



आओ, सीखें

- अनुपात
- तुल्य अनुपातों पर क्रियाएँ
- सतत समानुपात
- अनुपात के गुणधर्म
- समान अनुपातों का प्रमेय
- अनुपात में k पद्धति



थोड़ा सोचें

पिछली कक्षाओं में हमने अनुपात और समानुपात का अध्ययन किया है। उनपर आधारित प्रश्न भी हल किए हैं।

उदा. विमल द्वारा बनाए गए सूजी के लड्डू स्वादिष्ट होते हैं। वह 1 कटोरी घी 3 कटोरियाँ सूजी और 2 कटोरियाँ शक्कर मिलाकर लड्डू बनाती है।

यहाँ सूजी और शक्कर का अनुपात 3:2 अथवा $\frac{3}{2}$ है।

यदि लड्डू के लिए 12 कटोरियाँ सूजी लेते हैं तो शक्कर कितनी लगेगी ?

माना शक्कर x कटोरियाँ लगेगी। अतः $\frac{3}{2} = \frac{12}{x} \therefore 3x = 24 \therefore x = 8$

अर्थात् 12 कटोरियाँ सूजी लेकर लड्डू बनाने हेतु 8 कटोरियाँ शक्कर लगेगी।

इस उदाहरण को निम्नलिखित प्रकार से भी हल कर सकते हैं।

सूजी $3k$ कटोरियाँ हों तो शक्कर $2k$ कटोरियाँ लगेगी क्योंकि $\frac{3k}{2k} = \frac{3}{2}$

$3k = 12$ हो तो $k = 4 \therefore 2k = 8$ कटोरियाँ शक्कर लगेगी



आओ, जानें

अनुपात तथा समानुपात (Ratio and proportion)

दो संख्याओं के अनुपात की संकल्पना तीन या अधिक संख्याओं के लिए विस्तारित कर सकते हैं।

जैसे लड्डू के उदाहरण में घी, सूजी और शक्कर का अनुपात 1 : 3 : 2 है।

यहाँ घी तथा सूजी का अनुपात 1 : 3 और सूजी तथा शक्कर का अनुपात 3 : 2 है।

यह जानकारी समान इकाई में दी गई है।

यदि घी $1k = k$ कटोरियाँ, सूजी $3k$ कटोरियाँ और शक्कर $2k$ कटोरियाँ माने तो 12 कटोरियाँ सूजी लेने पर, लड्डू बनाने के लिए कितनी कटोरियाँ घी और शक्कर लगेगी यह ज्ञात कर सकते हैं।

क्योंकि $3k = 12 \therefore k = 4$ और $2k = 8$ अर्थात् 4 कटोरियाँ घी और 8 कटोरियाँ शक्कर लगेगी।

इस संकल्पना का चार अथवा अधिकांश घटकों के लिए भी उपयोग कर सकते हैं ।

यदि a, b, c, d इन चार संख्याओं का अनुपात $2 : 3 : 7 : 4$ हो तो इन संख्याओं का $2m, 3m, 7m, 4m$ मानकर दी गई जानकारी के आधार पर m का मान ज्ञात कर सकते हैं ।

उदाहरणार्थ, इन चारों संख्याओं का योग 48 हो तो वे चार संख्याएँ ज्ञात कीजिए ।

$$2m + 3m + 7m + 4m = 16m = 48$$

$$\therefore m = 3$$

$$\therefore 2m = 6, 3m = 9, 7m = 21, 4m = 12 \text{ ऐसी संख्याएँ प्राप्त होती है ।}$$

$$\therefore \text{अभिष्ट संख्याएँ} = 6, 9, 21, 12$$

उदा. (1) $18 : 18 : 10$ इस प्रकार के खाद में नाइट्रोजन के यौगिक 18%, फास्फोरस के यौगिक 18% और पोटैशियम के यौगिक 10% होते हैं । शेष भाग अन्य पदार्थ के हैं तो 20 किलोग्राम खाद में प्रत्येक प्रकार के यौगिक का द्रव्यमान कितना होगा ?

हल : माना 20 किग्रा खाद में नाइट्रोजन के यौगिक का द्रव्यमान x किग्रा

$$\therefore \frac{18}{100} = \frac{x}{20} \quad \therefore x = \frac{18 \times 20}{100} = 3.6$$

$\therefore$ नाइट्रोजन का यौगिक 3.6 किग्रा है ।

फास्फोरस का यौगिक का भी 18 प्रतिशत है । $\therefore$ फास्फोरस का यौगिक भी 3.6 किग्रा है ।

मान लीजिए 20 किग्रा खाद में पोटैशियम का यौगिक का द्रव्यमान y किग्रा

$$\frac{10}{100} = \frac{y}{20} \quad \therefore y = 2 \quad \therefore \text{पोटैशियम के यौगिक 2 किग्रा है ।}$$

प्रत्यक्ष समानुपात

एक मोटरकार 1 लीटर पेट्रोल में 10 किमी दूरी तय करती है ।

तो 20 लीटर पेट्रोल में वह कार $20 \times 10 = 200$ किमी की दूरी तय करेगी ।

और 40 लीटर पेट्रोल में वह कार $40 \times 10 = 400$ किमी दूरी तय करेगी ।

उपरोक्त जानकारी तालिका के रूप में लिखिए ।

पेट्रोल : x लीटर	1	20	40	
दूरी : y किमी	10	200	400	
$\frac{x}{y}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{20}{200} = \frac{1}{10}$	$\frac{40}{400} = \frac{1}{10}$	$\frac{x}{y} = k$

कार द्वारा उपयोग किया गया पेट्रोल (लीटर में) तथा उतने ही पेट्रोल में तय की गई दूरी (किलोमीटर में) का अनुपात अचर है । ऐसी स्थिति में हम कह सकते हैं कि उन दो संख्याओं में प्रत्यक्ष समानुपात है ।

प्रतिलोमानुपात

एक मोटरकार 50 किमी प्रति घंटा की वेग से 100 किमी की दूरी 2 घंटों में तय करती है। एक बैलगाड़ी 5 किमी प्रति घंटा की वेग से उतना ही अंतर 20 घंटे में तय करती है।

∴ वेग × समय = दूरी ये ध्यान में रखकर उपरोक्त जानकारी सारिणी रूप में लिखते हैं।

कार	वेग/घंटा x	समय y	$x \times y$	$x \times y = k$
	50	2	100	
बैलगाड़ी	5	20	100	

अर्थात् वाहन की वेग तथा दूरी तय करने में लगने वाले समय का गुणनफल अचर है। ऐसे समय दो राशियाँ परस्पर प्रतिलोमानुपाती हैं अर्थात् वे दो राशियाँ प्रतिलोम (व्युत्क्रमानुपाती) या अप्रत्यक्ष समानुपात में बदलती हैं ऐसा भी कहते हैं।



थोड़ा सोचें

अनुपात के गुणधर्म

- (1) a और b इन दो संख्याओं का अनुपात $a : b$ अथवा $\frac{a}{b}$ लिखते हैं। यहाँ a को पूर्वपद (पहला पद) तथा b को उत्तर पद (द्वितीय पद) कहते हैं।
- (2) दो संख्याओं के अनुपात में उत्तर पद 100 हो तो उस अनुपात को प्रतिशत कहते हैं।
- (3) अनुपात की सभी संख्याओं को एकही शून्येतर संख्या से गुणा अथवा भाग करें तो अनुपात अपरिवर्तित होता है।

उदा. $3:4 = 6:8 = 9:12$ उसी प्रकार $2:3:5 = 8:12:20$ अथवा k यह शून्येतर संख्या हो तो

$$a : b = ak : bk$$

$$a : b : c = ak : bk : ck$$

- (4) अनुपात की दो राशियाँ एक ही प्रकार की होनी चाहिए तथा उनके मापन की इकाई भी समान होनी चाहिए।
- (5) अनुपात की इकाई नहीं होती।

जैसे, 2 किलोग्राम तथा 300 ग्राम का अनुपात $2:300$ नहीं होता परंतु 2 किलोग्राम = 2000 ग्राम लेकर
अनुपात $2000 : 300$ अर्थात् $20:3$ है।

उदा. (1) सीमा और राजश्री की आयु का अनुपात $3 : 1$ है। राजश्री और अतुल के आयु का अनुपात $2 : 3$ है, तो सीमा, राजश्री और अतुल के आयु का अनुपात ज्ञात कीजिए।

हल : सीमा की आयु : राजश्री की आयु = $3 : 1$ राजश्री की आयु : अतुल की आयु = $2 : 3$
पहले अनुपात का उत्तर पद यह दूसरे अनुपात का पूर्व पद होना चाहिए।

अतः सतत अनुपात प्राप्त करने के लिए पहले अनुपात के पदों को 2 से गुणा करेंगे तब $3:1 = 6:2$ प्राप्त होगा

$$\frac{\text{सीमा की आयु}}{\text{राजश्री की आयु}} = \frac{6}{2}, \quad \frac{\text{राजश्री की आयु}}{\text{अतुल की आयु}} = \frac{2}{3}$$

$\therefore$ सीमा की आयु : राजश्री की आयु : अतुल की आयु यह अनुपात $6 : 2 : 3$ ऐसा है।

उदा. (2) एक आयताकार खेत की लंबाई 1.2 किमी तथा चौड़ाई 400 मी हो तो लंबाई का चौड़ाई से अनुपात ज्ञात कीजिए।

हल : यहाँ लंबाई किलोमीटर में एवं चौड़ाई मीटर में है। अनुपात के लिए दोनों की इकाई समान होनी चाहिए इसलिए किलोमीटर को मीटर में रूपांतर कीजिए।

$$1.2 \text{ किमी} = 1.2 \times 1000 = 1200 \text{ मीटर} \quad \therefore 1200 \text{ मीटर का } 400 \text{ मीटर से अनुपात ज्ञात करें।}$$

$$\text{अपेक्षित अनुपात} = \frac{1200}{400} = \frac{3}{1}, \text{ अर्थात् } 3:1 \text{ है।}$$

उदा. (3) महेश का प्रतिमाह खर्च और आय का अनुपात $3:5$ है, तो उनका खर्च उनकी आय के कितने प्रतिशत है ?

हल : खर्च का आय से अनुपात $3:5$ है। प्रतिशत में रूपांतर करने के लिए द्वितीय पद 100 करना होगा।

$$\frac{3}{5} = \frac{3 \times 20}{5 \times 20} = \frac{60}{100} \quad \text{अर्थात्} \quad \frac{\text{खर्च}}{\text{आय}} = \frac{60}{100} = 60\%$$

$\therefore$ महेश का खर्च उनकी आय का 60% है।

उदा. (4) एक बगीचे में आम और चीकू के वृक्षों का अनुपात $2:3$ है। यदि उस बगीचे में प्रत्येक प्रकार के 5 वृक्ष अधिक लगाएँ तो अनुपात $5 : 7$ होगा। उस बगीचे में वर्तमान में आम और चीकू के कितने वृक्ष हैं ?

हल : वर्तमान में आम और चीकू के वृक्षों का अनुपात $2 : 3$ है।

माना कि आम के वृक्षों की संख्या $2x$ तथा चीकू के वृक्षों की संख्या $= 3x$ है।

$$\text{दी गई शर्त के अनुसार, } \frac{2x+5}{3x+5} = \frac{5}{7}$$

$$14x + 35 = 15x + 25$$

$$\therefore x = 10$$

$$\therefore \text{ आम के वृक्षों की संख्या} = 2x = 2 \times 10 = 20$$

$$\therefore \text{ चीकू के वृक्षों की संख्या} = 3x = 3 \times 10 = 30$$

उदा. (5) दो संख्याओं का अनुपात 5 : 7 है। यदि प्रत्येक संख्या में 40 जोड़ने पर प्राप्त संख्याओं का अनुपात 25 : 31 हो तो संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

हल : माना पहली संख्या = $5x$ तथा दूसरी संख्या = $7x$

दी गई शर्त के अनुसार,

$$\frac{5x+40}{7x+40} = \frac{25}{31}$$

$$31(5x+40) = 25(7x+40)$$

$$155x+1240 = 175x+1000$$

$$1240-1000 = 175x-155x$$

$$240 = 20x$$

$$x = 12$$

$$\therefore \text{पहली संख्या} = 5 \times 12 = 60$$

$$\text{दूसरी संख्या} = 7 \times 12 = 84$$

$$\therefore \text{दी गई संख्या 60 तथा 84 है।}$$

प्रश्नसंग्रह 4.1

- (1) निम्नलिखित उपप्रश्नों में पहली संख्या का दूसरी संख्या से अनुपात अतिसंक्षिप्त रूप में लिखिए।
(i) 72, 60 (ii) 38, 57 (iii) 52, 78
- (2) निम्नलिखित प्रश्नों में पहली राशि का दूसरी राशि से अनुपात अतिसंक्षिप्त रूप में लिखिए।
(i) 700 रुपये, 308 रुपये (ii) 14 रुपये, 12 रुपये 40 पैसे
(iii) 5 लीटर, 2500 मिलिलीटर (iv) 3 वर्ष 4 माह, 5 वर्ष 8 माह
(v) 3.8 किलोग्राम, 1900 ग्राम (vi) 7 मिनट 20 सेकंड, 5 मिनट 6 सेकंड
- (3) निम्नलिखित प्रतिशतों को अतिसंक्षिप्त अनुपात के रूप में लिखिए।
(i) 75 : 100 (ii) 44 : 100 (iii) 6.25% (iv) 52 : 100 (v) 0.64%
- (4) एक छोटा मकान 3 व्यक्ति 8 दिन में बना सकते हैं तो वही मकान 6 दिन में बनाने के लिए कितने व्यक्तियों की आवश्यकता होगी ?
- (5) निम्नलिखित अनुपातों का प्रतिशत में रूपांतरण कीजिए।
(i) 15 : 25 (ii) 47 : 50 (iii) $\frac{7}{10}$ (iv) $\frac{546}{600}$ (v) $\frac{7}{16}$
- (6) आभा और उसकी माता की वर्तमान आयु का अनुपात 2:5 है। आभा के जन्म के समय उसकी माता की आयु 27 वर्ष थी। तो आभा और उसकी माता की वर्तमान आयु ज्ञात कीजिए।
- (7) वत्सला और सारा की वर्तमान आयु क्रमशः 14 वर्ष तथा 10 वर्ष है। कितने वर्षों बाद उनकी आयु का अनुपात 5:4 होगा ?
- (8) रेहाना और उसकी माता की वर्तमान आयु का अनुपात 2 : 7 है। दो वर्षों बाद उनकी आयु का अनुपात 1 : 3 होगा। तो रेहाना की वर्तमान आयु ज्ञात कीजिए।



आओ, जानें

अनुपातों की तुलना

यदि $b > 0, d > 0$ तो $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ इन अनुपातों की तुलना निम्नलिखित नियमानुसार कर सकते हैं।

(i) यदि $ad > bc$ तो $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$ (ii) यदि $ad < bc$ तो $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ (iii) यदि $ad = bc$ तो $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

निम्नलिखित अनुपातों में क्रमसंबंध निश्चित कीजिए।

उदा. (1) $\frac{4}{9}, \frac{7}{8}$

हल : $4 \times 8 \quad ? \quad 7 \times 9$
 $32 < 63$
 $\therefore \frac{4}{9} < \frac{7}{8}$

उदा. (2) $\frac{\sqrt{13}}{\sqrt{8}}, \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{5}}$

$\sqrt{13} \times \sqrt{5}, \quad ? \quad \sqrt{8} \times \sqrt{7}$
 $\sqrt{65} \quad ? \quad \sqrt{56}$
 $\sqrt{65} > \sqrt{56}$
 $\therefore \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{8}} > \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{5}}$

उदा. (3) यदि a तथा b पूर्णांक संख्याएँ हों तथा $a < b, b > 1$ तो अनुपात $\frac{a-1}{b-1}, \frac{a+1}{b+1}$ में क्रमसंबंध निश्चित कीजिए।

हल : $a < b$

$\therefore a - 1 < b - 1$

अब $\frac{a-1}{b-1} - \frac{a+1}{b+1}$ इस व्यवकलन पर विचार कीजिए।

$$\begin{aligned} \frac{a-1}{b-1} - \frac{a+1}{b+1} &= \frac{(a-1)(b+1) - (a+1)(b-1)}{(b-1)(b+1)} \\ &= \frac{(ab - b + a - 1) - (ab + b - a - 1)}{b^2 - 1} \\ &= \frac{ab - b + a - 1 - ab - b + a + 1}{b^2 - 1} \\ &= \frac{2a - 2b}{b^2 - 1} \\ &= \frac{2(a-b)}{b^2 - 1} \quad \dots\dots\dots (1) \end{aligned}$$

अब $a < b \quad \therefore a - b < 0$

उसी प्रकार $b^2 - 1 > 0$ क्योंकि $b > 1$

$\frac{2(a-b)}{b^2 - 1} < 0 \quad \dots\dots\dots (2)$

$\frac{a-1}{b-1} - \frac{a+1}{b+1} < 0 \quad \dots\dots(1) \text{ तथा } (2) \text{ से}$

$\frac{a-1}{b-1} < \frac{a+1}{b+1}$

उदा. (4) यदि $a : b = 2 : 1$ और $b : c = 4 : 1$ हो तो $\left(\frac{a^4}{32b^2c^2}\right)^3$ इस राशि का मान ज्ञात कीजिए ।

हल : $\frac{a}{b} = \frac{2}{1} \quad \therefore a = 2b \quad \frac{b}{c} = \frac{4}{1} \quad \therefore b = 4c$

$a = 2b = 2 \times 4c = 8c \quad \therefore a = 8c$

अब $a = 8c$, $b = 4c$ लेने पर

$$\begin{aligned} \left(\frac{a^4}{32b^2c^2}\right)^3 &= \left(\frac{(8c)^4}{32 \times 4^2 \times c^2 \times c^2}\right)^3 \\ &= \left[\frac{8 \times 8 \times 8 \times 8 \times c^4}{32 \times 16 \times c^2 \times c^2}\right]^3 \\ &= (8)^3 \\ \therefore \left(\frac{a^4}{32b^2c^2}\right)^3 &= 512 \end{aligned}$$

प्रश्नसंग्रह 4.2

(1) $\frac{a}{b} = \frac{ak}{bk}$ इस गुणधर्म का उपयोग करके रिक्त स्थानों में उचित संख्या लिखिए ।

(i) $\frac{5}{7} = \frac{\dots}{28} = \frac{35}{\dots} = \frac{\dots}{3.5}$

(ii) $\frac{9}{14} = \frac{4.5}{\dots} = \frac{\dots}{42} = \frac{\dots}{3.5}$

(2) निम्नलिखित अनुपात ज्ञात कीजिए ।

(i) वृत्त की त्रिज्या का उसकी परिधि से अनुपात ।

(ii) r त्रिज्यावाले वृत्त की परिधि का उसके क्षेत्रफल से अनुपात ।

(iii) 7 सेमी भुजावाले वर्ग के विकर्ण का उसकी भुजा से अनुपात ।

(iv) लंबाई 5 सेमी तथा चौड़ाई 3.5 सेमी हो तो ऐसे आयत की परिमिति का उसके क्षेत्रफल से अनुपात ।

(3) निम्नलिखित अनुपात में क्रमसंबंध निश्चित कीजिए ।

(i) $\frac{\sqrt{5}}{3}, \frac{3}{\sqrt{7}}$

(ii) $\frac{3\sqrt{5}}{5\sqrt{7}}, \frac{\sqrt{63}}{\sqrt{125}}$

(iii) $\frac{5}{18}, \frac{17}{121}$

(iv) $\frac{\sqrt{80}}{\sqrt{48}}, \frac{\sqrt{45}}{\sqrt{27}}$

(v) $\frac{9.2}{5.1}, \frac{3.4}{7.1}$

(4) (i) समांतर चतुर्भुज $\square ABCD$ के $\angle A$ तथा $\angle B$ के मापों का अनुपात $5 : 4$ हो तो $\angle B$ का माप ज्ञात कीजिए ।

(ii) अल्बर्ट और सलीम की वर्तमान आयु का अनुपात $5 : 9$ है । पाँच वर्षों बाद उनकी तत्कालीन आयु का अनुपात $3 : 5$ होगा, तो उनकी वर्तमान आयु ज्ञात कीजिए ।

(iii) किसी आयत की लंबाई और चौड़ाई का अनुपात 3 : 1 है। यदि आयत की परिमिति 36 सेमी हो, तो आयत की लंबाई तथा चौड़ाई ज्ञात कीजिए।

(iv) दो संख्याओं का अनुपात 31 : 23 है और उनका योगफल 216 हो तो संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

(v) दो संख्याओं का गुणनफल 360 है तथा उनका अनुपात 10 : 9 हो तो वे संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

(5*) यदि $a : b = 3 : 1$ तथा $b : c = 5 : 1$ तो (i) $\left(\frac{a^3}{15b^2c}\right)^3$ (ii) $\frac{a^2}{7bc}$ के मान ज्ञात कीजिए।

(6*) $\sqrt{0.04 \times 0.4 \times a} = 0.4 \times 0.04 \times \sqrt{b}$ हो तो $\frac{a}{b}$ ज्ञात कीजिए।

(7) $(x + 3) : (x + 11) = (x - 2) : (x + 1)$ तो x का मान ज्ञात कीजिए।



आओ, जानें

तुल्य अनुपातों पर संक्रियाएँ

समानता के गुणधर्मों का उपयोग करके दो तुल्य अनुपातों पर क्रियाएँ की जा सकती हैं। उन क्रियाओं का अध्ययन करेंगे।

यदि a, b, c, d धनात्मक संख्याएँ हों तो निम्नलिखित गुणधर्मों का अध्ययन करेंगे।

(I) विपर्यस्थानुपात (Invertendo) यदि $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ तो $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

$$\therefore a \times d = b \times c$$

$$\therefore b \times c = a \times d$$

$$\therefore \frac{b \times c}{a \times c} = \frac{a \times d}{a \times c} \quad (\text{दोनों पक्षों में } a \times c \text{ से भाग देने पर})$$

$$\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$$

$\therefore$ यदि $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ तो $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$ इस गुणधर्म को 'विपर्यस्थानुपात' कहते हैं।

(II) एकांतरानुपात (Alternando) यदि $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ तो $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

$$\therefore a \times d = b \times c$$

$$\frac{a \times d}{c \times d} = \frac{b \times c}{c \times d} \quad (\text{दोनों पक्षों में } c \times d \text{ से भाग देने पर})$$

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$$

यदि $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ तो $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ इस गुणधर्म को 'एकांतरानुपात' कहते हैं।

(III) योगानुपात (Componendo) यदि $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ तो $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

$$\frac{a}{b} + 1 = \frac{c}{d} + 1 \quad (\text{दोनों पक्षों में 1 जोड़ने पर})$$

$$\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$$

यदि $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ तो $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$ इस गुणधर्म को 'योगानुपात' कहते हैं।

(IV) अंतरानुपात (Dividendo) यदि $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ तो $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$

$$\therefore \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

$$\therefore \frac{a}{b} - 1 = \frac{c}{d} - 1 \quad (\text{दोनों पक्षों में से 1 घटाने पर})$$

$$\therefore \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$$

यदि $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ तो $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$ इस गुणधर्म को 'अंतरानुपात' कहते हैं।

(V) योगांतरानुपात (Componendo-dividendo) यदि $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ तो $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$, $a \neq b$, $c \neq d$

$$\text{यदि } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \therefore \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d} \quad (\text{योगानुपात द्वारा}) \dots (1)$$

$$\therefore \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d} \quad (\text{अंतरानुपात द्वारा}) \dots (2)$$

$$\therefore \frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d} \quad (1) \text{ को } (2) \text{ से भाग देने पर}$$

यदि $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ तो $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$ इस गुणधर्म को 'योगांतरानुपात' कहते हैं।

योगानुपात और अंतरानुपात का सामान्य स्वरूप

$$\text{यदि } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ तो } \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d} \quad (\text{एक बार योगानुपात})$$

$$\frac{a+2b}{b} = \frac{c+2d}{d} \quad (\text{दो बार योगानुपात क्रिया})$$

$$\text{सामान्यतः } \frac{a+mb}{b} = \frac{c+md}{d} \quad (m \text{ बार योगानुपात क्रिया}) \dots (1)$$

$$\text{उसी प्रकार यदि } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ तो } \frac{a-mb}{b} = \frac{c-md}{d} \quad (m \text{ बार अंतरानुपात क्रिया}) \dots (2)$$

$$\text{और यदि } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ तो } \frac{a+mb}{a-mb} = \frac{c+md}{c-md} \quad (m \text{ बार योगांतरानुपात क्रिया}) \dots [(1) \text{ तथा } (2) \text{ से, भाग द्वारा}]$$



इसे ध्यान में रखें

यदि $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ तो $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$ (विपर्यस्थानुपात)

यदि $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ तो $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$ (योगानुपात)

यदि $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ तो $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ (एकांतरानुपात)

यदि $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ तो $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$ (अंतरानुपात)

यदि $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ तो $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$ (योगांतरानुपात)

हल किए गए उदाहरण

उदा. (1) यदि $\frac{a}{b} = \frac{5}{3}$ तो $\frac{a+7b}{7b}$ ज्ञात कीजिए।

विधि I

हल : यदि $\frac{a}{b} = \frac{5}{3}$ तो $\frac{a}{5} = \frac{b}{3} = k$, (एकांतरानुपात द्वारा)

$$\therefore a = 5k, b = 3k$$

$$\begin{aligned}\therefore \frac{a+7b}{7b} &= \frac{5k+7 \times 3k}{7 \times 3k} \\ &= \frac{5k+21k}{21k} \\ &= \frac{26k}{21k} = \frac{26}{21}\end{aligned}$$

विधि II

$$\begin{aligned}\therefore \frac{a}{b} &= \frac{5}{3} \\ \therefore \frac{a}{7b} &= \frac{5}{21} \\ \therefore \frac{a+7b}{7b} &= \frac{5+21}{21} \quad (\text{योगानुपात द्वारा}) \\ \therefore \frac{a+7b}{7b} &= \frac{26}{21}\end{aligned}$$

उदा. (2) यदि $\frac{a}{b} = \frac{7}{4}$ तो $\frac{5a-b}{b}$ ज्ञात कीजिए।

विधि I

हल : $\frac{a}{b} = \frac{7}{4}$

$$\therefore \frac{a}{7} = \frac{b}{4} \quad (\text{एकांतरानुपात द्वारा})$$

$$\therefore \frac{a}{7} = \frac{b}{4} = m \quad \text{मान लो}$$

$$\therefore a = 7m, b = 4m$$

$$\begin{aligned}\therefore \frac{5a-b}{b} &= \frac{5(7m) - 4m}{4m} \\ &= \frac{35m - 4m}{4m} \\ &= \frac{31}{4}\end{aligned}$$

विधि II

$$\begin{aligned}\frac{a}{b} &= \frac{7}{4} \\ \frac{5a}{b} &= \frac{5 \times 7}{4} \\ &= \frac{35}{4} \\ \frac{5a-b}{b} &= \frac{35-4}{4} \quad (\text{अंतरानुपात द्वारा}) \\ \frac{5a-b}{b} &= \frac{31}{4}\end{aligned}$$

उदा. (3) यदि $\frac{a}{b} = \frac{7}{3}$ तो $\frac{a+2b}{a-2b}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : विधि I : माना $a = 7m, b = 3m$

$$\begin{aligned}\therefore \frac{a+2b}{a-2b} &= \frac{7m+2 \times 3m}{7m-2 \times 3m} \\ &= \frac{7m+6m}{7m-6m} \\ &= \frac{13m}{m} = \frac{13}{1}\end{aligned}$$

विधि II : $\frac{a}{b} = \frac{7}{3}$

$$\therefore \frac{a}{2b} = \frac{7}{6} \quad \text{..(दोनों पक्षों में } \frac{1}{2} \text{ से गुणा करने पर)}$$

$$\therefore \frac{a+2b}{a-2b} = \frac{7+6}{7-6} \quad (\text{योगांतरानुपात द्वारा})$$

$$\therefore \frac{a+2b}{a-2b} = \frac{13}{1}$$

उदा. (4) यदि $\frac{a}{3} = \frac{b}{2}$ तो $\frac{5a+3b}{7a-2b}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : विधि I

$$\frac{a}{3} = \frac{b}{2}$$

$$\therefore \frac{a}{b} = \frac{3}{2} \dots\dots\dots (\text{एकांतरानुपात द्वारा})$$

अब $\frac{5a+3b}{7a-2b}$ के प्रत्येक पद को b से भाग देने पर

$$\frac{\frac{5a}{b} + \frac{3b}{b}}{\frac{7a}{b} - \frac{2b}{b}} = \frac{5\left(\frac{a}{b}\right) + 3}{7\left(\frac{a}{b}\right) - 2}$$

$$= \frac{5\left(\frac{3}{2}\right) + 3}{7\left(\frac{3}{2}\right) - 2}$$

$$= \frac{\frac{15}{2} + 3}{\frac{21}{2} - 2}$$

$$= \frac{15+6}{21-4}$$

$$= \frac{21}{17}$$

विधि II

$$\frac{a}{3} = \frac{b}{2}$$

$$\text{मान लो } \frac{a}{3} = \frac{b}{2} = t$$

$$\therefore a = 3t \text{ तथा } b = 2t$$

$$\frac{5a+3b}{7a-2b} = \frac{5(3t)+3(2t)}{7(3t)-2(2t)} \quad (t \neq 0)$$

$$= \frac{15t+6t}{21t-4t}$$

$$= \frac{21t}{17t}$$

$$= \frac{21}{17}$$

उदा. (5) यदि $\frac{x}{y} = \frac{4}{5}$ तो $\frac{4x-y}{4x+y}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल :

$$\frac{x}{y} = \frac{4}{5}$$

$$\frac{4x}{y} = \frac{16}{5}$$

...(दोनों पक्षों में 4 से गुणा करने पर)

$$\therefore \frac{4x+y}{4x-y} = \frac{16+5}{16-5}$$

...(योगांतरानुपात द्वारा)

$$\therefore \frac{4x+y}{4x-y} = \frac{21}{11}$$

$$\therefore \frac{4x-y}{4x+y} = \frac{11}{21}$$

...(विपर्यस्थानुपात द्वारा)

उदा. (6) यदि $5x = 4y$ तो $\frac{3x^2+y^2}{3x^2-y^2}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल :

$$\frac{x}{y} = \frac{4}{5}$$

$$\therefore \frac{x^2}{y^2} = \frac{16}{25}$$

$$\therefore \frac{3x^2}{y^2} = \frac{48}{25}$$

...(दोनों पक्षों में 3 से गुणा करने पर)

$$\therefore \frac{3x^2+y^2}{3x^2-y^2} = \frac{48+25}{48-25}$$

...(योगांतरानुपात द्वारा)

$$\therefore \frac{3x^2+y^2}{3x^2-y^2} = \frac{73}{23}$$



आओ, जानें

तुल्यानुपात के गुणधर्मों का उपयोग (Use of equal ratios)

कुछ समीकरण हल करने के लिए अन्य पद्धतियों का उपयोग करने की अपेक्षा तुल्यानुपात के गुणधर्म का उपयोग करना अधिक सुविधाजनक होता है।

उदा. (1) समीकरण हल कीजिए। $\frac{3x^2+5x+7}{10x+14} = \frac{3x^2+4x+3}{8x+6}$

हल :

$$\frac{3x^2+5x+7}{10x+14} = \frac{3x^2+4x+3}{8x+6}$$

$$\frac{(6x^2+10x+14)}{10x+14} = \frac{(6x^2+8x+6)}{8x+6} \quad (\text{दोनों पक्षों में 2 से गुणा करने पर})$$

$$\frac{(6x^2 + 10x + 14) - (10x + 14)}{10x + 14} = \frac{(6x^2 + 8x + 6) - (8x + 6)}{8x + 6} \quad (\text{अंतरानुपात द्वारा})$$

$$\therefore \frac{6x^2}{10x + 14} = \frac{6x^2}{8x + 6}$$

यह समीकरण $x = 0$ मान के लिए सत्य है। $\therefore x = 0$ यह एक हल है।

यदि $x \neq 0$ तो $x^2 \neq 0$, $\therefore 6x^2$ से दोनों पक्षों में भाग देने पर,

$$\frac{1}{10x + 14} = \frac{1}{8x + 6}$$

$$\therefore 8x + 6 = 10x + 14$$

$$\therefore 6 - 14 = 10x - 8x$$

$$\therefore -8 = 2x$$

$$\therefore x = -4$$

$\therefore x = -4$ अथवा $x = 0$ यह दिए गए समीकरण के हल हैं।

उदा. (2) हल कीजिए $\frac{\sqrt{x+7} + \sqrt{x-2}}{\sqrt{x+7} - \sqrt{x-2}} = \frac{5}{1}$

$$\frac{(\sqrt{x+7} + \sqrt{x-2}) + (\sqrt{x+7} - \sqrt{x-2})}{(\sqrt{x+7} + \sqrt{x-2}) - (\sqrt{x+7} - \sqrt{x-2})} = \frac{5+1}{5-1} \quad (\text{योगांतरानुपात द्वारा})$$

$$\therefore \frac{2\sqrt{x+7}}{2\sqrt{x-2}} = \frac{6}{4}$$

$$\therefore \frac{\sqrt{x+7}}{\sqrt{x-2}} = \frac{3}{2}$$

$$\therefore \frac{x+7}{x-2} = \frac{9}{4} \quad (\text{दोनों पक्षों का वर्ग करने पर})$$

$$\therefore 4x + 28 = 9x - 18$$

$$\therefore 28 + 18 = 9x - 4x$$

$$\therefore 46 = 5x$$

$$\frac{46}{5} = x$$

$$\therefore x = \frac{46}{5} \text{ समीकरण का हल है।}$$

कृति

मोटे कागज के पाँच टुकड़े लीजिए। प्रत्येक पर निम्नलिखित में से एक विधान लिखिए।

(i) $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$ (ii) $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ (iii) $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bd}$ (iv) $\frac{c}{d} = \frac{c-a}{d-b}$ (v) $\frac{a}{b} = \frac{rc}{rd}$

a, b, c, d धनात्मक संख्या हो और $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ तो उपरोक्त प्रत्येक विधान के लिए सत्य या असत्य कार्ड के पीछे लिखिए। विधान असत्य हो तो उसका कारण भी स्पष्ट कीजिए।

प्रश्नसंग्रह 4.3

(1) यदि $\frac{a}{b} = \frac{7}{3}$ तो निम्नलिखित अनुपातों के मान ज्ञात कीजिए।

(i) $\frac{5a+3b}{5a-3b}$ (ii) $\frac{2a^2+3b^2}{2a^2-3b^2}$ (iii) $\frac{a^3-b^3}{b^3}$ (iv) $\frac{7a+9b}{7a-9b}$

(2) यदि $\frac{15a^2+4b^2}{15a^2-4b^2} = \frac{47}{7}$ तो निम्नलिखित अनुपातों के मान ज्ञात कीजिए।

(i) $\frac{a}{b}$ (ii) $\frac{7a-3b}{7a+3b}$ (iii) $\frac{b^2-2a^2}{b^2+2a^2}$ (iv) $\frac{b^3-2a^3}{b^3+2a^3}$

(3) यदि $\frac{3a+7b}{3a-7b} = \frac{4}{3}$ तो $\frac{3a^2-7b^2}{3a^2+7b^2}$ का मान ज्ञात कीजिए।

(4) निम्नलिखित समीकरण हल कीजिए।

(i) $\frac{x^2+12x-20}{3x-5} = \frac{x^2+8x+12}{2x+3}$

(ii) $\frac{10x^2+15x+63}{5x^2-25x+12} = \frac{2x+3}{x-5}$

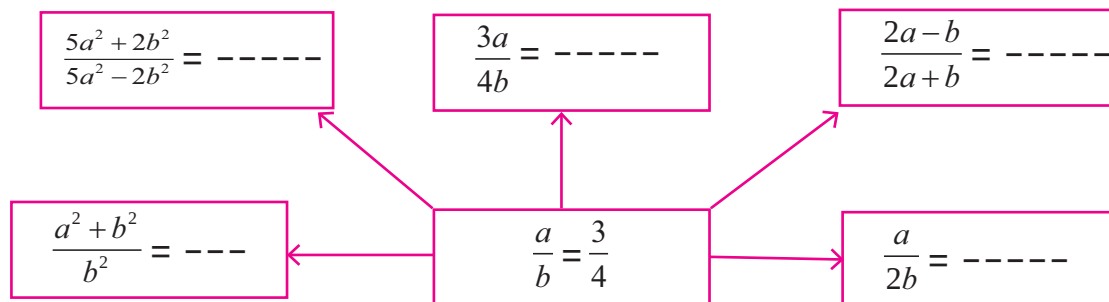
(iii) $\frac{(2x+1)^2+(2x-1)^2}{(2x+1)^2-(2x-1)^2} = \frac{17}{8}$

(iv*) $\frac{\sqrt{4x+1}+\sqrt{x+3}}{\sqrt{4x+1}-\sqrt{x+3}} = \frac{4}{1}$

(v) $\frac{(4x+1)^2+(2x+3)^2}{4x^2+12x+9} = \frac{61}{36}$

(vi) $\frac{(3x-4)^3-(x+1)^3}{(3x-4)^3+(x+1)^3} = \frac{61}{189}$

कृति : निम्नलिखित चौखटों में से बीच के चौखट में a तथा b के मान परिवर्तन कर अर्थात् $a : b$ अनुपात में परिवर्तन कर विविध उदाहरण बनाए जा सकते हैं। इनमें परिवर्तन कर शिक्षक अधिकाधिक स्वाध्याय दें।





आओ, जानें

तुल्य अनुपातों का प्रमेय (Theorem on equal ratios)

यदि $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ तर $\frac{a}{b} = \frac{a+c}{b+d} = \frac{c}{d}$ इस गुणधर्म को तुल्य अनुपात का प्रमेय कहते हैं।

उपपत्ति : माना $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k \quad \therefore a = bk$ तथा $c = dk$

$$\therefore \frac{a+c}{b+d} = \frac{bk+dk}{b+d} = \frac{k(b+d)}{b+d} = k$$

$$\therefore \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$$

हमें ज्ञात है कि, $\frac{a}{b} = \frac{al}{bl}$

$$\therefore \text{यदि } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k, \text{ तो } \frac{al}{bl} = \frac{cm}{dm} = \frac{al+cm}{bl+dm} = k$$

इस प्रकार यदि $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \dots\dots\dots$ और यदि l, m, n ये शून्येतर संख्याएँ हों।

तो प्रत्येक अनुपात = $\frac{al+cm+en+\dots}{bl+dm+fn+\dots}$ तुल्य अनुपात के प्रमेय का सामान्य रूप प्राप्त होता है।



थोड़ा, सोचें

किसी व्यायामशाला के बाल समूह में 35 लड़कियाँ तथा 42 लड़के किशोर समूह में 30 लड़कियाँ तथा 36 लड़के और युवा समूह में 20 लड़कियाँ तथा 24 लड़के हों तो प्रत्येक समूह के लड़कियों की संख्या और लड़कों की संख्या का अनुपात कितना है ?

सामूहिक व्यायाम के लिए तीनों समूह प्रांगण में एकत्रित करने पर कुल लड़कियों की और लड़कों की संख्या का अनुपात कितना है ?

उपरोक्त प्रश्न के उत्तर से आपको तुल्यानुपात के प्रमेय की अनुभूति हुई क्या ?

उदा. (1) निम्नलिखित कथनों में रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए।

$$(i) \frac{a}{3} = \frac{b}{7} = \frac{4a+9b}{\dots\dots\dots} \quad (ii) \frac{x}{3} = \frac{y}{5} = \frac{z}{4} = \frac{5x-3y+4z}{\dots\dots\dots}$$

हल : (i) $\frac{a}{3} = \frac{b}{7} = \frac{4a+9b}{4 \times 3 + 9 \times 7} = \frac{4a+9b}{12+63} = \frac{4a+9b}{75}$

$$(ii) \frac{x}{3} = \frac{y}{5} = \frac{z}{4} = \frac{5 \times x}{5 \times 3} = \frac{-3 \times y}{-3 \times 5} = \frac{4 \times z}{4 \times 4}$$

$$\therefore = \frac{5x}{15} = \frac{-3y}{-15} = \frac{4z}{16}$$

$$= \frac{5x-3y+4z}{15-15+16} \quad \text{----- (तुल्यानुपात प्रमेय द्वारा)}$$

$$= \frac{5x-3y+4z}{16}$$

उदा. (2) यदि $\frac{a}{(x-2y+3z)} = \frac{b}{(y-2z+3x)} = \frac{c}{(z-2x+3y)}$ तथा $x + y + z \neq 0$ तो सिद्ध कीजिए कि

$$\text{प्रत्येक अनुपात} = \frac{a+b+c}{2(x+y+z)}$$

हल : माना $\frac{a}{(x-2y+3z)} = \frac{b}{(y-2z+3x)} = \frac{c}{(z-2x+3y)} = k$

$\therefore$ तुल्य अनुपात के प्रमेय द्वारा

$$\begin{aligned} k &= \frac{a+b+c}{(x-2y+3z)+(y-2z+3x)+(z-2x+3y)} \\ &= \frac{a+b+c}{2x+2y+2z} \\ &= \frac{a+b+c}{2(x+y+z)} \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{a}{x-2y+3z} = \frac{b}{y-2z+3x} = \frac{c}{z-2x+3y} = \frac{a+b+c}{2(x+y+z)}$$

उदा. (3) यदि $\frac{y}{b+c-a} = \frac{z}{c+a-b} = \frac{x}{a+b-c}$ तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{a}{z+x} = \frac{b}{x+y} = \frac{c}{y+z}$

हल : दिए गए अनुपात में विपर्ययस्थानुपात द्वारा

$$\frac{b+c-a}{y} = \frac{c+a-b}{z} = \frac{a+b-c}{x}$$

माना $\frac{b+c-a}{y} = \frac{c+a-b}{z} = \frac{a+b-c}{x} = k$

$\therefore$ तुल्य अनुपात प्रमेय द्वारा

$$\begin{aligned} k &= \frac{(c+a-b)+(a+b-c)}{z+x} \\ &= \frac{2a}{z+x} \quad \dots(I) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k &= \frac{(a+b-c)+(b+c-a)}{x+y} \\ &= \frac{2b}{x+y} \quad \dots(II) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k &= \frac{(b+c-a)+(c+a-b)}{y+z} \\ &= \frac{2c}{y+z} \quad \dots(III) \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{2a}{z+x} = \frac{2b}{x+y} = \frac{2c}{y+z}$$

$$\therefore \frac{a}{z+x} = \frac{b}{x+y} = \frac{c}{y+z}$$

उदा. (4) हल कीजिए : $\frac{14x^2-6x+8}{10x^2+4x+7} = \frac{7x-3}{5x+2}$

हल : उदाहरण के निरीक्षण से ध्यान में आता है कि दाहिने पक्ष के अनुपात के दोनों पदों को $2x$ से गुणा करने पर बाएँ पक्ष के अनुपात के पहले दो पद प्राप्त होते हैं। अतः दाहिने पक्ष के अनुपात के दोनों पदों का $2x$ से गुणा कीजिए परंतु प्रथमतः $x \neq 0$ यह निश्चित कीजिए।

यदि $x = 0$ हो तो $\frac{14x^2 - 6x + 8}{10x^2 + 4x + 7} = \frac{8}{7}$ तथा $\frac{7x - 3}{5x + 2} = \frac{-3}{2}$

$\therefore \frac{8}{7} = \frac{-3}{2}$ यह असंगत कथन प्राप्त होता है।

$\therefore x \neq 0$

$\therefore$ दाहिने पक्ष के अनुपात के दोनों पदों में $2x$ से गुणा करने पर

$$\text{माना } \frac{14x^2 - 6x + 8}{10x^2 + 4x + 7} = \frac{2x(7x - 3)}{2x(5x + 2)} = k$$

$$\therefore \frac{14x^2 - 6x + 8}{10x^2 + 4x + 7} = \frac{14x^2 - 6x}{10x^2 + 4x} = k$$

$$\therefore \frac{14x^2 - 6x + 8 - 14x^2 + 6x}{10x^2 + 4x + 7 - 10x^2 - 4x} = \frac{8}{7} = k$$

$$\therefore k = \frac{8}{7}$$

$$\therefore \frac{7x - 3}{5x + 2} = \frac{8}{7}$$

$$\therefore 49x - 21 = 40x + 16$$

$$\therefore 49x - 40x = 16 + 21$$

$$\therefore 9x = 37 \quad \therefore x = \frac{37}{9}$$

प्रश्नसंग्रह 4.4

(1) निम्नलिखित कथनों में रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए।

$$(i) \frac{x}{7} = \frac{y}{3} = \frac{3x+5y}{\dots\dots} = \frac{7x-9y}{\dots\dots} \quad (ii) \frac{a}{3} = \frac{b}{4} = \frac{c}{7} = \frac{a-2b+3c}{\dots\dots} = \frac{\dots\dots}{6-8+14}$$

(2) यदि $5m - n = 3m + 4n$ तो निम्नलिखित अनुपातों के मान ज्ञात कीजिए।

$$(i) \frac{m^2 + n^2}{m^2 - n^2} \quad (ii) \frac{3m + 4n}{3m - 4n}$$

(3) (i) यदि $a(y+z) = b(z+x) = c(x+y)$ तथा a, b, c में से कोई दो संख्या समान नहीं है।

$$\text{तो सिद्ध कीजिए कि } \frac{y-z}{a(b-c)} = \frac{z-x}{b(c-a)} = \frac{x-y}{c(a-b)}$$

(ii) यदि $\frac{x}{3x-y-z} = \frac{y}{3y-z-x} = \frac{z}{3z-x-y}$ तथा $x+y+z \neq 0$ सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक अनुपात का मान 1 होता है।

(iii) यदि $\frac{ax+by}{x+y} = \frac{bx+az}{x+z} = \frac{ay+bz}{y+z}$ तथा $x+y+z \neq 0$ तो सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक अनुपात $\frac{a+b}{2}$ है।

(iv) यदि $\frac{y+z}{a} = \frac{z+x}{b} = \frac{x+y}{c}$ तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{x}{b+c-a} = \frac{y}{c+a-b} = \frac{z}{a+b-c}$

(v) यदि $\frac{3x-5y}{5z+3y} = \frac{x+5z}{y-5x} = \frac{y-z}{x-z}$ तो सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक अनुपात $\frac{x}{y}$ है।

(4) हल कीजिए। (i) $\frac{16x^2-20x+9}{8x^2+12x+21} = \frac{4x-5}{2x+3}$ (ii) $\frac{5y^2+40y-12}{5y+10y^2-4} = \frac{y+8}{1+2y}$



आओ, जानें

सतत समानुपात (Continued Proportion)

निम्नलिखित अनुपातों पर विचार कीजिए। 4:12 तथा 12:36 अनुपात समान हैं। साथ ही मध्यपद भी समान है। अतः 4, 12, 36 सतत समानुपात में है ऐसा कहते हैं।

यदि $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$ हो तब a, b, c संख्याएँ सतत समानुपात में है ऐसा कहा जाता है।

यदि $ac = b^2$, तो दोनों पक्षों में bc से भाग देने पर $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$ ये समीकरण प्राप्त होता है।

∴ $ac = b^2$ हो, तो a, b, c सतत समानुपात में होते हैं।

यदि a, b, c सतत समानुपात में हो तो b को a तथा c का 'ज्यामितीय माध्य' (Geometric mean) अथवा 'मध्यम समानुपात पद' (Mean proportional) कहते हैं।

उपरोक्त आधार पर निम्नलिखित समस्त कथनों का अर्थ एक-सा है।

∴ (1) $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$ (2) $b^2 = ac$ (3) a, b, c सतत समानुपात में हैं।

(4) b यह a तथा c का ज्यामितीय माध्य है। (5) b यह a तथा c का माध्य समानुपाती है।

सतत समानुपात की संकल्पना को निम्नलिखित प्रकार से विस्तारित कर सकते हैं।

यदि $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = \frac{d}{e} = \frac{e}{f}$ तो a, b, c, d, e तथा f सतत समानुपात में हैं ऐसा कहा जाता है।

उदा. (1) x संख्या 25 तथा 4 का ज्यामितीय माध्य है तो x का मान ज्ञात कीजिए।

हल : x यह 25 तथा 4 का ज्यामितीय माध्य है।

$$\therefore x^2 = 25 \times 4$$

$$\therefore x^2 = 100$$

$$\therefore x = 10$$

उदा. (2) यदि $4a^2b$, $8ab^2$, p सतत समानुपात में हों तो p का मान ज्ञात कीजिए।

हल : प्रश्नानुसार $4a^2b$, $8ab^2$, p सतत समानुपात में हैं।

$$\therefore \frac{4a^2b}{8ab^2} = \frac{8ab^2}{p}$$

$$p = \frac{8ab^2 \times 8ab^2}{4a^2b} = 16b^3$$

उदा. (3) 7, 12 तथा 18 इन प्रत्येक संख्याओं में से कौन-सी संख्या घटाने पर प्राप्त संख्याएँ सतत समानुपात में होगी ?

हल : माना 7, 12 तथा 18 इन प्रत्येक संख्या में से x घटाने पर प्राप्त संख्याएँ सतत समानुपात में होगी।

$(7-x)$, $(12-x)$, $(18-x)$ सतत समानुपात में है।

जाँच

$$\therefore (12-x)^2 = (7-x)(18-x)$$

$$(7-x) = 7 - (-18) = 25$$

$$\therefore 144 - 24x + x^2 = 126 - 25x + x^2$$

$$(12-x) = 12 - (-18) = 30$$

$$\therefore -24x + 25x = 126 - 144$$

$$(18-x) = 18 - (-18) = 36$$

$$\therefore x = -18$$

$$(30)^2 = 900 \text{ और } 25 \times 36 = 900$$

संख्याएँ 25, 30, 36 सतत समानुपात में हैं।

$\therefore$ 7, 12, 18 में प्रत्येक संख्या से -18 घटाने पर प्राप्त संख्याएँ सतत समानुपात में होंगी।

k - पद्धति (k -method)

समान अनुपात के कुछ प्रश्न हल करने की यह एक सरल विधि है। इस पद्धति में हम दिए गए प्रत्येक अनुपात का मान k लेते हैं।

उदा. (1) यदि $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{5a-3c}{5b-3d} = \frac{7a-2c}{7b-2d}$

हल : माना $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k \therefore a = bk, c = dk$

a तथा c के मान दोनों पक्षों में रखने पर

$$\text{बायाँ पक्ष} = \frac{5a-3c}{5b-3d} = \frac{5(bk)-3(dk)}{5b-3d} = \frac{k(5b-3d)}{(5b-3d)} = k$$

$$\text{दायाँ पक्ष} = \frac{7a-2c}{7b-2d} = \frac{7(bk)-2(dk)}{7b-2d} = \frac{k(7b-2d)}{7b-2d} = k$$

$\therefore$ बायाँ पक्ष = दायाँ पक्ष

$$\therefore \frac{5a-3c}{5b-3d} = \frac{7a-2c}{7b-2d}$$

उदा. (2) यदि a, b, c सतत समानुपात में हों तो सिद्ध कीजिए $\frac{(a+b)^2}{ab} = \frac{(b+c)^2}{bc}$

हल : a, b, c सतत समानुपात में हैं। माना $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = k$

$$\begin{aligned}\therefore b &= ck, & a &= bk \\ & & &= ck \times k \\ & & &= ck^2\end{aligned}$$

a तथा b का मान रखने पर

$$\text{बायाँ पक्ष} = \frac{(a+b)^2}{ab} = \frac{(ck^2+ck)^2}{(ck^2)(ck)} = \frac{c^2k^2(k+1)^2}{c^2k^3} = \frac{(k+1)^2}{k}$$

$$\text{दायाँ पक्ष} = \frac{(b+c)^2}{bc} = \frac{(ck+c)^2}{(ck)c} = \frac{c^2(k+1)^2}{c^2k} = \frac{(k+1)^2}{k}$$

$$\therefore \frac{(a+b)^2}{ab} = \frac{(b+c)^2}{bc}$$

$\therefore$ बायाँ पक्ष = दायाँ पक्ष.

उदा. (3) यदि a, b, c सतत समानुपात में हों,

तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{a}{c} = \frac{a^2+ab+b^2}{b^2+bc+c^2}$

हल : a, b, c सतत समानुपात हैं। $\therefore \frac{a}{b} = \frac{b}{c}$

माना, $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = k \quad \therefore b = ck$ तथा $a = ck^2$

$$\text{बायाँ पक्ष} = \frac{a}{c} = \frac{ck^2}{c} = k^2$$

$$\begin{aligned}\text{दायाँ पक्ष} &= \frac{a^2+ab+b^2}{b^2+bc+c^2} \\ &= \frac{(k^2c)^2+k^2c(ck)+(ck)^2}{(ck)^2+(ck)(c)+c^2} \\ &= \frac{k^4c^2+k^3c^2+c^2k^2}{c^2k^2+c^2k+c^2} \\ &= \frac{c^2k^2(k^2+k+1)}{c^2(k^2+k+1)} \\ &= k^2\end{aligned}$$

$\therefore$ बायाँ पक्ष = दायाँ पक्ष

$$\therefore \frac{a}{c} = \frac{a^2+ab+b^2}{b^2+bc+c^2}$$

उदा. (4) पाँच संख्याएँ सतत समानुपात में हों और प्रथम पद 5 तथा अंतिम पद 80 हो तो वे संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

हल : माना, a, ak, ak^2, ak^3, ak^4

यहाँ $a = 5$ और $ak^4 = 80$

$$\therefore 5 \times k^4 = 80$$

$$\therefore k^4 = 16$$

$$\therefore k = 2 \quad (\because 2^4 = 16)$$

$$ak = 5 \times 2 = 10 \quad ak^2 = 5 \times 4 = 20$$

$$ak^3 = 5 \times 8 = 40 \quad ak^4 = 5 \times 16 = 80$$

$\therefore$ वे संख्याएँ 5, 10, 20, 40, 80 हैं।

प्रश्नसंग्रह 4.5

- (1) 12, 16 तथा 21 इन प्रत्येक संख्या में कौन-सी संख्या जोड़ने पर प्राप्त संख्याएँ सतत समानुपात में होंगी ?
- (2) $(23-x)$ तथा $(19-x)$ का ज्यामितीय माध्य $(28-x)^2$ हो तो x का मान ज्ञात कीजिए ।
- (3) तीन संख्याएँ सतत समानुपात में हैं और उनका ज्यामितीय माध्य 12 तथा अन्य दो संख्याओं का योगफल 26 हो तो वे संख्याएँ ज्ञात कीजिए ।
- (4) यदि $(a + b + c)(a - b + c) = a^2 + b^2 + c^2$ तो सिद्ध कीजिए की संख्याएँ a, b तथा c सतत समानुपात में हैं ।
- (5) यदि $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$ तथा $a, b, c > 0$ तो सिद्ध कीजिए,
 - (i) $(a + b + c)(b - c) = ab - c^2$
 - (ii) $(a^2 + b^2)(b^2 + c^2) = (ab + bc)^2$
 - (iii) $\frac{a^2 + b^2}{ab} = \frac{a + c}{b}$
- (6) $\frac{x+y}{x-y}, \frac{x^2-y^2}{x^2y^2}$ का ज्यामितीय माध्य ज्ञात कीजिए ।

कृति : भूगोल की पुस्तक में भारत का राजकीय मानचित्र देखिए । वहाँ दी गई दूरी का पैमाना समझिए ।

इस आधार पर सरल रेखा में स्थित विभिन्न शहरों के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए ।

जैसे - उदा. (i) नई दिल्ली से बेंगलूरू (ii) मुंबई से कोलकाता (iii) जयपुर से भुवनेश्वर

प्रकीर्ण प्रश्नसंग्रह 4

- (1) निम्नलिखित प्रश्नों के लिए बहुपर्यायी उत्तरों में से योग्य विकल्प चुनकर लिखिए ।
 - (i) यदि $6 : 5 = y : 20$ तो y का मान निम्नलिखित में से कौन-सा है ?

(A) 15 (B) 24 (C) 18 (D) 22.5
 - (ii) 1 मिलिमीटर का 1 सेंटीमीटर से अनुपात निम्नलिखित में से कौन-सा है ?

(A) 1 : 100 (B) 10 : 1 (C) 1 : 10 (D) 100 : 1
 - (iii*) जतीन, नितीन तथा मोहसिन की आयु क्रमशः 16, 24 तथा 36 वर्ष है, तो नितीन की आयु का मोहसिन की आयु से अनुपात बताइए ।

(A) 3 : 2 (B) 2 : 3 (C) 4 : 3 (D) 3 : 4

- (iv) शुभम और अनिल को 24 केले 3 : 5 के अनुपात में वितरित किए गए तो शुभम को कितने केले मिलेंगे ?
 (A) 8 (B) 15 (C) 12 (D) 9
- (v) 4 तथा 25 का ज्यामितीय माध्य निम्नलिखित में से कौन-सा है ?
 (A) 6 (B) 8 (C) 10 (D) 12
- (2) निम्नलिखित संख्यायुग्म में पहली संख्या का दूसरी संख्या से अनुपात अतिसंक्षिप्त रूप में लिखिए ।
 (i) 21, 48 (ii) 36, 90 (iii) 65, 117 (iv) 138, 161 (v) 114, 133
- (3) निम्नलिखित अनुपातों को अतिसंक्षिप्त रूप में लिखिए ।
 (i) वृत्त की त्रिज्या और व्यास का अनुपात ।
 (ii) आयत की लंबाई 4 सेमी तथा चौड़ाई 3 सेमी हो तो आयत के विकर्ण का आयत की लंबाई से अनुपात ।
 (iii) वर्ग की भुजा 4 सेमी हो तो उस वर्ग की परिमिति का उसके क्षेत्रफल से अनुपात ।
- (4) निम्नलिखित संख्याएँ सतत समानुपात में है क्या ? निश्चित कीजिए ।
 (i) 2, 4, 8 (ii) 1, 2, 3 (iii) 9, 12, 16 (iv) 3, 5, 8
- (5) तीन संख्याएँ a, b, c सतत समानुपात में हों और यदि $a = 3$ और $c = 27$ हो तो $b =$ कितना ?
- (6) निम्नलिखित अनुपातों का प्रतिशत में रूपांतर कीजिए ।
 (i) $37 : 500$ (ii) $\frac{5}{8}$ (iii) $\frac{22}{30}$ (iv) $\frac{5}{16}$ (v) $\frac{144}{1200}$
- (7) निम्नलिखित में से प्रथम पद का द्वितीय पद से अनुपात अतिसंक्षिप्त रूप में लिखिए ।
 (i) 1024 MB, 1.2 GB [(1024 MB = 1 GB)]
 (ii) 17 रुपये, 25 रुपये 60 पैसे (iii) 5 दर्जन, 120 नग
 (iv) 4 वर्ग मी, 800 वर्ग सेमी (v) 1.5 किग्रा, 2500 ग्राम
- (8) यदि $\frac{a}{b} = \frac{2}{3}$ तो निम्नलिखित अनुपातों के मान ज्ञात कीजिए ।
 (i) $\frac{4a+3b}{3b}$ (ii) $\frac{5a^2+2b^2}{5a^2-2b^2}$
 (iii) $\frac{a^3+b^3}{b^3}$ (iv) $\frac{7b-4a}{7b+4a}$
- (9) a, b, c, d समानुपात में हों तो सिद्ध कीजिए ।
 (i) $\frac{11a^2+9ac}{11b^2+9bd} = \frac{a^2+3ac}{b^2+3bd}$
 (ii*) $\sqrt{\frac{a^2+5c^2}{b^2+5d^2}} = \frac{a}{b}$
 (iii) $\frac{a^2+ab+b^2}{a^2-ab+b^2} = \frac{c^2+cd+d^2}{c^2-cd+d^2}$

(10) a, b, c सतत समानुपात में हों तो सिद्ध कीजिए कि,

$$(i) \frac{a}{a+2b} = \frac{a-2b}{a-4c} \quad (ii) \frac{b}{b+c} = \frac{a-b}{a-c}$$

(11) हल कीजिए : $\frac{12x^2+18x+42}{18x^2+12x+58} = \frac{2x+3}{3x+2}$

(12) यदि $\frac{2x-3y}{3z+y} = \frac{z-y}{z-x} = \frac{x+3z}{2y-3x}$ तो सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक अनुपात $\frac{x}{y}$ है।

(13*) यदि $\frac{by+cz}{b^2+c^2} = \frac{cz+ax}{c^2+a^2} = \frac{ax+by}{a^2+b^2}$ तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$

