



आओ, सीखें

- बहुपद का परिचय
- बहुपदों पर संक्रिया
- बहुपद का घात
- संश्लेषात्मक भाग विधि
- बहुपद का मान
- शेषफल प्रमेय



आओ, चर्चा करें

$p^3 - \frac{1}{2}p^2 + p$; $m^2 + 2n^3 - \sqrt{3}m^5$; 6 ये सभी बैजिक व्यंजक हैं ।

अध्यापक : विद्यार्थियों, $p^3 - \frac{1}{2}p^2 + p$, $m^2 + 2n^3 - \sqrt{3}m^5$, 6 इन बैजिक व्यंजकों में से प्रत्येक व्यंजक का एक-एक पद लेकर, उनके चरांकों का घात बताइए ।

माधुरी : $p^3 - \frac{1}{2}p^2 + p$ इस व्यंजक के पदों के चरांकों के घात क्रमशः 3, 2, 1 है ।

विवेक : सर, $m^2 + 2n^3 - \sqrt{3}m^5$ इस व्यंजक के पदों के चरांकों के घात क्रमशः 2, 3, 5 है ।

रोहित : सर, 6 इस व्यंजक में चरांक नहीं है । इसे $6 = 6 \times 1 = 6 \times x^0$ इस प्रकार लिख सकते हैं, अतः 6 इस व्यंजक के चरांक का घात 0 है ।

अध्यापक : इसलिए उपर्युक्त सभी व्यंजकों में चरांक के घात धन पूर्णांक या शून्य अर्थात पूर्ण संख्या है । जिन बैजिक व्यंजक में चरांक के घात पूर्ण संख्या हो, उन व्यंजकों को **बहुपद (polynomial)** कहते हैं । 6 यह भी बहुपद है । 6, - 7, $\frac{1}{2}$, 0, $\sqrt{3}$ आदि अचर संख्याओं को **अचर बहुपद (Constant polynomial)** कहते हैं ।

$\sqrt{y} + 5$ तथा $\frac{1}{y} - 3$ क्या यह बहुपद है ?

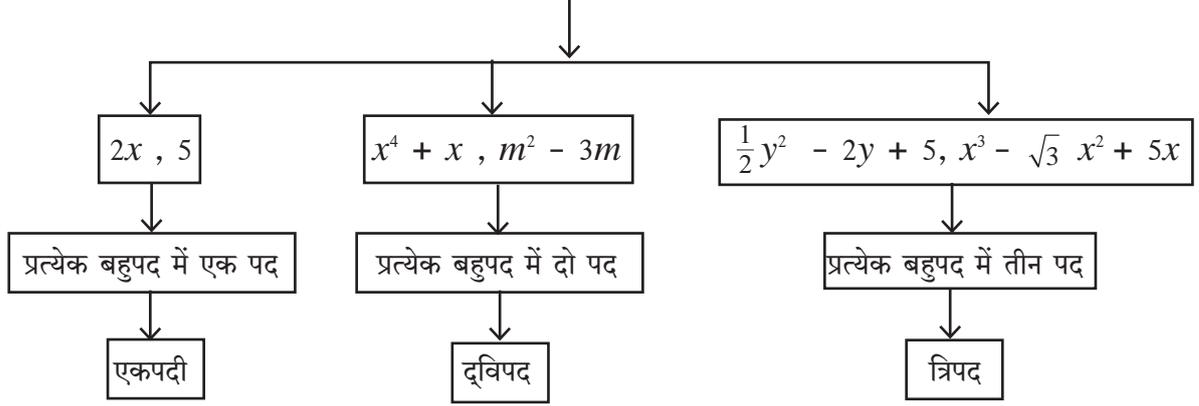
सारा : सर, $\sqrt{y} + 5$ यह बहुपद नहीं है क्योंकि $\sqrt{y} + 5 = y^{\frac{1}{2}} + 5$, इसमें y का घात $\frac{1}{2}$ है जो कि पूर्ण संख्या नहीं है ।

जॉन : सर, $\frac{1}{y} - 3$ यह भी बहुपद नहीं है क्योंकि $\frac{1}{y} - 3 = y^{-1} - 3$, इसमें y का घात - 1 है जो कि पूर्ण संख्या नहीं है ।

अध्यापक : ऐसे पाँच बैजिक व्यंजक लिखिए जो बहुपद नहीं है । स्पष्टीकरण दीजिए । निम्न प्रश्नों के उत्तर भिन्न-भिन्न उदाहरण लेकर वे व्यंजक बहुपद क्यों नहीं है इसपर चर्चा कर जाँच कीजिए ।

- क्या प्रत्येक बैजिक व्यंजक बहुपद होते हैं ?
- क्या प्रत्येक बहुपद बैजिक व्यंजक होते हैं ?

बहुपद का प्रकार (पदों की संख्यानुसार)



किसी एक चरांक के बहुपद को उसके चरांकानुसार $p(x)$, $q(m)$, $r(y)$ ऐसे दर्शाया जाता है ।

$$\text{उदाहरण } p(x) = x^3 + 2x^2 + 5x - 3 \quad q(m) = m^2 + \frac{1}{2}m - 7 \quad r(y) = y^2 + 5$$



आओ, जानें

एक चरांकवाले बहुपदों का घात (Degree of a polynomial in one variable)

अध्यापक : $2x^7 - 5x + 9$ इस बहुपद के चरांक का सबसे बड़ा घात कौन-सा है ?

जिजा : सर, सबसे बड़ा घात 7 है ।

अध्यापक : एक चरांकवाले बहुपद में चरांक के महत्तम घातांक को उस बहुपद का घात कहते हैं ।
उपर्युक्त बहुपद का घात क्या है ?

अशोक : सर, $2x^7 - 5x + 9$ इस बहुपद का घात 7 है ।

अध्यापक : 10 इस बहुपद का घात कितना है ?

राधा : $10 = 10 \times 1 = 10 \times x^0$ इसलिए 10 इस बहुपद का घात 0 है ।

अध्यापक : 10 की तरह ही किसी भी शून्येतर अचर बहुपद का घात 0 होता है ।

शून्य बहुपद का घात निश्चित नहीं किया जा सकता ।

एक से अधिक चरांकोंवाले बहुपद का घात

एक से अधिक चरांकवाले किसी बहुपद में प्रत्येक पद के सभी चरांकों के घातों का योग करने पर जो अधिकतम हो उसे उस बहुपद का घात कहते हैं ।

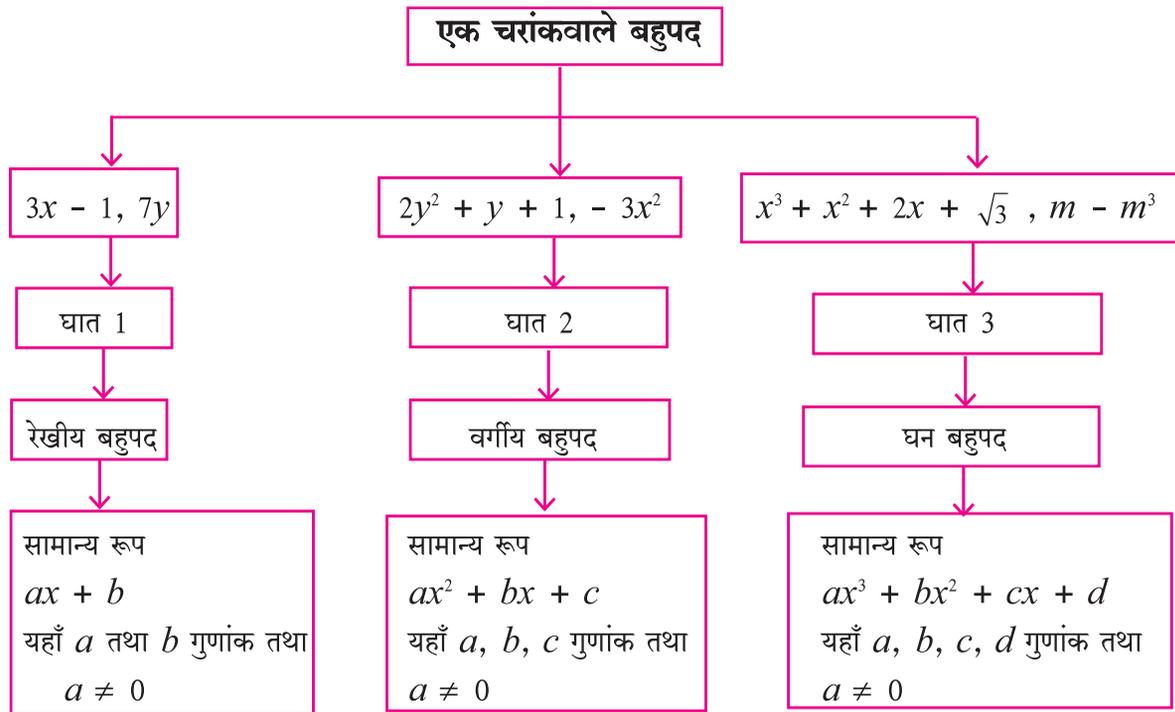
उदा. $3m^3n^6 + 7m^2n^3 - mn$ यह दो चरांकवाला बहुपद है । इस बहुपद का घात 9 है ।
(यहाँ घातों का योगफल $3 + 6 = 9$, $2 + 3 = 5$, $1 + 1 = 2$)

कृति I : चरोंक x तथा घात 5 वाले एकपदी, द्विपद तथा त्रिपद है प्रत्येक का एक उदाहरण लिखिए ।

एकपदी द्विपद त्रिपद

कृति II : दो चरोंकवाले तथा 5 घातवाले एक द्विपद का उदाहरण लिखिए ।

बहुपद का प्रकार (घात के अनुसार)



बहुपद : $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ यह x चरोंक में घात n वाला बहुपद है ।

इसमें $a_n, a_{n-1}, \dots, a_2, a_1, a_0$ यह गुणांक है तथा $a_n \neq 0$

बहुपद का मानक रूप, गुणांक रूप तथा घातांक रूप

(Standard form, co-efficient form and index form of a polynomial)

$p(x) = x - 3x^2 + 5 + x^4$ इस बहुपद में x के घातांकों को अवरोही क्रम में $x^4 - 3x^2 + x + 5$ इस प्रकार लिखते हैं । यह मानक रूप है । इस बहुपद में x का तीसरा घात का पद नहीं है अर्थात वह $0x^3$ है ऐसा समझा जाता है । इस पद को $p(x)$ बहुपद $x^4 + 0x^3 - 3x^2 + x + 5$ ऐसा लिखा जाता है । इस प्रकार घातांक के अवरोही क्रम में लिखे गए एवं घातांक के सभी पद निर्देशित बहुपद को घातांक रूप कहते हैं ।

कई बार घातांक रूप में बहुपद के चरांको को न लिखकर उसके केवल गुणांक क्रम से लिखते हैं। इस रूप को बहुपद का गुणांक रूप कहते हैं। उदाहरणार्थ $x^3 - 3x^2 + 0x - 8$ यह बहुपद $(1, -3, 0, -8)$ ऐसे लिखते हैं। इसे बहुपद का सहगुणांक रूप कहते हैं।

$(4, 0, -5, 0, 1)$ इस बहुपद में y इस चरांक का उपयोग करके घातांक रूप में $4y^4 + 0y^3 - 5y^2 + 0y + 1$ को $4y^4 - 5y^2 + 1$ लिखा जाएगा।

उदा. $p(m) = 3m^5 - 7m + 5m^3 + 2$

| | |
|---|--------------------------------------|
| बहुपद को घातांकों के अवरोही क्रम में लिखिए। | $3m^5 + 5m^3 - 7m + 2$ |
| बहुपद में न होने वाले पद के लिए शून्य गुणांक लेकर समाविष्ट कीजिए और उसे घातांक रूप में लिखिए। | $3m^5 + 0m^4 + 5m^3 + 0m^2 - 7m + 2$ |
| दिए गए बहुपद का मानक रूप लिखिए। | $(3, 0, 5, 0, -7, 2)$ |
| बहुपद का घात लिखिए। | 5 |

उदा. (1) $x^3 + 3x - 5$ इस बहुपद को गुणांक रूप में लिखिए।

हल : $x^3 + 3x - 5 = x^3 + 0x^2 + 3x - 5$

∴ दिए गए बहुपद का गुणांक रूप $(1, 0, 3, -5)$

उदा. (2) $(2, -1, 0, 5, 6)$ इसके गुणांक रूपवाले बहुपद को घातांक रूप में लिखिए।

हल : बहुपद का गुणांक रूप $(2, -1, 0, 5, 6)$

∴ घातांक रूप में बहुपद $= 2x^4 - x^3 + 0x^2 + 5x + 6$

अर्थात् $2x^4 - x^3 + 5x + 6$

प्रश्नसंग्रह 3.1

1. निम्नलिखित व्यंजक बहुपद हैं क्या, लिखिए। स्पष्टीकरण दीजिए।

(i) $y + \frac{1}{y}$ (ii) $2 - 5\sqrt{x}$ (iii) $x^2 + 7x + 9$

(iv) $2m^2 + 7m - 5$ (v) 10

2. निम्नलिखित प्रत्येक बहुपद में m^3 का गुणांक लिखिए।

(i) m^3 (ii) $\frac{-3}{2} + m - \sqrt{3}m^3$ (iii) $\frac{-2}{3}m^3 - 5m^2 + 7m - 1$

3. निम्नलिखित जानकारी के आधार पर चरांक x का उपयोग कर प्रत्येक का एक बहुपद लिखिए।

(i) एकपद जिसका 7 घात हो। (ii) द्विपद जिसका घात 35 हो। (iii) त्रिपद जिसका घात 8 हो।

4. निम्नलिखित प्रत्येक बहुपद का घात लिखिए ।

- (i) $\sqrt{5}$ (ii) x^0 (iii) x^2 (iv) $\sqrt{2}m^{10} - 7$ (v) $2p - \sqrt{7}$
 (vi) $7y - y^3 + y^5$ (vii) $xyz + xy - z$ (viii) $m^3n^7 - 3m^5n + mn$

5. निम्नलिखित बहुपदों का रैखिक, वर्ग तथा घन बहुपदों में वर्गीकरण कीजिए ।

- (i) $2x^2 + 3x + 1$ (ii) $5p$ (iii) $\sqrt{2}y - \frac{1}{2}$
 (iv) $m^3 + 7m^2 + \frac{5}{2}m - \sqrt{7}$ (v) a^2 (vi) $3r^3$

6. निम्नलिखित बहुपदों को मानक रूप में लिखिए ।

- (i) $m^3 + 3 + 5m$ (ii) $-7y + y^5 + 3y^3 - \frac{1}{2} + 2y^4 - y^2$

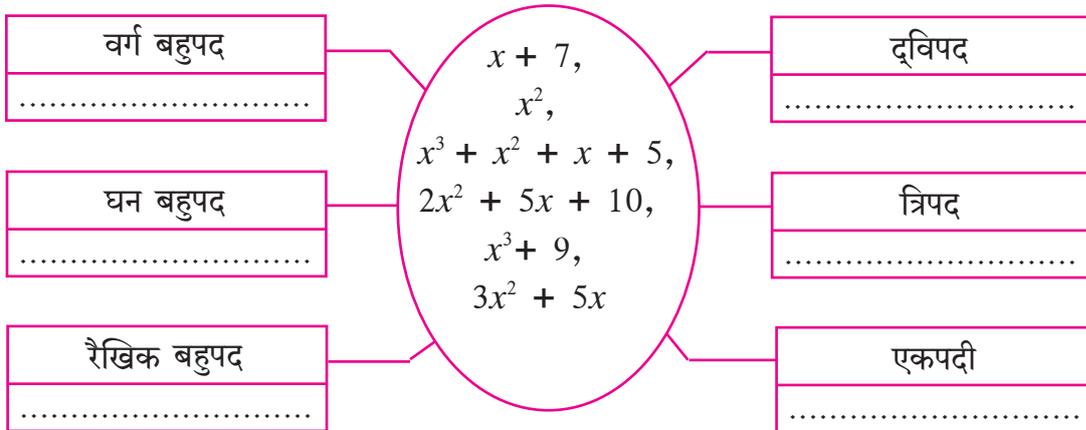
7. निम्नलिखित बहुपदों को गुणांक रूप में लिखिए ।

- (i) $x^3 - 2$ (ii) $5y$ (iii) $2m^4 - 3m^2 + 7$ (iv) $-\frac{2}{3}$

8. निम्नलिखित गुणांक रूपवाले बहुपदों को x चरांक का उपयोग कर मानक रूप में लिखिए ।

- (i) (1, 2, 3) (ii) (5, 0, 0, 0, -1) (iii) (-2, 2, -2, 2)

9. नीचे कुछ बहुपद दिए गए हैं । उन बहुपदों को चौखट में उचित स्थान पर लिखिए ।



थोड़ा याद करें

(1) दो सजातीय ब्रैजिक व्यंजकों के पदों का जोड़ते या घटाते कर समय उनके गुणांकों को जोड़ते या घटाते हैं ।

$$\text{जैसे, } 5m^3 - 7m^3 = (5 - 7)m^3 = -2m^3$$

(2) दो ब्रैजिक व्यंजनों के पदों का गुणा अथवा भाग करते समय उनके गुणांकों का गुणा या भाग होता है वैसे ही घातांकों के नियम का भी उपयोग होता है ।

$$\text{जैसे, } -4y^3 \times 2y^2z = -8y^5z ; 12a^2b \div 3ab^2 = \frac{4a}{b}$$



आओ, जानें

बहुपदों पर संक्रियाएँ

बहुपदों का जोड़, घटाना, गुणा तथा भाग देना की संक्रियाएँ बैजिक व्यंजकों की संक्रियानुसार ही करते हैं।

उदा. (1) $7a^2 + 5a + 6$ में से $5a^2 - 2a$ घटाइए ।

$$\begin{aligned} \text{हल : } (7a^2 + 5a + 6) - (5a^2 - 2a) \\ &= \underline{7a^2 + 5a + 6} - \underline{5a^2 + 2a} \\ &= 7a^2 - 5a^2 + 5a + 2a + 6 \\ &= 2a^2 + 7a + 6 \end{aligned}$$

उदा. (2) $-2a \times 5a^2 = -10a^3$

उदा. (3) $(m^2 - 5) \times (m^3 + 2m - 2) = ?$

$$\begin{aligned} \text{हल : } (m^2 - 5) \times (m^3 + 2m - 2) \\ &= m^2(m^3 + 2m - 2) - 5(m^3 + 2m - 2) \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} &= m^2(m^3 + 2m - 2) - 5(m^3 + 2m - 2) \end{aligned}} \right\} \begin{array}{l} \text{(प्रथम बहुपद के प्रत्येक पद से दूसरे} \\ \text{बहुपद को गुणा करने पर)} \end{array} \\ &= m^5 + 2m^3 - 2m^2 - 5m^3 - 10m + 10 \\ &= m^5 + 2m^3 - 5m^3 - 2m^2 - 10m + 10 \quad \text{(सजातीय पदों को एकत्र कर के लिखने पर)} \\ &= m^5 - 3m^3 - 2m^2 - 10m + 10 \end{aligned}$$

गुणनफल का घात 5 है इसे ध्यान में रखिए ।

उदा. (4) $3m^2n + 5mn^2 - 7mn$ और $2m^2n - mn^2 + mn$ को जोड़िए ।

$$\begin{aligned} \text{हल : } (3m^2n + 5mn^2 - 7mn) + (2m^2n - mn^2 + mn) \\ &= \underline{3m^2n + 5mn^2 - 7mn} + \underline{2m^2n - mn^2 + mn} \\ &= 3m^2n + 2m^2n + 5mn^2 - mn^2 - 7mn + mn \quad \text{(सजातीय पदों को एकत्र कर लिखा)} \\ &= 5m^2n + 4mn^2 - 6mn \quad \text{(सजातीय पदों को जोड़ा)} \end{aligned}$$



थोड़ा सोचें

एक बहुपद का घात 3 तथा दूसरे बहुपद का घात 5 हो तो उन बहुपदों के गुणनफल का घात कितना होगा?
गुण्य तथा गुणांक बहुपद का घात और उनके गुणनफल का घात इनमें कौन-सा संबंध होता है ?

उदा. (5) $(2 + 2x^2) \div (x + 2)$ को भाग दीजिए ।

और प्राप्त उत्तर को भाज्य = भाजक \times भागफल + शेषफल रूप में लिखिए ।

हल : प्रथम $p(x) = 2 + 2x^2$ इस भाज्य बहुपद को मानक रूप में लिखिए ।

$$\therefore 2 + 2x^2 = 2x^2 + 0x + 2$$

$$\begin{array}{r} \text{विधि I : } x + 2 \overline{) 2x^2 + 0x + 2} \\ \underline{- 2x^2 + 4x} \\ - 4x + 2 \\ \underline{- -4x - 8} \\ + \\ \hline 10 \end{array}$$

भाज्य = भाजक \times भागफल + शेषफल

$$2 + 2x^2 = (x + 2) \times (2x - 4) + 10$$

$$q(x), \text{ भाजक} = (x + 2)$$

$$s(x), \text{ भागफल} = 2x - 4 \text{ तथा } r(x), \text{ शेषफल} = 10$$

$$\therefore p(x) = q(x) \times s(x) + r(x)$$

विधि II : भाग की रेखीय पद्धति

$(2x^2 + 2) \div (x + 2)$ के भाग दीजिए ।

$2x^2$ यह पद मिलने के लिए $(x + 2)$ को $2x$ से गुणा कर $4x$ से घटाना

$$2x(x+2) - 4x = 2x^2$$

$$\therefore \text{भाज्य} = 2x^2 + 2 = 2x(x+2) - 4x + 2 \quad \dots(I)$$

अब $-4x$ यह पद पाने के लिए $(x+2)$ को -4 से गुणा कर 8 से जोड़ना

$$-4(x+2) + 8 = -4x$$

$$\therefore (2x^2 + 2) = 2x(x+2) - 4(x+2) + 8 + 2 \quad \dots(I) \text{ से}$$

$$\therefore (2x^2 + 2) = (x + 2) (2x - 4) + 10$$

भाज्य = भाजक \times भागफल + शेषफल



इसे ध्यान में रखें

युक्लिड के भाग का सिद्धांत

यदि $s(x)$ और $p(x)$ ये दोनों बहुपद हैं और $s(x)$ का घात $p(x)$ के घात समान हैं अथवा उससे अधिक हो और $s(x)$ को $p(x)$ से भाग देने पर प्राप्त भागफल $q(x)$ हो, तो $s(x) = p(x) q(x) + r(x)$ यहाँ $r(x) = 0$ अथवा $r(x)$ का घात $p(x)$ के घात से कम होता है ।

प्रश्नसंग्रह 3.2

- (1) दिए गए अक्षरों का उपयोग कर उत्तर लिखिए ।
 - (i) लाटागाँव में वृक्षों की संख्या a हैं । इन वृक्षों की संख्या प्रतिवर्ष b से बढ़ती है तो x वर्ष पश्चात लाटागाँव में कितने वृक्ष होंगे ?
 - (ii) कसरत के लिए एक कतार में y लड़कों की ऐसी x कतारें बनाई गईं तो कसरत के लिए कुल कितने लड़के उपस्थित थे ?
 - (iii) किसी दो अंकोवाली संख्या में इकाई तथा दहाई स्थान के अंक क्रमशः m तथा n हैं तो वह दो अंकोवाली संख्या दर्शाने वाला बहुपद कौन-सा है ?
- (2) निम्नलिखित बहुपदों को जोड़िए ।
 - (i) $x^3 - 2x^2 - 9$; $5x^3 + 2x + 9$
 - (ii) $-7m^4 + 5m^3 + \sqrt{2}$; $5m^4 - 3m^3 + 2m^2 + 3m - 6$
 - (iii) $2y^2 + 7y + 5$; $3y + 9$; $3y^2 - 4y - 3$
- (3) निम्नलिखित पहले बहुपद में से दूसरे बहुपद को घटाइए ।
 - (i) $x^2 - 9x + \sqrt{3}$; $-19x + \sqrt{3} + 7x^2$
 - (ii) $2ab^2 + 3a^2b - 4ab$; $3ab - 8ab^2 + 2a^2b$
- (4) निम्नलिखित बहुपदों का गुणा कीजिए ।
 - (i) $2x$; $x^2 - 2x - 1$ (ii) $x^5 - 1$; $x^3 + 2x^2 + 2$ (iii) $2y + 1$; $y^2 - 2y^3 + 3y$
- (5) पहले बहुपद को दूसरे बहुपद से भाग दीजिए तथा उत्तर को 'भाज्य = भाजक \times भागफल + शेषफल' के रूप में लिखिए ।
 - (i) $x^3 - 64$; $x - 4$ (ii) $5x^5 + 4x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 2$; $x^2 - x$
- (6*) निम्नलिखित जानकारी को पदावली रूप में लिखकर सरल रूप दीजिए ।
 किसी किसान के आयताकार खेत की लंबाई $(2a^2 + 3b^2)$ मीटर तथा चौड़ाई $(a^2 + b^2)$ मीटर है ।
 किसान ने खेत में $(a^2 - b^2)$ मीटर की वर्गाकार जगह पर घर का निर्माण किया तो शेष खेत की जगह का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ।

कृति : निम्नलिखित परिच्छेद पढ़िए और चौखट में सही रकम लिखकर चर्चा कीजिए ।

शिरगम गाँव में गोविंद की 5 एकड़ की असिंचित खेती है । उसके परिवार में पत्नी, 2 लड़के तथा उसकी वृद्ध माता है । उसने 10 प्र.श.प्र.व. की दर से खेती के लिए बैंक से सच्चा लाख रुपये का कर्ज लिया । उसने खेत में x एकड़ में सोयाबीन, y एकड़ भूमि में कपास तथा तुअर के फसल की पैदावार ली । खेती के लिए आया खर्च निम्नलिखित प्रकार है ।

बीज के लिए उसने 10,000 रु. दिए । सोयाबीन के लिए 2000 x रुपये और मजदूरी तथा परिश्रम (कृषिसंबंधी कार्य) के लिए 4000 x^2 रुपये खर्च हुए । कपास तथा तुअर की फसल के लिए खाद और कीटनाशक के लिए 8000 y रुपये एवं मजदूरी तथा परिश्रम के लिए 9000 y^2 रुपये खर्च किए ।

खेती के लिए कुल कितना खर्च हुआ इसे x और y उपयोग कर लिखिए ।

$$\boxed{} + \boxed{2000x} + \boxed{4000x^2} + \boxed{8000y} + \boxed{} \text{ रुपये}$$

उसके खेत में सोयाबीन का उत्पादन 5 x^2 क्विंटल हुआ । इसे 2800 रु. प्रति क्विंटल की दर से बेचा गया । कपास का उत्पादन $\frac{5}{3}y^2$ क्विंटल हुआ तथा इसे 5000 रु. प्रति क्विंटल की दर से बेचा गया ।

तुअर का उत्पादन 4 y क्विंटल हुआ तथा उसे 4000 रु. प्रति क्विंटल की दर से बेचा गया ।

सभी कृषि उपज को बेचने के पश्चात कुल कितने रुपये की आय हुई। इसे x और y के रूप में लिखिए ।

$$\boxed{} + \boxed{} + \boxed{} \text{ रुपये}$$



आओ, जानें

संश्लेषात्मक भाग विधि (Synthetic Division)

किसी बहुपद को दूसरे बहुपद से कैसे भाग देना है, हम जानते हैं । भाजक $x + a$ अथवा $x - a$ बहुपद हो तो हम भाग की एक सरल विधि समझेंगे ।

उदा. (1) $(3x^3 + 2x^2 - 1)$ इस बहुपद को $(x + 2)$ से भाग दीजिए ।

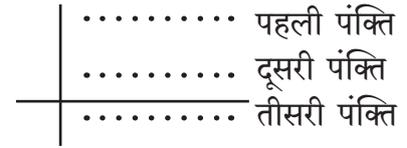
हल : प्रथम भाज्य बहुपद को मानक स्वरूप में लिखने के पश्चात उसे गुणांक स्वरूप में लिखेंगे

$$\text{भाज्य बहुपद : } 3x^3 + 2x^2 - 1 = 3x^3 + 2x^2 + 0x - 1$$

$$\therefore \text{भाज्य बहुपद का गुणांक स्वरूप} = (3, 2, 0, -1)$$

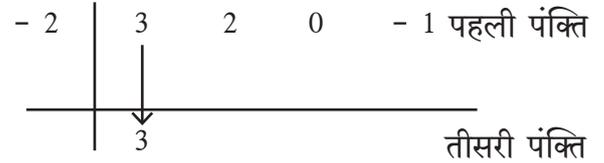
$$\text{भाजक बहुपद} = x + 2$$

संश्लेषात्मक भाग की विधि निम्नलिखित प्रकार से की जाती है ।

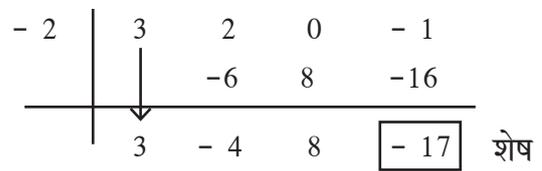


(1) आगे दर्शाए गए अनुसार, एक खड़ी और एक आड़ी रेखा खींचिए ।

(2) भाजक $x + 2$ हैं तथा 2 की विपरीत संख्या -2 है । \therefore प्रथम पंक्ति में खड़ी रेखा के बाईं ओर -2 लिखिए । आड़ी रेखा के ऊपर पहली पंक्ति में भाज्य बहुपद को गुणांक स्वरूप में लिखिए ।



(3) आड़ी रेखा के नीचे अर्थात् तीसरी पंक्ति में भाज्य में पहले गुणांक को जैसे है वैसा ही लिखिए ।



(4) तीसरी पंक्ति में 3 तथा भाजक के -2 का गुणनफल -6 इसे पहली पंक्ति के दूसरे गुणांक 2 के नीचे दूसरे पंक्ति में लिखिए और इन गुणांकों का योग करके प्राप्त योगफल -4 इसे तीसरी पंक्ति के दूसरे स्थान पर लिखिए ।

इस प्रकार गुणा तथा जोड़कर के अंतिम जोड़ से प्राप्त संख्या यह भागफल का शेषफल -17 है ।

$(3, -4, 8)$ यह भागफल का गुणांक स्वरूप है ।

$$\therefore \text{भागफल} = 3x^2 - 4x + 8 \text{ और शेषफल} = -17$$

$$\therefore 3x^3 + 2x^2 - 1 = (x + 2)(3x^2 - 4x + 8) - 17$$

इस विधि को **संश्लेषात्मक भाग विधि** कहते हैं ।

इस भाग को रेखीय विधि से निम्नप्रकार से कर सकते हैं ।

$$\begin{aligned} 3x^3 + 2x^2 - 1 &= 3x^2(x + 2) - 6x^2 + 2x^2 - 1 \\ &= 3x^2(x + 2) - 4x^2 - 1 \\ &= 3x^2(x + 2) - 4x^2 - 8x + 8x - 1 \\ &= 3x^2(x + 2) - 4x(x + 2) + 8x - 1 \\ &= 3x^2(x + 2) - 4x(x + 2) + 8x + 16 - 16 - 1 \\ &= 3x^2(x + 2) - 4x(x + 2) + 8(x + 2) - 17 \end{aligned}$$

$$\therefore 3x^3 + 2x^2 - 1 = (x + 2)(3x^2 - 4x + 8) - 17$$

उदा. (2) $(2y^4 - 3y^3 + 5y - 4) \div (y - 1)$ इसे भाग दीजिए ।

हल : संश्लेषात्मक भाग विधि : भाज्य = $2y^4 - 3y^3 + 5y - 4 = 2y^4 - 3y^3 + 0y^2 + 5y - 4$

भाजक = $y - 1$, -1 की विपरीत संख्या 1 है ।

| | | | | | | |
|---|---|-----|-----|-----|-----|-------|
| 1 | 2 | - 3 | 0 | 5 | - 4 | |
| | | 2 | - 1 | - 1 | 4 | |
| | 2 | - 1 | - 1 | 4 | 0 | शेषफल |

भागफल का गुणांक रूप $(2, -1, -1, 4)$ है ।

\therefore भागफल = $2y^3 - y^2 - y + 4$ और शेषफल = 0

रेखीय पद्धति : $2y^4 - 3y^3 + 5y - 4 = 2y^3(y - 1) + 2y^3 - 3y^3 + 5y - 4$

$$= 2y^3(y - 1) - y^2(y - 1) - y^2 + 5y - 4$$

$$= 2y^3(y - 1) - y^2(y - 1) - y(y - 1) + 4y - 4$$

$$= (2y^3 - y^2 - y + 4)(y - 1)$$



इसे ध्यान में रखें

संश्लेषात्मक भाग विधि से भाग करते समय सिर्फ $x + a$ अथवा $x - a$ रूपवाले बहुपद जिनका घात 1 है ऐसे ही भाजक लिए गए हैं ।

प्रश्नसंग्रह 3.3

1. निम्नलिखित भाग संश्लेषात्मक भाग विधि से और रेखीय पद्धति से कीजिए। भागफल तथा शेषफल लिखिए।

(i) $(2m^2 - 3m + 10) \div (m - 5)$ (ii) $(x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 4x + 5) \div (x + 2)$

(iii) $(y^3 - 216) \div (y - 6)$ (iv) $(2x^4 + 3x^3 + 4x - 2x^2) \div (x + 3)$

(v) $(x^4 - 3x^2 - 8) \div (x + 4)$ (vi) $(y^3 - 3y^2 + 5y - 1) \div (y - 1)$



आओ, जानें

बहुपद का मान(Value of polynomial)

बहुपद के चरान्कों का मान देने पर उस बहुपद का एक मान प्राप्त होता है । उदाहरण, $x + 7$ इस बहुपद में x का मान 2 दिया है तो उस बहुपद का मान 9 मिलता है ।

$p(x)$ बहुपद में x का मान a रखने पर बहुपद के मान को $p(a)$ से दर्शाते हैं ।

उदा. (1) यदि $x = 2$ हो तो बहुपद $p(x) = 2x^2 - 3x + 5$ का मान ज्ञात कीजिए ।

$$\text{बहुपद } p(x) = 2x^2 - 3x + 5$$

बहुपद में $x = 2$ रखने पर

$$\begin{aligned}\therefore p(2) &= 2 \times 2^2 - 3 \times 2 + 5 \\ &= 2 \times 4 - 6 + 5 \\ &= 8 - 6 + 5 \\ \therefore p(2) &= 7\end{aligned}$$

उदा. (2) यदि $y = -2$ हो तो बहुपद $p(y) = 2y^3 - 2y + \sqrt{7}$ का मान ज्ञात कीजिए ।

$$\text{हल : } p(y) = 2y^3 - 2y + \sqrt{7}$$

$$\begin{aligned}\therefore p(-2) &= 2 \times (-2)^3 - 2 \times (-2) + \sqrt{7} \\ &= 2 \times (-8) - 2 \times (-2) + \sqrt{7} \\ &= -16 + 4 + \sqrt{7} \\ &= -12 + \sqrt{7}\end{aligned}$$

$\therefore y = -2$ रखने पर बहुपद का मान $-12 + \sqrt{7}$ है ।

उदा. (3) $p(x) = 2x^2 - x^3 + x + 2$ इस बहुपद के लिए $p(0)$ का मान ज्ञात कीजिए ।

$$\text{हल : } p(x) = 2x^2 - x^3 + x + 2$$

$$\begin{aligned}\therefore p(0) &= 2 \times 0^2 - 0^3 + 0 + 2 \\ &= 2 \times 0 - 0 + 0 + 2 \\ &= 2\end{aligned}$$

उदा. (4) यदि बहुपद $m^2 - am + 7$ में $m = -1$ से भाग देने पर शेषफल 10 आता है तो a का मान ज्ञात कीजिए ।

$$\text{हल : } p(m) = m^2 - am + 7$$

$$\begin{aligned}\therefore p(-1) &= (-1)^2 - a \times (-1) + 7 \\ &= 1 + a + 7 \\ &= 8 + a\end{aligned}$$

किंतु $p(-1) = 10$ (दिया है ।)

$$\begin{aligned}\therefore 8 + a &= 10 \\ \therefore a &= 10 - 8 \\ \therefore a &= 2\end{aligned}$$

प्रश्नसंग्रह 3.4

- (1) $x = 0$ के लिए बहुपद $x^2 - 5x + 5$ का मान ज्ञात कीजिए ।
- (2) यदि $p(y) = y^2 - 3\sqrt{2}y + 1$ हो तो $p(3\sqrt{2})$ का मान ज्ञात कीजिए ।
- (3) यदि $p(m) = m^3 + 2m^2 - m + 10$ हो तो $p(a) + p(-a) = ?$
- (4) यदि $p(y) = 2y^3 - 6y^2 - 5y + 7$ हो तो $p(2)$ का मान ज्ञात कीजिए ।



इसे ध्यान में रखें

चरांक के किसी मान के लिए बहुपद का मान ज्ञात करने के लिए प्रत्येक पद में x के स्थान पर दिया गया मान रखकर उस व्यंजक का मान ज्ञात कर सकते हैं ।



आओ, जानें

शेषफल प्रमेय(Remainder Theorem)

बहुपद $p(x)$ में $(x + a)$ से भाग देने पर प्राप्त शेषफल और बहुपद में $x = -a$ रखने पर प्राप्त बहुपद का मान इनमें परस्पर संबंध होता है । यह संबंध जानने के लिए निम्नलिखित उदाहरण का अध्ययन करें ।

उदा. $p(x) = (4x^2 - x + 2)$ को $(x + 1)$ से भाग दीजिए ।

[यहाँ $(x + a)$ अर्थात $(x + 1)$ है इसपर ध्यान दीजिए ।]

हल : भाज्य बहुपद = $4x^2 - x + 2$
भाजक बहुपद = $x + 1$

$$\begin{array}{r}
 \text{भागफल } 4x - 5 \\
 \text{भाजक } x + 1 \overline{) 4x^2 - x + 2} \quad \text{भाज्य} \\
 \underline{- 4x^2 + 4x} \\
 - 5x + 2 \\
 \underline{- -5x - 5} \\
 + + \\
 \hline
 7 \text{ शेषफल}
 \end{array}$$

भागफल = $4x - 5$ तथा शेषफल = $7 \dots (I)$

इसी उदाहरण को संश्लेषात्मक भाग विधि से करेंगे ।

$p(x)$ का गुणांक रूप = $(4, -1, 2)$

भाजक बहुपद = $x + 1$

1 की विपरीत संख्या -1

$$\begin{array}{r|rrr}
 -1 & 4 & -1 & 2 \\
 & & -4 & 5 \\
 \hline
 & 4 & -5 & \boxed{7} \text{ शेषफल}
 \end{array}$$

भागफल = $4x - 5$ शेषफल = 7

अब हम शेषफल और भाज्य बहुपद का मान इन में संबंध देखेंगे ।

भाज्य बहुपद अर्थात् $4x^2 - x + 2$ इस बहुपद में $x = -1$ रखकर मान ज्ञात करेंगे ।

$$p(x) = 4x^2 - x + 2$$

$$\begin{aligned}\therefore p(-1) &= 4 \times (-1)^2 - (-1) + 2 \\ &= 4 \times 1 + 1 + 2 \\ &= 4 + 1 + 2 \\ &= 7\end{aligned}$$

$\therefore x = -1$ होने पर बहुपद $p(x)$ का मान 7 है । (II)

अर्थात् कथन(I) तथा (II) से, $p(x) = 4x^2 - x + 2$ इस बहुपद को $(x + a)$ अर्थात् $x + 1$ से भाग देने पर प्राप्त शेषफल और $x = -1$ होने पर $p(x)$ इस बहुपद का मान अर्थात् $p(-1)$ समान है ।

इसके आधार पर निम्नलिखित गुणधर्म का आकलन होता है ।

$p(x)$ इस बहुपद को $(x + a)$ से भाग देने पर प्राप्त शेषफल $p(-a)$ के समान

अर्थात् $p(x)$ में $x = -a$ रखने पर प्राप्त बहुपद का मान समान होता है । इस गुणधर्म को शेषफल प्रमेय कहते हैं । ('शेष' शब्द का अर्थ 'शेषफल' है ।)

इस गुणधर्म को सिद्ध करने के लिए युक्लिड के भाग के नियम का उपयोग करेंगे ।

$p(x)$ को $(x + a)$ से भाग देने पर

$$p(x) = q(x) \times (x + a) + r(x) \quad [q(x) = \text{भागफल}, r(x) = \text{शेषफल}]$$

जब, $r(x) \neq 0$, तब नियमानुसार $r(x)$ का घात 1 से कम अर्थात् 0 है । अतः $r(x)$ यह वास्तविक संख्या है ।

$\therefore r(-a)$ यह भी वास्तविक संख्या है ।

$$\text{अब, } p(x) = q(x) \times (x + a) + r(x) \dots\dots\dots(1)$$

इसमें $x = -a$ रखने पर

$$\begin{aligned}p(-a) &= q(-a) \times (a - a) + r(-a) \\ &= q(-a) \times 0 + r(-a) \dots\dots\dots(2)\end{aligned}$$

$$\therefore p(-a) = r(-a) \dots\dots\dots(1) \text{ और } (2) \text{ से}$$

कृति : निम्नलिखित उदाहरणों की जाँच कीजिए ।

- (1) $p(x) = 3x^2 + x + 7$ इस बहुपद को बहुपद $x + 2$ से भाग देकर शेषफल ज्ञात कीजिए ।
- (2) $x = -2$ रखने पर बहुपद $p(x) = 3x^2 + x + 7$ का मान ज्ञात कीजिए ।
- (3) अब भाग देने के पश्चात प्राप्त शेषफल ही $p(-2)$ का मान है क्या ?
एक और उदाहरण लेकर उपर्युक्त पद्धति से जाँच कीजिए ।

उदा. (1) $x^4 - 5x^2 - 4x$ इस बहुपद को $x + 3$ से भाग देने पर शेषफल ज्ञात कीजिए ।

हल : शेषफल प्रमेय से

भाज्य बहुपद $p(x) = x^4 - 5x^2 - 4x$

भाजक = $x + 3$

$\therefore x = -3$ लेने पर

$\therefore p(x) = x^4 - 5x^2 - 4x$

$p(-3) = (-3)^4 - 5(-3)^2 - 4(-3)$

$= 81 - 45 + 12$

$p(-3) = 48$

संश्लेषात्मक भाग विधि से

मानक स्वरूप $x^4 + 0x^3 - 5x^2 - 4x + 0$

गुणांक स्वरूप = $(1, 0, -5, -4, 0)$

| | | | | | |
|-----|---|----|----|-----|----|
| - 3 | 1 | 0 | -5 | -4 | 0 |
| | | -3 | 9 | -12 | 48 |
| | 1 | -3 | 4 | -16 | 48 |

शेषफल = 48

उदा. (2) शेषफल प्रमेय का उपयोग कर के बहुपद $x^3 - 2x^2 - 4x - 1$ में बहुपद $x - 1$ से भाग देने पर प्राप्त शेषफल ज्ञात कीजिए ।

हल : $p(x) = x^3 - 2x^2 - 4x - 1$

भाजक = $x - 1$ $\therefore x = 1$ रखने पर

\therefore शेषफल प्रमेय से शेषफल = $p(1) = 1^3 - 2 \times 1^2 - 4 \times 1 - 1$

$= 1 - 2 \times 1 - 4 - 1$

$p(1) = 1 - 2 - 4 - 1 = -6$

\therefore शेषफल प्रमेयानुसार शेषफल = -6

उदा. (3) यदि बहुपद $t^3 - 3t^2 + kt + 50$ को $(t-3)$ से भाग देने पर शेषफल 62 आता हो तो k का मान ज्ञात कीजिए ।

हल : दिए गए बहुपद को $(t-3)$ से भाग देने पर शेषफल 62 आता है । अतः दिए गए भाज्य का मान $t = 3$ रखकर ज्ञात करेंगे ।

$p(t) = t^3 - 3t^2 + kt + 50$

∴ शेषफल प्रमेयानुसार

$$\begin{aligned} \text{शेषफल} = p(3) &= 3^3 - 3 \times 3^2 + k \times 3 + 50 & \therefore 3k + 50 &= 62 \\ &= 27 - 3 \times 9 + 3k + 50 & \therefore 3k &= 62 - 50 \\ &= 27 - 27 + 3k + 50 & \therefore 3k &= 12 \\ &= 3k + 50 & \therefore k &= \frac{12}{3} \\ \text{किंतु शेषफल 62 दिया गया है।} & & \therefore k &= 4 \end{aligned}$$



इसे ध्यान में रखें

शेषफल प्रमेय : यदि $p(x)$ कोई बहुपद तथा a वास्तविक संख्या हो और यदि बहुपद $p(x)$ को $(x + a)$ से भाग दिया तो प्राप्त शेषफल $p(-a)$ के बराबर होता है।

$$p(x) = s(x)(x - a) + r(x) \quad r(x) \text{ का घात } < 1 \text{ अथवा } r(x) = 0$$

इस समीकरण में $x = a$ रखने पर $p(a) = 0 + r(a) = r(a)$ मिलता है।

∴ $r(a)$ का घात = 0 अथवा $r(a) = 0$ अर्थात् $(x - a)$ यह $p(x)$ का गुणनखंड है ऐसा ध्यान में आता है।



आओ, जानें

गुणनखंड प्रमेय (Factor Theorem)

यदि 21 को 7 से भाग देने पर शेषफल 0 आता है तो हम कहते हैं कि 7 यह 21 का गुणनखंड है।

इसी प्रकार दिए गए बहुपद को भाजक बहुपद से भाग देने पर शेषफल 0 आता है तो उस बहुपद को बहुपद का गुणनखंड कहते हैं।

उदा. (1) यदि $p(x) = (x^3 + 4x - 5)$ हो तो बहुपद में $(x - 1)$ से भाग देने पर प्राप्त शेषफल ज्ञात कीजिए।

$(x - 1)$ यह $p(x)$ का गुणनखंड है क्या ? निश्चित कीजिए।

$$\text{हल : } p(x) = x^3 + 4x - 5$$

$$\begin{aligned} \therefore p(1) &= (1)^3 + 4(1) - 5 \\ &= 1 + 4 - 5 \\ &= 0 \end{aligned}$$

यहाँ, शेषफल प्रमेय के अनुसार शेषफल = 0

∴ $(x - 1)$ बहुपद $p(x)$ का गुणनखंड है।

उदा. (2) यदि $p(x) = x^3 + 4x - 5$ हो तो बहुपद में $x + 2$ से भाग देने पर प्राप्त शेषफल ज्ञात कीजिए।

$(x + 2)$ यह $p(x)$ का गुणनखंड है क्या निश्चित कीजिए।

$$\text{हल : } p(x) = x^3 + 4x - 5$$

$$\begin{aligned} \therefore p(-2) &= (-2)^3 + 4(-2) - 5 \\ p(-2) &= -8 - 8 - 5 \\ &= -21 \end{aligned}$$

शेषफल प्रमेय के नुसार शेषफल = -21

यहाँ शेषफल $\neq 0$

∴ $(x + 2)$ बहुपद $p(x)$ का गुणनखंड नहीं है।

कृति : $(x - 1)$ यह बहुपद $x^3 + 4x - 5$ का गुणनखंड है क्या ? जाँच कीजिए।



इसे ध्यान में रखें

माना $p(x)$ यह बहुपद तथा a कोई भी वास्तविक संख्या है और यदि $p(a) = 0$ हो तो $(x - a)$ यह बहुपद $p(x)$ का गुणनखंड है।

इसके विपरीत $(x - a)$ यह बहुपद $p(x)$ का गुणनखंड हो तो $p(a) = 0$ होता है।

उदा. (1) गुणनखंड प्रमेय का उपयोग कर बताइए $x - 2$ बहुपद $x^3 - x^2 - 4$ का गुणनखंड है क्या ?

हल : $p(x) = x^3 - x^2 - 4$ भाजक = $x - 2$

$$\therefore p(2) = 2^3 - 2^2 - 4 = 8 - 4 - 4 = 0$$

\therefore गुणनखंड प्रमेय से, $(x - 2)$ बहुपद $(x^3 - x^2 - 4)$ का गुणनखंड है।

उदा. (2) यदि $(x - 1)$ बहुपद $(x^3 - 2x^2 + mx - 4)$ का गुणनखंड हो तो m का मान ज्ञात कीजिए।

हल : $(x - 1)$ यह बहुपद $p(x)$ का गुणनखंड है। $\therefore p(1) = 0$

$$p(x) = x^3 - 2x^2 + mx - 4$$

$$\therefore p(1) = 1^3 - 2 \times 1^2 + m \times 1 - 4 = 0$$

$$\therefore 1 - 2 \times 1 + m - 4 = 0$$

$$\therefore 1 - 2 + m - 4 = 0 \quad \therefore m - 5 = 0$$

$$\therefore m = 5$$

कृति : हमने असिंचित खेती करने वाले गोविंद की खेती के संदर्भ में बहुपदों के रूप में खेती का खर्च तथा उत्पादन इन घटकों को देखा था। उसने बैंक से सवा लाख रु. कर्ज लिया और वह 10% की दर से वापस किया था। बीज के लिए 10,000 रुपये, सोयाबीन की फसल के खाद व कीटनाशक के लिए $2000x$ रुपये तथा उसकी परिश्रम के लिए $4000x^2$ रुपये खर्च आया था। कपास तथा तुअर की फसल के खाद व कीटनाशक के लिए $8000y$ रुपये तथा परिश्रम (कृषि कार्य) के लिए $9000y^2$ रुपये खर्च किया था।

कुल आय $14000x^2 + \frac{25000}{3}y^2 + 16000y$ हुई।

$x = 2, y = 3$ लेकर गोविंद की खेती का जमा खर्च लिखकर ज्ञात कीजिए।

| हल : | जमा | खर्च |
|------|---|---|
| | 1,25,000 रुपये बैंक का कर्ज | 1,37,000 रुपये बैंक का ब्याजसहित वापसी |
| ₹ | <input type="text"/> सोयाबीन का उत्पादन | ₹ <input type="text"/> बीज के लिए |
| ₹ | <input type="text"/> कपास का उत्पादन | ₹ <input type="text"/> सोयाबीन : खाद तथा कीटनाशक |
| ₹ | <input type="text"/> तुअर का उत्पादन | ₹ <input type="text"/> सोयाबीन : मजदूरी तथा परिश्रम |
| ₹ | <input type="text"/> कुल जमा | ₹ <input type="text"/> कपास तथा तुअर : खाद तथा कीटनाशक |
| | | ₹ <input type="text"/> कपास तथा तुअर : मजदूरी तथा परिश्रम |
| | | ₹ <input type="text"/> कुल खर्च |

प्रश्नसंग्रह 3.5

- (1) निम्नलिखित मान लेकर बहुपद $2x - 2x^3 + 7$ का मान ज्ञात कीजिए ।
 (i) $x = 3$ (ii) $x = -1$ (iii) $x = 0$
- (2) निम्नलिखित प्रत्येक बहुपद के लिए $p(1)$, $p(0)$ और $p(-2)$ का मान ज्ञात कीजिए ।
 (i) $p(x) = x^3$ (ii) $p(y) = y^2 - 2y + 5$ (iii) $p(x) = x^4 - 2x^2 - x$
- (3) यदि बहुपद $m^3 + 2m + a$ का मान $m = 2$ रखने पर 12 है, तो a का मान ज्ञात कीजिए ।
- (4) यदि बहुपद $mx^2 - 2x + 3$ के लिए $p(-1) = 7$ हो तो m का मान ज्ञात कीजिए ।
- (5) निम्नलिखित प्रश्नों में पहले बहुपद को दूसरे बहुपद से भाग देने पर प्राप्त शेषफल प्रमेय का उपयोग करके ज्ञात कीजिए ।
 (i) $(x^2 - 7x + 9)$; $(x + 1)$
 (ii) $(2x^3 - 2x^2 + ax - a)$; $(x - a)$
 (iii) $(54m^3 + 18m^2 - 27m + 5)$; $(m - 3)$
- (6) बहुपद $y^3 - 5y^2 + 7y + m$ को $y + 2$ से भाग देने पर शेषफल 50 आता है, तो m का मान ज्ञात कीजिए ।
- (7) गुणनखंड प्रमेय का उपयोग करके, $x + 3$ बहुपद $x^2 + 2x - 3$ का गुणनखंड है क्या निश्चित कीजिए ।
- (8) यदि $x - 2$ बहुपद $x^3 - mx^2 + 10x - 20$ का गुणनखंड हो तो m का मान ज्ञात कीजिए ।
- (9) निम्नलिखित उदाहरणों में गुणनखंड प्रमेय से निश्चित कीजिए कि $q(x)$ यह $p(x)$ का गुणनखंड है ।
 (i) $p(x) = x^3 - x^2 - x - 1$, $q(x) = x - 1$
 (ii) $p(x) = 2x^3 - x^2 - 45$, $q(x) = x - 3$
- (10) $(x^{31} + 31)$ में $(x + 1)$ से भाग देने पर शेषफल ज्ञात कीजिए ।
- (11) दर्शाओ कि $m - 1$ यह बहुपद $m^{21} - 1$ तथा $m^{22} - 1$ का गुणनखंड है ।
- (12*) यदि $x - 2$ और $x - \frac{1}{2}$ ये दोनों बहुपद $nx^2 - 5x + m$ का गुणनखंड है तो दर्शाइए कि $m = n = 2$
- (13) (i) यदि $p(x) = 2 + 5x$ हो तो $p(2) + p(-2) - p(1)$ का मान ज्ञात कीजिए ।
 (ii) यदि $p(x) = 2x^2 - 5\sqrt{3}x + 5$ हो तो $p(5\sqrt{3})$ का मान ज्ञात कीजिए ।



थोड़ा सोचें

पिछली कक्षा में हमने अध्ययन किया है कि बहुपद का गुणनखंड कैसे ज्ञान करते हैं । इसपर आधारित कुछ उदाहरण देखेंगे ।

गुणनखंड ज्ञात कीजिए ।

उदा. (1) $4x^2 - 25$
 $= (2x)^2 - (5)^2$
 $= (2x + 5)(2x - 5)$

उदा. (2) $3x^2 + 7x + 2$
 $= \underline{3x^2 + 6x} + \underline{x + 2}$
 $= 3x(x + 2) + 1(x + 2)$
 $= (x + 2)(3x + 1)$

$$\begin{aligned} \text{उदा. (3)} \quad & 63x^2 + 5x - 2 \\ & = 63x^2 + 14x - 9x - 2 \\ & = 7x(9x + 2) - 1(9x + 2) \\ & = (9x + 2)(7x - 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{उदा. (4)} \quad & 6x^2 - 5x - 6 \\ & = 6x^2 - 9x + 4x - 6 \\ & = 3x(2x - 3) + 2(2x - 3) \\ & = (2x - 3)(3x + 2) \end{aligned}$$



आओ, जानें

बहुपदों के गुणखंड (Factors of polynomials)

कई बार दिए गए बहुपदों का रूपांतरण $ax^2 + bx + c$ के रूप में किया जाता है ताकि उनके गुणखंड सरलता से ज्ञात हो सकें।

उदा. (1) $(y^2 - 3y)^2 - 5(y^2 - 3y) - 50$ के गुणखंड ज्ञात कीजिए।

हल : दिए गए बहुपद में $(y^2 - 3y) = x$ (माना)

$$\begin{aligned} \therefore (y^2 - 3y)^2 - 5(y^2 - 3y) - 50 & = x^2 - 5x - 50 \\ & = x^2 - 10x + 5x - 50 \\ & = x(x - 10) + 5(x - 10) \\ & = (x - 10)(x + 5) \\ & = (y^2 - 3y - 10)(y^2 - 3y + 5) \\ & = [y^2 - 5y + 2y - 10](y^2 - 3y + 5) \\ & = [y(y - 5) + 2(y - 5)](y^2 - 3y + 5) \\ & = (y - 5)(y + 2)(y^2 - 3y + 5) \end{aligned}$$

उदा. (2) गुणखंड ज्ञात कीजिए।

$$(x + 2)(x - 3)(x - 7)(x - 2) + 64$$

हल : $(x + 2)(x - 3)(x - 7)(x - 2) + 64$

$$\begin{aligned} & = (x + 2)(x - 7)(x - 3)(x - 2) + 64 \\ & = (x^2 - 5x - 14)(x^2 - 5x + 6) + 64 \\ & = (m - 14)(m + 6) + 64 \dots \dots \dots (\text{माना } x^2 - 5x = m) \\ & = m^2 - 14m + 6m - 84 + 64 \\ & = m^2 - 8m - 20 \\ & = (m - 10)(m + 2) \\ & = (x^2 - 5x - 10)(x^2 - 5x + 2) \dots \dots m \text{ की जगह } x^2 - 5x \text{ लिखिए।} \end{aligned}$$

प्रश्नसंग्रह 3.6

(1) निम्नलिखित बहुपदों के गुणखंड ज्ञात कीजिए।

- | | | |
|----------------------|-----------------------------------|--------------------------------|
| (i) $2x^2 + x - 1$ | (ii) $2m^2 + 5m - 3$ | (iii) $12x^2 + 61x + 77$ |
| (iv) $3y^2 - 2y - 1$ | (v) $\sqrt{3}x^2 + 4x + \sqrt{3}$ | (vi) $\frac{1}{2}x^2 - 3x + 4$ |

(2) निम्नलिखित बहुपदों के गुणनखंड ज्ञात कीजिए ।

(i) $(x^2 - x)^2 - 8(x^2 - x) + 12$

(ii) $(x - 5)^2 - (5x - 25) - 24$

(iii) $(x^2 - 6x)^2 - 8(x^2 - 6x + 8) - 64$

(iv) $(x^2 - 2x + 3)(x^2 - 2x + 5) - 35$

(v) $(y + 2)(y - 3)(y + 8)(y + 3) + 56$

(vi) $(y^2 + 5y)(y^2 + 5y - 2) - 24$

(vii) $(x - 3)(x - 4)^2(x - 5) - 6$

◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆ प्रकीर्ण प्रश्नसंग्रह 3 ◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆

(1) निम्नलिखित प्रत्येक प्रश्न के विकल्पों में से उचित विकल्प चुनकर लिखिए ।

(i) निम्नलिखित में से कौन-सा बहुपद है ?

(A) $\frac{x}{y}$

(B) $x^{\sqrt{2}} - 3x$

(C) $x^{-2} + 7$

(D) $\sqrt{2}x^2 + \frac{1}{2}$

(ii) $\sqrt{7}$ इस बहुपद का घात बताइए ।

(A) $\frac{1}{2}$

(B) 5

(C) 2

(D) 0

(iii) 0 बहुपद का घात कितना होता है ?

(A) 0

(B) 1

(C) निश्चित नहीं किया जा सकता ।

(D) कोई भी वास्तविक संख्या

(iv) $2x^2 + 5x^3 + 7$ इस बहुपद का घात कितना होगा ?

(A) 3

(B) 2

(C) 5

(D) 7

(v) $x^3 - 1$ इस बहुपद का गुणांक स्वरूप कौन-सा है ?

(A) (1, - 1)

(B) (3, - 1)

(C) (1, 0, 0, - 1)

(D) (1, 3, - 1)

(vi) $p(x) = x^2 - 7\sqrt{7}x + 3$ तो $p(7\sqrt{7}) = ?$

(A) 3

(B) $7\sqrt{7}$

(C) $42\sqrt{7} + 3$

(D) $49\sqrt{7}$

(vii) बहुपद $2x^3 + 2x$ में यदि $x = - 1$ हो तो बहुपद का मान कितना होगा ?

(A) 4

(B) 2

(C) - 2

(D) - 4

(viii) बहुपद $3x^2 + mx$ का $x - 1$ एक गुणनखंड हो तो m का मान कितना होगा ?

(A) 2

(B) - 2

(C) - 3

(D) 3

(ix) $(x^2 - 3)(2x - 7x^3 + 4)$ के गुणनफल से प्राप्त बहुपद का घात कितना होगा ?

(A) 5

(B) 3

(C) 2

(D) 0

(x) निम्नलिखित में से रेखीय बहुपद कौन-सा है ?

(A) $x + 5$ (B) $x^2 + 5$ (C) $x^3 + 5$ (D) $x^4 + 5$

(2) निम्नलिखित में से प्रत्येक बहुपद का घात लिखिए ।

(i) $5 + 3x^4$ (ii) 7 (iii) $ax^7 + bx^9$ { a, b यह अचर संख्या है }

(3) निम्नलिखित बहुपदों को मानक रूप में लिखिए ।

(i) $4x^2 + 7x^4 - x^3 - x + 9$ (ii) $p + 2p^3 + 10p^2 + 5p^4 - 8$

(4) निम्नलिखित बहुपदों को गुणांक रूप में लिखिए ।

(i) $x^4 + 16$ (ii) $m^5 + 2m^2 + 3m + 15$

(5) निम्नलिखित गुणांक रूप को घातांक रूप में लिखिए । (चरांक x का उपयोग कीजिए ।)

(i) $(3, -2, 0, 7, 18)$ (ii) $(6, 1, 0, 7)$ (iii) $(4, 5, -3, 0)$

(6) निम्नलिखित बहुपदों को जोड़िए ।

(i) $7x^4 - 2x^3 + x + 10$; $3x^4 + 15x^3 + 9x^2 - 8x + 2$ (ii) $3p^3q + 2p^2q + 7$; $2p^2q + 4pq - 2p^3q$

(7) निम्नलिखित बहुपदों को घटाइए ।

(i) $5x^2 - 2y + 9$; $3x^2 + 5y - 7$ (ii) $2x^2 + 3x + 5$; $x^2 - 2x + 3$

(8) निम्नलिखित बहुपदों का गुणा कीजिए ।

(i) $(m^3 - 2m + 3)(m^4 - 2m^2 + 3m + 2)$ (ii) $(5m^3 - 2)(m^2 - m + 3)$

(9) संश्लेषात्मक भाग विधि से बहुपद $3x^3 - 8x^2 + x + 7$ को $x - 3$ से भाग देकर शेषफल ज्ञात कीजिए ।

(10) m के किस मान के लिए $x + 3$ यह बहुपद $x^3 - 2mx + 21$ का गुणनखंड होगा ?

(11) वर्ष 2016 के अंत में कोवाड, वरूड तथा चिखली इन तीनों गाँवों की जनसंख्या क्रमशः $5x^2 - 3y^2$, $7y^2 + 2xy$ और $9x^2 + 4xy$ थी । वर्ष 2017 के आरंभ में तीनों गाँव से शिक्षा और रोजगार के लिए क्रमशः $x^2 + xy - y^2$, $5xy$ तथा $3x^2 + xy$ लोगों का स्थलांतर दूसरे गाँव में हुआ तो वर्ष 2017 के आरंभ में उन गाँवों की कुल जनसंख्या कितनी थी ?

(12) बहुपद $bx^2 + x + 5$ और $bx^3 - 2x + 5$ को $x - 3$ से भाग देने पर प्राप्त शेषफल क्रमशः m तथा n हो और यदि $m - n = 0$ हो तो b का मान ज्ञात कीजिए ।

(13) सरल रूप दीजिए $(8m^2 + 3m - 6) - (9m - 7) + (3m^2 - 2m + 4)$

(14) बहुपद $x^2 + 13x + 7$ में से कौन-सा बहुपद घटाने पर बहुपद $3x^2 + 5x - 4$ प्राप्त होगा ?

(15) बहुपद $4m + 2n + 3$ में से कौन-सा बहुपद मिलाने पर बहुपद $6m + 3n + 10$ प्राप्त होगा ?

