7 सांख्यिकी

आओ, सीखें

- संयुक्त स्तंभालेख
- विभाजित स्तंभालेख
- प्रतिशत स्तंभालेख
- प्राथमिक और द्वितीयक सामग्री
- अवर्गीकृत तथा वर्गीकृत बारंबारता बटन सारिणी
- संचयी बारंबारता सारिणी
- माध्य, माध्यिका और बहुलक (अवर्गीकृत सामग्री के लिए)

थोड़ा याद करें

पिछली कक्षाओं में हमने देखा है कि साधारण स्तंभालेख और संयुक्त स्तंभालेख कैसे खींचते हैं । इसी प्रकार समाचार पत्र, पत्रिकाएँ, दूरदर्शन आदि के माध्यम से विभिन्न आलेखों को देखकर उनकी जानकारी प्राप्त की है ।

दी गई जानकारी के आधार पर उचित प्रस्तुतीकरण करने वाला आलेख बनाना महत्त्वपूर्ण होता है ।

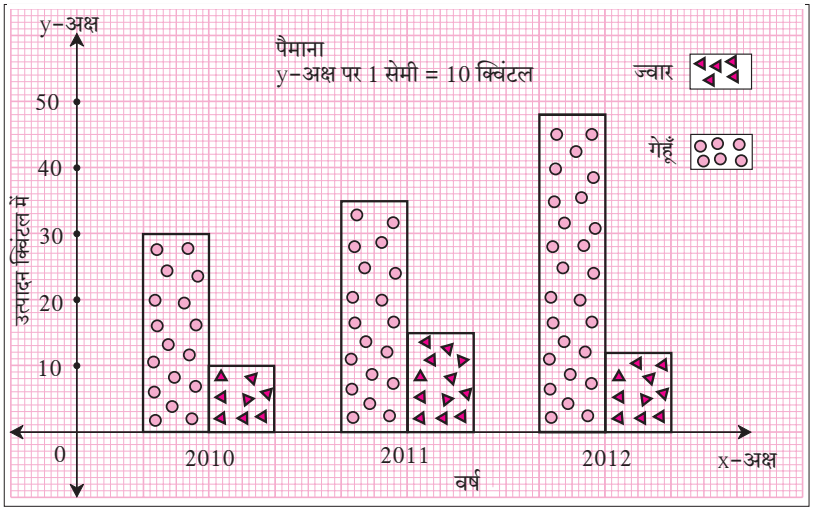
उदा. किसी किसान की खेती में गेहूँ तथा ज्वार की फसलों का तीन वर्षों में प्राप्त उत्पादन प्रदर्शित करने वाला संयुक्त स्तंभालेख नीचे दर्शाया गया है । इसके आधार पर दिए गए प्रश्नों के उत्तर लिखिए ।

(i) तीन वर्षों में किस अनाज के उत्पादन में सतत वृद्धि हुई है ।

(ii) वर्ष 2011 की अपेक्षा वर्ष 2012 में ज्वार के उत्पादन में कितनी कमी आई हैं ?

(iii) वर्ष 2010 में तथा वर्ष 2012 में गेहूँ के उत्पादन में कितना अंतर है ?

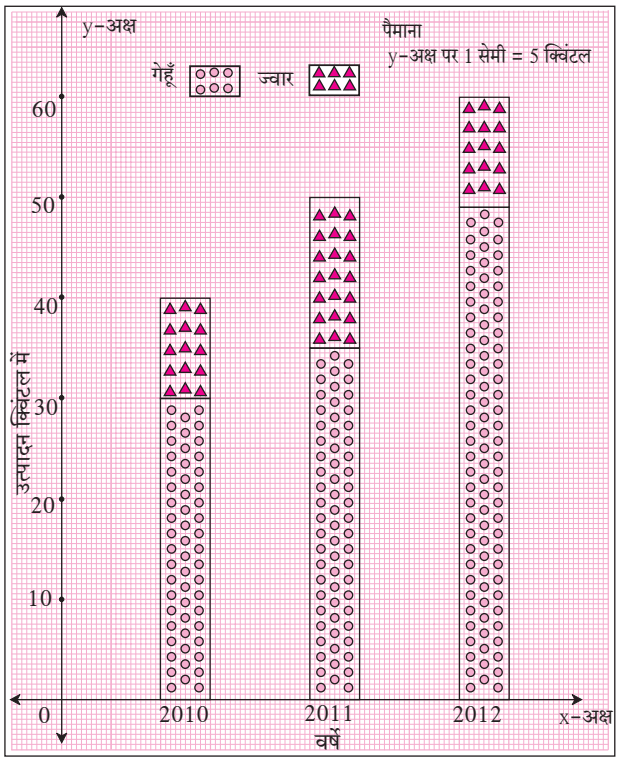
(iv) इस आलेख में दी गई जानकारी के आधार पर निम्न सारिणी पूर्ण कीजिए ।



वर्ष / उत्पादन (क्विंटल)	गेहूँ	ज्वार	कुल
2010			
2011			
2012	48	12	60

विभाजित स्तंभालेख (Sub–divided bar diagram)

दी गई सामग्री के जानकारी की तुलना प्रदर्शित करने वाला स्तंभालेख भिन्न पद्धति से भी खींचा जा सकता है । उसे विभाजित स्तंभालेख कहते हैं । इनमें सामग्री के एक ही प्रकार के दो घटकों को जोड़ते हैं तथा प्राप्त योगफल को उचित पैमाना लेकर स्तंभालेख में दर्शाया जाता है । स्तंभ के प्रत्येक घटक को दर्शाने वाला भाग उचित प्रमाण में लेते हैं । पिछले उदाहरण में जानकारियों को दर्शाने वाले विभाजित स्तंभालेख कैसे बनाएँ, यह हम देखेंगे ।



(i) कुल उत्पादन के बराबर प्रत्येक स्तंभ की ऊँचाई को उचित पैमाने से दर्शाइए ।

(ii) इसमें गेहूँ का उत्पादन यह कुल उत्पादन के स्तंभ का एक भाग होगा, उसे कुछ चिह्नों द्वारा दर्शाइए ।

(iii) स्तंभ का शेष भाग स्वाभाविक ही ज्वार का उत्पादन दर्शाएगा । इसे अलग चिह्नों द्वारा दर्शाइए ।

इस विधि से बनाई गई संलग्न विभाजित स्तंभालेख की आकृति देखिए ।

दो घटकों के प्रतिशतानुसार की गई तुलना कभी–कभी अधिक उपयोगी होती है, इसका हमने अध्ययन किया है । उदाहरण 2000 रुपयों में 600 रुपये का लाभ और 1500 रुपयों पर 510 रुपये का लाभ जिसमें 600 रुपयों का लाभ अधिक दिखता है किंतु दोनों लाभ का प्रतिशत क्रमशः 30% और 34% को ध्यान में रखा जाए तो 1500 रुपयों पर 510 रुपये का लाभ व्यवहार में अधिक फायदेमंद है ।

प्रतिशत स्तंभालेख (Percentage bar diagram)

दी गई जानकारी की तुलना अलग तरीके से समझने के लिए दी गई जानकारियों को प्रतिशत में रूपांतरित करके जो विभाजित स्तंभालेख बनाया जाता है, उसे प्रतिशत स्तंभालेख कहते हैं । पिछले उदाहरण की जानकारी को प्रतिशत के रूप में सारिणी मे दर्शाई गई है ।

वर्ष	गेहूँ का उत्पादन (क्विं.)	ज्वार का उत्पादन (क्विं.)	कुल उत्पादन की तुलना मे गेहूँ के उत्पादन का प्रतिशत
2010	30	10	$\frac{30}{40} \times 100 = 75\%$
2011	35	15	$\frac{35}{50} \times 100 = 70\%$
2012	48	12	$\frac{48}{60} \times 100 = 80\%$

इस जानकारी का दर्शाने वाला स्तंभालेख निम्नलिखित सोपानों के अनुसार बनाया गया है ।

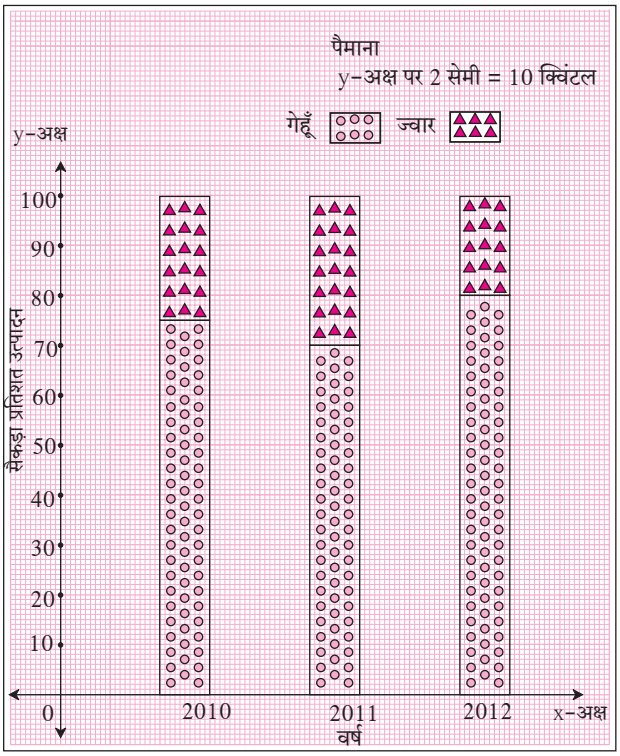
(i) प्रत्येक वर्ष में गेहूँ तथा ज्वार के कुल उत्पादन में से गेहूँ के उत्पादन तथा ज्वार के उत्पादन का प्रतिशत ज्ञात किया ।

(ii) प्रत्येक स्तंभ की Y-अक्ष पर पैमानानुसार ऊँचाई 100 ली गई है ।

(iii) कुल उत्पादन में गेहूँ के उत्पादन का प्रतिशत लिए गए पैमाने के अनुसार स्तंभ के भाग को चिह्न द्वारा दर्शाया गया है ।

(iv) स्तंभ का शेष भाग कुल उत्पादन में से ज्वार के उत्पादन का प्रतिशत दर्शाता है ।

दो से अधिक घटकों की जानकारी को विभाजित या प्रतिशत स्तंभालेख से दर्शाया जाता है ।



हल किए गए उदाहरण

उदा. (1) संलग्न प्रतिशत स्तंभालेख में दो परिवारों के विभिन्न घटकों पर खर्च की जानकारी दी गई है । निम्नलिखित के उत्तर लिखिए ।

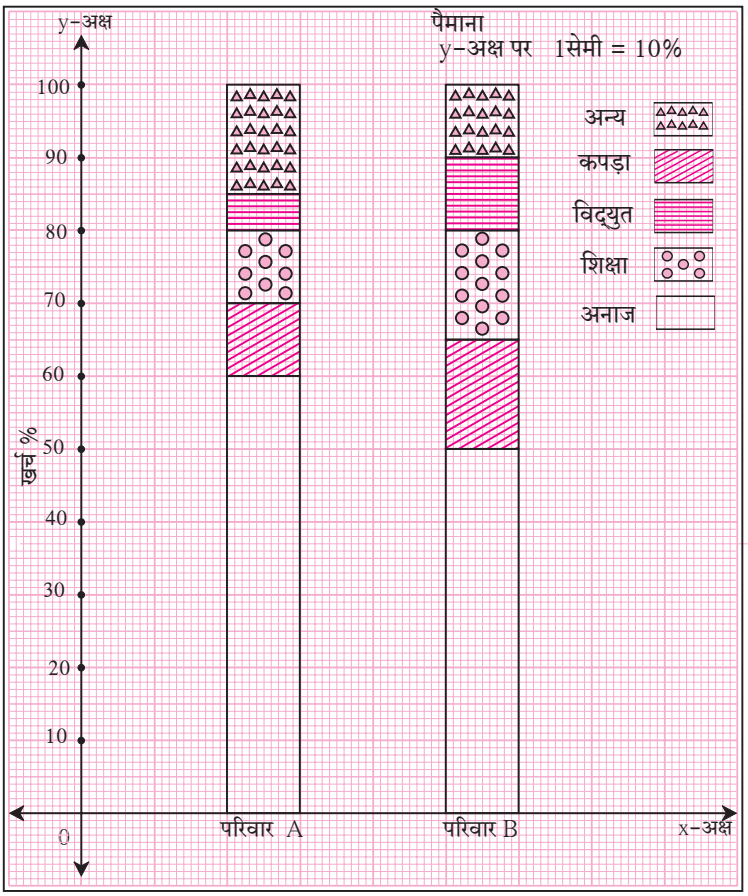
(i) प्रत्येक परिवार के विभिन्न घटकों पर खर्च का प्रतिशत लिखिए ।

(ii) किस परिवार के अनाज का खर्च उसके कुल खर्च की तुलना में अधिक है ? कितने प्रतिशत अधिक है ?

(iii) दोनों परिवारों के अन्य खर्च का प्रतिशत कितना है ?

(iv) किस परिवार का विद्युत खर्च का प्रतिशत अधिक है ?

(v) किस परिवार के शिक्षा के खर्च का प्रतिशत अधिक है ।



हल : (i)

परिवार \ खर्च	अनाज	कपड़ा	शिक्षा	विद्युत	अन्य
A	60%	10%	10%	5%	15%
B	50%	15%	15%	10%	10%

(ii) परिवार A का अनाज का खर्च, कुल खर्च की तुलना में परिवार B के खर्च की अपेक्षा 10% अधिक है ।

(iii) परिवार A का अन्य खर्च 15% तथा परिवार B का अन्य खर्च 10% है ।

(iv) परिवार B का विद्युत खर्च का प्रतिशत अधिक है । (v) परिवार B का शिक्षा खर्च का प्रतिशत अधिक है ।

प्रश्नसंग्रह 7.1

(1) निम्नलिखित सारिणी में भारत में ट्रक एवं बसों की संख्या (लगभग लाखों में) नीचे दी गई है, इसके आधार पर प्रतिशत स्तंभालेख बनाइए । (प्रतिशत निकटतम पूर्णांक तक लें ।)

वर्ष	ट्रक की संख्या	बस की संख्या
2006-2007	47	9
2007-2008	56	13
2008-2009	60	16
2009-2010	63	18

(2) निम्नसारिणी में भारत में पक्की सड़क तथा कच्ची सड़क की जानकारी दी गई है इसके आधार पर विभाजित एवं प्रतिशत स्तंभालेख बनाएँ । (प्रतिशत निकटतम पूर्णांक तक लें ।)

वर्ष	पक्की सड़क (लाख किमी)	कच्ची सड़क (लाख किमी)
2000-2001	14	10
2001-2002	15	11
2002-2003	17	13
2003-2004	20	19

कृति : निम्नलिखित सारिणी में विविध राज्यों में प्रति 1000 लड़कों की तुलना में लड़कियों की संख्या दी गई है इस आधार पर दी गई सारिणी में रिक्त चौखट पूरी कीजिए ।

राज्य	लड़कों की संख्या	लड़कियों की संख्या	कुल	लड़कों का प्रतिशत (निकटतम पूर्णांक तक)	लड़कियों का प्रतिशत (निकटतम पूर्णांक तक)
असम	1000	960	1960	$\frac{1000}{1960} \times \frac{100}{1} = = 51\%$	100 - 51 = 49%
बिहार	1000	840	1840		
पंजाब	1000	900			
केरल	1000	1080			
महाराष्ट्र	1000	900			

सारिणी से प्राप्त जानकारी का प्रतिशत स्तंभालेख बनाइए तथा उससे निष्कर्ष निकाल कर चर्चा कीजिए ।

थोड़ा सोचें पृष्ठ क्रमांक 111 में दी गई कृति के लिए सारिणी में पाँच राज्यों में प्रतिहजार लड़कों की तुलना में लड़कियों की संख्या दी गई है ।
इन्हीं राज्यों का साक्षरता प्रतिशत नीचे दिया गया है ।
असम (73%), बिहार (64%), पंजाब (77%), केरल (94%) व महाराष्ट्र (83%) सारिणी में दी गई लड़कियों की संख्या और उन राज्यों में साक्षरता के प्रतिशत का विचार कीजिए । क्या इससे कुछ निष्कर्ष मिलता है ?

आओ, चर्चा करें

दी गई जानकारी दर्शाने के लिए किस प्रकार का स्तंभालेख बनाना उचित होगा ?

(1) चार गाँवों मे साक्षरता का प्रतिशत ।
(2) एक परिवार के विभिन्न घटकों पर होने वाला खर्च ।
(3) पाँच वर्गों मे से प्रत्येक वर्ग के लड़के और लड़कियों की संख्या ।
(4) तीन दिन तक चलने वाले विज्ञान प्रदर्शनी में देखने आने वाले लोगों की संख्या ।
(5) जनवरी से जून तक प्रत्येक महिनों में आपके गाँव का न्यूनतम और उच्चतम तापमान ।
(6) दुपहिया वाहन चलाते समय हेल्मेट का उपयोग करने वाले तथा न करने वाले 100 परिवार के व्यक्तियों की संख्या ।

आओ, जानें

सांख्यिकी (Statistics)

किसी बड़े समूह का अध्ययन करने के लिए उसमें से कुछ घटक का चुनाव यादृच्छिक विधि से किया जाता है । यह बड़े समूह का प्रतिनिधि समूह होता है । इन प्रतिनिधि समूह की अध्ययन के संदर्भ में जानकारी एकत्र करते हैं । यह जानकारी अधिकांश समय संख्या के स्वरूप में होती है जिसका विश्लेषण कर कुछ निष्कर्ष निकालते हैं । इस प्रकार के अध्ययन को सांख्यिकी (statistics) कहते हैं ।

Statistics यह शब्द status इस लैटिन शब्द से बना है । इसका अर्थ राज्य की स्थिति ऐसा होता है । इससे पहले सांख्यिकी शास्त्र राज्य के प्रशासकीय व्यवहार से संबंधित होता था, ऐसा ध्यान में आता है । किंतु वर्तमान में इस शास्त्र का उपयोग सभी क्षेत्र में किया जाता है । **सर रोनाल्ड ऐल्मर फिशर (Sir Ronald Aylmer Fisher)** (17 फरवरी 1890 – 29 जुलाई 1962) को संख्याशास्त्र का जनक माना जाता है ।

सांख्यिकी आँकड़ों का संकलन (Data collection)

शिक्षिका : किसी गाँव में प्रत्येक परिवार के पास कितनी खेती है इसकी संख्यात्मक जानकारी एकत्र करनी है तो क्या करेंगे ?

रॉबर्ट : सर, गाँव के प्रत्येक घर जाकर प्रत्येक परिवार के पास कितनी खेती है उसे दर्ज करेंगे ।

शिक्षिका : बिलकुल सही, विद्यार्थियों, किसी विशेष समूह के विषय से हम जो जानकारी संकलित करते हैं वह मुख्य रूप से संख्या के स्वरूप में होती है इसे ही सामग्री कहते हैं । सामग्री एकत्र करने के पूर्व उस जानकारी का उपयोग कहाँ करना है, यह जानना आवश्यक है । इसकी जानकारी होनी चाहिए । किसी व्यक्ति द्वारा जानकारी प्राप्त करने हेतु विशिष्ट स्थान पर जाकर प्रश्न पूछना, गणना करना आदि तरीके से संकलित सामग्री को प्राथमिक सामग्री कहते हैं ।

आफरीन : अर्थात रॉबर्ट के बताए अनुसार प्रत्येक घर जाकर खेती की एकत्र की गई जानकारी प्राथमिक सामग्री होगी ।

शिक्षिका : शाबास आफरीन !

रमेश : किंतु सर, उपरोक्त जानकारी कम समय में एकत्र करनी हो तो ?

शिक्षिका : रमेश का कहना सही है, ऐसे समय जानकारी एकत्र करने का दूसरा उपाय क्या होगा ? इसपर चर्चा कीजिए ।

केतकी : सर, हम पटवारी कार्यालय जाकर उनके पास उपलब्ध खेती संबंधी दर्ज जानकारी एकत्र कर सकते हैं ।

शिक्षिका : सही है, कुछ परिस्थितियों में समय की उपलब्धता और साधनों का अभाव जैसे कारणों से व्यक्तिगत रूप में आँकड़ों का संकलन संभव नहीं हो पाता । ऐसी स्थिति में दूसरों द्‌वारा संकलित किए गए आँकड़ों या अहवाल कार्यालय में जारी की गई सामग्री या शोध निबंध, शासकीय विभागो में उपलब्ध जानकारी आदि स्वरूप में रखी गई सामग्री (आँकड़े) का उपयोग करते हैं, ऐसी उपलब्ध जानकारी को द्‌वितीयक सामग्री कहते हैं अर्थात केतकी के सुझाए अनुसार पटवारी के कार्यालय में जाकर खेती संबंधी संकलित की गई जानकारी द्‌वितीयक सामग्री हैं ।

निम्नलिखित उदाहरण देखिऐ ।

(i) समाचार पत्र में दी गई जानकारी का उपयोग कर बनी सारिणी ही द्‌वितीयक सामग्री होगी ।

(ii) उपहारगृह में पदार्थों का स्तर समझने के लिए ग्राहकों द्‌वारा पूछी गई जानकारी प्राथमिक सामग्री होगी ।

(iii) कक्षा के विद्‌यार्थियों की प्रत्यक्ष ऊँचाई नापकर दर्ज की गई जानकारी प्राथमिक सामग्री होगी ।

प्राथमिक सामग्री (आँकड़े)	द्‌वितीयक सामग्री (आँकड़े)
1. एकत्र करने में अधिक समय लगता है ।	1. तुरंत उपलब्ध हो सकता है ।
2. अद्‌यावत तथा विवरणानुसार होती है ।	2. इसमें पूर्व संकलित जानकारी लेने के कारण वह जानकारी अद्‌यावत होगी हो ऐसा नहीं है जानकारी के विवरण में कुछ कमियाँ रहती है ।
3. सटीक तथा विश्वसनीय होती है ।	3. यह कमी विश्वसनीय हो सकती है ।

कृति : आप अनेक बार विविध कारणों के लिए जानकारी एकत्र करते हैं । ऐसे 3 से 4 उदाहरण लेकर एकत्र की गई सामग्री प्राथमिक होगी कि द्‌वितीयक इसपर चर्चा कीजिए ।

प्रश्नसंग्रह 7.2

(1) निम्नलिखित प्रकार से एकत्रित की गई सामग्री का प्राथमिक अथवा द्‌वितीयक सामग्री में वर्गीकरण कीजिए ।

(i) कक्षा में प्रत्यक्ष जाकर विद्‌यालय के प्रत्येक कक्षा के विद्‌यार्थियों की उपस्थिति की जानकारी एकत्रित की गई ।

(ii) प्रत्येक विद्‌यार्थी की ऊँचाई की जानकारी वरिष्ठ कार्यालय में तुरंत भेजने के कारण विद्‌यालय के शारीरिक शिक्षा विभाग में दर्ज की गई जानकारी एकत्रित की गई ।

(iii) नांदपुर के प्रत्येक परिवार के शालाबाह्य विद्‌यार्थी की प्रत्यक्ष जानकारी घर-घर जाकर एकत्रित की गई ।

(iv) विज्ञान प्रकल्प के लिए वन में प्रत्यक्ष जाकर वृक्षों का निरीक्षण करके जानकारी एकत्रित की गई ।

थोड़ा याद करें

सामग्री का वर्गीकरण (Classification of data)

उदा. (1) किसी विद्यालय के कक्षा 9 वीं के 50 विद्यार्थियों ने प्रथम घटक जाँच परीक्षा में बीजगणित के 20 अंकों में से प्राप्त अंकों का विवरण निम्नलिखित है ।

20, 6, 14, 10, 13, 15, 12, 14, 17, 17, 18, 11, 19, 9, 16, 18, 14, 7, 17, 20, 8, 15, 16, 10, 15, 12, 18, 17, 12, 11, 11, 10, 16, 14, 16, 18, 10, 7, 17, 14, 20, 17, 13, 15, 18, 20, 12, 12, 15, 10

एकत्रित की गई इस संख्यात्मक जानकारी को क्या कहते हैं ?..... कच्चे आँकड़े (सामग्री)

इसमें प्रत्येक संख्या को क्या कहते हैं ?..... प्राप्तांक

उपरोक्त जानकारी के आधार पर निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर प्राप्त कीजिए ।

(i) 15 अंक प्राप्त करने वाले कुल कितने विद्यार्थी हैं ?

(ii) 15 से अधिक अंक प्राप्त करने वाले कुल कितने विद्यार्थी हैं ?

(iii) 16 से कम अंक प्राप्त करने वाले कुल कितने विद्यार्थी हैं ?

(iv) न्यूनतम अंक कितने हैं ?

(v) अधिकतम अंक कितने हैं ?

आओ, चर्चा करें

(1) आपको उपरोक्त प्रश्नों के उत्तर सहजता से प्राप्त हो गए या हर बार अंकों का निरीक्षण करना पड़ा ?

(2) उपरोक्त कार्य आसान होने के लिए क्या कर सकते हैं ?

शमीम : उपरोक्त प्रश्नों के उत्तर हर बार निरीक्षण करने के कारण यह कार्य कठिन और नीरस हुआ है किंतु यदि दी गई कच्ची सामग्री आरोही अथवा अवरोही क्रम में लिखी गई हो तो इस कार्य मे आसानी होगी ।

शमीम के कथनानुसार सामग्री के अंक आरोही क्रम में लिखिए ।

6, 7, 7, 8, 9, 10, 10, 10, 10, 10, 11, 11, 11, 12, 12, 12, 12, 12, 13, 13, 14, 14, 14, 14, 14, 15, 15, 15, 15, 15, 16, 16, 16, 16, 17, 17, 17, 17, 17, 17, 18, 18, 18, 18, 18, 19, 20, 20, 20, 20

जानकारी को आरोही क्रम से लिखने के बाद उदाहरण के सभी पाँच प्रश्नों के उत्तर आसानी से मिलते हैं क्या ? इसकी जाँच कीजिए ।

जाँच से यह स्पष्ट होगा कि सामग्री को यदि हम आरोही क्रम से लिखें तो सभी पाँच प्रश्नों के उत्तर हमें आसानी से मिलते हैं ।

थोड़ा याद करें

मार्टीन : पिछली कक्षा में हमने अध्ययन किया है कि सामग्री (आँकड़ों) को सारिणी के रूप में रखने पर उपर्युक्त कार्य को अधिक सरलता से किया जा सकता है । इस सारिणी को बारंबारता सारिणी कहते हैं ।

शिक्षिका : मार्टीन, बिलकुल सही ! हम यह सारिणी उपर्युक्त उदाहरण 1 के आधार पर बनाएँ ।

उदाहरण (1) में सबसे कम अंक 6 है और सबसे अधिक अंक 20 है इसलिए तालिका में प्राप्तांकों के स्तंभ में 6 से 20 प्राप्तांक लिखिए। दूसरे स्तंभ में गणन चिह्न तथा अंतिम स्तंभ में चिह्न गिनकर बारंबारता लिखें।

बारंबारता बंटन सारिणी

प्राप्तांक (गुण)	गणन चिह्न	बारंबारता
6	|	1
7	||	2
8		
9		
10	𝍸	5
11		
12		
13		
14		
15		
16		
17	𝍸 |	6
18		
19		
20	||||	4
		कुल N = 50

N यह सभी बारंबारताओं का योगफल है।

आओ, चर्चा करें

वर्गीकृत बारंबारता बंटन सारिणी (Grouped Frequency Distribution Table)

उपर्युक्त बारंबारता बंटन सारिणी में,

(1) यह सारिणी बहुत बड़ी हो गई है। ऐसा लगता है क्या ?

(2) जब सामग्री में प्राप्तांकों की संख्या अधिक हो तो सारिणी बनाना कठिन होगा क्या?

शिक्षिका : उपरोक्त चर्चा के आधार पर यह ध्यान में आता है कि जब सामग्री में प्राप्तांकों की संख्या अधिक हो तो बारंबारता बंटन सारिणी का विस्तार अधिक हो जाता है। यह सारिणी बनाने में अधिक समय लगता है। सारिणी का विस्तार और समय कम करने के लिए कुछ उपाय कर सकते हैं क्या?

रोहित : सर, ऐसे समय सामग्री के समूह बनाने चाहिए।

शिक्षिका : शाबास ! रोहित सामग्री का समूह बनाना अर्थात वर्ग बनाया तो वह सामग्री सुविधाजनक होगी तथा समय भी कम लगेगा । ऐसी ही सारिणी वर्गीकृत को बारंबारता बंटन सारिणी कहते हैं ।

ऐसी सारिणी की दो पद्धतियाँ हैं (1) समावेशी पद्धति (2) असमावेशी पद्धति

(1) समावेशी पद्धति (खंडित वर्ग) (Inclusive method)

6, 7, 7, 8, 9, 10, 10, 10, 10, 10, 11, 11, 11, 12, 12, 12, 12, 12, 13, 13, 14, 14, 14, 14, 14, 15, 15, 15, 15, 15, 16, 16, 16, 16, 17, 17, 17, 17, 17, 17, 18, 18, 18, 18, 18, 19, 20, 20, 20, 20

उपरोक्त सामग्री में सबसे छोटा प्राप्तांक ☐ तथा सबसे बड़ा प्राप्तांक ☐ है । सबसे बड़े तथा सबसे छोटे प्राप्तांकों का अंतर 20 – 6 = 14 है । इस अंतर को ही **सामग्री का विस्तार** कहते हैं । इस विस्तार को ध्यान मे रखकर सामग्री के सुविधाजनक कौन से वर्ग बनाए जा सकते हैं ?

(i) 6 से 8, 9 से 11, 12 से 14, 15 से 17, 18 से 20 या

(ii) 6 से 10, 11 से15, 16 से 20 ऐसे वर्ग बनाए जाएँगे ।

6 से 10, 11 से 15, 16 से 20 इन वर्गों को खंडित वर्ग कहते हैं ।

6 से 10, 11 से 15 और 16 से 20 वर्ग लेकर उपरोक्त सामग्री की बारंबारता बंटन सारिणी बनाएँ ।

वर्गीकृत बारंबारता बंटन सारिणी (समावेशी पद्धति)

वर्ग	गणन चिह्न	बारंबारता
6 ते 10	𝍸 𝍸	**10**
11 ते 15	.....	.....
16 ते 20	.....	20
		N = 50

यह सारिणी बनाते समय 6, 10 तथा उसके मध्य के सभी प्राप्तांकों का समावेश 6 से 10 वाले वर्ग में होता है इसलिए सारिणी बनाने की इस पद्धति को समावेशी पद्धति कहते हैं ।

आओ, जानें

सांख्यिकी के कुछ मूलभूत पद(Basic terms in statistics)

(1) **वर्ग (Class) :** प्राप्तांकों के सुविधाजनक आकार के समूह को वर्ग कहते हैं ।

6 से 10, 11 से 15 इन वर्गों को 6–10, 11–15 ऐसा भी लिखते हैं ।

(2) **वर्ग सीमा (Class limits) :** वर्ग दर्शाने वाली संख्याओं को वर्ग सीमा कहते हैं ।

6 से 10 इस वर्ग में 6 यह निम्न वर्ग सीमा तथा 10 यह उच्च वर्ग सीमा हैं ।

(3) **बारंबारता (Frequency) :** प्रत्येक वर्ग में जितने प्राप्तांक आते हैं, उन प्राप्तांकों की कुल संख्या को उस वर्ग की बारंबारता कहते हैं ।

उपरोक्त सारिणी में 11 से 15 वर्ग में 20 प्राप्तांक आते हैं इसलिए 11 से 15 इस वर्ग की बारंबारता 20 है । ऐसा कहा जाता है ।

4. **वर्गांतर (Class width) :** दिए गए अखंडित वर्ग के क्रमागत दो वर्ग की निम्न वर्ग सीमा या (उच्च वर्ग सीमा) के अंतर को वर्गांतर कहते हैं ।

उदा. 5 – 10, 10 – 15, 15 – 20, ... ऐसे वर्ग हों तो 5–10 का वर्गांतर = 10 – 5 = 5 है ।

5. **वर्ग मध्य (Class mark) :** वर्ग की उच्च वर्ग सीमा तथा निम्न वर्ग सीमा के माध्य या औसत को वर्ग मध्य कहते हैं ।

$$\text{वर्ग मध्य} = \frac{\text{निम्न वर्ग सीमा} + \text{उच्च वर्ग सीमा}}{2}$$

उदा. 11 से 15 का वर्ग मध्य $= \frac{\square + \square}{2} = \frac{26}{2} = 13$

(2) असमावेशी पद्धति (अखंडित वर्ग) (Exclusive method)

उदा. 6, 10, 10.3, 11, 15.7, 19, 20, 12, 13 प्राप्तांक दिए गए हैं ।
6–10, 11–15, 16–20 इस प्रकार वर्ग लेकर इसकी वर्गीकृत बारंबारता बंटन सारिणी बनाइए ।

हल :

वर्ग (प्राप्तांक)	गणन चिह्न	बारंबारता (f)
6–10	||	2
11–15	|||	3
16–20	||	2

उपरोक्त सारिणी में दिए गए प्राप्तांक में 10.3 तथा 15.7 इन दोनों प्राप्तांक को समाविष्ट नहीं किया जा सका।

क्योंकि संख्याएँ 10.3 तथा 15.7, 6–10, 11–15, 16–20 में से किसी भी वर्ग मे समाविष्ट नहीं होती इसके लिए वर्ग रचना बदलना होगा । इसलिए यह वर्ग 5–10, 10–15, 15–20, ... इस प्रकार क्रम में लिखने पर उपरोक्त प्रश्न निर्माण नहीं होगा किंतु 10 इस प्राप्तांक को 5–10, 10–15 में से किस वर्ग में दर्ज करना है यह प्रश्न उठता है । इस प्रकार की कठिनाइयों को दूर करने के लिए प्राप्तांक 10 को 5–10 इस वर्ग में न लेकर 10–15 इस वर्ग में समाविष्ट करें ऐसा संकेत है, इसलिए 10 को 10–15 इस वर्ग में दर्ज करेंगे । इस पद्धति को असमावेशी पद्धति कहते हैं । इस प्रकार वर्ग लेने पर 10.3 तथा 15.7 इस संख्याओं का सारिणी में समावेश किया गया ।

अब इस प्रकार वर्ग लेकर और संकेत के अनुसार बनाई गई सारिणी देखिए ।

वर्गीकृत बारंबारता बंटन सारिणी **(असमावेशी पद्धति)**

वर्ग (अखंड़ित वर्ग)	गणन चिह्न	बारंबारता (f) (विद्यार्थी संख्या)
5–10	|	1
10–15	𝍸	5
15–20	||	2
20–25	|	1

इसे ध्यान में रखें

बारंबारता बंटन सारिणी

अवर्गीकृत

नौवीं कक्षा के विद्यार्थियों की आयु	विद्यार्थियों की संख्या
14	12
15	23
16	10

वर्गीकृत

समावेशी पद्धति (खंडित वर्ग)

जूते का क्रमांक	विद्यार्थियों की संख्या
2-4	12
5-7	29
8-10	7

असमावेशी पद्धति (अखंडित वर्ग)

ऊँचाई(सेमी)	विद्यार्थियों की संख्या
145-150	18
150-155	27
155-160	3

प्रश्नसंग्रह 7.3

(1) 20 से 25 इस वर्ग की निम्न वर्ग सीमा तथा उच्च वर्ग सीमा लिखिए ।

(2) 35 से 40 इस वर्ग का वर्ग मध्य ज्ञात कीजिए ।

(3) किसी वर्ग का वर्गमध्य 10 तथा वर्ग अंतराल 6 हो तो वह वर्ग लिखिए ।

(4) नीचे दी गई सारिणी पूर्ण कीजिए ।

वर्ग (आयु वर्ष)	गणन चिह्न	बारंबारता (f) (विद्यार्थी संख्या)
12-13	𝍸	☐
13-14	𝍸 𝍸 ||||	☐
14-15		☐
15-16	||||	☐
		$N=\sum f = 35$

(5) किसी विद्यालय के हरित सेना के 45 विद्यार्थियों में से प्रत्येक द्वारा किए गए वृक्षारोपण की संख्या नीचे दी गई है ।

3, 5, 7, 6, 4, 3, 5, 4, 3, 5, 4, 7, 5 , 3, 6, 6, 5, 3, 4, 5, 7, 3, 5, 6, 4, 4, 3, 5, 6, 6, 4, 3, 5, 7, 3, 4, 5, 7, 6, 4, 3, 5, 4, 4, 7.

इसके आधार पर अवर्गीकृत बारंबारता बंटन सारिणी बनाइए ।

(6) π का 50 दशमलव स्थान तक का मान निम्नलिखित है ।

3.14159265358979323846264338327950288419716939937510

इसका दशमलव चिह्न के पश्चात के अंकों की अवर्गीकृत बारंबारता बंटन सारिणी बनाइए ।

(7*) दी गई सारिणी में जानकारी के आधार पर वर्गांतर ज्ञात कीजिए तथा अखंडित वर्ग और खंडित वर्ग वाली बारंबारता बंटन सारिणी बनाएँ ।

(i)

वर्गमध्य	बारंबारता
5	3
15	9
25	15
35	13

(ii)

वर्गमध्य	बारंबारता
22	6
24	7
26	13
28	4

(8) एक विद्यालय के 9 वीं कक्षा के 46 विद्यार्थियों को कंपास में पेंसिल की लंबाई मापन करने को कहा गया । लंबाइयाँ सेमी में निम्न प्रकार से हैं ।

16, 15, 7, 4.5, 8.5, 5.5, 5, 6.5, 6, 10, 12,
13, 4.5, 4.9, 16, 11, 9.2, 7.3, 11.4, 12.7, 13.9, 16,
5.5, 9.9, 8.4, 11.4, 13.1, 15, 4.8, 10, 7.5, 8.5, 6.5,
7.2, 4.5, 5.7, 16, 5.7, 6.9, 8.9, 9.2, 10.2, 12.3, 13.7,
14.5, 10

0–5, 5–10, 10–15, ... इस प्रकार वर्ग लेकर असमावेशी पद्धति से वर्गीकृत बारंबारता बंटन सारिणी बनाए ।

(9) एक गाँव में सहकारी दूध संकलन केंद्र पर 50 लोगों में प्रत्येक ने कितना लीटर दूध जमा किया इसकी जानकारी नीचे दी गई है ।

27, 75, 5, 99, 70, 12, 15, 20, 30, 35, 45, 80,
77, 90, 92, 72, 4, 33, 22, 15, 20, 28, 29, 14,
16, 20, 72, 81, 85, 10, 16, 9, 25, 23, 26, 46,
55, 56, 66, 67, 51, 57, 44, 43, 6, 65, 42, 36,
7, 35

उचित वर्ग लेकर वर्गीकृत बारंबारता बंटन सारिणी बनाइए ।

(10) किसी गाँव में एक संस्था ने 38 लोगो से 'दिव्यांग विकास निधि' एकत्र किया प्रत्येक व्यक्ति द्वारा दी गई राशि निम्न प्रकार से है ।

101, 500, 401, 201, 301, 160, 210, 125, 175, 190, 450, 151,
101, 351, 251, 451, 151, 260, 360, 410, 150, 125, 161, 195,
351, 170, 225, 260, 290, 310, 360, 425, 420, 100, 105, 170,
250, 100

(i) 100–149, 150–199, 200–249, ... ऐसे वर्ग लेकर वर्गीकृत बारंबारता बंटन सारिणी बनाइए ।

(ii) सारिणी के अनुसार 350 रु. या राशि इससे अधिक देने वाले दानदाताओं की संख्या कितनी होगी ?

आओ, जानें

उच्च वर्ग सीमा से कम संचयी बारंबारता (Less than cumulative frequency)

उदा. एक विद्यालय के नौवीं कक्षा के 50 विद्यार्थियों के प्रथम घटक परीक्षा में गणित में 40 में से प्राप्त अंकों की बारंबारता बंटन सारिणी दी गई है ।

वर्ग	बारंबारता (विद्यार्थियों की संख्या)
0–10	02
10–20	12
20–30	20
30–40	16
	कुल N = 50

(1) सारिणी के अनुसार रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए ।

(i) 10 से 20 वर्ग में निम्न वर्ग सीमा ☐ तथा उच्च वर्ग सीमा ☐ है ।

(ii) 10 से कम अंक प्राप्त करने वाले विद्यार्थी कितने हैं ? ☐2☐

(iii) 20 से कम अंक प्राप्त करने वाले विद्यार्थी कितने हैं ? 2 + ☐ = 14

(iv) 30 से कम अंक प्राप्त करने वाले विद्यार्थी कितने हैं ? ☐ + ☐ = 34

(v) 40 से कम अंक प्राप्त करने वाले विद्यार्थी कितने हैं ? ☐ + ☐ = 50

इसे ध्यान में रखें

किसी विशिष्ट वर्ग की बारंबारता और उस वर्ग के पहले वाले सभी वर्गों की बारंबारता के योगफल को उस वर्ग की 'उच्च वर्ग सीमा' से कम संचयी बारंबारता (less than cummulativve frequency) कहते हैं संक्षेप में उसे 'से कम संचयी बारंबारता' भी कहते हैं ।

उच्च वर्ग सीमा से कम संचयी बारंबारता सारिणी का अर्थ :

वर्ग (अंक)	बारंबारता	से कम संचयी बारंबारता
0–10	2	2
10–20	12	2 + 12 = ☐
20–30	20	☐ +20=34
30–40	16	34 + ☐ =50
कुल 50		

वर्ग	संचयी बारंबारता	उच्च वर्ग सीमा से कम का अर्थ
0–10	2	2 विद्यार्थियों को 10 से कम अंक
10–20	14	14 विद्यार्थियों को 20 से कम अंक
20–30	34	34 विद्यार्थियों को 30 से कम अंक
30–40	50	50 विद्यार्थियों को 40 से कम अंक
कुल 50		

(2) निम्न वर्ग सीमा के समान या उससे अधिक संचयी बारंबारता सारणी

वर्ग	बारंबारता	संचयी बारंबारता
0–10	2	50
10–20	12	50 – 2 = 48
20–30	20	48 – 12 = 36
30–40	16	36 – 20 = 16
कुल 50		

वर्ग	संचयी बारंबारता	निम्न वर्ग सीमा या निम्न वर्ग सीमा से अधिक का अर्थ
0–10	50	50 विद्यार्थियों को 0 या 0 से अधिक अंक प्राप्त हुए ।
10–20	48	48 विद्यार्थियों को 10 या 10 से अधिक अंक प्राप्त हुए ।
20–30	36	36 विद्यार्थियों को 20 या 20 से अधिक अंक प्राप्त हुए ।
30–40	16	16 विद्यार्थियों को 30 या 30 से अधिक अंक प्राप्त हुए ।

उदा. एक स्पोर्ट्स क्लब के टेबल टेनिस के स्पर्धा के लिए आए खिलाड़ियों की आयु का वर्गीकरण नीचे तालिका में दिया गया है । इस सारिणी में 'से अधिक' संचयी बारंबारता सारिणी पूरी कीजिए ।

हल : निम्न वर्ग सीमा से अधिक संचित बारंबारता सारिणी

आयु (वर्ष)	गणन चिह्न	बारंबारता (विद्यार्थी संख्या)	निम्न वर्ग सीमा या उससे अधिक संचयी बारंबारता
10–12	𝍸 ||||	09	50
12 – 14	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 |||	☐	☐ – 9 = 41
14–16	𝍸 𝍸 |||	☐	41 – 23 = ☐
16 – 18	𝍸	05	☐ – 13 = ☐
		कुल N = 50	

प्रश्नसंग्रह 7.4

(1) निम्नलिखित संचयी बारंबारता सारिणी पूरी कीजिए ।

वर्ग (ऊँचाई – सेमी में)	बारंबारता (विद्यार्थी संख्या)	से कम संचयी बारंबारता
150–153	05	05
153–156	07	05+ ☐ = ☐
156–159	15	☐ + 15 = ☐
159–162	10	☐ + ☐ = 37
162–165	05	37+5=42
165–168	03	☐ + ☐ = 45
	कुल N = 45	

(2) नीचे दी गई बारंबारता सारिणी पूर्ण कीजिए ।

वर्ग (मासिक आय रुपयों में)	बारंबारता (व्यक्तियों की संख्या)	निम्न वर्ग सीमा के बराबर या उससे अधिक संचयी बारंबारता
1000-5000	45	.....
5000-10000	19	.....
10000-15000	16	.....
15000-20000	02	.....
20000-25000	05	.....
	कुल N = 87	

(3) एक कक्षा में 62 विद्यार्थियों ने गणित विषय में 100 में से प्राप्त अंक नीचे दिए हैं ।

0-10, 10-20 ..... वर्ग लेकर बारंबारता सारिणी और संचयी बारंबारता (से अधिक) बनाइए ।

55, 60, 81, 90, 45, 65, 45, 52, 30, 85, 20, 10,
75, 95, 09, 20, 25, 39, 45, 50, 78, 70, 46, 64,
42, 58, 31, 82, 27, 11, 78, 97, 07, 22, 27, 36,
35, 40, 75, 80, 47, 69, 48, 59, 32, 83, 23, 17,
77, 45, 05, 23, 37, 38, 35, 25, 46, 57, 68, 45,
47, 49

बनाई गई सारिणी के आधार पर निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर लिखिए ।

(i) 40 या 40 से अधिक अंक प्राप्त करने वाले विद्यार्थियों की संख्या कितनी है ?

(ii) 90 या 90 से अधिक अंक प्राप्त करने वाले विद्यार्थियों की संख्या कितनी है ?

(iii) 60 या 60 से अधिक अंक प्राप्त करने वाले विद्यार्थियों की संख्या कितनी है ?

(iv) 0-10 इस वर्ग की निम्न वर्ग सीमा के बराबर या उससे अधिक संचयी बारंबारता कितनी है ?

(4) उपरोक्त उदाहरण (3) के लिए 'से कम' संचयी बारंबारता सारिणी बनाएँ तथा सारिणी के अनुसार निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर लिखिए ।

(i) 40 से कम अंक प्राप्त करने वाले विद्यार्थियों की संख्या कितनी है ?

(ii) 10 से कम अंक प्राप्त करने वाले विद्यार्थियों की संख्या कितनी है ?

(iii) 60 से कम अंक प्राप्त करने वाले विद्यार्थियों की संख्या कितनी है ?

(iv) 50-60 वर्ग की 'से कम' संचयी बारंबारता कितनी होगी ?

आओ, जानें

केंद्रीय प्रवृत्तियों का मापन : (Measures of central tendancy)

केंद्रीय प्रवृत्ति : सर्वेक्षण में प्राप्त सांख्यिकीय सामग्री से सामान्यतः एक गुणधर्म मिलता है । सामग्री में किसी संख्या के आसपास अन्य संख्याएँ एकत्रिकरण दिखता हैं, समूह के इस गुणधर्म को केंद्रीय प्रवृत्ति कहते हैं ।

समूह में जिस संख्या के आसपास अन्य संख्या एकत्रित होती हैं वह संख्या उस समूह का प्रतिनिधित्व करती है ऐसी संख्याओं को केंद्रीय प्रवृत्ति का मापन कहते हैं ।

सांख्यिकी में केंद्रीय प्रवृत्ति के निम्नलिखित माप (परिमाण) प्रमुखता से उपयोग में लाए जाते हैं ।

(1) माध्य (Mean) : कच्ची सामग्री में दिए गए आँकड़ों की औसत को उस समग्री का माध्य कहा जाता है ।

$$\text{सामग्री का 'माध्य'} = \frac{\text{सामग्री के सभी प्राप्तांकों का योगफल}}{\text{सामग्री के प्राप्तांकों की कुल संख्या}}$$

उदा. (1) 25, 30, 27, 23 तथा 25 इन प्राप्तांकों का माध्य ज्ञात करें ।

हल : माध्य $= \frac{25+30+27+23+25}{5} = \frac{130}{5} = 26$

उदा. (2) नौवीं कक्षा के 35 विद्यार्थियों को प्रथम सत्रांत परीक्षा में बीजगणित में 40 में से प्राप्त अंक निम्नलिखित हैं । इस आधार पर अंकों का माध्य ज्ञात कीजिए ।

40, 35, 30, 25, 23, 20, 14, 15, 16, 20, 17, 37,
37, 20, 36, 16, 30, 25, 25, 36, 37, 39, 39, 40,
15, 16, 17, 30, 16, 39, 40, 35, 37, 23, 16

हल : यहाँ प्राप्तांकों की संख्या अधिक होने के कारण योग तो कर सकते है किंतु यह कार्य कठिन होगा । यहाँ 3 विद्यार्थियों के प्राप्तांक प्रत्येकी 30 हैं । उनके अंकों का योगफल 30 + 30 + 30 = 90 करने की अपेक्षा $30 \times 3 = 90$ करना सुविधाजनक होगा । इसके लिए बारंबारता सारिणी उपयोगी होगी ।

संख्याशास्त्र में $\sum_{i=1}^{n}$ इस चिह्न का प्रयोग करना सुविधाजनक होता है ।

$\sum_{i=1}^{n} f_i x_i$ इसका अर्थ समझ लेते हैं ।

i यह धन पूर्णांक है ।

माने, f_i प्रत्येक विद्यार्थी को x_i अंक प्राप्त हुए हैं । Σ (सिग्मा) यह चिह्न योग के लिए उपयोग किया जाता है। $\sum_{i=1}^{n}$ यह चिह्न i का 1 से n का मान के लिए n पदों का योगफल निश्चित करता है।

गुण	विद्यार्थियों की संख्या	$f_i \times x_i$
14	1	$14 \times 1 = 14$
15	2	$15 \times 2 = \ldots.$
16	5	$16 \times \ldots. = \ldots.$
17	2	$17 \times 2 = 34$
20	3	$\ldots. \times 3 = \ldots.$
23	2	$23 \times 2 = \ldots.$
25	3	$25 \times 3 = \ldots..$
30	3	$\ldots. \times \ldots. = \ldots.$
35	2	$35 \times 2 = 70$
36	2	$\ldots. \times \ldots. = \ldots.$
37	4	$\ldots.. \times \ldots. = \ldots.$
39	3	$39 \times 3 = 117$
40	3	$\ldots. \times \ldots. = 120$
	N= ☐	$\sum f_i x_i = 956$

$$\text{मध्य } \bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{N} = \frac{956}{35}$$
$$= 27.31 \text{ (लगभग)}$$

$\therefore$ दी गई सामग्री का माध्य 27.31 है ।

(2) माध्यिका (Median) : सामग्री की संख्याओं को आरोही (या अवरोही) क्रम में लिखने पर मध्यभाग में आने वाली संख्या को उस सामग्री की माध्यिका कहते हैं । सामग्री में प्राप्तांकों को संख्या यदि सम संख्या हो तो मध्यभाग में आने वाली दो संख्याओं का औसत, माध्यिका मानी जाती है ।

उदा. (1) 72, 66, 87, 92, 63, 78, 54 इस सामग्री की माध्यिका ज्ञात कीजिए ।

हल : दिए गए प्राप्तांकों को आरोही क्रम मे लिखें ।

54, 63, 66, **72,** 78, 87, 92

इस रचना में चौथे क्रमांक पर आने वाली संख्या 72 मध्य में है ।

∴ दी गई सामग्री की माध्यिका = 72

उदा. (2) 30, 25, 32, 23, 42, 36, 40, 33, 21, 43 इस सामग्री की माध्यिका ज्ञात कीजिए ।

हल : दिए गए प्राप्तांक आरोही क्रम में लिखने पर

21, 23, 25, 30, **32, 33,** 36, 40, 42, 43

यहाँ प्राप्तांकों की संख्या 10 अर्थात सम है ।

∴ पाँचवीं तथा छठी दो संख्याएँ मध्य भाग में आती हैं । यह संख्याएँ क्रमशः 32 तथा 33 हैं ।

∴ सामग्री की माध्यिका $= \frac{32+33}{2} = \frac{65}{2} = 32.5$

थोड़ा याद करें

सामग्री के प्राप्तांकों की संख्या n होने पर

(i) n विषम हो तो किस क्रम का प्राप्तांक उस सामग्री की माध्यिका होगी ?

(ii) n सम संख्या हो तो किस क्रम के दो प्राप्तांकों का औसत माध्यिका होगी ?

(3) बहुलक (Mode) : सामग्री में सर्वाधिक बार आने वाला प्राप्तांक ही उस सामग्री का बहुलक होता है ।

उदा. (1) 90, 55, 67, 55, 75, 75, 40, 35, 55, 95 इस सामग्री का बहुलक ज्ञात कीजिए ।

हल : सामग्री के प्राप्तांक आरोही क्रम में लिखने पर कौन-सा प्राप्तांक सर्वाधिक बार आया है यह जानना आसान होगा ।

सामग्री का आरोही क्रम : 35, 40, 55, 55, 55, 67, 75, 75 90, 95

55 सर्वाधिक बार आया है ।

∴ बहुलक = 55

उदा. (2) किसी कारखाने के मजदूरों की आयु तालिका में दी है ।

आयु (वर्ष में)	19	21	25	27	30
मजदूर	5	15	13	15	7

इस आधार पर मजदूरों की आयु का बहुलक ज्ञात कीजिए ।

हल : यहाँ सर्वाधिक बारंबारता 15 है परंतु यह बारंबारता दो प्राप्तांकों की है ।

∴ बहुलक = 21 तथा 27

∴ आयु का बहुलक 21 वर्ष तथा 27 वर्ष है ।

प्रश्नसंग्रह 7.5

(1) मुकुंद का 7 वर्षों का सोयाबीन का प्रति एकड़ उत्पादन क्विंटल में क्रमशः 10,7,5,3,9,6,9 है तो प्रति एकड़ उत्पादन का माध्य ज्ञात कीजिए ।

(2) दी गई सामग्री की माध्यिका ज्ञात कीजिए । 59,75,68,70,74,75,80

(3) गणित के गृहकार्य में 7 विद्यार्थियों को 100 में से निम्नलिखित अंक प्राप्त हुए हैं ।
99, 100, 95, 100, 100, 80, 90 प्राप्तांकों का बहुलक ज्ञात कीजिए ।

(4) किसी कारखाने के 30 मजदूरों को मिलने वाला मासिक वेतन (रुपयों) में निम्नलिखित है ।
5000, 7000, 3000, 4000, 4000, 3000, 3000, 3000, 8000, 4000,
4000, 9000, 3000, 5000, 5000, 4000, 4000, 3000, 5000, 5000,
6000, 8000, 3000, 3000, 6000, 7000, 7000, 6000, 6000, 4000
के आधार पर मजदूरों के मासिक वेतन का माध्य ज्ञात कीजिए ।

(5) एक टोकरी के 10 टमाटरों का द्रव्यमान ग्राम में क्रमशः 60, 70, 90, 95, 50, 65,70, 80, 85, 95 है तो टमाटरों के द्रव्यमान की माध्यिका ज्ञात कीजिए ।

(6) किसी हॉकी के खिलाड़ी द्वारा 9 स्पर्धाओं में किए गए गोल निम्नलिखित हैं ।
5, 4, 0, 2, 2, 4, 4, 3, 3 इनका माध्य, माध्यिका तथा बहुलक ज्ञात कीजिए ।

(7) 50 प्राप्तांकों का माध्य 80 है । परंतु गलती से उसमें 19 के स्थान पर 91 लिया गया ऐसा बाद में ध्यान आया प्राप्तांक सही लिखने के बाद का माध्य ज्ञात कीजिए ।

(8) 10 प्राप्तांक आरोही क्रम में लिखे गए हैं, 2, 3, 5, 9, $x + 1$, $x + 3$, 14, 16, 19, 20, यदि इनकी माध्यिका 11 हो तो x का मान ज्ञात कीजिए ।

(9*) 35 प्राप्तांकों का माध्य 20 है । जिसमें पहले 18 प्राप्तांकों का माध्य 15 तथा अंतिम 18 प्राप्तांकों का माध्य 25 हो तो 18 वाँ प्राप्तांक ज्ञात कीजिए ।

(10) पाँच प्राप्तांकों का माध्य 50 है । यदि उनमें से एक प्राप्तांक कम करने पर माध्य 45 हो तो, वह प्राप्तांक कितना होगा ?

(11*) किसी कक्षा में 40 विद्यार्थी हैं । इनमें 15 लड़के हैं । एक परीक्षा में लड़कों द्वारा प्राप्त अंकों का माध्य 33 तथा लड़कियों द्वारा प्राप्त अंकों का माध्य 35 है । कक्षा के सभी विद्यार्थियों द्वारा प्राप्त अंकों का माध्य ज्ञात कीजिए ।

(12) 10 विद्यार्थियों का वजन (किग्रा में) निम्नलिखित हैं ।
40, 35, 42, 43, 37, 35, 37, 37, 42, 37 इनका बहुलक ज्ञात कीजिए ।

(13) निम्नलिखित तालिका में कुछ परिवारों के 14 वर्ष से कम आयु के बच्चों की संख्या दर्शाई है । इस आधार पर 14 वर्ष से कम आयु के बच्चों की संख्या का बहुलक ज्ञात कीजिए ।

बच्चों की संख्या	1	2	3	4
परिवार(बारंबारता)	15	25	5	5

(14) निम्नलिखित सामग्री का बहुलक ज्ञात कीजिए ।

प्राप्तांक (गुण)	35	36	37	38	39	40
विद्यार्थी संख्या	09	07	09	04	04	02

'केंद्रीय प्रवृत्ति' के कौन-से माप लेना उचित है ?' इस प्रश्न का उत्तर इसके उद्देश्य पर निर्भर है ।

माना, किसी क्रिकेट के खिलाड़ी ने लगातार 11 प्रतियोगताओं में क्रमश: 41, 58, 35, 80, 23, 12, 63, 48, 107, 9 और 73 रन बनाएँ । उसके कुल प्रदर्शन को निश्चित करते समय उसके द्वारा प्रत्येक प्रतियोगिता में बनाए गए रनों पर ध्यान देना आवश्यक है । अतः उसके रनों की 'केंद्रीय प्रवृत्ति माध्य' द्वारा दर्शाना उचित होगा ।

इसी प्रकार कपड़े बनाने वाली किसी कंपनी में किस नाप के शर्ट अधिक सिलना हैं यह निश्चित करना हो तो उसके लिए (34, 36, 38, 40, 42, 44 में से) किस नाप के शर्ट अधिकतर लोग पहनते हैं इसका सर्वेक्षण करके जानना होगा अर्थात केंद्रीय प्रवृत्ति का बहुलक यह परिमाण चुनना होगा ।

प्रकीर्ण प्रश्नसंग्रह 7

(1) उचित विकल्प चुनिए ।

(i) निम्नलिखित में से कौन-सी सामग्री प्राथमिक सामग्री नहीं है ?

(A) कक्षा में जाकर विद्यार्थियों के उपस्थिति की जानकारी एकत्रित किया ।

(B) प्रत्यक्ष जाकर घर के व्यक्तियों की संख्या की जानकारी एकत्रित किया ।

(C) पटवारी के पास जाकर गाँव के प्रत्येक किसान के सोयाबीन की खेती का क्षेत्रफल लिखा गया ।

(D) प्रत्यक्ष देखकर नाले की स्वच्छता की जानकारी ली ।

(ii) 25-35 वर्ग की उच्च वर्ग सीमा कौन-सी है?

(A) 25 (B) 35 (C) 60 (D) 30

(iii) 25-35 इस वर्ग का वर्ग माध्य कौन-सा है?

(A) 25 (B) 35 (C) 60 (D) 30

(iv) 0-10, 10-20, 20-30 ..... ऐसे वर्गवाले बारंबारता सारिणी में 10 यह प्राप्तांक कौन-से वर्ग में समाविष्ट होगा ?

(A) 0-10 (B) 10-20 (C) 0-10 तथा 10-20 दोनों (D) 20-30

(v*) यदि $\bar{x}$ यह $x_1, x_2 \ldots\ldots\ldots x_n$ और $\bar{y}$ यह $y_1, y_2, \ldots\ldots\ldots y_n$ का माध्य हो और $\bar{z}$ यह $x_1, x_2 \ldots\ldots\ldots x_n, y_1, y_2, \ldots\ldots\ldots y_n$ का माध्य हो तो $\bar{z}$ = ?

(A) $\frac{\bar{x}+\bar{y}}{2}$ (B) $\bar{x}+\bar{y}$ (C) $\frac{\bar{x}+\bar{y}}{n}$ (D) $\frac{\bar{x}+\bar{y}}{2n}$

(vi*) पाँच संख्याओं का माध्य 50 हो तथा उसमें से 4 संख्याओं का माध्य 46 हो तो पाँचवीं संख्या कौन-सी है ?

(A) 4 (B) 20 (C) 434 (D) 66

(vii*) 100 प्राप्तांकों का माध्य 40 है । इनमें से 9 वाँ प्राप्तांक 30 है ।

यदि 30 के स्थान पर 70 लिया जाए और शेष प्राप्तांकों को वही रहने दिया जाए तो नया माध्य कितना?

(A) 40.6 (B) 40.4 (C) 40.3 (D) 40.7

(viii) 19, 19, 15, 20, 25, 15, 20, 15 इस सामग्री का बहुलक कौन-सा है ?

(A) 15 (B) 20 (C) 19 (D) 25

(ix) 7, 10, 7, 5, 9, 10 की माध्यिका कौन-सी है?

(A) 7 (B) 9 (C) 8 (D) 10

(x) नीचे दी गई सारिणी के अनुसार 30-40 वर्ग की उच्च वर्ग सीमा 'से कम' प्रकार की संचयी बारंबारंता कितनी है?

वर्ग	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50
बारंबारता	7	3	12	13	2

(A) 13 (B) 15 (C) 35 (D) 22

(2) 20 कर्मचारियों के वेतन का माध्य 10,250 रुपये हैं। यदि उसमें कार्यालय प्रमुख का वेतन मिला दिया जाए तो माध्य 750 रुपये से बढ़ जाता हो तो कार्यालय प्रमुख का वेतन ज्ञात कीजिए।

(3) नौ संख्याओं का माध्य 77 है, यदि इसमें एक संख्या और जोड़ दें तो माध्य 5 बढ़ जाता है। जोड़ी गई वह संख्या ज्ञात कीजिए।

(4) किसी शहर के एक महिने के प्रत्येक दिन का अधिकतम तापमान अंश सेल्सियस में निम्नलिखित है। उचित वर्ग लेकर वर्गीकृत बारंबारता बंटन सारिणी (अखंडीत वर्ग) बनाइए।

29.2, 29.0, 28.1, 28.5, 32.9, 29.2, 34.2, 36.8, 32.0, 31.0,
30.5, 30.0, 33, 32.5, 35.5, 34.0, 32.9, 31.5, 30.3, 31.4,
30.3, 34.7, 35.0, 32.5, 33.5, 29.0, 29.5, 29.9, 33.2, 30.2

सारिणी के आधार पर निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर लिखिए।

(i) अधिकतम तापमान $34^{\circ}c$ से कम है ऐसे कितने दिन हैं?

(ii) अधिकतम तापमान $34^{\circ}c$ या उससे अधिक है ऐसे कितने दिन हैं ?

(5) यदि निम्नलिखित प्राप्तांकों का माध्य 20.2 हो तो p का मान ज्ञात कीजिए।

x_i	10	15	20	25	30
f_i	6	8	p	10	6

(6) मॉडल हायस्कूल नांदपुर के 9 वीं कक्षा के 68 विद्यार्थियों ने गणित की लिखित परीक्षा में 80 में से निम्नलिखित अंक प्राप्त किए।

70, 50, 60, 66, 45, 46, 38, 30, 40, 47, 56, 68,
80, 79, 39, 43, 57, 61, 51, 32, 42, 43, 75, 43,
36, 37, 61, 71, 32, 40, 45, 32, 36, 42, 43, 55,
56, 62, 66, 72, 73, 78, 36, 46, 47, 52, 68, 78,
80, 49, 59, 69, 65, 35, 46, 56, 57, 60, 36, 37,
45, 42, 70, 37, 45, 66, 56, 47

30-40, 40-50 ...इस प्रकार वर्ग लेकर उच्च वर्ग सीमा 'से कम' प्रकार की संचयी बारंबारता सारिणी बनाएँ। उस सारिणी के आधार पर निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर लिखिए।

(i) 80 से कम अंक प्राप्त करने वाले विद्यार्थी कितने हैं?

(ii) 40 से कम अंक प्राप्त करने वाले विद्यार्थी कितने हैं?

(iii) 60 से कम अंक प्राप्त करने वाले विद्यार्थी कितने हैं?

(7) उदा. 6 में दी गई सामग्री के आधार पर 30–40, 40–50 ..... ऐसे वर्ग लेकर निम्न वर्ग सीमा से अधिक प्रकार की संचयी बारंबारता बंटन सारिणी बनाए तथा उसके आधार पर निम्न प्रश्नों के उत्तर दीजिए ।

(i) 70 या उससे अधिक अंक प्राप्त करने वाले विद्यार्थी कितने हैं ?

(ii) 30 या उससे अधिक अंक प्राप्त करने वाले विद्यार्थी कितने हैं ?

(8) निम्नलिखित आरोही क्रम में लिखें गए 10 प्राप्तांकों 45,47,50,52,x, x+2, 60,62,63,74 की माध्यिका 53 हो तो x का मान ज्ञात कीजिए तथा

दी गई सामग्री का माध्य एवं बहुलक ज्ञात कीजिए ।

◈◈◈

गणितीय मनोरंजन

पास्कल का त्रिभुज

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
.....
.....
.....

संख्याओं का उपरोक्त आकृतिबंध त्रिभुजाकार रचना है । यह रचना 'पास्कल का त्रिभुज' के नाम से पहचाना जाता है । इस रचना की आगे की तीन पंक्तियाँ आप पूर्ण कीजिए । इस रचना में क्षैतिज पंक्ति में आने वाली संख्या $(x + y)$ द्विपद के घातांक के क्रमिक विस्तार से आने वाले गुणांक होते हैं । निम्नलिखित विस्तार देखिए ।

$(x + y)^0 = 1$

$(x + y)^1 = 1x + 1y$

$(x + y)^2 = 1x^2 + 2xy + 1y^2$

$(x + y)^3 = 1x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$

$(x + y)^4 = 1x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + 1y^4$

इस विस्तार में x तथा y के घातांकों का निरीक्षण कीजिए । इस आधार पर $(x + y)^{10}$ का विस्तार लिखने का प्रयत्न कीजिए ।