं ।

दत्त : रेखा AB तथा रेखा CD परस्पर बिंदु O पर प्रतिच्छेदित करती है । A - O - B, C - O - D

साध्य : (i) $\angle AOC = \angle BOD$
(ii) $\angle BOC = \angle AOD$



आकृति 1.15

उपपत्ति : $\angle AOC + \angle BOC = 180^\circ \dots\dots\dots (I)$ रैखिक युगल कोण
 $\angle BOC + \angle BOD = 180^\circ \dots\dots\dots (II)$ रैखिक युगल कोण
 $\angle AOC + \angle BOC = \angle BOC + \angle BOD \dots\dots\dots$ कथन (I) एवं (II) से
 $\therefore \angle AOC = \angle BOD \dots\dots\dots$ $\angle BOC$ को दोनों पक्षों से घटाने पर
 इसी प्रकार $\angle BOC = \angle AOD$ सिद्ध कर सकते हैं ।

अप्रत्यक्ष उपपत्ति (Indirect proof) :

इस पद्धति में शुरू में साध्य असत्य है ऐसा मानकर चलते हैं । केवल तर्क तथा पहले मान्य सत्य के आधार पर क्रमानुसार एक निष्कर्ष तक पहुँचते हैं । यह निष्कर्ष पता होने पर सत्य गुणधर्म से या दत्त से असंगत होता है । इसलिए साध्य को असत्य मानना गलत है ऐसा निष्कर्ष निकलता है अर्थात् साध्य सत्य है ऐसा स्वीकार किया जाता है । निम्नलिखित उदाहरण का अध्ययन कीजिए ।

कथन : दो से बड़ी अभाज्य संख्या विषम होती है ।

सशर्त कथन : यदि p यह 2 से बड़ी अभाज्य संख्या है तो p यह विषम संख्या है ।

दत्त : p यह 2 से बड़ी अभाज्य संख्या है अर्थात् p का 1 तथा p ऐसे दो विभाजक हैं ।

साध्य : p एक विषम संख्या है ।

उपपत्ति : माना p विषम संख्या नहीं है ।

अर्थात् p सम संख्या है ।

$\therefore 2$ यह p का विभाजक है । (I)

परंतु p से 2 से बड़ी अभाज्य संख्या है ।(दत्त)

$\therefore p$ के 1 तथा p ऐसे दो ही विभाजक हैं । (II)

कथन (I) तथा (II) दत्त से असंगत है ।

अतः माना गया कथन गलत है ।

अर्थात्, p यह 2 से बड़ी अभाज्य संख्या हो तो वह संख्या विषम है यह सिद्ध हुआ ।

प्रश्नसंग्रह 1.3

- निम्नलिखित कथनों को यदि-तो के रूप में लिखिए ।
 - समांतर चतुर्भुज के सम्मुख कोण सर्वांगसम होते हैं ।
 - आयत के विकर्ण सर्वांगसम होते हैं ।
 - समद्विबाहु त्रिभुज में शीर्षबिंदु तथा आधार के मध्यबिंदु को जोड़ने वाला रेखाखंड आधार पर लंब होता है ।
- नीचे दिए गए कथनों के विलोम लिखिए ।
 - दो समांतर रेखाएँ तथा उनकी तिर्यक रेखा दी गई हो तो एकांतर कोण सर्वांगसम होते हैं ।
 - दो रेखाओं को एक तिर्यक रेखा द्वारा प्रतिच्छेदित करने पर बनने वाले अंतः कोणों की एक जोड़ी संपूरक हो तो वे रेखाएँ परस्पर समांतर होती हैं ।
 - आयत के विकर्ण सर्वांगसम होते हैं ।

प्रकीर्ण प्रश्नसंग्रह 1

- निम्नलिखित वैकल्पिक प्रश्नों के लिए दिए गए उत्तरों में से योग्य विकल्प चुनकर लिखिए ।
 - प्रत्येक रेखाखंड के कितने मध्यबिंदु होते हैं ?
 (A) केवल एक (B) दो (C) तीन (D) अनेक
 - दो भिन्न रेखाएँ परस्पर प्रतिच्छेदित करती हो तो उनके प्रतिच्छेदन समुच्चय में कितने बिंदु होते हैं ?
 (A) अनंत (B) दो (C) केवल एक (D) एक भी नहीं
 - तीन भिन्न बिंदुओं को समाविष्ट करने वाली कितनी रेखाएँ होती हैं ?
 (A) दो (B) तीन (C) एक या तीन (D) छह
 - बिंदु A का निर्देशांक -2 तथा B का निर्देशांक 5 हो तो $d(A,B)$ = कितना ?
 (A) -2 (B) 5 (C) 7 (D) 3
 - यदि $P-Q-R$ तथा $d(P,Q) = 2$, $d(P,R) = 10$, तो $d(Q,R)$ = कितना ?
 (A) 12 (B) 8 (C) $\sqrt{96}$ (D) 20
- संख्यारेखा पर बिंदु P, Q, R के निर्देशांक क्रमशः 3, -5 तथा 6 हैं तो निम्नलिखित कथन सत्य है अथवा असत्य लिखिए ।
 - $d(P,Q) + d(Q,R) = d(P,R)$
 - $d(P,R) + d(R,Q) = d(P,Q)$
 - $d(R,P) + d(P,Q) = d(R,Q)$
 - $d(P,Q) - d(P,R) = d(Q,R)$
- नीचे कुछ बिंदुओं की जोड़ियों के निर्देशांक दिए गए हैं । इसके आधार पर प्रत्येक जोड़ी की दूरी ज्ञात कीजिए ।
 - 3, 6
 - 9, -1
 - 4, 5
 - 0, -2
 - $x + 3, x - 3$
 - 25, -47
 - 80, -85

4. संख्या रेखा पर बिंदु P का निर्देशांक -7 है तो P से 8 इकाई की दूरी पर स्थित बिंदुओं के निर्देशांक लिखिए ।
5. दी गई जानकारी के आधार पर नीचे दिए गए प्रश्नों के उत्तर लिखिए ।
 - (i) यदि $A-B-C$ तथा $d(A,C) = 17$, $d(B,C) = 6.5$ तो $d(A,B) = ?$
 - (ii) यदि $P-Q-R$ तथा $d(P,Q) = 3.4$, $d(Q,R) = 5.7$ तो $d(P,R) = ?$
6. संख्या रेखा पर बिंदु A का निर्देशांक 1 है । A से 7 इकाई की दूरी पर स्थित बिंदुओं के निर्देशांक लिखिए ।
7. निम्नलिखित कथन सशर्त रूप में लिखिए ।
 - (i) प्रत्येक समचतुर्भुज यह वर्ग होता है ।
 - (ii) रैखिक युगल कोण परस्पर संपूरक होते हैं ।
 - (iii) त्रिभुज यह तीन रेखाखंडों द्वारा निर्मित आकृति होती है ।
 - (iv) केवल दो ही विभाजक हो ऐसी संख्या को अभाज्य संख्या कहते हैं ।
8. निम्नलिखित कथनों के विलोम लिखिए ।
 - (i) किसी बहुभुजाकृति के कोणों के मापों का योग 180° हो तो वह आकृति त्रिभुज की होती है ।
 - (ii) दो कोणों के मापों का योग 90° हो तो वे परस्पर कोटिपूरक कोण होते हैं ।
 - (iii) दो समांतर रेखाओं को एक तिर्यक रेखा प्रतिच्छेदित करें तो बनने वाले संगत कोण सर्वांगसम होते हैं ।
 - (iv) किसी संख्या में उसके अंकों के योगफल से भाग जाता हो तो वह संख्या 3 से विभाज्य होती है ।
9. निम्नलिखित कथनों में दत्त तथा साध्य लिखिए ।
 - (i) यदि त्रिभुज की तीनों भुजाएँ सर्वांगसम हों तो उस त्रिभुज के तीनों कोण सर्वांगसम होते हैं ।
 - (ii) समांतर चतुर्भुज के विकर्ण परस्पर समद्विभाजित होते हैं ।
- 10*. निम्नलिखित कथनों के लिए नाम निर्देशित आकृति बनाकर दत्त तथा साध्य लिखिए ।
 - (i) दो समबाहु त्रिभुज समरूप होते हैं ।
 - (ii) यदि रैखिक युगल कोण सर्वांगसम हों तो उनमें से प्रत्येक कोण समकोण होता है ।
 - (iii) त्रिभुज की दो भुजाओं पर खींचे गए शीर्षलंब यदि सर्वांगसम हों तो वे दोनों भुजाएँ सर्वांगसम होती हैं ।

