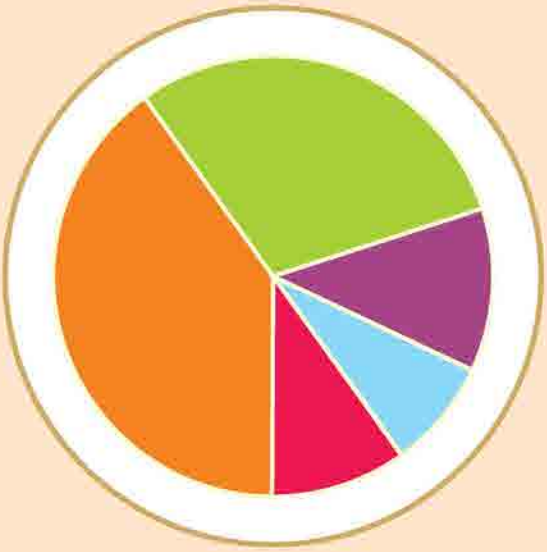
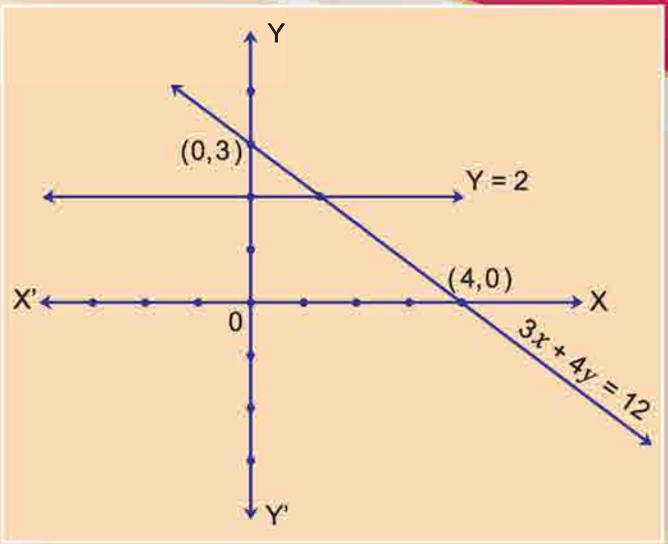
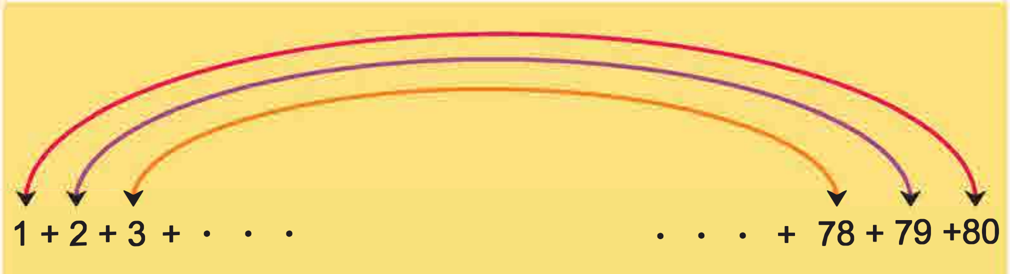
ریاضی حصّہ - I

دسویں جماعت







$$1 + 2 + 3 + \cdots \cdots + 78 + 79 + 80$$

$$= (1 + 80) + (2 + 79) + \cdots + (39 + 42) + (40 + 41)$$

سرکاری فیصلہ نمبر : ابھیاس-۲۱۱۶/ (پر۔نمبر۱۶/۴۳) ایس ڈی-۴ مورّخہ ۲۵/اپریل ۲۰۱۶ء کے مطابق قائم کردہ رابطہ کارکمیٹی کی ۲۹/دسمبر ۲۰۱۷ء کو منعقدہ نشست میں اس کتاب کو تعلیمی سال ۲۰۱۸-۱۹ء سے درسی کتاب کے طور پر منظوری دی گئی۔

ریاضی

حصّہ – I

دسویں جماعت

مہاراشٹر راجیہ پاٹھیہ پستک نرمتی و ابھیاس کرم سنشودھن منڈل، پونہ۔

N6LAMH

اپنے اسمارٹ فون میں انسٹال کردہ Diksha App کے ذریعے درسی کتاب کے پہلے صفحے پر درج Q.R. code اسکین کرنے سے ڈیجیٹل درسی کتاب اور ہر سبق میں درج Q.R. code کے ذریعے متعلقہ سبق کی درس و تدریس کے لیے مفید سمعی و بصری ذرائع دستیاب ہوں گے۔

مضمون ریاضی کمیٹی

• ڈاکٹر منگلا نارلیکر	(صدر)
• ڈاکٹر جے شری اَترے	(رکن)
• شری وِنایک گوڈبولے	(رکن)
• شریمتی پراجکتی گوکھلے	(رکن)
• شری رما کانت سرودے	(رکن)
• شری سندیپ پنچ بھائی	(رکن)
• شریمتی پوجا جادھو	(رکن)
• شریمتی اُجولا گوڈبولے	(رکن-سکریٹری)

مضمون ریاضی کی مجلسِ عاملہ

- شریمتی جے شری پرندرے
- شری راجندر چودھری
- شری راما وَنیالکر
- شری آنّا پا پریٹ
- جناب انصار شیخ
- شری شریپاد دیشپانڈے
- شری سریش داتے
- شری اُمیش ریلے
- شری بنسی ہاولے
- شریمتی روہینی شرکے
- شری پرکاش جھینڈے
- شری لکشمن داون کر
- شری شریکانت رتن پارکھی
- شری سنیل شری واستو
- جناب انصاری عبدالحمید عبدالمجید
- شریمتی سورنا دیشپانڈے
- شریمتی تروبین پوپٹ
- شری پرمود ٹھومبرے
- ڈاکٹر بھارتی سہستر بدھے
- شری وسنت شیوالے
- شری پرتاپ کاشد
- شری ملند بھاکرے
- شری گیانیشور ماشالکر
- شری گنیش کولتے
- شری سندیش سوناونے
- شری سدھیر پاٹل
- شری پرکاش کاپسے
- شری رَویندر کھندارے
- شریمتی سواتی دھرمادھیکاری
- شری اَروند کمار تیواری
- شری ملیشام بیتھی
- شریمتی آریا بِھڑے

Urdu Translators
Mr. Ansari Abdul Hameed Abdul Majeed
Mr. Ansari Badrudduja Shabbeer Ahemad
Mr. Momin Al-Nasir Abdus Samad

Co-ordinator (Urdu)
Khan Navedul Haque Inamul Haque,
Special Officer for Urdu,
M.S. Bureau of Textbooks, Balbharati

Co-ordinator (Marathi)
Smt. Ujwala S. Godbole
I/C Special Officer for Mathematics,
M.S. Bureau of Textbooks, Balbharati

Urdu D.T.P. & Layout
Asif Nisar Sayyed
Yusra Graphics,
305, Somwar Peth, Pune-11.

Cover & Computer Illustrations
Shri Sandeep Koli, Mumbai

Production
Shri Sachchitanand Aphale
Chief Production Officer

Shri Sanjay Kamble
Production Officer

Shri Prashant Harne
Assistant Production Officer

Paper :
70 GSM Creamvowe
Print Order : N/PB/2018-19/1,00,000
Printer : SAHIL PRINT ART, THANE

Publisher
Shri Vivek Uttam Gosavi
Controller,
M.S. Bureau of Textbook Production,
Prabhadevi, Mumbai - 25.

بھارت کا آئین

تمہید

ہم بھارت کے عوام متانت و سنجیدگی سے عزم کرتے ہیں کہ بھارت کو

ایک مقتدر سماج وادی غیر مذہبی عوامی جمہوریہ بنائیں

اور اس کے تمام شہریوں کے لیے حاصل کریں:

انصاف، سماجی، معاشی اور سیاسی؛

آزادی خیال، اظہار، عقیدہ، دین اور عبادت؛

مساوات بہ اعتبارِ حیثیت اور موقع،

اور ان سب میں

اُخوّت کو ترقی دیں جس سے فرد کی عظمت اور قوم کے اتّحاد اور

سالمیت کا تیقّن ہو؛

اپنی آئین ساز اسمبلی میں آج چھبیس نومبر ۱۹۴۹ء کو یہ آئین

ذریعۂ ہٰذا اختیار کرتے ہیں،

وضع کرتے ہیں اور اپنے آپ پر نافذ کرتے ہیں۔

راشٹر گیت

جَنَ گَنَ مَنَ - اَدِھ نایَک جَیَہ ہے
بھارَتَ - بھاگُیَہ وِدَھاتا۔

پَنجُابَ ، سِندُھ ، گُجراتَ ، مَراٹھا ،
دراوِڑَ ، اُتکَلَ ، بَنگَ ،

وِندھیہ ، ہِماچَلَ ، یَمُنا ، گنگا،
اُچّھلَ جَلَ دِھ تَرَنگَ ،

تَوَشُبھَ نامے جاگے، تَوَشُبھَ آشِسَ ماگے،
گاہے تَوَجَیَہ گاتھا،

جَنَ گَنَ منگل دَایَکَ جَیَہ ہے،
بھارَتَ - بھاگُیَہ وِدھاتا۔

جَیَہ ہے ، جَیَہ ہے ، جَیَہ ہے،
جَیَہ جَیَہ جَیَہ ، جَیَہ ہے۔

عہد

بھارت میرا ملک ہے۔ سب بھارتی میرے بھائی اور بہنیں ہیں۔

مجھے اپنے وطن سے پیار ہے اور مَیں اس کے عظیم و گونا گوں وِرثے پر فخر محسوس کرتا ہوں۔ مَیں ہمیشہ اِس ورثے کے قابل بننے کی کوشش کروں گا۔

میں اپنے والدین، استادوں اور بزرگوں کی عزّت کروں گا اور ہر ایک سے خوش اخلاقی کا برتاؤ کروں گا۔

میں اپنے ملک اور اپنے لوگوں کے لیے خود کو وقف کرنے کی قسم کھاتا ہوں۔ اُن کی بہتری اور خوش حالی ہی میں میری خوشی ہے۔

پیش لفظ

عزیز طلبہ!

دسویں جماعت میں آپ کا استقبال ہے!

ریاضی حصہ I اور ریاضی حصہ II کی درسی کتابوں کا آپ اس سال مطالعہ کریں گے۔

ریاضی حصہ I میں الجبرا، ترسیم، معاشی منصوبہ بندی اور شماریات جیسے اہم حصے شامل ہیں۔ نویں جماعت تک متعارف کرائے گئے موضوعات کا آپ کو مزید مطالعہ کرنا ہے۔ معاشی منصوبہ بندی میں ایک نئے ٹیکس نظام GST سے آپ کو متعارف کرایا گیا ہے۔ نئے باب میں جہاں ضابطے یا اطلاق ہیں وہاں آسان وضاحتیں اور تشریح کی گئی ہیں۔ ہر باب میں نمونے کی مثالیں تشریح کے ساتھ حل کی گئی ہیں۔ مشق و اعادہ کی مثالیں دی ہوئی ہیں۔ اس کے علاوہ ذہین طلبہ کے لیے بعض فکر انگیز سوالات تارے کے نشان سے نمایاں کیے گئے ہیں۔ عام طلبہ کو دسویں کے بعد ریاضی کا مطالعہ نہیں کرنا ہو تب بھی انھیں بنیادی ریاضیاتی تصورات سمجھنا چاہیے تاکہ وہ دیگر شعبوں میں کام کے دوران ضرورت کے مطابق ریاضی کا استعمال کر سکیں، انھیں اتنا علم اس کتاب کے ذریعے مل جائے گا۔ 'مزید معلومات کے لیے' عنوان کے تحت دیا ہوا مواد دسویں کے بعد بھی ریاضی کے مطالعے کے خواہش مند طلبہ کو مہارت حاصل کرنے میں فائدہ مند ثابت ہوگا۔ لہٰذا ایسے طلبہ کو اس کا مطالعہ ضرور کرنا چاہیے۔ پوری کتاب کم از کم ایک مرتبہ ضرور پڑھ کر سمجھنے کی کوشش کریں۔

دسویں کا امتحان اہمیت کا حامل مانا جاتا ہے۔ اس امتحان کا تناؤ لیے بغیر اچھا مطالعہ کر کے من چاہی کامیابی حاصل کرنے کے لیے طلبہ کو نیک خواہشات!

(ڈاکٹر سنیل مگر)
ڈائرکٹر
مہاراشٹر راجیہ پاٹھیہ پستک نرمتی و
ابھیاس کرم سنشودھن منڈل، پونہ

پونہ۔
تاریخ : ۱۸/ مارچ ۲۰۱۸ء، گُڈی پاڑوا
بھارتیہ سَور : ۲۷/ پھالگن ۱۹۳۹

دسویں جماعت - ریاضی حصہ I - نصاب تعلیم میں ذیل کی صلاحیتیں طلبہ میں فروغ پائیں گی۔

زمرہ	اکائی	صلاحیت کے بیان
1. اعداد کا علم	1.1 حسابی تصاعد	• حسابی تصاعد کا استعمال کر کے مثالیں حل کرنا۔ • مستقبل میں کسی امر کو حاصل کرنے کے لیے مرحلہ وار منصوبہ بنانا۔
2. الجبرا	2.1 مربعی مساواتیں 2.2 دو ہزاد مساواتیں	• کاروبار میں جو مسائل مربعی مساوات کی صورت میں ظاہر کر کے ان کا حل معلوم کرنا۔ • عبارتی مثالوں کا حل معلوم کرنے کے لیے کتنے متغیرات کا استعمال کرنا ہوگا، اس بات کا فیصلہ کرنا۔ • عبارتی مثالوں کی تحویل دو متغیروں میں مساوات بنا کر حل معلوم کرنا۔
3. کاروباری ریاضی	3.1 کاروباری ریاضی	• بچت اور سرمایہ کاری جیسے اُمور کا ادراک کرنا۔ • صنعت و حرفت اور پیشوں میں مالی لین دین کا زبانی تعارف حاصل کرنا۔
4. شماریات اور احتمال	4.1 احتمال 4.2 ترسیم اور مرکزی رجحان کے پیمانے	• کھیل، رائے دہی وغیرہ شعبوں میں احتمال کا استعمال کرنا۔ • خاص قسم کی معلومات اکٹھا کرنے کے بعد اسے ترسیم میں تحویل کرنا / تصویری ترسیم میں دوسری صورت اختیار کر کے خاص ترسیمات کا انتخاب کرنا۔ • جماعت بند معطیات دی ہوئی ہوں تو میانیہ، وسطانیہ، کثیریہ معلوم کرنا۔

اساتذہ کے لیے ہدایت

پہلے کتاب کا گہرا مطالعہ کر کے اسے سمجھ لیں۔ مختلف موضوعات کی وضاحت، تشریح اور ضابطوں کی تصدیق کرنے جیسی اہم باتوں کے لیے عملی کاموں کی مدد لیں۔

تجربات کے ذریعے قدر پیمائی کریں۔ اس کے لیے ان عملی کاموں کا استعمال کر سکتے ہیں۔ آزادانہ طور پر غور و فکر کرنے پر طلبہ کی حوصلہ افزائی کریں۔ مختلف طریقوں سے لیکن منطقی طریقے سے مثالیں حل کرنے والے طلبہ کو خصوصی طور پر شاباشی دیں۔

تجربات کی فہرست کا نمونہ

1. ترسیمی کاغذ پر X - محور یا Y - محور کے متوازی خط کھینچ کر اُس پر کوئی بھی چار نقاط کے محددین لکھیے۔ تجربہ کیجیے کہ محددین کی قیمت کی مدد سے خط کی مساوات کس طرح تیار ہوتی ہے۔

(متوازی خط کی بجائے مبدا سے گزرنے والا یا X اور Y محوروں کو قطع کرنے والا خط بھی لے سکتے ہیں۔)

2. کوئی بھی دو ہندسی عدد سوچیے۔ اسے ظاہر کیے بغیر عدد کی شناخت کرنے کے لیے معما بنائیے۔ عدد کے ہندسوں سے دو الجبری تعلق بنائیے اور معما حل کرکے دِکھائیے۔ (یہ تجربہ تین ہندسی عدد کے لیے بھی کیا جاسکتا ہے)

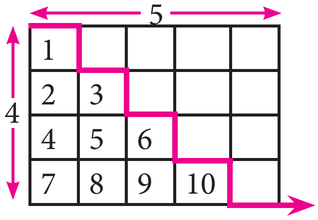
3. کسی بھی خوردنی شے کے پیکٹ پر لکھی ہوئی معلومات پڑھیے اور اس معلومات کو ظاہر کرنے کے لیے دائروی ترسیم بنائیے۔ مثلاً فرض کیجیے بسکٹ کے پیکٹ پر پروٹین، کاربوہائیڈریٹ، حیاتین وغیرہ کی جدول دیکھیے۔ وہ کتنے وزن کے لیے دیا ہوا ہے۔ اس کی مدد سے اوزان کا پائے چارٹ کی تقسیم دِکھانے والی دائروی ترسیم بنائیے۔ مثال : کاربن، خوشبو، پروٹین اور دیگر اجزا بتانے والے چار حصے کیے جاسکتے ہیں۔

4. دیے ہوئے تعددی تقسیمی جدول کو Excel Sheet میں تیار کیجیے۔ اس جدول کی مدد سے تعددی کثیر ضلعی اور ستونی ترسیم Excel میں بنائیے۔

5. ایک پانسہ دس مرتبہ پھینک کر حاصل ہونے والے آموزشی ماحصل درج کیجیے اور اس کی جدول تیار کیجیے۔

6. کاروبار میں GST ادا کیے ہوئے ٹیکس اِنوائس دیکھیے۔ اس میں تمام امور کا اندراج کیجیے۔ اس میں ٹیکس کی تحسیب کو دوبارہ محسوب کرکے دِکھائیے اور تمام حساب صحیح ہونے کا اطمینان کیجیے۔

7. دیے ہوئے 5 ، 6 یا 7 متواتر طبعی اعداد کی جمع کرنے کے لیے عملی کام کرکے دیکھیے۔ مثال: فرض کیجیے 1 سے 4 تک طبعی اعداد کی جمع کیجیے۔ اس کے لیے 5 × 4 چوکون والا ایک کاغذ لیجیے اور شکل میں دِکھائے ہوئے طریقے کے مطابق کاٹ لیجیے۔ (یہاں $n = 4$) اس کی مدد سے، $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$ اس ضابطے کی تصدیق کیجیے۔



$$\rightarrow \; S_n = \frac{n(n+1)}{2} \;,\; \therefore \; S_4 = \frac{4\;(4+1)}{2} = \frac{4 \times 5}{2} = \frac{20}{2} = 10$$

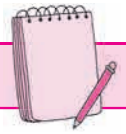
(نوٹ: یہاں $a = 1$ اور $d = 1$ ہے۔ زیادہ اعداد لے کر a اور d اعداد کو بدل کر، اسی طرح، جفت، طاق اعداد کے لیے، مکعبوں کی جمع کے لیے ایسے عملی کام کیے جاسکتے ہیں)

8. ایک کارڈ پر سامنے کی جانب $\alpha = 6$ اور پشت کی جانب $\alpha = -6$ لکھیے۔ اسی طرح دوسرے کارڈ پر $\beta = -3$ اور $\beta = 7$ لکھیے۔ اس کی مدد سے $(\alpha + \beta)$ اور $(\alpha\beta)$ کی مختلف قیمتیں تیار ہوتی ہیں۔ ان قیمتوں کو استعمال کرکے مربعی مساوات بنائیے۔

فہرست

1

دومتغیری خطّی مساواتیں (Equations in two variables)



آئیے، سیکھیں۔

- دومتغیری خطی مساواتیں حل کرنے کا طریقہ - ترسیمی طریقہ، کرامر کا طریقہ
- دومتغیری خطی مساوات میں تحویل کرنے کے قابل مساوات
- ہمزاد مساواتوں کا اطلاق

آئیے، ذرا یاد کریں

دومتغیری خطی مساواتیں (Linear equations in two variables)

جس مساوات میں دو متغیروں کا استعمال ہوتا ہے اور ہر متغیر کا درجہ 1 ہوتا ہے اس مساوات کو دو متغیری خط مساوات کہتے ہیں۔ اس کا ہم سابقہ جماعتوں میں مطالعہ کر چکے ہیں۔

مساوات $ax + by + c = 0$ دو متغیری خطی مساوات کی عام صورت ہے۔ یہاں a، b، c حقیقی اعداد ہیں۔ a اور b بیک وقت صفر نہیں ہوتے۔ یہ آپ جانتے ہیں۔

مثال: مساوات $3x = 4y - 12$ کی عام صورت $3x - 4y + 12 = 0$ ہے۔

عملی کام: مندرجہ ذیل جدول مکمل کیجیے۔

نمبر شمار	مساوات	دومتغیری خطی مساوات ہے یا نہیں؟
1	$4m + 3n = 12$	ہے
2	$3x^2 - 7y = 13$	
3	$\sqrt{2}x - \sqrt{5}y = 16$	
4	$0x + 6y - 3 = 0$	
5	$0.3x + 0y - 36 = 0$	
6	$\frac{4}{x} + \frac{5}{y} = 4$	
7	$4xy - 5y - 8 = 0$	

ہمزاد خطی مساواتیں (Simultaneous linear equations)

جب دو متغیروں کی دو خطی مساواتوں کا بیک وقت خیال کر کے ان کا مشترک حل حاصل ہوتا ہے تب ان مساواتوں کو ہمزاد مساواتیں (Simultaneous equations) کہتے ہیں۔

گزشتہ جماعت میں ایک متغیر کا اخراج کر کے ہمزاد مساوات حل کرنے کے طریقے کا مطالعہ ہم کر چکے ہیں۔ آئیے، اس کا کچھ اعادہ کرتے ہیں۔

مثال (1) : درج ذیل ہمزاد مساواتیں حل کیجیے۔

$$5x - 3y = 8 \quad ; \quad 3x + y = 2$$

حل :

پہلا طریقہ :

$$5x - 3y = 8 \quad . \ . \quad \text{(I)}$$

$$3x + y = 2 \quad . \ . \quad \text{(II)}$$

مساوات (II) کے طرفین کو 3 سے ضرب کریں گے۔

$$9x + 3y = 6 \quad . \ . \ . \quad \text{(III)}$$

$$5x - 3y = 8 \quad . \ . \ . \quad \text{(I)}$$

اب مساوات (I) اور (III) کی جمع کریں گے۔

$$\begin{array}{r} 5x - 3y = 8 \\ +\ 9x + 3y = 6 \\ \hline 14x = 14 \end{array}$$

$$\therefore \quad x = 1$$

$x = 1$، مساوات (II) میں رکھیں گے۔

$$3x + y = 2$$

$$\therefore 3 \times 1 + y = 2$$

$$\therefore 3 + y = 2$$

$$\therefore \quad y = -1$$

$x = 1$، $y = -1$ یہ حل ہے۔

اس حل کو اس صورت میں لکھتے ہیں۔

$$(x,\ y) = (1, -1)$$

دوسرا طریقہ :

$$5x - 3y = 8 \quad . \ . \ . \quad \text{(I)}$$

$$3x + y = 2 \quad . \ . \ . \quad \text{(II)}$$

مساوات (II) میں متغیر y کی قیمت متغیر x کی صورت میں لکھیں گے۔

$$y = 2 - 3x \quad . \ . \ . \quad \text{(III)}$$

اب y کی یہ قیمت مساوات (I) میں رکھیں گے۔

$$\begin{aligned} 5x - 3y &= 8 \\ \therefore\ 5x - 3(2 - 3x) &= 8 \\ \therefore\ 5x - 6 + 9x &= 8 \\ \therefore\ 14x - 6 &= 8 \\ \therefore\ 14x &= 8 + 6 \\ \therefore\ 14x &= 14 \\ \therefore\ x &= 1 \end{aligned}$$

$x = 1$ یہ قیمت مساوات (III) میں رکھیں گے۔

$$\begin{aligned} y &= 2 - 3x \\ \therefore y &= 2 - 3 \times 1 \\ \therefore y &= 2 - 3 \\ \therefore y &= -1 \end{aligned}$$

$x = 1$ ، $y = -1$ مساوات کا حل ہے۔

یعنی

$$(x,\ y) = (1, -1)$$

مثال (2) حل کیجیے : $3x + 2y = 29 \; ; \quad 5x - y = 18$

حل : $3x + 2y = 29 \quad . \; . \; . \quad \text{(I)} \quad , \quad 5x - y = 18 \quad . \; . \; . \quad \text{(II)}$

دی ہوئی مساواتوں میں y متغیر کا اخراج کرکے حل کریں گے۔ اس کے لیے مندرجہ ذیل خانوں میں مناسب اعداد لکھیے۔

مساوات (II) کو 2 سے ضرب دے کر،

$$\therefore \; 5x \times \boxed{} - y \times \boxed{} = 18 \times \boxed{}$$

$$\therefore \; 10x - 2y = \boxed{} \quad . \; . \; . \quad \text{(III)}$$

مساوات (I) میں مساوات (III) جمع کرنے پر

$$\begin{array}{rrcl} & 3x + 2y & = & 29 \\ + & \boxed{} - \boxed{} & = & \boxed{} \\ \hline & \boxed{} & = & \boxed{} \end{array} \quad , \quad \therefore \; x = \boxed{}$$

$x = 5$ مساوات (I) میں رکھنے پر

$$3x + 2y = 29$$

$$\therefore \; 3 \times \boxed{} + 2y = 29$$

$$\therefore \; \boxed{} + 2y = 29$$

$$\therefore \; 2y = 29 - \boxed{}$$

$$\therefore \; 2y = \boxed{} \quad , \quad \therefore \; y = \boxed{}$$

$(x, y) = (\boxed{}, \boxed{})$ ... (یہ مساواتوں کا حل ہے)

مثال (3) $15x + 17y = 21 \; ; \quad 17x + 15y = 11$

حل :

$$15x + 17y = 21 \quad . \; . \; . \; \text{(I)}$$

$$17x + 15y = 11 \quad . \; . \; . \; \text{(II)}$$

ان دونوں مساواتوں میں x اور y کے ضریب ایک دوسرے سے ادل بدل گئے ہیں۔ اس قسم کی ہمزاد مساواتیں حل کرنے کے لیے ان مساواتوں کی ایک بار جمع کرکے اور دوسری بار تفریق کرکے دو نئی آسان ہمزاد مساواتیں حاصل کرتے ہیں۔ ان مساواتوں کا حل آسانی سے حاصل ہوجاتا ہے۔

مساوات (I) اور مساوات (II) کی جمع کرنے پر،

$$\begin{array}{rrcl} & 15x + 17y & = & 21 \\ + & 17x + 15y & = & 11 \\ \hline & 32x + 32y & = & 32 \end{array}$$

مساوات میں طرفین کو 32 سے تقسیم کرنے پر،

$$x + y = 1 \quad \ldots \quad \text{(III)}$$

مساوات (I) میں سے مساوات (II) تفریق کرنے پر،

$$\begin{array}{rrrrr} & 15x & + 17y & = & 21 \\ - & \underset{-}{}17x & \underset{-}{+}\, 15y & = & \underset{-}{}11 \\ \hline & -2x & + 2y & = & 10 \end{array}$$

مساوات کے طرفین کو 2 سے تقسیم کرنے پر،

$$-x + y = 5 \quad \ldots \quad \text{(IV)}$$

مساوات (III) اور (IV) کی جمع کرنے پر،

$$\begin{array}{rrrr} & x + y & = & 1 \\ + & -x + y & = & 5 \\ \hline \end{array}$$

$$\therefore\ 2y = 6 \quad , \quad \therefore\ y = 3$$

$y = 3$ مساوات (III) میں رکھنے پر،

$$x + y = 1$$
$$\therefore\ x + 3 = 1$$
$$\therefore\ x = 1 - 3 \quad , \quad \therefore\ x = -2$$

(مساواتوں کا حل) ... $(x,\ y) = (-2,\ 3)$ ہے

مشقی سیٹ 1.1

.1 درج ذیل عملی کام پورا کرتے ہوئے ہمزاد مساوات حل کیجیے۔

$$5x + 3y = 9 \quad \ldots \quad \text{(I)}$$

مساوات (I) اور (II) کی جمع کرنے پر،

$$\begin{array}{rrrr} & 5x + 3y & = & 9 \\ + & 2x - 3y & = & 12 \\ \hline & \square\, x & = & \square \end{array}$$

$$x = \frac{\square}{\square} \quad , \quad \therefore\ x = \square$$

$$2x - 3y = 12 \quad \ldots \quad \text{(II)}$$

$x = 3$ مساوات (I) میں رکھنے پر،

$$5 \times \square + 3y = 9$$
$$3y = 9 - \square$$
$$3y = \square$$
$$y = \frac{\square}{3}$$
$$y = \square$$

(مساواتوں کا حل) ... $\therefore\ (x,\ y) = (\square,\ \square)$

2. درج ذیل ہمزاد مساواتیں حل کیجیے۔

(1) $3a + 5b = 26;\ a + 5b = 22$ (2) $x + 7y = 10;\ 3x - 2y = 7$

(3) $2x - 3y = 9;\ 2x + y = 13$ (4) $5m - 3n = 19;\ m - 6n = -7$

(5) $5x + 2y = -3;\ x + 5y = 4$ (6) $\frac{1}{3}x + y = \frac{10}{3};\ 2x + \frac{1}{4}y = \frac{11}{4}$

(7) $99x + 101y = 499;\ 101x + 99y = 501$

(8) $49x - 57y = 172;\ 57x - 49y = 252$

آیئے، ذرا یاد کریں۔

دو متغیری خطی مساوات کی ترسیم (Graph of a linear equation in two variables)

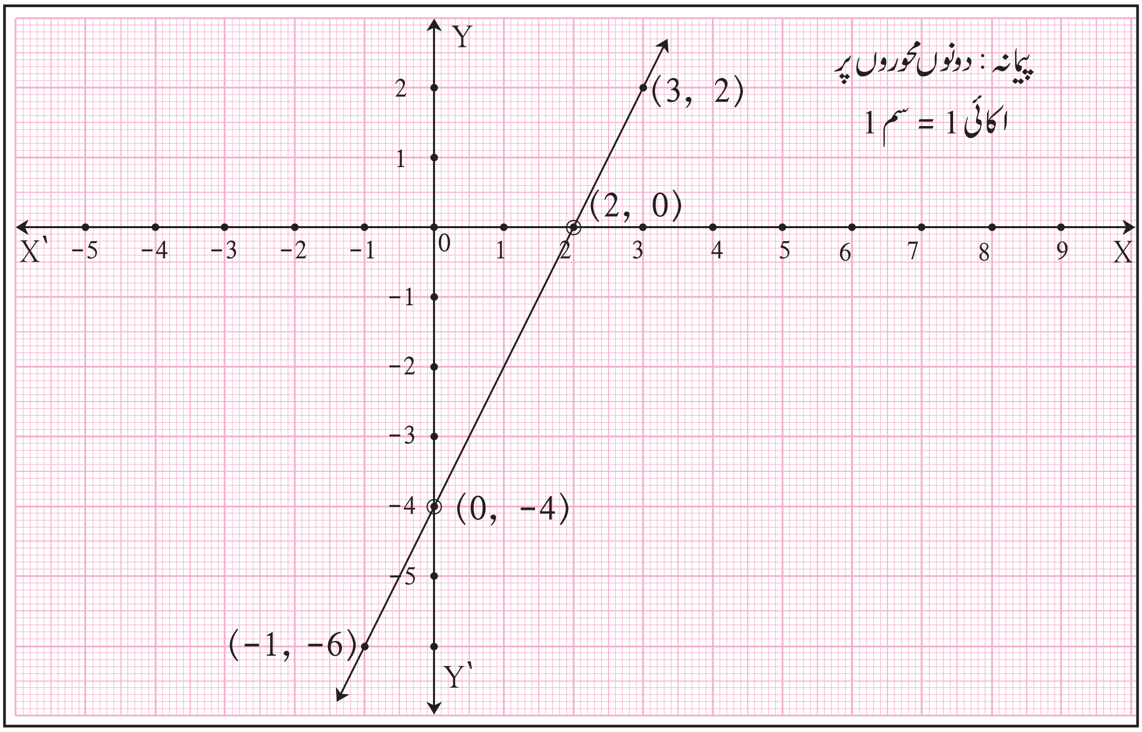
گزشتہ جماعت میں ہم مطالعہ کر چکے ہیں کہ دو متغیری خطی مساوات کی ترسیم ایک خط ہوتی ہے۔ جو مرتب جوڑی دی ہوئی مساواتوں کو مطمئن کرتی ہے وہ مرتب جوڑی ان مساواتوں کا حل ہوتی ہے۔ اسی طرح وہ مرتب جوڑی اس مساوات کی ترسیم پر ایک نقطے کو ظاہر کرتی ہے۔

مثال: مساوات $2x - y = 4$ کی ترسیم ۔

حل: مساوات $2x - y = 4$ کی ترسیم کھینچنے کے لیے (x, y) مرتب جوڑی کی چار مرتب جوڑیاں حاصل کریں گے۔

x	0	2	3	-1
y	-4	0	2	-6
(x, y)	$(0, -4)$	$(2, 0)$	$(3, 2)$	$(-1, -6)$

مرتب جوڑیاں حاصل ہونے کے بعد جدول میں دِکھائے ہوئے کے مطابق لکھتے ہیں۔ x اور y کی قیمت صفر بھی لینا سہولت بخش ہوتا ہے۔



دو متغیری خطی مساوات کی ترسیم کھینچنے کے لیے درج ذیل مرحلوں کو بغور دیکھیے۔

دی ہوئی مساوات کی کم از کم 4 مرتب جوڑیاں (نقاط کے محددین) معلوم کیجیے۔

↓

ترسیمی کاغذ پر X - محور اور Y - محور متعین کرکے نقاط مرتسم کیجیے۔

↓

تمام نقاط ایک ہی خط میں آئیں گے۔ ان نقاط سے گزرتا ہوا خط کھینچیے۔

خط متعین ہونے کے لیے صرف دو ہی نقاط کافی ہیں لیکن اگر ان میں سے ایک بھی نقطہ کے محددین معلوم کرنے میں غلطی ہوگئی تو اُس خط کی ترسیم غلط ہوجائے گی۔

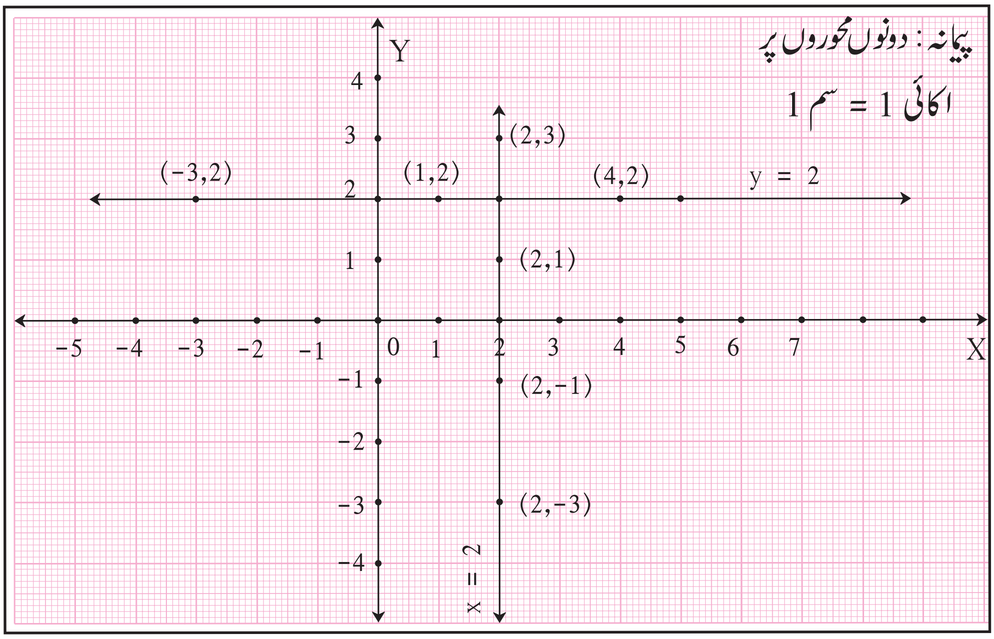
تین نقاط کے محددین معلوم کرنے میں اگر ایک نقطہ کے محددین معلوم کرنے میں غلطی ہوجائے تو تینوں نقاط ایک ہی خط پر نہیں ہوں گے۔ ایسا سمجھ میں آتا ہے کہ ان میں سے کسی ایک نقطے کے محددین معلوم کرنے میں غلطی ہوئی ہے لیکن صحیح معنوں میں کون سے نقطہ کے محددین غلط ہیں اسے معلوم کرنے میں کافی وقت لگے گا۔

چار نقاط کے محددین معلوم کرنے میں اگر ایک نقطے کے محددین معلوم کرنے میں غلطی ہو تو باقی تین نقطے ہم خطی ہوتے ہیں اس لیے غلطی فوراً سمجھ میں آجاتی ہے۔ اس لیے چار نقاط کے محددین معلوم کرنا فائدہ مند ہے۔

مساوات $0x + y = 2$ کو سہولت کے لیے $y = 2$ لکھتے ہیں۔ اس مساوات کی ترسیم X - محور کے متوازی ہوتی ہے کیونکہ x محدد کے لیے کوئی بھی عدد لیں تو ہر نقطے کا y محدد 2 ہی آتا ہے۔

x	1	4	-3
y	2	2	2
(x, y)	$(1, 2)$	$(4, 2)$	$(-3, 2)$

اسی طرح مساوات $x + 0y = 2$ کو $x = 2$ لکھتے ہیں اور اس خط کی ترسیم Y - محور کے متوازی ہوتی ہے۔



آ یئے، سمجھ لیں۔

ہمزاد خطی مساواتیں حل کرنے کے لیے ترسیمی طریقہ (Solution of simultaneous equations by graphical method)

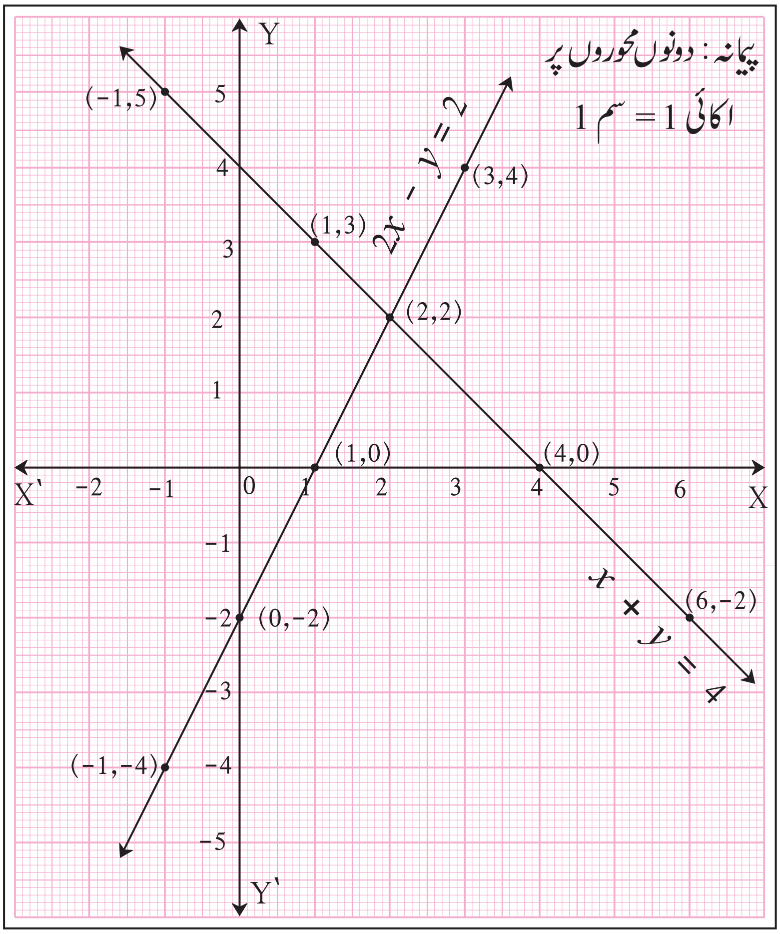
مثال : $x + y = 4$ اور $2x - y = 2$ ان مساواتوں کی ترسیمات کھینچ کر اس کا مشاہدہ کریں گے۔

$2x - y = 2$

x	0	1	3	-1
y	-2	0	4	-4
(x, y)	$(0, -2)$	$(1, 0)$	$(3, 4)$	$(-1, -4)$

$x + y = 4$

x	-1	4	1	6
y	5	0	3	-2
(x, y)	$(-1, 5)$	$(4, 0)$	$(1, 3)$	$(6, -2)$



ترسیم پر واقع ہر نقطہ اس ترسیم کی مساوات کو مطمئن کرتا ہے۔ دونوں خطوط ایک دوسرے کو نقطہ (2, 2) پر قطع کرتے ہیں۔

اس لیے (2, 2) مرتب جوڑی یعنی $x = 2$ اور $y = 2$ قیمتیں $x + y = 4$ اور $2x - y = 2$ ان دونوں مساواتوں کو مطمئن کرتی ہیں۔

متغیر کی جن قیمتوں کے لیے دی ہوئی ہمزاد مساواتیں مطمئن ہوتی ہیں وہ قیمتیں ان مساواتوں کا حل ہوتی ہیں۔

$x + y = 4$ اور $2x - y = 2$ ان ہمزاد مساواتوں کا حل $x = 2$ اور $y = 2$ ہے۔

آ یئے، ان مساواتوں کو اخراج کے طریقے سے حل کر کے حل کی تصدیق کرتے ہیں۔

$x + y = 4 \quad \ldots \text{(I)}$

$2x - y = 2 \quad \ldots \text{(II)}$

مساوات (I) اور (II) کی جمع کرنے پر،

$3x = 6, \quad \therefore \quad x = 2$

مساوات (I) میں $x = 2$ رکھنے پر،

$x + y = 4$

$\therefore \quad 2 + y = 4$

$\therefore \quad y = 2$

عملی کام I : $x - y = 1$; $5x - 3y = 1$ اِن ہمزاد مساواتوں کا حل ترسیمی طریقے سے معلوم کرنے کے لیے دی ہوئی جدول مکمل کرکے محددین معلوم کیجیے۔

$x - y = 1$

x	0		3	
y		0		-3
(x, y)				

$5x - 3y = 1$

x	2			-4
y		8	-2	
(x, y)				

- ایک ہی پیمانہ کا استعمال کرتے ہوئے ایک ہی ترسیمی کاغذ پر مندرجہ بالا نقاط مرتسم کیجیے۔
- مساواتوں کی ترسیمات کھینچیے۔
- خطوط کے نقطہ تقاطع کے محددین پڑھیے۔ اس کی مدد سے ہمزاد مساواتوں کا حل لکھیے۔

عملی کام II : مندرجہ بالا ہمزاد مساواتوں کو اخراج کے طریقے سے حل کیجیے اور ترسیم سے حاصل ہونے والے حل کی تصدیق کیجیے۔

آیئے، غور کریں۔

$5x - 3y = 1$ کی ترسیم کھینچنے کے لیے درج ذیل جدول میں کچھ محددین معلوم کرکے لکھے ہوئے ہیں۔ ان کا مشاہدہ کیجیے۔

x	0	$\frac{1}{5}$	1	-2
y	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{4}{3}$	$-\frac{11}{3}$
(x, y)	$\left(0, -\frac{1}{3}\right)$	$\left(\frac{1}{5}, 0\right)$	$\left(1, \frac{4}{3}\right)$	$\left(-2, -\frac{11}{3}\right)$

- کیا نقطہ مرتسم کرنے کے لیے محددین سہولت بخش ہیں؟
- محددین معلوم کرنے کے لیے کس بات کا دھیان رکھیں کہ نقطہ مرتسم کرنا آسان ہو جائے؟

مشقی سیٹ 1.2

1. درج ذیل ہمزاد مساواتیں ترسیمی طریقے سے حل کرنے کے لیے جدول مکمل کیجیے۔

$x + y = 3$; $x - y = 4$

$x + y = 3$

x	3	☐	☐
y	☐	5	3
(x, y)	(3, 0)	☐	(0, 3)

$x - y = 4$

x	☐	-1	0
y	0	☐	-4
(x, y)	☐	☐	(0, -4)

2. درج ذیل ہمزاد مساواتیں ترسیمی طریقے سے حل کیجیے۔

(1) $x + y = 6$; $x - y = 4$

(2) $x + y = 5$; $x - y = 3$

(3) $x + y = 0$; $2x - y = 9$

(4) $3x - y = 2$; $2x - y = 3$

(5) $3x - 4y = -7$; $5x - 2y = 0$

(6)★ $2x - 3y = 4$; $3y - x = 4$

آئیے، بحث کریں۔

$x + 2y = 4$; $3x + 6y = 12$ ہمزاد مساواتیں دی ہوئی ہیں۔ انھیں ترسیمی طریقے سے حل کرنے کے لیے متعین کی گئی مرتب جوڑیاں درج ذیل ہیں۔

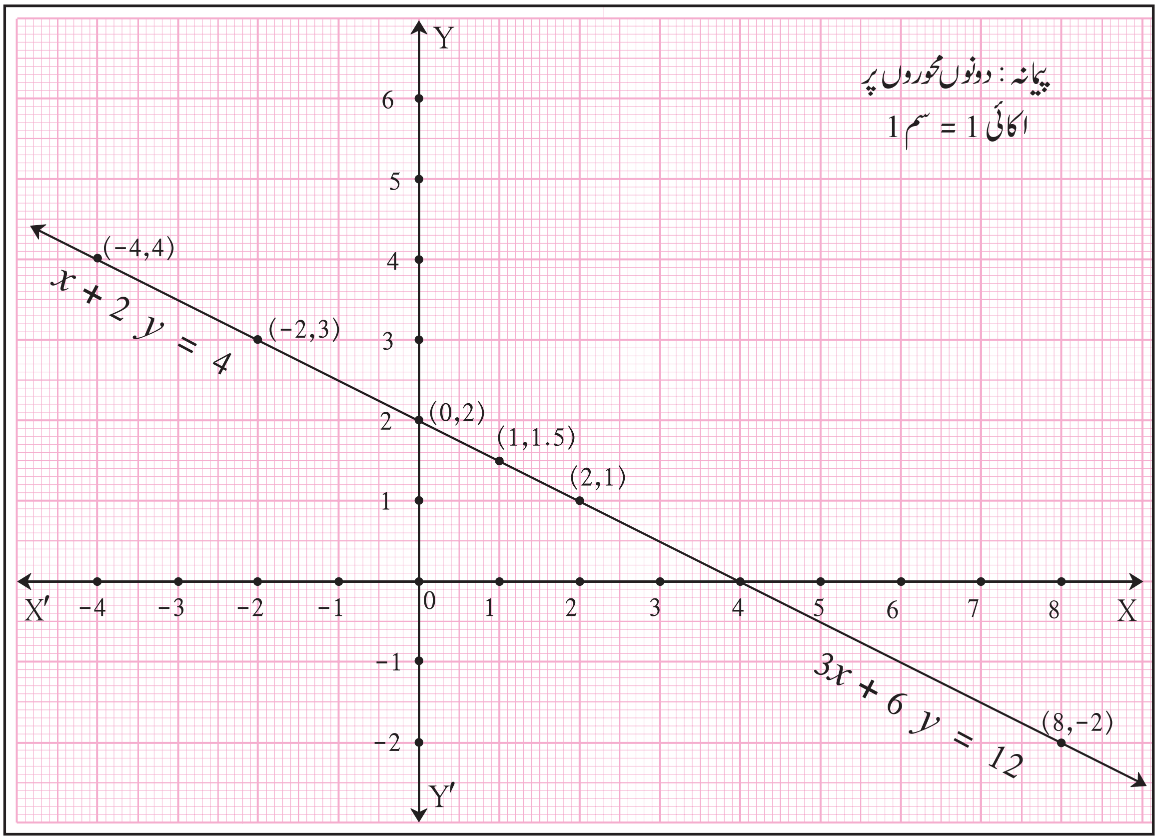
$3x + 6y = 12$

x	−4	1	8
y	4	1.5	−2
(x, y)	(−4, 4)	(1, 1.5)	(8, −2)

$x + 2y = 4$

x	−2	0	2
y	3	2	1
(x, y)	(−2, 3)	(0, 2)	(2, 1)

ان مرتب جوڑیوں کو مرتسم کر کے کھینچی ہوئی ترسیم ذیل میں دی ہوئی ہے۔ اس کا مشاہدہ کر کے اس پر مبنی سوالوں پر بحث کیجیے۔



(1) مندرجہ بالا دونوں مساواتوں کی ترسیم ایک ہی ہے یا مختلف ہے؟

(2) $x + 2y = 4$ اور $3x + 6y = 12$ ہمزاد مساواتوں کے حل کون سے ہیں؟ اور یہ کتنے ہیں؟

(3) مندرجہ بالا مساواتوں میں x کے ضریب، y کے ضریب اور مستقل عدد میں کیا تعلق دِکھائی دیتا ہے؟

(4) اگر دو متغیری صورت میں دو خطی مساواتیں دی ہوئی ہوں، ان مساواتوں کی ترسیم صرف ایک ہی خط کب ہوگی اور اس کی شناخت کیسے ہوگی؟

اب دوسری مثال دیکھیے۔

$x - 2y = 4$ اور $2x - 4y = 12$ کی ترسیمات درج بالا طریقے سے ایک ہی پیمانے کا استعمال کرکے ایک ہی ترسیمی کاغذ پر کھینچیے۔ ترسیم کا مشاہدہ کیجیے۔ $x - 2y = 4$ ؛ $2x - 4y = 12$ ان ہمزاد مساواتوں کے حل پر غور کیجیے۔ x اور y کے ضریب، اسی طرح مستقل عدد ان سے متعلق غور کرتے ہوئے نتیجہ اخذ کیجیے۔

ICT Tools or Links

Geogebra software کی مدد سے X - محور اور Y - محور کھینچیے۔ مختلف ہمزاد مساواتوں کی ترسیمات کھینچیے۔ ان کے حل کی جانچ کیجیے۔

آیئے، سمجھ لیں۔

مربع قالب (Determinant)

$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ یہ چار ارکان کا مربع قالب ہے۔ اس میں (a, b) ، (c, d) اُفقی قطاریں ہیں۔ اسی طرح $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ ، $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ عمودی ستون ہیں۔ اس مربع قالب کا درجہ 2 ہے کیونکہ ہر اُفقی قطار اور عمودی ستون میں 2 ارکان ہیں۔ اس مربع قالب کو ایک عدد کی صورت میں لکھا جاسکتا ہے۔ وہ عدد $ad-bc$ ہے۔

یعنی ، $$\begin{vmatrix} a \searrow\!\!\!\swarrow b \\ c \qquad d \end{vmatrix} = ad\text{-}bc$$

مربع قالب $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ کی قیمت $ad-bc$ ہے۔

مربع قالب کو ظاہر کرنے کے لیے عام طور پر انگریزی کے بڑے حروف A, B, C, D, ... وغیرہ استعمال کرتے ہیں۔

✿✿✿ حل کردہ مثالیں ✿✿✿

مثال : درج ذیل مربع قالب کی قیمت معلوم کیجیے۔

(1) $A = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix}$ (2) $N = \begin{vmatrix} -8 & -3 \\ 2 & -4 \end{vmatrix}$ (3) $B = \begin{vmatrix} 2\sqrt{3} & 9 \\ 2 & 3\sqrt{3} \end{vmatrix}$

حل:

$$(1)\ A = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = (5 \times 9) - (3 \times 7) = 45 - 21 = 24$$

$$(2)\ N = \begin{vmatrix} -8 & -3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = [(-8) \times (4)] - [(-3\ ) \times 2] = -32 - (-6)$$

$$= -32 + 6 = -26$$

$$(3)\ B = \begin{vmatrix} 2\sqrt{3} & 9 \\ 2 & 3\sqrt{3} \end{vmatrix} = [2\sqrt{3} \times 3\sqrt{3}] - [2 \times 9] = 18 - 18 = 0$$

آیئے، سمجھ لیں۔

مربع قالب کا طریقہ (کرامر کا اُصول) (Determinant method (Cramer's method))

دی ہوئی ہمزاد مساواتیں آسان طریقے سے کم سے کم جگہ کا استعمال کرکے مربع قالب کی مدد سے حل کر سکتے ہیں۔ اسے مربع قالب کے طریقے سے ہمزاد مساوات حل کرنا کہتے ہیں۔ یہ طریقہ گبریل کرامر نامی سوئیس ریاضی داں نے معلوم کیا تھا اس لیے اسے کرامر کا طریقہ کہتے ہیں۔

اس طریقے میں دی ہوئی ہمزاد مساواتیں لکھنے کا طریقہ یہ ہے: $a_1x + b_1y = c_1$ اور $a_2x + b_2y = c_2$

فرض کیجیے،

$$a_1x + b_1y = c_1 \quad . . . (I)$$

اور، $$a_2x + b_2y = c_2 \quad . . . (II)$$

یہاں a_1، b_1، c_1 اور a_2، b_2، c_2 حقیقی اعداد ہیں اور $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$

ہم اِن ہمزاد مساواتوں کو اخراج کے طریقے سے حل کرتے ہیں۔

مساوات (I) کو b_2 سے ضرب کرنے پر،

$$a_1b_2x + b_1b_2y = c_1b_2 \quad . . . \quad (III)$$

مساوات (II) کو b_1 سے ضرب کرنے پر،

$$a_2b_1x + b_2b_1y = c_2b_1 \quad . . . \quad (IV)$$

مساوات (III) سے (IV) تفریق کرنے پر،

$$\begin{array}{l} a_1 b_2 x + b_1 b_2 y = c_1 b_2 \\ \underline{\underset{-}{}a_2 b_1 x \underset{-}{+} b_2 b_1 y = \underset{-}{}c_2 b_1} \\ (a_1 b_2 - a_2 b_1)\ x = c_1 b_2 - c_2 b_1 \end{array}$$

$$x = \frac{c_1 b_2 - c_2 b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} \quad . . . (V)$$

$$y = \frac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}$$ . . . (اسی طرح x کا اخراج کرکے) . . . (VI)

مندرجہ بالا حل میں $a_1 c_2 - a_2 c_1,\ a_1 b_2 - a_2 b_1,\ c_1 b_2 - c_2 b_1$ عبارتوں کو دھیان میں رکھنے کے لیے مختصر جگہ میں مناسب مربع قالب کی صورت میں لکھتے ہیں۔

درج ذیل مساواتوں کے ضریب اور مستقل رکن کا مشاہدہ کیجیے۔

$$a_1 x + b_1 y = c_1$$

اور، $a_2 x + b_2 y = c_2$

یہاں $\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix}$ یہ تین عمودی ستون حاصل ہوتے ہیں۔

مساوات (V) اور (VI) میں x اور y کی قیمت مربع قالب کی مدد سے لکھتے ہیں۔

$$x = \frac{c_1 b_2 - c_2 b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \quad ; \quad y = \frac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

یہاں، $(a_1 b_2 - a_2 b_1) \neq 0$

انھیں ذہن میں رکھنے کے لیے ذیل کے مطابق لکھتے ہیں۔

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = D, \quad \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = D_x, \quad \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = D_y$$

یعنی مختصر طور پر $x = \frac{D_x}{D}$ اور $y = \frac{D_y}{D}$

D، D_x اور D_y اِن مربع قالبوں کو لکھنے کے لیے $\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix}$ عمودی ستون کی ترتیب دھیان میں رکھیں۔

$$\left\{\begin{array}{l} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{array}\right.$$ ان مساواتوں سے $\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}$ ، $\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}$ ، $\begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix}$ یہ تین عمودی ستون حاصل ہوتے ہیں۔

- D میں مستقل ارکان کا عمودی ستون $\begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix}$ خارج کیا گیا ہے۔
- D_x کے لیے D میں x کے ضریبوں کا عمودی ستون $\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}$ کو خارج کرکے اس کی جگہ مستقل ارکان کا عمودی ستون $\begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix}$ لیا جاتا ہے۔
- D_y کے لیے D میں y کے ضریبوں کا عمودی ستون $\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}$ خارج کرکے اس کی جگہ مستقل ارکان کا عمودی ستون $\begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix}$ لیا جاتا ہے۔

اسے دھیان میں رکھیں۔

کرامر کے طریقے سے ہمزاد مساواتیں حل کرنے کا طریقہ

دی ہوئی مساواتوں کو $ax + by = c$ صورت میں لکھیے۔

↓

D ، D_x اور D_y مربع قالبوں کی قیمت معلوم کیجیے۔

↓

$$x = \frac{D_x}{D} \quad \text{اور} \quad y = \frac{D_y}{D}$$

کی مدد سے x اور y کی قیمت معلوم کیجیے۔

گیبریل کرامر (Gabriel Cramer)

(31 جولائی 1704 تا 4 جنوری 1752) سوئس ریاضی داں جنیوا میں پیدا ہوئے۔ انھیں بچپن ہی سے ریاضی میں برتری حاصل تھی۔ 18 سال کی عمر میں انھیں ڈاکٹریٹ کی سند ملی۔ یہ جنیوا میں پروفیسر تھے۔

حل کردہ مثالیں

مثال: کرامر کے طریقے سے مندرجہ ذیل ہمزاد مساواتیں حل کیجیے۔

$$5x + 3y = -11 \;;\; 2x + 4y = -10$$

حل: دی ہوئی مساواتیں

$$5x + 3y = -11$$

$$2x + 4y = -10$$

$$D = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = (5 \times 4) - (2 \times 3) = 20 - 6 = 14$$

$$D_x = \begin{vmatrix} -11 & 3 \\ -10 & 4 \end{vmatrix} = (-11) \times 4 - (-10) \times 3 = -44 -(-30)$$

$$= -44 + 30 = -14$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 5 & -11 \\ 2 & -10 \end{vmatrix} = 5 \times (-10) - 2 \times (-11) = -50 -(-22)$$

$$= -50 + 22 = -28$$

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-14}{14} = -1$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{-28}{14} = -2$$

اس لیے $(x, y) = (-1, -2)$ دی ہوئی ہمزاد مساواتوں کا حل ہے۔

عملی کام 1: مربع قالب کے طریقے سے دی ہوئی ہمزاد مساواتیں حل کرنے کے لیے خانہ پُری کیجیے۔

$$y + 2x - 19 = 0 \;;\; 2x - 3y + 3 = 0$$

حل: دی ہوئی مساواتیں $ax + by = c$ صورت میں لکھتے ہیں۔

$$2x + y = 19$$

$$2x - 3y = -3$$

$$D = \begin{vmatrix} \boxed{} & \boxed{} \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = \boxed{} \times (-3) - 2 \times \boxed{} = \boxed{} - \boxed{}$$

$$= \boxed{} - \boxed{} = \boxed{}$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 19 & \boxed{} \\ \boxed{} & -3 \end{vmatrix} = 19 \times \boxed{} - \boxed{} \times (\boxed{}) = \boxed{} - \boxed{}$$

$$= \boxed{}$$

$$D_y = \begin{vmatrix} \boxed{} & 19 \\ 2 & \boxed{} \end{vmatrix} = [(\boxed{}) \times (\boxed{})] - [(\boxed{}) \times (\boxed{})]$$

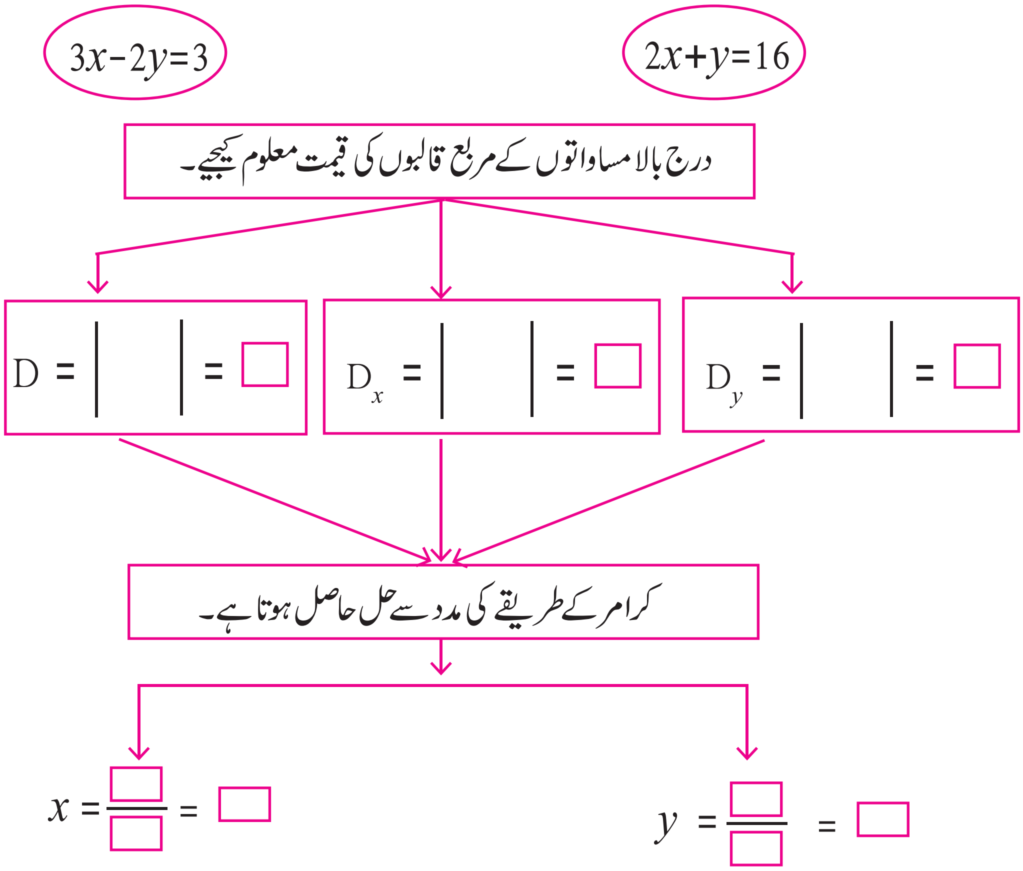
$$= \boxed{} - \boxed{} = \boxed{}$$

$$x = \frac{D_x}{D} \qquad\qquad y = \frac{D_y}{D}$$

$$\therefore\ x = \frac{\boxed{}}{\boxed{}} = \boxed{} \qquad\qquad y = \frac{\boxed{}}{\boxed{}} = \boxed{}$$

$\therefore\ (x, y) = (\boxed{}, \boxed{})$ ... (دی ہوئی ہمزاد مساواتوں کا حل)

عملی کام 2: درج ذیل عملی کام مکمل کیجیے۔



$3x-2y=3$

$2x+y=16$

درج بالا مساواتوں کے مربع قالبوں کی قیمت معلوم کیجیے۔

$D = \begin{vmatrix} & \end{vmatrix} = \boxed{}$

$D_x = \begin{vmatrix} & \end{vmatrix} = \boxed{}$

$D_y = \begin{vmatrix} & \end{vmatrix} = \boxed{}$

کرامر کے طریقے کی مدد سے حل حاصل ہوتا ہے۔

$x = \frac{\boxed{}}{\boxed{}} = \boxed{}$

$y = \frac{\boxed{}}{\boxed{}} = \boxed{}$

اس لیے $(x, y) = (\boxed{}, \boxed{})$ حل ہے۔

آیئے، غور کریں۔

- اگر $D = 0$ ہو تو حل کی نوعیت کیا ہوگی؟
- اگر مشترک حل نہ ہو تو ان مساواتوں کے خطوط کی نوعیت کیا ہوگی؟

مشقی سیٹ 1.3

.1 $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 3 \times \boxed{} - \boxed{} \times 4 = \boxed{} - 8 = \boxed{}$

.2 ذیل کی مربع قالبوں کی قیمت معلوم کیجیے۔

(1) $\begin{vmatrix} -1 & 7 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$ (2) $\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -7 & 0 \end{vmatrix}$ (3) $\begin{vmatrix} \frac{7}{3} & \frac{5}{3} \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix}$

.3 درج ذیل ہمزاد مساواتیں کرامر کے اُصول کا استعمال کر کے حل کیجیے۔

(1) $3x - 4y = 10$; $4x + 3y = 5$ (2) $4x + 3y - 4 = 0$; $6x = 8 - 5y$

(3) $x + 2y = -1$; $2x - 3y = 12$ (4) $6x - 4y = -12$; $8x - 3y = -2$

(5) $4m + 6n = 54$; $3m + 2n = 28$ (6) $2x + 3y = 2$; $x - \frac{y}{2} = \frac{1}{2}$

آیئے، سمجھ لیں۔

دو متغیری خطی مساواتوں کی تحویل کے قابل مساواتیں
(Equations reducible to a pair of linear equations in two variables)

عملی کام : درج ذیل جدول مکمل کیجیے۔

خطی ہے یا نہیں	متغیر کی تعداد	مساواتیں
نہیں	2	$\frac{3}{x} - \frac{4}{y} = 8$
☐	☐	$\frac{6}{x-1} + \frac{3}{y-2} = 0$
☐	☐	$\frac{7}{2x+1} + \frac{13}{y+2} = 0$
☐	☐	$\frac{14}{x+y} + \frac{3}{x-y} = 5$

غور کیجیے۔

درج بالا جدول میں کچھ مساواتیں دو متغیروں کی صورت میں دی ہوئی ہیں۔ وہ بظاہر خطی نظر نہیں آتیں لیکن کیا ان کو خطی مساوات کی صورت میں لایا جاسکتا ہے؟

آئیے، سمجھ لیں۔

دیے ہوئے متغیروں میں مناسب تبدیلی کر کے نئے متغیر فرض کیے جاسکتے ہیں۔ ان نئے متغیروں کا استعمال کر کے دی ہوئی مساواتوں کو خطی مساواتوں کی صورت میں لکھتے ہیں۔

کسی بھی $\frac{m}{n}$ کسر کا نسب نما صفر نہیں ہوسکتا۔ اِسے بھولیے نہیں۔

حل کردہ مثالیں

مثال: (1) حل کیجیے۔ $\frac{4}{x} + \frac{5}{y} = 7;\ \frac{3}{x} + \frac{4}{y} = 5$

حل:

$$\frac{4}{x} + \frac{5}{y} = 7;\ \frac{3}{x} + \frac{4}{y} = 5$$

$$4\left(\frac{1}{x}\right) + 5\left(\frac{1}{y}\right) = 7 \ . \ . \ . \quad \text{(I)}$$

$$3\left(\frac{1}{x}\right) + 4\left(\frac{1}{y}\right) = 5 \ . \ . \ . \quad \text{(II)}$$

مساوات (I) اور (II) میں $\left(\frac{1}{x}\right) = m$ اور $\left(\frac{1}{y}\right) = n$ فرض کرنے پر درج ذیل مساواتیں حاصل ہوتی ہیں۔

$$4m + 5n = 7 \ . \ . \ . \quad \text{(III)}$$

$$3m + 4n = 5 \ . \ . \ . \quad \text{(IV)}$$

ان مساواتوں کو حل کرنے پر $m = 3$ اور $n = -1$ حل حاصل ہوتے ہیں۔

اب, $m = \frac{1}{x} \quad , \quad \therefore\ 3 = \frac{1}{x} \ , \ \therefore\ x = \frac{1}{3}$

اسی طرح, $n = \frac{1}{y} \quad , \quad \therefore\ -1 = \frac{1}{y} \ , \ \therefore\ y = -1$

اس لیے دی ہوئی ہمزاد مساوات کا حل $(x,\ y) = (\frac{1}{3},\ -1)$ ہے۔

مثال: (2) حل کیجیے۔ $\frac{4}{x-y} + \frac{1}{x+y} = 3 \; ; \; \frac{2}{x-y} - \frac{3}{x+y} = 5$

حل:

$$\frac{4}{x-y} + \frac{1}{x+y} = 3 \; ; \; \frac{2}{x-y} - \frac{3}{x+y} = 5$$

$$4\left(\frac{1}{x-y}\right) + 1\left(\frac{1}{x+y}\right) = 3 \; . \; . \; . \quad \text{(I)}$$

$$2\left(\frac{1}{x-y}\right) - 3\left(\frac{1}{x+y}\right) = 5 \; . \; . \; . \quad \text{(II)}$$

مساوات (I) اور مساوات (II) میں $a = \left(\frac{1}{x-y}\right)$ اور $b = \left(\frac{1}{x+y}\right)$ رکھنے پر درج ذیل مساواتیں حاصل ہوتی ہیں۔

$$4a + b = 3 \; . \; . \; . \quad \text{(III)}$$

$$2a - 3b = 5 \; . \; . \; . \quad \text{(IV)}$$

مساوات (III) اور (IV) حل کرنے پر $a = 1$ اور $b = -1$ حل حاصل ہوتا ہے۔

لیکن $a = \left(\frac{1}{x-y}\right)$ اور $b = \left(\frac{1}{x+y}\right)$

اس لیے $\left(\frac{1}{x-y}\right) = 1$ اور $\left(\frac{1}{x+y}\right) = -1$

$$x - y = 1 \; . \; . \; . \quad \text{(V)}$$

$$x + y = -1 \; . \; . \; . \quad \text{(VI)}$$

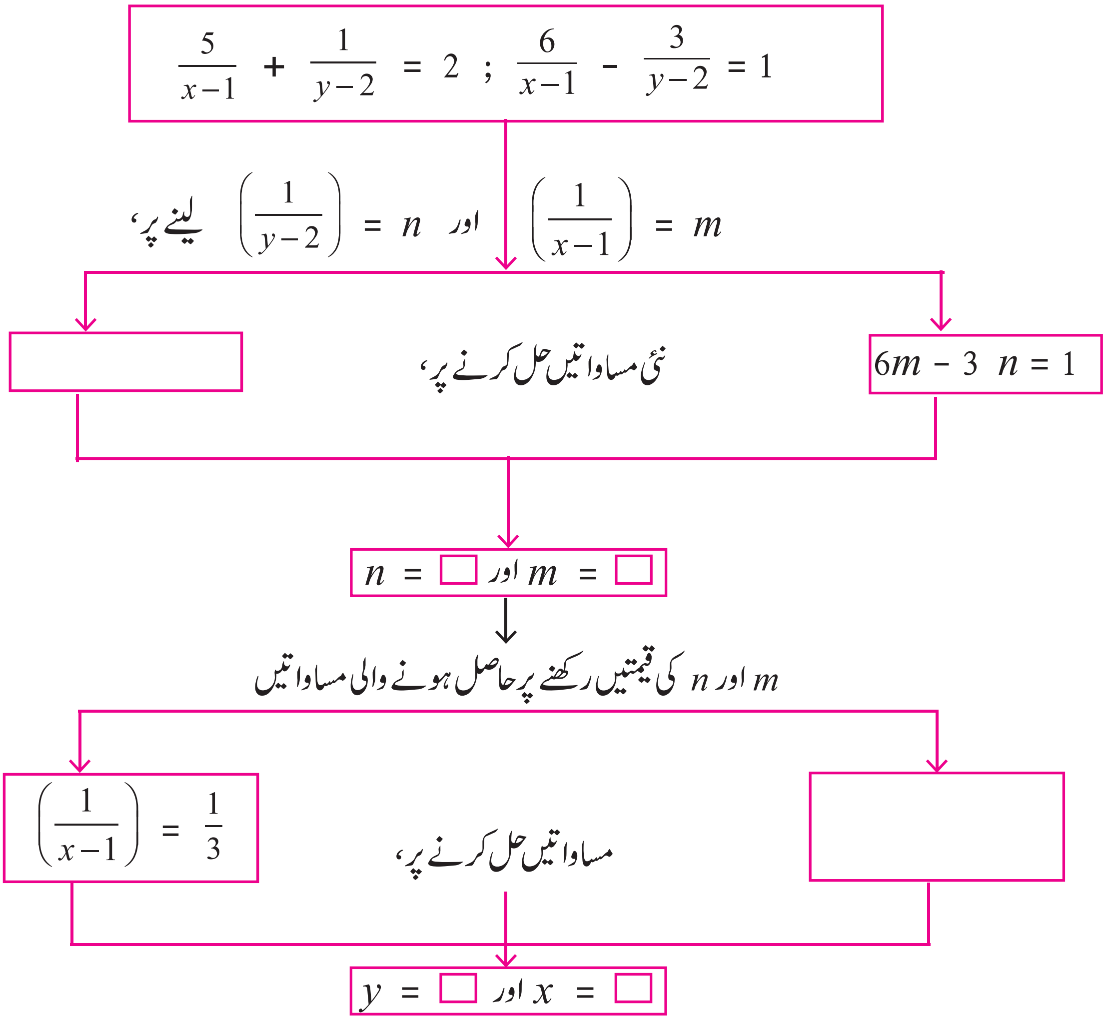
مساوات (V) اور (VI) حل کرنے پر $x = 0$ اور $y = -1$ حل حاصل ہوتا ہے

اس لیے دی ہوئی مساواتوں کا حل $(x, y) = (0, -1)$ ہے۔

آیئے، غور کریں۔

مندرجہ بالا مثال میں دی ہوئی مساواتوں کو ہمزاد مساواتوں میں تبدیل کرکے اخراج کے طریقے سے حل کیا گیا ہے۔ اگر ان مساواتوں کو کرامر کے طریقے سے یا ترسیمی طریقے سے حل کریں تو وہی حل ملتا ہے یا نہیں؟ معلوم کیجیے۔

عملی کام: خانے میں درج ہمزاد مساواتوں کا حل معلوم کرنے کے لیے درج ذیل عملی کام مکمل کیجیے۔



اس لیے دی ہوئی ہمزاد مساواتوں کا حل $(x,\ y)=(\quad,\quad)$ ہے۔

مشقی سیٹ 1.4

1. درج ذیل ہمزاد مساواتیں حل کیجیے۔

(1) $\frac{2}{x}-\frac{3}{y}=15\ ;\ \frac{8}{x}+\frac{5}{y}=77$

(2) $\frac{10}{x+y}+\frac{2}{x-y}=4\ ;\ \frac{15}{x+y}-\frac{5}{x-y}=-2$

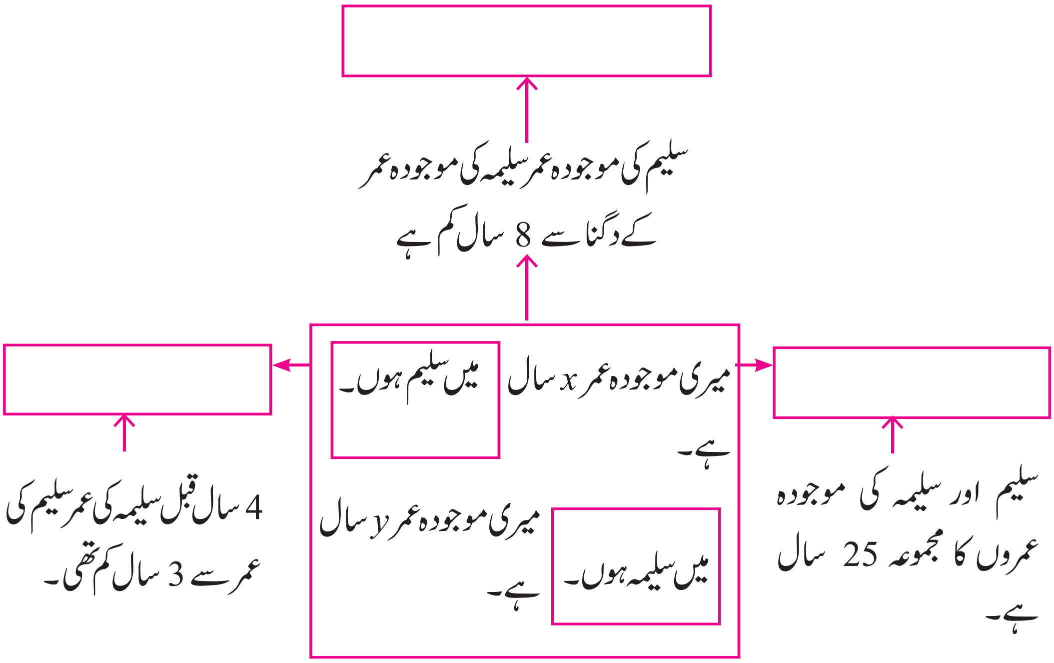
(3) $\frac{27}{x-2}+\frac{31}{y+3}=85\ ;\ \frac{31}{x-2}+\frac{27}{y+3}=89$

(4) $\frac{1}{3x+y}+\frac{1}{3x-y}=\frac{3}{4}\ ;\ \frac{1}{2(3x+y)}-\frac{1}{2(3x-y)}=-\frac{1}{8}$

آیئے، سمجھ لیں۔

ہمزاد مساواتوں کا اطلاق (Application of simultaneous equations)

عملی کام: درج ذیل خالی خانوں کے نیچے کچھ شرطیں دی ہوئی ہیں۔ ان کی مدد سے حاصل ہونے والی مساوات متعلقہ خانوں میں لکھیے۔



سلیم کی موجودہ عمر سلیمہ کی موجودہ عمر کے دگنا سے 8 سال کم ہے

میری موجودہ عمر x سال ہے۔ میں سلیم ہوں۔

میری موجودہ عمر y سال ہے۔ میں سلیمہ ہوں۔

سلیم اور سلیمہ کی موجودہ عمروں کا مجموعہ 25 سال ہے۔

4 سال قبل سلیمہ کی عمر سلیم کی عمر سے 3 سال کم تھی۔

مثال: (1) ایک مستطیل کا احاطہ 40 سم ہے۔ مستطیل کی لمبائی اس کی چوڑائی کے دگنا سے 2 سم زیادہ ہے۔ مستطیل کی لمبائی اور چوڑائی معلوم کیجیے۔

حل: فرض کریں مستطیل کی لمبائی x سم اور چوڑائی y سم ہے۔

پہلی شرط کے مطابق ،

$$2(x + y) = 40$$

$$\therefore \quad x + y = 20 \quad . . . (I)$$

دوسری شرط کے مطابق ،

$$x = 2y + 2$$

$$\therefore \quad x - 2y = 2 \quad . . . (II)$$

مساوات (I) اور (II) مربع قالب کے طریقے پر حل کرنے پر ،

$$x + y = 20$$

$$x - 2y = 2$$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = [1 \times (-2)] - (1 \times 1) = -2 - 1 = -3$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 20 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = [20 \times (-2)] - (1 \times 2) = -40 - 2 = -42$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 20 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = (1 \times 2) - (20 \times 1) = 2 - 20 = -18$$

$$x = \frac{D_x}{D} \quad ; \quad y = \frac{D_y}{D}$$

$$\therefore \quad x = \frac{-42}{-3} \quad ; \quad y = \frac{-18}{-3}$$

$$\therefore \quad x = 14 \quad ; \quad y = 6$$

اس لیے مستطیل کی لمبائی 14 سم اور چوڑائی 6 سم ہے۔

مثال: (2)

سیل ! سیل !! سیل!!! صرف دودنوں کے لیے

میرے پاس سوئی والی کچھ اور کچھ ڈیجیٹل گھڑیاں ہیں۔
مجھے انھیں رعایتی نرخ سے فروخت کرنا ہے۔

پہلے دن کی فروخت

سوئی والی گھڑیاں = 11

ڈیجیٹل گھڑیاں = 6

حاصل شدہ رقم = ₹ 4330

دوسرے دن کی فروخت

سوئی والی گھڑیاں = 22

ڈیجیٹل گھڑیاں = 5

حاصل شدہ رقم = ₹ 7330

تو میری فروخت کی ہوئی ہر قسم کی ایک گھڑی کی قیمت کیا تھی؟

حل : فرض کیجیے، سوئی والی ایک گھڑی کی قیمت = ₹ x

اور ایک ڈیجیٹل گھڑی کی قیمت = ₹ y

پہلی شرط کے مطابق ،

$$11x + 6y = 4330 \quad . \; . \; . \quad (\text{I})$$

دوسری شرط کے مطابق ،

$$22x + 5y = 7330 \quad . \; . \; . \quad (\text{II})$$

مساوات (I) کو 2 سے ضرب کرنے پر،

$$22x + 12y = 8660 \quad . \; . \; . \quad (\text{III})$$

مساوات (II) میں سے مساوات (III) تفریق کرنے پر،

$$\begin{array}{rrcl} & 22x + 5y & = & 7330 \\ - & \underset{-}{} \; 22x \underset{-}{+} 12y & = & \underset{-}{}8660 \\ \hline & -7y & = & -1330 \end{array}$$

$$\therefore \quad y = 190$$

$y = 190$ مساوات (I) میں رکھنے پر،

$$11x + 6y = 4330$$

$$\therefore \quad 11x + 6(190) = 4330$$

$$\therefore \quad 11x + 1140 = 4330$$

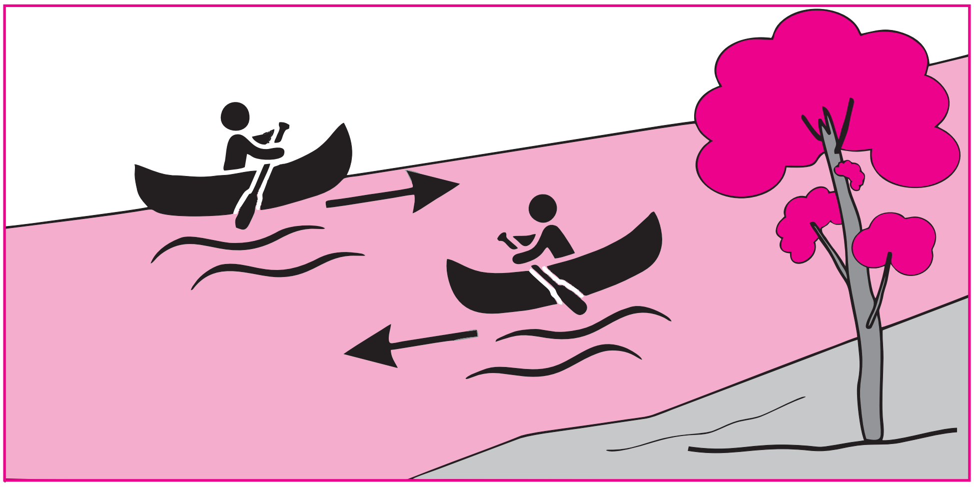
$$\therefore \quad 11x = 3190$$

$$\therefore \quad x = 290$$

اس لیے سوئی والی ایک گھڑی کی قیمت 290 ₹ اور

ایک ڈیجیٹل گھڑی کی قیمت 190 ₹ ہے۔

مثال: (3)



ایک کشتی 6 گھنٹے میں دریا کے بہاؤ کے مخالف سمت میں 16 کلومیٹر اور بہاؤ کے موافق سمت میں 24 کلومیٹر جاتی ہے۔

وہی کشتی 13 گھنٹے میں دریا کے بہاؤ کے مخالف سمت میں 36 کلومیٹر اور بہاؤ کے موافق سمت میں 48 کلومیٹر جاتی ہے۔

بتائیے کہ ساکن پانی میں کشتی کی رفتار اور دریا کے بہاؤ کی رفتار کیا ہے؟

حل: فرض کریں ساکن پانی میں کشتی کی رفتار = x کلومیٹر فی گھنٹہ اور دریا کے بہاؤ کی رفتار = y کلومیٹر فی گھنٹہ۔

اس لیے دریا کے بہاؤ کے موافق سمت میں کشتی کی رفتار = $(x + y)$ کلومیٹر فی گھنٹہ

اور دریا کے بہاؤ کے مخالف سمت میں کشتی کی رفتار = $(x - y)$ کلومیٹر فی گھنٹہ

اب ، فاصلہ = رفتار × وقت ، $\therefore$ وقت = $\frac{\text{فاصلہ}}{\text{رفتار}}$

بہاؤ کے مخالف سمت میں 16 کلومیٹر فاصلہ طے کرنے کے لیے کشتی کو درکار وقت = $\frac{16}{x - y}$ گھنٹے

بہاؤ کے موافق سمت میں 24 کلومیٹر فاصلہ طے کرنے کے لیے کشتی کو درکار وقت = $\frac{24}{x + y}$ گھنٹے

پہلی شرط کے مطابق ، $\frac{16}{x-y} + \frac{24}{x+y} = 6 \quad . . . \quad \text{(I)}$

دوسری شرط کے مطابق ، $\frac{36}{x-y} + \frac{48}{x+y} = 13 \quad . . . \quad \text{(II)}$

مساوات (I) اور (II) میں $\frac{1}{x-y} = m$ اور $\frac{1}{x+y} = n$ رکھنے پر درج ذیل مساواتیں حاصل ہوتی ہیں۔

$$16m + 24n = 6 \quad . . . \quad \text{(III)}$$

$$36m + 48n = 13 \quad . . . \quad \text{(IV)}$$

مساوات (III) اور (IV) حل کرنے پر $m = \frac{1}{4}$ اور $n = \frac{1}{12}$

مندرجہ بالا میں m اور n کی قیمتیں دوبارہ رکھنے پر ذیل کی مساواتیں حاصل ہوتی ہیں۔

$$x - y = 4 \quad ...(V)$$

$$x + y = 12 \quad ...(VI)$$

مساوات (V) اور (VI) حل کرنے پر $x = 8$ اور $y = 4$ قیمتیں حاصل ہوتی ہیں۔

اس لیے ساکن پانی میں کشتی کی رفتار = 8 کلومیٹر فی گھنٹہ

اور دریا کے بہاؤ کی رفتار = 4 کلومیٹر فی گھنٹہ

مثال (4) : کچھ رقم چند لڑکوں میں مساوی طور پر تقسیم کی گئی۔ اگر 10 لڑکے زیادہ ہوتے تو ہر لڑکے کو 2 روپے کم ملتے اور اگر 15 لڑکے کم ہوتے تو ہر لڑکے کو 6 روپے زیادہ ملتے تو تقسیم کی گئی رقم کتنی ہے؟ اور وہ رقم کتنے لڑکوں میں تقسیم کی گئی؟

حل : فرض کریں، لڑکوں کی تعداد x ہے اور ہر لڑکے کو ملنے والی رقم y روپے ہے۔

اس لیے تقسیم کی گئی کل رقم xy روپے ہوگی۔

پہلی شرط کے مطابق،

$$(x + 10)(y - 2) = xy$$

$$\therefore \quad xy - 2x + 10y - 20 = xy$$

$$\therefore \quad -2x + 10y = 20$$

$$\therefore \quad -x + 5y = 10 \quad ...(I)$$

دوسری شرط کے مطابق،

$$(x - 15)(y + 6) = xy$$

$$\therefore \quad xy + 6x - 15y - 90 = xy$$

$$\therefore \quad 6x - 15y = 90$$

$$\therefore \quad 2x - 5y = 30 \quad ...(II)$$

مساوات (I) اور (II) کی جمع کرنے پر،

$$\begin{array}{rr} & -x + 5y = 10 \\ + & 2x - 5y = 30 \\ \hline & x = 40 \end{array}$$

$x = 40$، مساوات (I) میں رکھنے پر،

$$-x + 5y = 10$$

$$\therefore \quad -40 + 5y = 10$$

$$\therefore \quad 5y = 50$$

$\therefore \quad y = 10$

$\therefore$ کل رقم $= xy = 40 \times 10 =$ ₹400

$\therefore$ 40 لڑکوں کو 400 روپے تقسیم کیے گئے۔

مثال (5) : تین ہندسی ایک عدد، اس کے ہندسوں کے مجموعے کا 17 گنا ہے۔ اصل عدد میں 198 جمع کرنے پر ہندسوں کے مقام کی آپسی تبدیلی سے دوسرا عدد حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح اکائی اور سیکڑہ کے مقام کے ہندسوں کا مجموعہ، درمیانی ہندسے سے 1 کم ہے۔ وہ تین ہندسی عدد معلوم کیجیے۔

حل : فرض کریں، اصل تین ہندسی عدد میں سیکڑہ کا ہندسہ x اور اکائی کا ہندسہ y ہے۔

سروں کے ہندسوں کے مجموعے سے ایک زیادہ = دہائی کا (درمیانی) ہندسہ

اکائی	دہائی	سیکڑہ
y	$x + y + 1$	x

$\therefore$ اصل تین ہندسی عدد $= 100x + 10(x + y + 1) + y$

$= 100x + 10x + 10y + 10 + y = 110x + 11y + 10$

اصل عدد کے ہندسوں کا مجموعہ $= x + (x + y + 1) + y = 2x + 2y + 1$

اصل تین ہندسی عدد $= 17 \times$ (ہندسوں کا مجموعہ) . . . (پہلی شرط کے مطابق)

$\therefore \quad 110x + 11y + 10 = 17 \times (2x + 2y + 1)$

$\therefore \quad 110x + 11y + 10 = 34x + 34y + 17$

$\therefore \quad 76x - 23y = 7 \quad \ldots \text{(I)}$

اصل عدد کے ہندسوں کا مقام اُلٹ کر ملنے والا نیا عدد

$= 100y + 10(x + y + 1) + x = 110y + 11x + 10$

اصل عدد $= 110x + 11y + 10$

اصل عدد $+ 198 =$ دی ہوئی دوسری شرط کے مطابق ہندسوں کے مقام کی آپسی تبدیلی سے ملنے والا عدد

$\therefore \quad 110x + 11y + 10 + 198 = 110y + 11x + 10$

$\therefore \quad 99x - 99y = -198$

$\therefore \quad x - y = -2$

یعنی, $\quad x = y - 2 \quad \ldots \text{(II)}$

مساوات (II) میں حاصل ہونے والی x کی قیمت مساوات (I) میں رکھنے پر،

$\therefore \quad 76(y - 2) - 23y = 7$

$\therefore \quad 76y - 152 - 23y = 7$

$53y = 159$

$\therefore \; y = 3$, ∴ اکائی کا ہندسہ = 3

$y = 3$، قیمت مساوات (II) میں رکھنے پر،

$$x = y - 2$$

$$\therefore \; x = 3 - 2 = 1$$

$\therefore \; x = 1$, ∴ سیکڑہ کا ہندسہ = 1

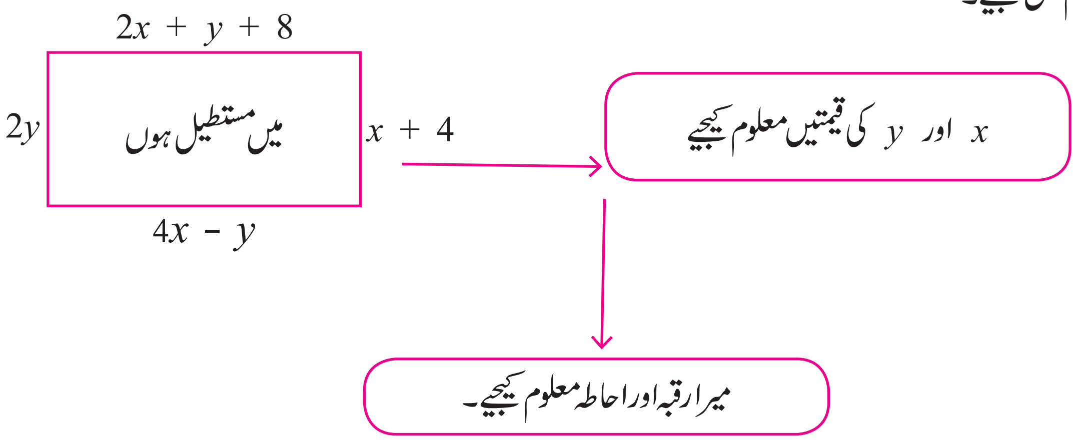
دہائی کا ہندسہ = درمیانی ہندسہ = $x + y + 1 = 1 + 3 + 1 = 5$

اس لیے اصل تین ہندسی عدد = 153

مشقی سیٹ 1.5

.1 دو اعداد کا فرق 3 ہے۔ بڑے عدد کے تین گنا اور چھوٹے عدد کے دگنا کا مجموعہ 19 ہے۔ وہ اعداد معلوم کیجیے۔

.2 عملی کام مکمل کیجیے۔



.3 والد کی عمر میں بیٹے کی عمر کا دگنا ملانے پر حاصل جمع 70 ہوتا ہے اور بیٹے کی عمر میں والد کی عمر کا دگنا ملانے پر حاصل جمع 95 ہوتا ہے۔ دونوں کی عمریں معلوم کیجیے۔

.4 ایک کسر کا نسب نما اس کے شمار کنندہ کے دگنا سے 4 بڑا ہے۔ اگر شمار کنندہ اور نسب نما دونوں سے 6 کم کریں تو نسب نما، شمار کنندہ کا 12 گنا ہوتا ہے۔ وہ کسر معلوم کیجیے۔

.5 10 ٹن کی گنجائش رکھنے والے بار بردار ٹرک میں A اور B دو قسم کے مخصوص وزن کے بکس رکھے گئے ہیں۔ اگر A قسم کے 150 بکس اور B قسم کے 100 بکس رکھیں تو ٹرک کی گنجائش 10 ٹن پوری ہوجاتی ہے۔ اگر A قسم کے 260 بکس رکھیں تو ٹرک کی گنجائش 10 ٹن پوری ہونے کے لیے B قسم کے 40 بکس کی ضرورت ہوتی ہے تو ہر قسم کے بکس کا وزن معلوم کیجیے۔

.6★ ماجد نے 1900 کلومیٹر سفر کرنے کے دوران کچھ فاصلہ بس کے ذریعے اور باقی فاصلہ ہوائی جہاز کے ذریعے پورا کیا۔ بس کی اوسط رفتار 60 کلومیٹر فی گھنٹہ ہے اور ہوائی جہاز کی اوسط رفتار 700 کلومیٹر فی گھنٹہ ہے۔ اگر اس سفر کے لیے 5 گھنٹے لگے ہوں تو ماجد نے بس کے ذریعے کتنے کلومیٹر سفر کیا؟

مجموعۂ سوالات 1

.1 درج ذیل سوالوں کے لیے دیے ہوئے متبادل جوابات سے صحیح متبادل کا انتخاب کیجیے۔

(1) $4x + 5y = 19$ کی ترسیم بنانے کے لیے $x = 1$ ہو تو y کی قیمت کیا ہوگی؟

(A) 4 (B) 3 (C) 2 (D) -3

(2) x اور y کی صورت میں دی ہوئی ہمزاد مساوات کے لیے اگر $D_x = 49$، $D_y = -63$، $D = 7$ ہو تو $x = ?$

(A) 7 (B) -7 (C) $\frac{1}{7}$ (D) $\frac{-1}{7}$

(3) مربع قالب $\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -7 & -4 \end{vmatrix}$ کی قیمت کیا ہے؟

(A) -1 (B) -41 (C) 41 (D) 1

(4) $x + y = 3 \;;\; 3x - 2y - 4 = 0$ ہمزاد مساواتیں حل کرنے کے لیے D کی قیمت کیا ہے؟

(A) 5 (B) 1 (C) -5 (D) -1

(5) $ax + by = c$ اور $mx + ny = d$ ہمزاد مساواتوں میں اگر $an \neq bm$ ہو تو دی ہوئی ہمزاد مساواتوں کا -

(A) ایک ہی مشترک حل ہے (B) حل نہیں ہے (C) لاتعداد حل ہیں (D) صرف دو حل ہیں

.2 $2x - 6y = 3$ مساوات کی ترسیم کھینچنے کے لیے درج ذیل جدول مکمل کیجیے۔

x	-5	
y		0
(x, y)		

.3 درج ذیل ہمزاد مساواتیں ترسیمی طریقے سے حل کیجیے۔

(1) $2x + 3y = 12 \;;\; x - y = 1$

(2) $x - 3y = 1 \;;\; 3x - 2y + 4 = 0$

(3) $5x - 6y + 30 = 0 \;;\; 5x + 4y - 20 = 0$

(4) $3x - y - 2 = 0 \;;\; 2x + y = 8$

(5) $3x + y = 10 \;;\; x - y = 2$

.4 درج ذیل مربع قالبوں کی قیمت معلوم کیجیے۔

(1) $\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}$ (2) $\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}$ (3) $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$

.5 درج ذیل ہمزاد مساواتیں کرامر کے طریقے سے حل کیجیے۔

(1) $6x - 3y = -10$; $3x + 5y - 8 = 0$

(2) $4m - 2n = -4$; $4m + 3n = 16$

(3) $3x - 2y = \frac{5}{2}$; $\frac{1}{3}x + 3y = -\frac{4}{3}$

(4) $7x + 3y = 15$; $12y - 5x = 39$

(5) $\frac{x+y-8}{2} = \frac{x+2y-14}{3} = \frac{3x-y}{4}$

.6 درج ذیل ہمزاد مساواتیں حل کیجیے۔

(1) $\frac{2}{x} + \frac{2}{3y} = \frac{1}{6}$; $\frac{3}{x} + \frac{2}{y} = 0$ (2) $\frac{7}{2x+1} + \frac{13}{y+2} = 27$; $\frac{13}{2x+1} + \frac{7}{y+2} = 33$

(3) $\frac{148}{x} + \frac{231}{y} = \frac{527}{xy}$; $\frac{231}{x} + \frac{148}{y} = \frac{610}{xy}$ (4) $\frac{7x-2y}{xy} = 5$; $\frac{8x+7y}{xy} = 15$

(5) $\frac{1}{2(3x+4y)} + \frac{1}{5(2x-3y)} = \frac{1}{4}$; $\frac{5}{(3x+4y)} - \frac{2}{(2x-3y)} = -\frac{3}{2}$

.7 درج ذیل عبارتی سوالات حل کیجیے۔

(1) ایک دو ہندسی عدد اور اس کے ہندسوں کے مقام کی ادل بدل کرنے سے حاصل ہونے والے عدد کا مجموعہ 143 ہے۔ اگر دیے ہوئے عدد میں اکائی کا ہندسہ، دہائی کے ہندسے سے 3 زیادہ ہو تو اصل عدد کیا ہے؟

فرض کریں، اصل عدد میں اکائی کا ہندسہ $= x$

اور دہائی کا ہندسہ $= y$

∴ اصل عدد $= \boxed{}\,y + x$

ہندسوں کے مقام کی ادل بدل کرنے سے حاصل ہونے والا عدد $= \boxed{}\,x + y$

پہلی شرط کے مطابق ،

دو ہندسی عدد + ہندسوں کے مقام کی ادل بدل کرنے سے حاصل ہونے والا عدد = 143

$$\boxed{10y + x} + \boxed{} = 143$$

$$\boxed{}\,x + \boxed{}\,y = 143$$

$$x + y = \boxed{} \qquad . . . \text{(I)}$$

دوسری شرط کے مطابق ،

اکائی کا ہندسہ = دہائی کا ہندسہ + 3

$$x = \boxed{} + 3$$

$$x - y = 3 \qquad . . . \text{(II)}$$

(I) اور (II) کی جمع کرنے پر ،

$2x = \boxed{}$, $\therefore \; x = 8$

$x = 8$ مساوات (I) میں رکھنے پر ،

$$x + y = 13$$
$$8 + \boxed{} = 13$$
$$\therefore \; y = \boxed{}$$

اصل دو ہندسی عدد $= 10y + x$

$= \boxed{} + 8 = 58$

(2) سعیدہ نے ایک دکان سے ڈیڑھ کلوگرام چائے پتی اور پانچ کلوگرام شکر خریدی۔ دکان تک جا کر واپس آنے کے لیے 50 روپے رکشے کا کرایہ لگا۔ اس کے لیے اس کے کل 700 روپے خرچ ہوئے۔ بعد میں اسے سمجھ میں آیا کہ وہی چیزیں آن لائن منگانے پر اتنی ہی قیمت میں گھر پہنچ جاتیں۔ اگلے مہینے اس نے 2 کلوگرام چائے پتی اور 7 کلوگرام شکر آن لائن منگائی۔ اس کے لیے اسے 880 روپے خرچ ہوئے تو چائے پتی اور شکر کا فی کلوگرام نرخ معلوم کیجیے۔

(3) نازیہ کے پاس 100 روپے والے $\boxed{x}$ اور 50 روپے والے $\boxed{y}$ نوٹ ہیں۔

نازیہ کو عابد نے مندرجہ بالا نوٹوں کی صورت میں 2500 روپے دیے۔
مساوات . . . . (I)

عابد نے ان نوٹوں کی تعداد میں آپسی تبدیلی کر کے رقم دی ہوتی تو 500 روپے کم ہو جاتے۔
مساوات . . . . (II)

مساوات حل کر کے جواب لکھیے۔

50 روپے والے نوٹوں کی تعداد = $\boxed{}$ ، 100 روپے والے نوٹوں کی تعداد = $\boxed{}$

(4) منیشا اور سویتا کی موجودہ عمروں کا مجموعہ 31 سال ہے۔ 3 سال قبل منیشا کی عمر، سویتا کی اس وقت کی عمر کا چار گنا تھی تو دونوں کی موجودہ عمریں معلوم کیجیے۔

(5)* ایک کارخانے میں ہنرمند اور بے ہنر مزدوروں کی تعداد کی نسبت 3 : 5 ہے۔ ایک ہنرمند اور ایک بے ہنر مزدور کی ایک دن کی کل مزدوری 720 روپے ہے تو ہر ہنرمند اور بے ہنر مزدوروں کی مزدوری معلوم کیجیے۔

(6)* ایک سیدھے راستے پر A اور B دو مقامات ہیں۔ ان کے درمیان فاصلہ 30 کلومیٹر ہے۔ حامد موٹر سائیکل کے ذریعے مقام A سے مقام B کی جانب روانہ ہوا۔ اسی وقت جوزف مقام B سے مقام A کی جانب روانہ ہوا۔ دونوں 20 منٹ بعد ایک دوسرے سے ملے۔ اگر جوزف اسی وقت نکل کر مخالف سمت میں جاتا تو اس کو حامد 3 گھنٹے میں ملتا تو ہر ایک کی رفتار کیا ہوگی؟

N6V6P5

2

مربعی مساواتیں (Quadratic Equations)

آیئے، سیکھیں۔

- مربعی مساوات : تعارف
- مربعی مساوات حل کرنے کے طریقے
- مربعی مساوات کے جذروں کی نوعیت
- جذر اور ضریب میں تعلق
- مربعی مساوات کا اطلاق

آیئے، ذرا یاد کریں

عزیز طلبہ! نویں جماعت میں ہم نے کثیر رکنی کا مطالعہ کیا ہے۔ اس میں کثیر رکنی کے درجے کی بنیاد پر ہونے والی مختلف قسموں کا ہم نے مطالعہ کیا ہے۔ ایک متغیر کی جس کثیر رکنی کا درجہ ایک ہوتا ہے اسے خطی کثیر رکنی اور جس کا درجہ دو ہوا سے مربعی کثیر رکنی کہتے ہیں۔

عملی کام : درج ذیل کثیر رکنیوں کو خطی کثیر رکنی اور مربعی کثیر رکنی میں جماعت بندی کیجیے۔

$5x + 9, \quad x^2 + 3x - 5, \quad 3x - 7, \quad 3x^2 - 5x, \quad 5x^2$

خطی کثیر رکنی	مربعی کثیر رکنی

اب ہم مربعی کثیر رکنی کی قیمت 0 رکھ کر جو مساوات حاصل ہوتی ہے اس کا مطالعہ کریں گے۔ ایسی مساوات کو مربعی مساوات کہتے ہیں۔ ہم روزمرہ کئی مرتبہ ان مربعی مساواتوں کا استعمال کرتے ہیں۔

مثال : ریحان نے 200 مربع میٹر رقبے کا ایک مستطیلی زمین کا قطعۂ اراضی خریدا۔ زمین کی لمبائی، چوڑائی سے 10 میٹر زیادہ ہے تو اس زمین کی لمبائی اور چوڑائی معلوم کیجیے۔

فرض کیجیے، قطعہ اراضی کی چوڑائی x میٹر ہے۔

$\therefore$ لمبائی $= (x + 10)$ میٹر

چوڑائی × لمبائی = مستطیل نما قطعۂ اراضی کا رقبہ

$\therefore \quad 200 = (x + 10) \times x$

$\therefore \quad 200 = x^2 + 10x$

یعنی، $x^2 + 10x = 200$

$\therefore \quad x^2 + 10x - 200 = 0$

اب مربعی مساوات $x^2 + 10x - 200 = 0$ کو حل کرکے ہم قطعۂ اراضی کی لمبائی اور چوڑائی معلوم کریں گے۔ مربعی مساوات کس طرح حل کرنا ہے، اس کا ہم مطالعہ کریں گے۔

آیئے، ذرا یاد کریں۔

عملی کام: $x^2 + 3x - 5,\ 3x^2 - 5x,\ 5x^2$ → اِن کثیر رکنیوں کو قوت نمائی صورت میں لکھ کر ان کے ارکان کے ضریبوں کا مشاہدہ کرکے خالی چوکون میں مناسب طریقے سے لکھیں۔

$x^2 + 3x - 5,\quad 3x^2 - 5x + 0,\quad 5x^2 + 0x + 0$

✦ x^2 کے ضریب بالترتیب $\boxed{1}$ ، $\boxed{3}$ اور $\boxed{5}$ ہیں یعنی 0 نہیں ہے۔

✦ x کے ضریب بالترتیب 3 ، ☐ اور ☐ ہیں۔

✦ مستقل رکن بالترتیب ☐ ، ☐ اور ☐ ہیں۔

یہاں دوسرے اور تیسرے کثیر رکنی میں مستقل رکن صفر (0) ہے۔

آیئے، سمجھ لیں۔

مربعی مساوات کی معیاری صورت (Standard form of quadratic equation)

جس متغیر کے تمام قوت نما مکمل عدد ہوں اور متغیر کا قوت نما بڑے سے بڑا 2 ہو، اس مساوات کو مربعی مساوات کہتے ہیں۔ اُسے عمومی صورت یا عام صورت میں $ax^2 + bx + c = 0$ اس طرح لکھتے ہیں۔ اس میں a ، b اور c حقیقی اعداد ہیں اور a غیر صفر عدد ہے۔

$ax^2 + bx + c = 0$ ، اِس صورت میں مساوات کو مربعی مساوات کی عام صورت یا معیاری صورت کہتے ہیں۔

عملی کام: درج ذیل جدول مکمل کیجیے۔

مربعی مساوات	معیاری صورت	a	b	c
$x^2 - 4 = 0$	$x^2 + 0x - 4 = 0$	1	0	−4
$y^2 = 2y - 7$	. . . .	. . .	. . .	. . .
$x^2 + 2x = 0$	. . . .	. . .	. . .	. . .

حل کردہ مثالیں

مثال: درج ذیل میں کون سی مساوات مربعی مساوات ہیں، بتایئے۔

(1) $3x^2 - 5x + 3 = 0$ (2) $9y^2 + 5 = 0$

(3) $m^3 - 5m^2 + 4 = 0$ (4) $(l + 2)(l - 5) = 0$

حل: (1) $3x^2 - 5x + 3 = 0$ اس میں ایک ہی متغیر ہے اور متغیر کا سب سے بڑا قوت نما 2 ہے اس لیے یہ مساوات مربعی مساوات ہے۔

(2) $9y^2 + 5 = 0$ ، اس میں ☐ متغیر ہے، متغیر کا سب سے بڑا قوت نما ☐ ہے اس لیے یہ مساوات مربعی مساوات ☐ ۔

(3) $m^3 - 5m^2 + 4 = 0$ ، ایک ہی متغیر ہے اس میں متغیر کا سب سے بڑا قوت نما 2 نہیں ہے اس لیے یہ مساوات مربعی مساوات ☐ ہے۔

(4)

$$(l + 2)(l - 5) = 0$$

$$\therefore \ l(l - 5) + 2(l - 5) = 0$$

$$\therefore \ l^2 - 5l + 2l - 10 = 0$$

$$\therefore \ l^2 - 3l - 10 = 0$$

... (اس میں صرف ☐ ایک ہی متغیر ہے اور متغیر کا سب سے بڑا قوت نما ☐ ہے)

اس لیے دی ہوئی مساوات مربعی مساوات ☐ ۔

آیئے، سمجھ لیں۔

مربعی مساوات کی جذریں (حل) (Roots of quadratic equation)

ہم نے سابقہ جماعت میں دیکھا ہے کہ x کی قیمت a رکھنے پر کثیر رکنی کی قیمت صفر آتی ہو تو $(x - a)$ اس کثیر رکنی کا جز ضربی ہوتا ہے، یعنی اگر $p(x)$ کثیر رکنی ہو اور $p(a) = 0$ ہو تو $(x - a)$ ، یہ $p(x)$ کا جزو ضربی ہوتا ہے۔ اس صورت میں کہتے ہیں کہ $p(x) = 0$ کا ایک حل a ہے یا $p(x) = 0$ کا ایک جذر a ہے۔

مثال:

کثیر رکنی $x^2 + 5x - 6$ میں $x = -6$ رکھنے پر،

$$x^2 + 5x - 6 = (-6)^2 + 5 \times (-6) - 6$$

$$= 36 - 30 - 6 = 0$$

اس لیے مساوات $x^2 + 5x - 6 = 0$ کا ایک حل $x = -6$ ہے۔

یعنی مساوات $x^2 + 5x - 6 = 0$ کا ایک جذر -6 ہے۔

کثیر رکنی $x^2 + 5x - 6$ میں $x - 2$ رکھنے پر،

$$x^2 + 5x - 6 = 2^2 + 5 \times 2 - 6$$

$$= 4 + 10 - 6$$

$$= 8 \neq 0$$

اس لیے مساوات $x^2 + 5x - 6 = 0$ کا حل $x = 2$ نہیں ہے۔

❀❀❀ حل کردہ مثالیں ❀❀❀

مثال: مساوات $2x^2 - 7x + 6 = 0$ کے (i) $x = \frac{3}{2}$ اور (ii) $x = -2$ جذر ہیں یا نہیں، طے کیجیے۔

حل: (i) کثیر رکنی $2x^2 - 7x + 6$ میں $x = \frac{3}{2}$ رکھنے پر کثیر رکنی کی قیمت معلوم کریں۔

$$2x^2 - 7x + 6 = 2\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 7\left(\frac{3}{2}\right) + 6$$

$$= 2 \times \frac{9}{4} - \frac{21}{2} + 6$$
$$= \frac{9}{2} - \frac{21}{2} + \frac{12}{2} = 0$$

اس لیے دی ہوئی مساوات کا ایک حل $x = \frac{3}{2}$ ہے۔

(ii) کثیر رکنی $2x^2 - 7x + 6$ میں $x = -2$ قیمت رکھ کر کثیر رکنی کی قیمت معلوم کریں گے۔

$$2x^2 - 7x + 6 = 2(-2)^2 - 7(-2) + 6$$
$$= 2 \times 4 + 14 + 6$$
$$= 28 \neq 0$$

اس لیے $x = -2$ مساوات $2x^2 - 7x + 6$ کا حل نہیں ہے۔

عملی کام : اگر $x = 5$، مساوات $kx^2 - 14x - 5 = 0$ کا ایک جذر ہو تو k کی قیمت معلوم کرنے کے لیے درج ذیل عملی کام مکمل کیجیے۔

حل : $kx^2 - 14x - 5 = 0$ اس مساوات کا ایک جذر $\square$ ہے۔ اس لیے $x = \square$، اوپر کی مربعی مساوات میں رکھنے پر،

$$\therefore \quad k\square^2 - 14\square - 5 = 0$$
$$\therefore \quad 25k - 70 - 5 = 0$$
$$\therefore \quad 25k - \square = 0$$
$$\therefore \quad 25k = \square$$
$$\therefore \quad k = \frac{\square}{\square} = 3$$

اسے ذہن میں رکھیں۔

(1) مربعی مساوات کی معیاری صورت $ax^2 + bx + c = 0$ ہے۔ اس میں a، b اور c حقیقی اعداد ہیں اور a غیر صفر عدد ہے۔

(2) متغیر کی جن قیمتوں سے مربعی مساوات کے دونوں بازو (طرفین) مساوی ہوتے ہیں۔ (یعنی مربعی مساوات مطمئن ہوتی ہے) ان قیمتوں کو مربعی مساوات کے حل یا مربعی مساوات کے جذر کہتے ہیں۔

مشقی سیٹ 2.1

.1 کوئی دو مربعی مساواتیں لکھیے۔

.2 درج ذیل مساواتوں میں سے مربعی مساواتیں پہچانیے۔

(1) $x^2 + 5x - 2 = 0$ (2) $y^2 = 5y - 10$ (3) $y^2 + \frac{1}{y} = 2$

(4) $x + \frac{1}{x} = -2$ (5) $(m + 2)(m - 5) = 0$ (6) $m^3 + 3m^2 - 2 = 3m^3$

.3 درج ذیل مساواتیں $ax^2 + bx + c = 0$ کی صورت میں لکھیے۔ ہر ایک کے لیے a، b اور c کی قیمت معلوم کیجیے۔

(1) $2y = 10 - y^2$ (2) $(x - 1)^2 = 2x + 3$ (3) $x^2 + 5x = -(3 - x)$

(4) $3m^2 = 2m^2 - 9$ (5) $p(3 + 6p) = -5$ (6) $x^2 - 9 = 13$

.4 مربعی مساواتوں کے مقابل دی ہوئی متغیر کی قیمت، ان مساواتوں کے جذر ہیں یا نہیں، طے کیجیے۔

(1) $x^2 + 4x - 5 = 0$, $x = 1, -1$ (2) $2m^2 - 5m = 0$, $m = 2, \frac{5}{2}$

.5 اگر مربعی مساوات $kx^2 - 10x + 3 = 0$ کا ایک جذر $x = 3$ ہو تو k کی قیمت معلوم کیجیے۔

.6 اگر مربعی مساوات $5m^2 + 2m + k = 0$ کا ایک جذر $\frac{-7}{5}$ ہو تو k کی قیمت معلوم کرنے کے لیے ذیل کی سرگرمی (عملی کام) مکمل کیجیے۔

حل: مربعی مساوات $5m^2 + 2m + k = 0$ کا ایک جذر $\boxed{}$ ہے۔

$\therefore \ m = \boxed{}$ . . . (اوپر کی مساوات میں رکھنے پر)

$$\therefore \ 5 \times \boxed{}^2 + 2 \times \boxed{} + k = 0$$

$$\therefore \ \boxed{} + \boxed{} + k = 0$$

$$\therefore \ \boxed{} + k = 0$$

$$\therefore \ k = \boxed{}$$

آیئے، ذرا یاد کریں۔

ہم نے گزشتہ سال کثیر رکنی باب میں $x^2 - 4x - 5$, $2m^2 - 5m$, $a^2 - 25$ اس قسم کے مربعی کثیر رکنیوں کے اجزائے ضربی معلوم کرنے کے طریقے کا مطالعہ کر چکے ہیں۔ درج ذیل عملی کام کے ذریعے اس کا اعادہ کرتے ہیں۔

عملی کام : درج ذیل مربعی کثیر رکنی کے اجزائے ضربی معلوم کیجیے۔

(1) $x^2 - 4x - 5$

$= \underline{x^2 - 5x} + \underline{1x - 5}$

$= x(\ldots\ldots) + 1(\ldots\ldots)$

$= (\ldots\ldots)(\ldots\ldots)$

(2) $2m^2 - 5m$

$= \ldots\ \ldots$

(3) $a^2 - 25$

$= a^2 - 5^2$

$= (\ldots\ldots)(\ldots\ldots)$

آئیے، سمجھ لیں۔

اجزائے ضربی کے طریقے سے جذر معلوم کرنا (Solution of a quadratic equation by factorisation)

ہم نے متغیر کی مختلف قیمتیں لے کر مربعی مساوات کی جذریں معلوم کر چکے ہیں لیکن اس طریقے میں کافی وقت درکار رہوتا ہے۔ اس لیے ہم اس حصے میں مربعی مساواتوں کے جذر، اجزائے ضربی کے طریقے سے معلوم کرنے کے طریقے کا مطالعہ کریں گے۔

$$x^2 - 4x - 5 = (x - 5)\ (x + 1)$$

یہاں کثیر رکنی $x^2 - 4x - 5$ کے دو خطی جزو ضربی $(x - 5)$ اور $(x + 1)$ ہیں اس لیے $x^2 - 4x - 5$ اس مربعی کثیر رکنی سے حاصل ہونے والے مربعی مساوات $x^2 - 4x - 5 = 0$ کو درج ذیل کے مطابق لکھ سکتے ہیں۔

$$(x - 5)\ (x + 1) = 0$$

اگر دو اعداد کا حاصل ضرب صفر ہو تو اُن دو اعداد میں سے کم از کم ایک عدد صفر ہوتا ہے۔

$\therefore\ x - 5 = 0$ یا $x + 1 = 0$

$\therefore\ x = 5$ یا $x = -1$

اس لیے دیے ہوئے مربعی مساوات کے جذر 5 اور 1– ہیں۔

اس مثال کو حل کرتے وقت ہم نے پہلے مربعی کثیر رکنی کے دو خطی جزو ضربی حاصل کیے۔ اس طریقے کو مربعی مساوات حل کرنے کا اجزائے ضربی کا طریقہ کہتے ہیں۔

حل کردہ مثالیں

مثال: ذیل کی مربعی مساوات اجزائے ضربی کے طریقے سے حل کیجیے۔

(1) $m^2 - 14m + 13 = 0$ (2) $3x^2 - x - 10 = 0$

(3) $3y^2 = 15y$ (4) $x^2 = 3$ (5) $6\sqrt{3}x^2 + 7x = \sqrt{3}$

حل: (1) $m^2 - 14m + 13 = 0$

$\therefore\ \underline{m^2 - 13m} - \underline{1m + 13} = 0$

$\therefore\ m(m - 13) - 1(m - 13) = 0$

$\therefore\ (m - 13)(m - 1) = 0$

$\therefore\ m - 13 = 0$ یا $m - 1 = 0$

$\therefore\ m = 13$ یا $m = 1$

$\therefore$ دی ہوئی مربعی مساوات کے جذر 13 اور 1 ہیں۔

(2) $3x^2 - x - 10 = 0$

$\therefore\ \underline{3x^2 - 6x} + \underline{5x - 10} = 0$

$\therefore\ 3x(x - 2) + 5(x - 2) = 0$

$\therefore\ (3x + 5)(x - 2) = 0$

$\therefore\ 3x + 5 = 0$ یا $x - 2 = 0$

$\therefore\ x = -\frac{5}{3}$ یا $x = 2$

$\therefore$ دی ہوئی مربعی مساوات کے جذر $-\frac{5}{3}$ اور 2 ہیں۔

(3) $3y^2 = 15\,y$

$\therefore\ 3y^2 - 15\,y = 0$

$\therefore\ 3y\,(y - 5) = 0$

$\therefore\ 3y = 0$ یا $y - 5 = 0$

$\therefore\ y = 0$ یا $y = 5$

اس لیے مربعی مساوات کے جذر 0 اور 5 ہیں۔

(4) $x^2 = 3$

$\therefore\ x^2 - 3 = 0$

$\therefore\ x^2 - (\sqrt{3})^2 = 0$

$\therefore\ (x + \sqrt{3})\,(x - \sqrt{3}) = 0$

$\therefore\ x + \sqrt{3} = 0$ یا $x - \sqrt{3} = 0$

$\therefore\ x = -\sqrt{3}$ یا $x = \sqrt{3}$

اس لیے دی ہوئی مربعی مساوات کے جذر $-\sqrt{3}$ اور $\sqrt{3}$ ہیں۔

(5) $6\sqrt{3}\,x^2 + 7x = \sqrt{3}$

$\therefore\ 6\sqrt{3}\,x^2 + 7x - \sqrt{3} = 0$

$\therefore\ 6\sqrt{3}\,x^2 + 9x - 2x - \sqrt{3} = 0$

$\therefore\ 3\sqrt{3}\,x(2x + \sqrt{3}) - 1\,(2x + \sqrt{3}) = 0$

$\therefore\ (2x + \sqrt{3})\,(3\sqrt{3}\,x - 1) = 0$

$\therefore\ 2x + \sqrt{3} = 0$ یا $3\sqrt{3}\,x - 1 = 0$

$\therefore\ 2x = -\sqrt{3}$ یا $3\sqrt{3}\,x = 1$

$\therefore\ x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ یا $x = \frac{1}{3\sqrt{3}}$

$6\sqrt{3} \times (-\sqrt{3}) = -18$

$$\begin{array}{ccc} & -18 & \\ \swarrow & & \searrow \\ 9 & & -2 \end{array}$$

$9 = 3\sqrt{3} \times \sqrt{3}$

$\therefore$ مربعی مساوات کے جذر $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ اور $\frac{1}{3\sqrt{3}}$ ہیں۔

مشقی سیٹ 2.2

1. مندرجہ ذیل مربعی مساواتیں اجزائے ضربی کے طریقے سے حل کیجیے۔

(1) $x^2 - 15\,x + 54 = 0$ (2) $x^2 + x - 20 = 0$ (3) $2y^2 + 27\,y + 13 = 0$

(4) $5m^2 = 22\,m + 15$ (5) $2x^2 - 2\,x + \frac{1}{2} = 0$ (6) $6x - \frac{2}{x} = 1$

(7) $\sqrt{2}\,x^2 + 7\,x + 5\sqrt{2} = 0$ اس مربعی مساوات کو اجزائے ضربی کے طریقے سے حل کرنے کے لیے درج ذیل عملی کام کیجیے۔

حل (7): $\sqrt{2}\,x^2 + 7x + 5\sqrt{2} = 0$

$\therefore\ \sqrt{2}\,x^2 + \boxed{} + \boxed{} + 5\sqrt{2} = 0$

$\therefore\ x(\ldots\ldots) + \sqrt{2}\,(\ldots\ldots) = 0$

$\therefore\ (\ldots\ldots)(x + \sqrt{2}) = 0$

$\therefore\quad (\,.\,.\,.\,.\,.\,) = 0$ یا $(x + \sqrt{2}\,) = 0$

$\therefore\quad x = \boxed{}$ یا $x = -\sqrt{2}$

∴ مربعی مساوات کے جذر $\boxed{}$ اور $-\sqrt{2}$ ہیں۔

(8)★ $3x^2 - 2\sqrt{6}\;x + 2 = 0$ (9) $2m\,(m - 24) = 50$

(10) $25m^2 = 9$ (11) $7m^2 = 21m$ (12) $m^2 - 11 = 0$

آئیے، سمجھ لیں۔

کامل مربع کے طریقے سے مربعی مساوات حل کرنا
(Solution of a quadratic equation by completing the square)

استاد : $x^2 + 10\,x + 2 = 0$ ، یہ مربعی مساوات ہے یا نہیں؟

فرمان : جی سر، کیوں کہ $ax^2 + bx + c = 0$ کی صورت میں ہے۔ یہاں x متغیر کا سب سے بڑا قوت نما 2 ہے اور a کی قیمت صفر نہیں ہے۔

استاد : کیا یہ مساوات آپ حل کر سکتے ہیں؟

ورشا : نہیں سر، کیوں کہ عدد 2 کے ایسے دو اجزائے ضربی نہیں بتا سکتے جن کا مجموعہ 10 ہو۔

استاد : اسی لیے ایسی مثالوں کو حل کرنے کے لیے دوسرا طریقہ استعمال کرنا ہوگا۔ وہ طریقہ سمجھنے کی کوشش کیجیے۔

$x^2 + 10x$ اس فقرہ میں مناسب رکن جمع کر کے ایک کامل مربعی عبارت حاصل کریں گے۔

اگر $x^2 + 10\,x + k = (x + a)^2$

ہو تو $x^2 + 10\,x + k = x^2 + 2ax + a^2$

اس لیے ضریبوں کا موازنہ کرنے پر $10 = 2a$ اور $k = a^2$

$\therefore\ a = 5\ ,\quad \therefore\ k = a^2 = (5)^2 = 25$

اب، $x^2 + 10\,x + 2 = (x + 5)^2 - 25 + 2 = (x + 5)^2 - 23$

مربعی مساوات $x^2 + 10\,x + 2 = 0$ کیا اب آپ حل کر سکتے ہیں؟

آفرین : جی سر، مساوات کے بائیں جانب دو مربعوں کے فرق کی صورت حاصل ہونے کی وجہ سے اس کے اجزائے ضربی معلوم کر سکتے ہیں۔

$$(x + 5)^2 - (\sqrt{23}\,)^2 = 0$$

$$\therefore\ (x + 5 + \sqrt{23}\,)(x + 5 - \sqrt{23}\,) = 0$$

$\therefore\quad x + 5 + \sqrt{23} = 0$ یا $x + 5 - \sqrt{23} = 0$

$\therefore\quad x = -5 - \sqrt{23}$ یا $x = -5 + \sqrt{23}$

حمید : سر، حل معلوم کرنے کا دوسرا طریقہ میری سمجھ میں آ گیا۔

$$(x + 5)^2 - (\sqrt{23})^2 = 0$$

$$\therefore \quad (x + 5)^2 = (\sqrt{23})^2$$

$$\therefore \quad x + 5 = \sqrt{23} \quad \text{یا} \quad x + 5 = -\sqrt{23}$$

$$\therefore \quad x = -5 + \sqrt{23} \quad \text{یا} \quad x = -5 - \sqrt{23}$$

حل کردہ مثالیں

مثال (1) حل کیجیے : $x^2 - 4x - 3 = 0$

حل : مساوات کے مربعی عبارت کی تحویل دو مربعوں کے فرق کی صورت میں لانے کے لیے x^2 کا ضریب 1 کرنا سہولت بخش ہوگا۔ اس لیے دی ہوئی مساوات کو 5 سے تقسیم کرنے پر،

$$x^2 - \frac{4}{5}x - \frac{3}{5} = 0$$

اب اگر $x^2 - \frac{4}{5}x + k = (x - a)^2$ ہو تو $x^2 - \frac{4}{5}x + k = x^2 - 2ax + a^2$

$x^2 - \frac{4}{5}x$ کا موازنہ $x^2 - 2ax$ سے کرنے پر،

$$\therefore \quad -2ax = -\frac{4}{5}x, \quad \therefore a = \frac{1}{2} \times \frac{4}{5} = \frac{2}{5}$$

$$\therefore \quad k = a^2 = \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{4}{25}$$

اب، $x^2 - \frac{4}{5}x - \frac{3}{5} = 0$

$$\therefore \quad x^2 - \frac{4}{5}x + \frac{4}{25} - \frac{4}{25} - \frac{3}{5} = 0$$

$$\therefore \quad \left(x - \frac{2}{5}\right)^2 - \left(\frac{4}{25} + \frac{3}{5}\right) = 0$$

$$\therefore \quad \left(x - \frac{2}{5}\right)^2 - \left(\frac{19}{25}\right) = 0$$

$$\therefore \quad \left(x - \frac{2}{5}\right)^2 = \left(\frac{19}{25}\right)$$

$$\therefore \quad x - \frac{2}{5} = \frac{\sqrt{19}}{5} \quad \text{یا} \quad x - \frac{2}{5} = -\frac{\sqrt{19}}{5}$$

$$\therefore \quad x = \frac{2}{5} + \frac{\sqrt{19}}{5} \quad \text{یا} \quad x = \frac{2}{5} - \frac{\sqrt{19}}{5}$$

$$\therefore \quad x = \frac{2 + \sqrt{19}}{5} \quad \text{یا} \quad x = \frac{2 - \sqrt{19}}{5}$$

∴ مربعی مساوات کے جذر $\frac{2 + \sqrt{19}}{5}$ اور $\frac{2 - \sqrt{19}}{5}$ ہیں۔

مساوات $x^2 + bx + c = 0$ کی صورت ہو تو

$$x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 + c = 0$$

اس صورت میں

یعنی، $\left(x + \frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - c$

کی صورت میں لکھتے ہیں۔

مثال (2) حل کیجیے : $x^2 + 8x - 48 = 0$

طریقہ (I) : کامل مربع کا طریقہ

$$x^2 + 8x - 48 = 0$$

$$\therefore\ x^2 + 8x + 16 - 16 - 48 = 0$$

$$\therefore\ (x + 4)^2 - 64 = 0$$

$$\therefore\ (x + 4)^2 = 64$$

$\therefore\ x + 4 = 8$ یا $x + 4 = -8$

$\therefore\ x = 4$ یا $x = -12$

اس لیے مربعی مساوات کے جذر 4 یا −12 ہے۔

طریقہ (II) : اجزائے ضربی کا طریقہ

$$x^2 + 8x - 48 = 0$$

$$\therefore\ x^2 + 12x - 4x - 48 = 0$$

$$\therefore\ x(x + 12) - 4(x + 12) = 0$$

$$\therefore\ (x + 12)(x - 4) = 0$$

$\therefore\ x + 12 = 0$ یا $x - 4 = 0$

$\therefore\ x = -12$ یا $x = 4$

مشقی سیٹ 2.3

مندرجہ ذیل مربعی مساوات کامل مربع کے طریقے سے حل کیجیے۔

(1) $x^2 + x - 20 = 0$

(2) $x^2 + 2x - 5 = 0$

(3) $m^2 - 5m = -3$

(4) $9y^2 - 12y + 2 = 0$

(5) $2y^2 + 9y + 10 = 0$

(6) $5x^2 = 4x + 7$

آیئے، سمجھ لیں۔

مربعی مساوات حل کرنے کا ضابطہ (Formula for solving a quadratic equation)

عبارت $ax^2 + bx + c$ کو a سے تقسیم کرنے پر عبارت $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}$ حاصل ہوتی ہے جہاں $a \neq 0$ ہے۔

عبارت $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}$ دو مربعوں کے فرق کی صورت میں لکھ کر مساوات $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$ یعنی مساوات $ax^2 + bx + c = 0$ کے عام حل یا جذر حاصل کرسکتے ہیں۔

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \ldots \text{(I)}$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \quad \ldots\ldots$$ (طرفین کو a سے تقسیم کرنے پر)

$$\therefore\ x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} = 0$$

$$\therefore\ \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0$$

$$\therefore \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2} = 0 \ , \quad \therefore \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

$$\therefore \quad x+\frac{b}{2a} = \sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}} \quad \text{یا} \quad x+\frac{b}{2a} = -\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$$

$$\therefore \quad x = -\frac{b}{2a}+\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}} \quad \text{یا} \quad x = -\frac{b}{2a}-\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$$

$$\therefore \quad x = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad \text{یا} \quad x = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

اس کو مختصر طور پر $x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ ، اس طرح لکھتے ہیں۔

اور اسے α (الفا) اور β (بیٹا) حروف سے ظاہر کرتے ہیں۔

$$\therefore \ \alpha = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \ , \quad \beta = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (\mathrm{I})$$

مساوات $ax^2 + bx + c = 0$ میں a، b، c کی قیمتیں عبارت $\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ کی آسان صورت میں دیں تو مساوات کا حل حاصل ہوتا ہے۔

اس لیے $x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ کو مربعی مساوات حل کرنے کا ضابطہ کہتے ہیں۔

مربعی مساوات کے دو حل میں سے کوئی بھی جذر کسی بھی علامت سے ظاہر کر سکتے ہیں۔

بیان I کے بجائے درج ذیل کو بھی تسلیم کر سکتے ہیں۔

$\alpha = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ اور $\beta = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

یہ بات یاد رکھیں کہ $\alpha = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ ہو تو $\alpha > \beta$ اور $\alpha = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ ہو تو $\alpha < \beta$

حل کردہ مثالیں

ضابطے کا استعمال کر کے مندرجہ ذیل مساواتیں حل کیجیے۔

مثال (1) $m^2 - 14m + 13 = 0$

حل : مساوات $m^2 - 14m + 13 = 0$ کا عام مساوات $ax^2 + bx + c = 0$ سے موازنہ کرنے پر، $a = 1, \ b = -14, \ c = 13$

$$\therefore \ b^2 - 4ac = (-14)^2 - 4\times 1\times 13$$
$$= 196 - 52$$
$$= 144$$

$$m = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$
$$= \frac{-(-14)\pm\sqrt{144}}{2\times 1}$$
$$= \frac{14\pm 12}{2}$$

$$\therefore \ m = \frac{14+12}{2} \quad \text{یا} \quad m = \frac{14-12}{2}$$
$$\therefore \ m = \frac{26}{2} \quad \text{یا} \quad m = \frac{2}{2}$$
$$\therefore \ m = 13 \quad \text{یا} \quad m = 1$$

∴ مربعی مساوات کے جذر 13 یا 1 ہے۔

مثال (2) $x^2 + 10x + 2 = 0$

حل: مساوات $x^2 + 10x + 2 = 0$ کا $ax^2 + bx + c = 0$ سے موازنہ کرنے پر،

$$a = 1,\ b = 10,\ c = 2,$$

$$\begin{aligned}
\therefore\ b^2 - 4ac &= (10)^2 - 4 \times 1 \times 2 \\
&= 100 - 8 \\
&= 92
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\
&= \frac{-10 \pm \sqrt{92}}{2 \times 1} \\
&= \frac{-10 \pm \sqrt{4 \times 23}}{2} \\
&= \frac{-10 \pm 2\sqrt{23}}{2} \\
&= \frac{2(-5 \pm \sqrt{23})}{2}
\end{aligned}$$

$$\therefore\ x = -5 \pm \sqrt{23}$$

$$\therefore\ x = -5 + \sqrt{23} \quad \text{یا} \quad x = -5 - \sqrt{23}$$

$\therefore$ مربعی مساوات کے جذر $-5 + \sqrt{23}$ یا $-5 - \sqrt{23}$ ہے۔

مثال (3) $x^2 - 2x - 3 = 0$

حل: دی ہوئی مساوات کا عام مساوات $ax^2 + bx + c = 0$ سے موازنہ کرنے پر

$$a = 1,\ b = -2,\ c = -3$$

$$\therefore\ b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 4 + 12 = 16$$

$$\therefore\ x = \frac{-(-2) + \sqrt{16}}{2} \quad \text{یا} \quad x = \frac{-(-2) - \sqrt{16}}{2}$$

$$= \frac{2 + 4}{2} \quad \text{یا} \quad = \frac{2 - 4}{2}$$

$$= 3 \quad \text{یا} \quad = -1$$

اس لیے مربعی مساوات کا جذر 3 یا -1 ہے۔

مزید معلومات کے لیے

$x^2 - 2x - 3 = 0$ یہی مربعی مساوات ذیل میں ترسیم کے ذریعے حل کی گئی ہے۔ اسے سمجھ لیں۔

$x^2 - 2x - 3 = 0$ یعنی $x^2 = 2x + 3$

x کی جن قیمتوں سے مساوات $x^2 = 2x + 3$ مطمئن ہوتی ہے وہی قیمتیں اس مساوات کے حل ہوں گے۔

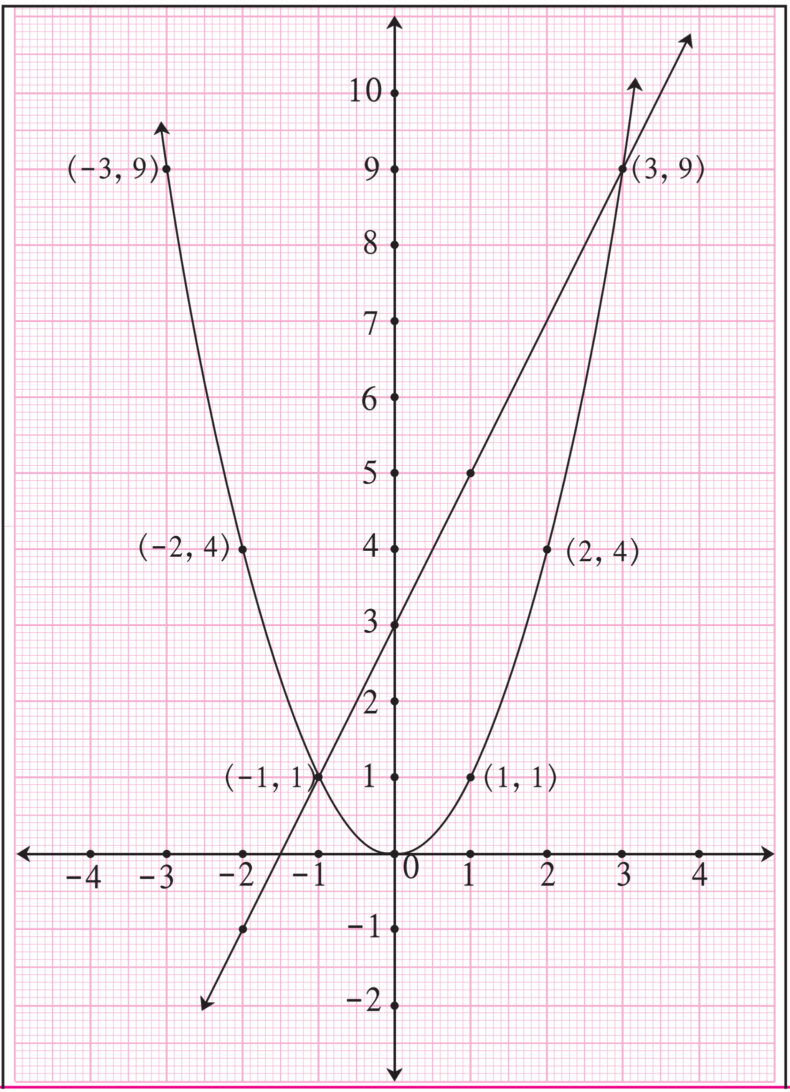
فرض کیجیے $y = x^2 = 2x + 3$ ، $y = x^2$ اور $y = 2x + 3$ ان مساوات کی ترسیم بنائیں گے۔

$y = x^2$

x	3	2	1	0	–1	–2	–3
y	9	4	1	0	1	4	9

$y = 2x + 3$

x	–1	0	1	–2
y	1	3	5	–1



یہ ترسیمات ایک دوسرے کو $(-1, 1)$ اور $(3, 9)$ ان نقاط پر قطع کرتی ہیں۔

$\therefore$ مساوات $x^2 = 2x + 3$ یعنی، $x^2 - 2x - 3 = 0$ کا حل $x = -1$ یا $x = 3$ ہے۔

بازو کی شکل میں مساوات $y = x^2$ اور $y = 2x + 3$ کی ترسیمات کھینچی گئی ہیں۔ ان کے نقطہ تقاطع سے مساوات $x^2 = 2x + 3$ یعنی، $x^2 - 2x - 3 = 0$ کے حل کس طرح حاصل ہوتے ہیں یہ سمجھنے کی کوشش کریں۔

مثال (4) $25x^2 + 30x + 9 = 0$

حل: مساوات $25x^2 + 30x + 9 = 0$ کا $ax^2 + bx + c = 0$ سے موازنہ کرنے پر،

$a = 25, \ b = 30, \ c = 9$

$\therefore \ b^2 - 4ac = (30)^2 - 4 \times 25 \times 9$

$= 900 - 900 \quad = 0$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-30 \pm \sqrt{0}}{2 \times 25}$$

$\therefore \ x = \frac{-30+0}{50}$ یا $x = \frac{-30-0}{50}$

$\therefore \ x = -\frac{30}{50}$ یا $x = -\frac{30}{50}$

$\therefore \ x = -\frac{3}{5}$ یا $x = -\frac{3}{5}$

دھیان میں رکھیں کہ مساوات $25x^2 + 30x + 9 = 0$ کے دونوں جذر مساوی ہیں۔ اِسی طرح $25x^2 + 30x + 9 = 0$ یعنی $(5x + 3)^2 = 0$ اسے دھیان میں رکھیں۔

مثال (5) $x^2 + x + 5 = 0$

حل: مساوات $x^2 + x + 5 = 0$ کا $ax^2 + bx + c = 0$ سے موازنہ کرنے پر،

$a = 1, \ b = 1, \ c = 5$

$\therefore \ b^2 - 4ac = (1)^2 - 4 \times 1 \times 5$

$= 1 - 20$

$= -19$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{-19}}{2 \times 1}$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{-19}}{2}$$

لیکن $\sqrt{-19}$ یہ حقیقی عدد نہیں ہے اس لیے دی ہوئی مربعی مساوات کے جذر حقیقی عدد نہیں ہیں۔

عملی کام: مربعی مساوات $2x^2 + 13x + 15 = 0$ کو اجزائے ضربی کے طریقے سے، کامل مربع کے طریقے اور مربع کے ضابطے کی مدد سے حل کیجیے۔ جوابات ایک جیسے حاصل ہوتے ہیں، اس بات کی تصدیق کیجیے۔

مشقی سیٹ 2.4

1. مندرجہ ذیل مربعی مساواتوں کا معیاری صورت سے موازنہ کرکے a، b، c کی قیمتیں لکھیے۔

(1) $x^2 - 7x + 5 = 0$ (2) $2m^2 = 5m - 5$ (3) $y^2 = 7y$

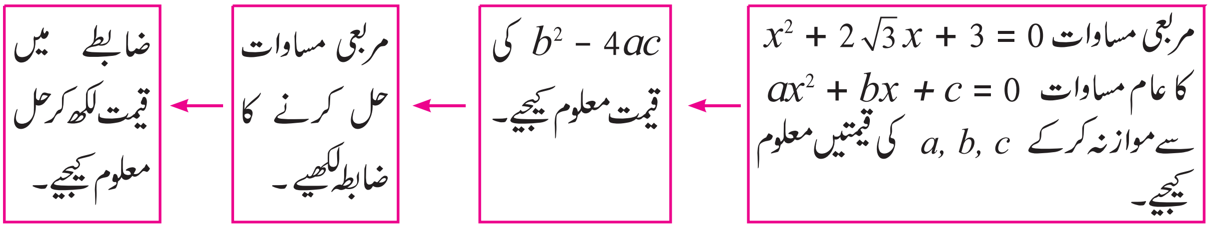
2. مندرجہ ذیل مربعی مساواتوں کو ضابطے کا استعمال کرکے حل کیجیے۔

(1) $x^2 + 6x + 5 = 0$ (2) $x^2 - 3x - 2 = 0$ (3) $3m^2 + 2m - 7 = 0$

(4) $5m^2 - 4m - 2 = 0$ (5) $y^2 + \frac{1}{3}y = 2$ (6) $5x^2 + 13x + 8 = 0$

3. مربعی مساوات $x^2 + 2\sqrt{3}x + 3 = 0$ کو ضابطے کا استعمال کر کے ذیل میں دیے ہوئے فلو چارٹ میں دی ہوئی معلومات کے مطابق حل کیجیے۔

حل:



آیئے، سمجھ لیں۔

مربعی مساوات کے جذروں کی نوعیت (Nature of roots of quadratic equation)

مربعی مساوات $ax^2 + bx + c = 0$ کے جذر $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ہوتے ہیں، اس کا ہم مطالعہ کر چکے ہیں۔

(1) اگر $b^2 - 4ac = 0$ ہو تو $x = \frac{-b \pm \sqrt{0}}{2a}$ ،

اس لیے $x = \frac{-b + 0}{2a}$ یا $x = \frac{-b - 0}{2a}$ یعنی، $x = \frac{-b}{2a}$ یا $x = \frac{-b}{2a}$

∴ مربعی مساوات کے جذر حقیقی اور مساوی ہوتے ہیں۔

(2) اگر $b^2 - 4ac > 0$ ہو تو $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

یعنی $x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ یا $x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

∴ مربعی مساوات کے جذر حقیقی اور غیر مساوی ہوتے ہیں۔

(3) اگر $b^2 - 4ac < 0$ ہو تو $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ حقیقی اعداد نہیں ہوتے۔ یعنی یہاں مربعی مساوات کے جذر حقیقی نہیں ہوتے ہیں۔

مربعی مساوات $ax^2 + bx + c = 0$ کے جذروں کی نوعیت $b^2 - 4ac$ کی قیمت سے ظاہر ہوتی ہے اس لیے $b^2 - 4ac$ کو مربعی مساوات کا ممیّز (discrimant) کہتے ہیں۔ اسے Δ (ڈیلٹا) علامت سے ظاہر کرتے ہیں۔ (Δ لاطینی حرف ہے۔)

عملی کام : ذیل میں دی ہوئی معلومات کی بنا پر خالی جگہ مکمل کیجیے۔

جذروں کی نوعیت		ممیّز کی قیمت	
	→	50	(1)
	→	-30	(2)
	→	0	(3)

حل کردہ مثالیں

مثال (1) مربعی مساوات $x^2 + 10x - 7 = 0$ میں ممیّز کی قیمت معلوم کیجیے۔

حل: مربعی مساوات $x^2 + 10x - 7 = 0$ کا موازنہ $ax^2 + bx + c = 0$ سے کرنے پر

$$a = 1,\ b = 10\ ,\ c = -7$$

$$\therefore\ b^2 - 4ac = 10^2 - 4 \times 1 \times (-7)$$

$$= 100 + 28$$

$$= 128$$

مثال (2) مندرجہ ذیل مساواتوں کے ممیّز سے جذروں کی نوعیت متعین کیجیے۔

(i) $2x^2 - 5x + 7 = 0$

حل: مساوات $2x^2 - 5x + 7 = 0$ کا موازنہ

$ax^2 + bx + c = 0$ سے کرنے پر،

$$a = 2,\ b = -5\ ,\ c = 7$$

$$\therefore\ b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \times 2 \times 7$$

$$\therefore\ \Delta = 25 - 56$$

$$= -31$$

$$\therefore\ b^2 - 4ac < 0$$

اس لیے مربعی مساوات کے جذر غیر حقیقی ہیں۔

(ii) $x^2 + 2x - 9 = 0$

حل: مساوات $x^2 + 2x - 9 = 0$ کا موازنہ

$ax^2 + bx + c = 0$ سے کرنے پر،

$$a = \boxed{},\ b = 2,\ c = \boxed{}$$

$$\therefore\ b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \times \boxed{} \times \boxed{}$$

$$\therefore\ \Delta = 4 + \boxed{}$$

$$= 40$$

$$\therefore\ b^2 - 4ac > 0$$

اس لیے مربعی مساوات کے جذر حقیقی اور غیر مساوی ہیں۔

(iii) $\sqrt{3}x^2 + 2\sqrt{3}x + \sqrt{3} = 0$

حل: مساوات $\sqrt{3}x^2 + 2\sqrt{3}x + \sqrt{3} = 0$ کا موازنہ $ax^2 + bx + c = 0$ سے کرنے پر،

یہاں، $a = \sqrt{3},\ b = 2\sqrt{3}\ ,\ c = \sqrt{3}$

$$\therefore\ b^2 - 4ac = (2\sqrt{3})^2 - 4 \times \sqrt{3} \times \sqrt{3}$$

$$= 4 \times 3 - 4 \times 3$$

$$= 12 - 12$$

$$= 0$$

اس لیے مربعی مساوات کے جذر حقیقی اور مساوی ہیں۔

آیئے، سمجھ لیں۔

مربعی مساوات کے جذروں اور ضریبوں کے درمیان تعلق
(Relation between the roots and coefficients of a quadratic equation)

اگر مربعی مساوات $ax^2 + bx + c = 0$ کے جذر α اور β ہوں تب،

$$\alpha + \beta = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} + \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$= -\frac{2b}{2a}$$

$$\boxed{\therefore\ \alpha + \beta = -\frac{b}{a}}$$

اسی طرح،

$$\alpha \times \beta = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \times \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$= \frac{\left(-b+\sqrt{b^2-4ac}\right)\times\left(-b-\sqrt{b^2-4ac}\right)}{4a^2}$$

$$= \frac{b^2-\left(b^2-4\right)ac}{4a^2}$$

$$= \frac{4ac}{4a^2}$$

$$= \frac{c}{a}$$

$$\boxed{\therefore\ \alpha\beta = \frac{c}{a}}$$

عملی کام : ذیل میں دیے ہوئے چوکونوں میں مناسب عدد لکھیے۔

مربعی مساوات $10x^2 + 10x + 1 = 0$ کے لیے $\alpha + \beta = \boxed{}$ اور

$\alpha \times \beta = \boxed{}$

حل کردہ مثالیں

مثال (1) α اور β، مربعی مساوات $2x^2 + 6x - 5 = 0$ کے جذر ہوں تب $\alpha + \beta$ اور $\alpha \times \beta$ معلوم کیجیے۔

حل: مربعی مساوات $2x^2 + 6x - 5 = 0$ کا موازنہ $ax^2 + bx + c = 0$ سے کرنے پر،

$$a = 2,\ b = 6,\ c = -5$$

$$\therefore\ \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -\frac{6}{2} = -3$$

اور، $\alpha \times \beta = \frac{c}{a} = \frac{-5}{2}$

مثال (2) مربعی مساوات $x^2 - 13x + k = 0$ کے جذروں کا فرق 7 ہے تو k کی قیمت معلوم کیجیے۔

حل : مربعی مساوات $x^2 - 13x + k = 0$ کا موازنہ $ax^2 + bx + c = 0$ سے کرنے پر ،

$$a = 1, \ b = -13 , \ c = k$$

فرض کیجیے، α اور β دی ہوئی مربعی مساوات کے جذر ہیں اور $\alpha > \beta$

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -\frac{(-13)}{1} = 13 \quad . . . (\text{I})$$

لیکن, $\alpha - \beta = 7$ . . . (دیا ہوا ہے) . . . (II)

$2\alpha = 20$ . . . (مساوات (I) اور (II) کی جمع کرنے پر)

$\therefore \ \alpha = 10$

$\therefore \ 10 + \beta = 13$ . . . [(I) کی بنا پر]

$\therefore \ \beta = 13 - 10$

لیکن , $\therefore \ \beta = 3$

$$\alpha \times \beta = \frac{c}{a}$$

$$\therefore \ 10 \times 3 = \frac{k}{1}$$

$$\therefore \ k = 30$$

مثال (3) α اور β ، مربعی مساوات $x^2 + 5x - 1 = 0$ کے جذر ہوں تو

(i) $\alpha^3 + \beta^3$ اور (ii) $\alpha^2 + \beta^2$ کی قیمت معلوم کیجیے۔

حل : مساوات $x^2 + 5x - 1 = 0$ کا موازنہ $ax^2 + bx + c = 0$ سے کرنے پر،

یہاں ، $a = 1, \ b = 5 , \ c = -1$

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a} = \frac{-5}{1} = -5$$

$$\alpha \times \beta = \frac{c}{a} = \frac{-1}{1} = -1$$

(i) $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta\,(\alpha + \beta)$

$= (-5)^3 - 3 \times (-1) \times (-5)$

$= -125 - 15$

$\alpha^3 + \beta^3 = -140$

(ii) $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$

$= (-5)^2 - 2 \times (-1)$

$= 25 + 2$

$\alpha^2 + \beta^2 = 27$

آیئے، سمجھ لیں۔

جذر دیے ہوئے ہوں تب مربعی مساوات حاصل کرنا
(To obtain a quadratic equation having given roots)

فرض کیجیے، x متغیر والی مربعی مساوات کے جذر α اور β ہوں تب

$\therefore\ x = \alpha$ یا $x = \beta$

$\therefore\ x - \alpha = 0$ یا $x - \beta = 0$

$$\therefore\quad (x - \alpha)(x - \beta) = 0$$

$$\therefore\ x^2 - \alpha x - \beta x + \alpha\beta = 0$$

$$\therefore\ x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$$

یعنی α اور β جذر کے مربعی مساوات کو ذیل کے ضابطے سے حاصل کر سکتے ہیں:

x^2 – (جذروں کا مجموعہ) x + جذروں کا حاصل ضرب = 0

عملی کام (I) : جذروں کا مجموعہ 10 اور جذروں کا حاصل ضرب 9 ہو تو حاصل ہونے والی مربعی مساوات لکھیے۔

$x^2 - \boxed{}\,x + \boxed{} = \boxed{}$ .... (مطلوبہ مربعی مساوات ہے)

عملی کام (II) : $\alpha = 2$ اور $\beta = 5$ جذر والی مربعی مساوات کون سی ہے؟

مربعی مساوات $x^2 + (\boxed{} + \boxed{})\,x + \boxed{} \times \boxed{} = 0$ کو اس طرح لکھتے ہیں۔

یعنی ، $x^2 + \boxed{}\,x + \boxed{} = 0$

حل کردہ مثالیں

مثال : جس مربعی مساوات کے جذر –3 اور –7 ہوں ایسی مربعی مساوات بنایئے۔

حل : فرض کیجیے، $\alpha = -3$ اور $\beta = -7$

$$\therefore\ \alpha + \beta = (-3) + (-7) = -10\ ,\ \alpha \times \beta = (-3) \times (-7) = 21$$

$\therefore\ x^2 - (\alpha + \beta)\,x + \alpha\beta = 0$ ... (مربعی مساوات کا ضابطہ)

$$\therefore\quad x^2 - (-10)\,x + 21 = 0$$

$$\therefore\quad x^2 + 10x + 21 = 0$$

اسے ذہن میں رکھیں۔

(1) مربعی مساوات $ax^2 + bx + c = 0$ کے جذر α اور β ہوں، تب

(i) $\alpha = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ اور، $\beta = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

(ii) $\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$ اور، $\alpha \times \beta = \frac{c}{a}$

(2) مربعی مساوات $ax^2 + bx + c = 0$ کے جذروں کی نوعیت الجبرائی عبارت $b^2 - 4ac$ کی قیمت پر منحصر ہوتی ہے۔ اس لیے اس عبارت کو ممیّز (discriminant) کہتے ہیں اور ممیّز کو Δ لاطینی حرف سے ظاہر کرتے ہیں۔

(3) اگر $\Delta = 0$ ہو تو، مربعی مساوات کے دونوں جذر مساوی اور حقیقی اعداد ہوتے ہیں۔

اگر $\Delta > 0$ ہو تو، مربعی مساوات کے جذر غیر مساوی اور حقیقی اعداد ہوتے ہیں۔

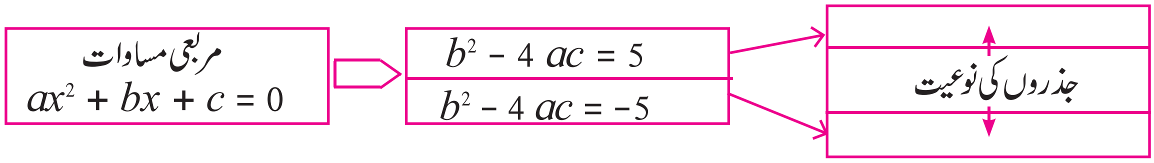
اگر $\Delta < 0$ ہو تو، مربعی مساوات کے جذر غیر حقیقی عدد ہوتے ہیں۔

(4) جن مربعی مساوات کے جذر α اور β ہوتے ہیں اس مربعی مساوات کو $x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$ سے ظاہر کرتے ہیں۔

مشقی سیٹ 2.5

.1 مندرجہ ذیل خالی چوکون مکمل کیجیے۔

(1)



مربعی مساوات $ax^2 + bx + c = 0$

$b^2 - 4ac = 5$

$b^2 - 4ac = -5$

جذروں کی نوعیت

(2)

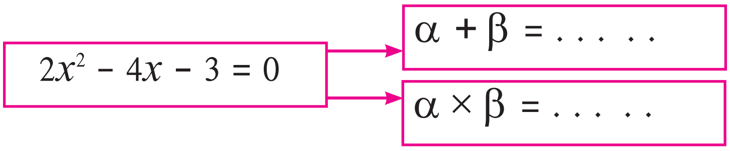
جذروں کا مجموعہ $= -7$

مربعی مساوات

. . . .

جذروں کا حاصل ضرب $= 5$

(3) اگر α اور β ذیل کے مربعی مساوات کے جذر ہوں تب،



$2x^2 - 4x - 3 = 0$

$\alpha + \beta = \dots\dots$

$\alpha \times \beta = \dots\dots$

.2 مندرجہ ذیل مربعی مساوات کے ممیّز کی قیمت معلوم کیجیے۔

(1) $x^2 + 7x - 1 = 0$ (2) $2y^2 - 5y + 10 = 0$ (3) $\sqrt{2}x^2 + 4x + 2\sqrt{2} = 0$

.3 ممیّز کی قیمت کی بنا پر ذیل کے مربعی مساوات کے جذروں کی نوعیت طے کیجیے۔

(1) $x^2 - 4x + 4 = 0$ (2) $2y^2 - 7y + 2 = 0$ (3) $m^2 + 2m + 9 = 0$

.4 جس مربعی مساوات کے جذر ذیل کے مطابق ہوں ایسی مربعی مساوات بنائیے۔

(1) 0 اور 4 (2) 3 اور -10 (3) $\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$ (4) $2-\sqrt{5}\,,\ 2+\sqrt{5}$

★.5 مربعی مساوات $x^2 - 4kx + k + 3 = 0$ کے جذروں کا مجموعہ، ان کے حاصلِ ضرب کے دگنا ہو تو k کی قیمت معلوم کیجیے۔

★.6 اگر α اور β مربعی مساوات $y^2 - 2y - 7 = 0$ کے جذر ہوں تو ذیل کی قیمت معلوم کیجیے۔

(1) $\alpha^2 + \beta^2$ (2) $\alpha^3 + \beta^3$

.7 ذیل کے ہر مربعی مساوات کے جذر حقیقی اور مساوی ہوں تب k کی قیمت معلوم کیجیے۔

(1) $3y^2 + ky + 12 = 0$ (2) $kx\,(x - 2) + 6 = 0$

آیئے، سمجھ لیں۔

مربعی مساوات کا اطلاق (Application of quadratic Equation)

روزمرہ زندگی میں مختلف مسائل کا حل معلوم کرنے کے لیے مربعی مساوات کارآمد ثابت ہوتی ہے۔ اس کے بارے میں ہم یہاں مطالعہ کریں گے۔

مثال (1): تیوسا کے رَتنا کرراؤ کے کھیت میں پیاز کی مستطیلی چال کے قاعدے کی لمبائی، چوڑائی سے 7 میٹر زیادہ ہے اور وتر اُس کی لمبائی سے 1 میٹر زیادہ ہے تو اس پیاز کی چالی کے قاعدے کی لمبائی اور چوڑائی معلوم کیجیے۔

حل: فرض کیجیے، پیاز کی مستطیلی چال کے قاعدے کی چوڑائی x میٹر ہے۔

$\therefore$ لمبائی $= (x + 7)$ میٹر، وتر $= x + 7 + 1 = (x + 8)$ میٹر

فیثاغورث کے مسئلے کی رو سے،

$$x^2 + (x + 7)^2 = (x + 8)^2$$

$$x^2 + x^2 + 14x + 49 = x^2 + 16x + 64$$

$$\therefore\ x^2 + 14x - 16x + 49 - 64 = 0$$

$$\therefore\ x^2 - 2x - 15 = 0$$

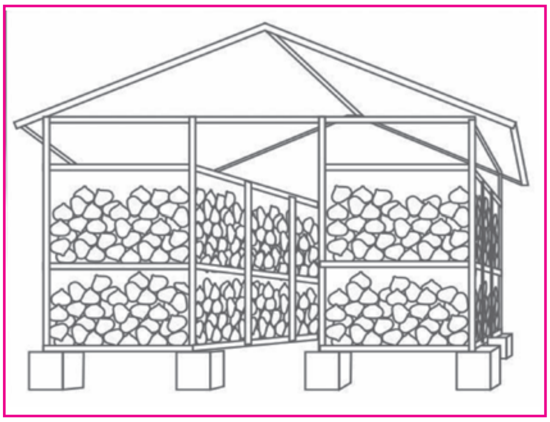
$$\therefore\ \underline{x^2 - 5x} + \underline{3x - 15} = 0$$

$$\therefore\ x(x - 5) + 3\,(x - 5) = 0$$

$$\therefore\ (x - 5)\,(x + 3) = 0$$

$\therefore\ x - 5 = 0$ یا $x + 3 = 0$

$\therefore\ x = 5$ یا $x = -3$



پیاز کی چال

لیکن چوڑائی منفی نہیں ہوتی۔ (لمبائی ہمیشہ مثبت ہوتی ہے۔)

$\therefore\ x \neq -3$

$\therefore\ x = 5$ اور $x + 7 = 5 + 7 = 12$

$\therefore$ پیاز کی چال کے قاعدے کی لمبائی 12 میٹر اور چوڑائی 5 میٹر ہے۔

مثال (2) ایک ریل گاڑی مساوی رفتار سے 360 کلومیٹر کا فاصلہ طے کرتی ہے لیکن اس کی رفتار 5 کلومیٹر فی گھنٹا بڑھانے پر، اسے وہی فاصلہ طے کرنے کے لیے 48 منٹ کم درکار ہوتے ہیں تو ریل گاڑی کی ابتدائی رفتار معلوم کیجیے۔

حل : فرض کیجیے، ریل گاڑی کی ابتدائی رفتار x کلومیٹر فی گھنٹا ہے۔

اس لیے رفتار میں 5 کلومیٹر فی گھنٹا کا اضافہ کرنے پر رفتار $(x + 5)$ کلومیٹر فی گھنٹا ہو جائے گی۔

360 کلومیٹر فاصلہ طے کرنے کے لیے ابتدا میں درکار وقت $= \frac{\text{فاصلہ}}{\text{وقت}} = \frac{360}{x}$ گھنٹہ

رفتار میں اضافہ کرنے پر وہی فاصلہ طے کرنے کے لیے درکار وقت $= \frac{360}{x+5}$

دی ہوئی شرط کے مطابق،

$$\frac{360}{x+5} = \frac{360}{x} - \frac{48}{60} \quad \ldots \left(\because 48 \text{ منٹ} = \frac{48}{60} \text{ گھنٹے}\right)$$

$$\therefore \quad \frac{360}{x} - \frac{360}{x+5} = \frac{48}{60}$$

$$\therefore \quad \frac{1}{x} - \frac{1}{x+5} = \frac{48}{60 \times 360} \quad \ldots \text{(طرفین کو 360 سے تقسیم کرنے پر)}$$

$$\therefore \quad \frac{x+5-x}{x(x+5)} = \frac{4}{5 \times 360}$$

$$\therefore \quad \frac{5}{x^2+5x} = \frac{1}{5 \times 90}$$

$$\therefore \quad \frac{5}{x^2+5x} = \frac{1}{450}$$

$$\therefore \quad x^2 + 5x = 2250$$

$$\therefore \quad x^2 + 5x - 2250 = 0$$

$$\therefore \quad \underline{x^2 + 50x} - 45\underline{x - 2250} = 0$$

$$\therefore \quad x(\underline{x + 50}) - 45(\underline{x + 50}) = 0$$

$$\therefore \quad (x + 50)(x - 45) = 0$$

$$\therefore \quad x + 50 = 0 \quad \text{یا} \quad x - 45 = 0$$

$$\therefore \quad x = -50 \quad \text{یا} \quad x = 45$$

$$\therefore \quad x \neq -50 \quad \ldots \text{(لیکن رفتار منفی نہیں ہوتی۔)}$$

$$\therefore \quad x = 45$$

-2250

+50 -45

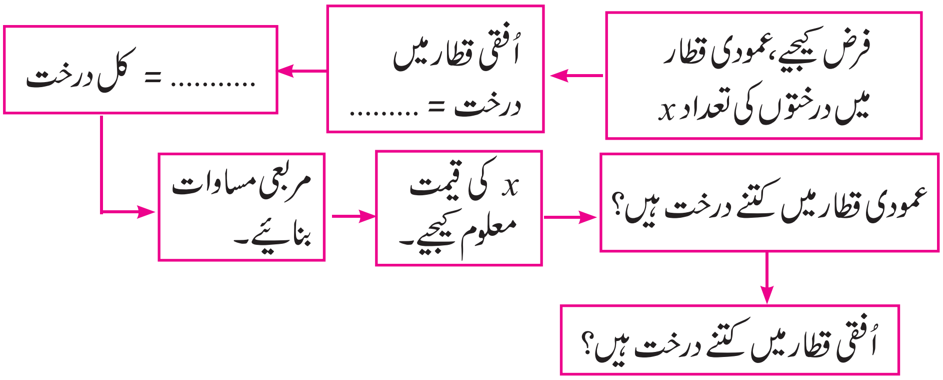
اس لیے ریل گاڑی کی ابتدائی رفتار 45 کلومیٹر فی گھنٹا ہے۔

مشقی سیٹ 2.6

1. انعم کے 2 سال پہلے اور 3 سال بعد کی عمروں کا حاصل ضرب 84 ہے تو اس کی موجودہ عمر معلوم کیجیے۔

2. دو متواتر جفت طبعی اعداد کے مربعوں کا مجموعہ 244 ہے۔ وہ اعداد معلوم کیجیے۔

3. شری مدھوسدن کے سنترے کے باغ میں اُفقی قطاروں میں درختوں کی تعداد، عمودی قطاروں میں درختوں کی تعداد سے 5 زیادہ ہے۔ اگر سنترے کے باغ میں سنترے کے کل 150 درخت ہوں تب، اُفقی اور عمودی قطار میں درختوں کی تعداد معلوم کیجیے۔
درج ذیل فلو چارٹ (رواں خاکہ) کی مدد سے مثال حل کیجیے۔



4. ندیم، دانش سے 5 سال بڑا ہے۔ ان کی عمروں کے ضربی معکوس کا مجموعہ $\frac{1}{6}$ ہے۔ ان کی موجودہ عمریں معلوم کیجیے۔

5. سفیان کو ریاضی کی پہلی آزمائش میں حاصل کردہ مارکس سے دوسرے ٹسٹ میں 10 مارکس زیادہ حاصل ہوئے۔ دوسری آزمائش کے مارکس کا 5 گنا، پہلی آزمائش کے مارکس کا مربع ہے تو اس کے پہلی آزمائش کے مارکس معلوم کیجیے۔

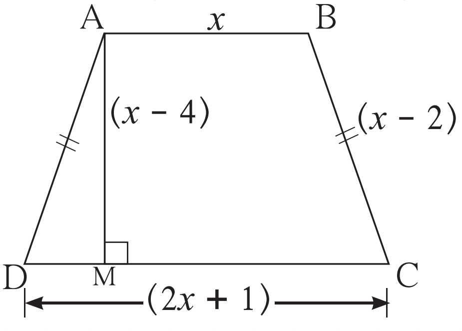
★6. محترم قاسم صاحب مٹی کے برتن بنانے کی گھریلو صنعت کے مالک ہیں۔ وہ ہر روز مخصوص تعداد میں برتن تیار کرتے ہیں۔ ہر برتن کے بنانے کی لاگت، بنائے گئے برتن کی تعداد کے 10 گنا سے 40 روپے زیادہ ہوتی ہے۔ اگر ایک دن کی برتن بنانے کی لاگت 600 روپے ہو تو ہر برتن بنانے کی لاگت اور ایک دن میں بنائے گئے برتنوں کی تعداد معلوم کیجیے۔

★7. ایک کشتی کو دریا کے بہاؤ کے مخالف سمت 36 کلومیٹر جا کر واپس آنے کے لیے ایک چکر کو 8 گھنٹے لگتے ہیں۔ ساکن پانی میں کشتی کی رفتار 12 کلومیٹر فی گھنٹا ہو تو دریا کے بہاؤ کی رفتار معلوم کیجیے۔

★8. ڈیوڈ کو ایک کام کرنے کے لیے شاہد سے 6 دن زیادہ لگتے ہیں۔ دونوں مل کر اس کام کو 4 دن میں مکمل کرتے ہیں تو اس کام کو مکمل کرنے کے لیے ہر ایک کو کتنے دن درکار ہوں گے؟

9. 460 کو ایک طبعی عدد سے تقسیم کرنے پر خارج قسمت، مقسوم علیہ کے 5 گنا سے 6 زیادہ حاصل ہوتا ہے اور باقی 1 رہتا ہے تو مقسوم علیہ اور خارج قسمت معلوم کیجیے۔

10. مقابل کی شکل میں ذوزنقہ □ABCD میں AB || CD اور رقبہ 33 مربع سم ہے تو شکل میں دی ہوئی معلومات کے مطابق چاروں اضلاع کی لمبائیاں معلوم کرنے کے لیے اگلے صفحے پر دیا ہوا عملی کام مکمل کیجیے۔



حل : □ABCD ایک ذوزنقہ ہے۔ AB || CD

$A(\square ABCD) = \quad (AB + CD) \times \boxed{}$

$\therefore\ 33 = \frac{1}{2}(x + 2x + 1) \times \boxed{}$

$\therefore\ \boxed{} = (3x + 1) \times \boxed{}$

$\therefore\ 3x^2 + \boxed{} - \boxed{} = 0$

$\therefore\ 3x\,(\,.\,.\,.\,.\,) + 10\,(\,.\,.\,.\,.\,) = 0$

$\therefore\ (3x + 10)\,(\,.\,.\,.\,.\,) = 0$

$\therefore\ (3x + 10) = 0$ یا $\boxed{} = 0$

$\therefore\ x = -\frac{10}{3}$ یا $x = \boxed{}$

لیکن لمبائی منفی نہیں ہوتی۔

$\therefore\ x \neq -\frac{10}{3}\ ,\quad \therefore\ x = \boxed{}$

AB = ... , CD = ... , AD = BC = ...

مجموعۂ سوالات 2

.1 درج ذیل سوالوں کے صحیح متبادل منتخب کیجیے۔

(1) درج ذیل میں سے کون سی مساواتیں مربعی ہیں؟

(A) $\frac{5}{x} - 3 = x^2$ (B) $x\,(x + 5) = 2$ (C) $n - 1 = 2n$ (D) $\frac{1}{x^2}\,(x + 2) = x$

(2) ذیل میں کون سی مساواتیں مربعی مساوات نہیں ہیں؟

(A) $x^2 + 4x = 11 + x^2$ (B) $x^2 = 4x$ (C) $5x^2 = 90$ (D) $2x - x^2 = x^2 + 5$

(3) مربعی مساوات $x^2 + kx + k = 0$ کے جذر حقیقی اور مساوی ہوں تو k کی قیمت درج ذیل میں سے کون سی ہوگی؟

(A) 0 (B) 4 (C) 0 یا 4 (D) 2

(4) مساوات $\sqrt{2}\,x^2 - 5x + \sqrt{2} = 0$ کے لیے ممیّز کی قیمت درج ذیل میں سے کون سی ہوگی؟

(A) −5 (B) 17 (C) $\sqrt{2}$ (D) $2\sqrt{2} - 5$

(5) ذیل میں سے کس مربعی مساوات کے جذر 3 اور 5 ہیں؟

(A) $x^2 - 15x + 8 = 0$ (B) $x^2 - 8x + 15 = 0$

(C) $x^2 + 3x + 5 = 0$ (D) $x^2 + 8x - 15 = 0$

(6) درج ذیل میں کس مربعی مساوات کے جذروں کا مجموعہ 5− ہے؟

(A) $3x^2 - 15x + 3 = 0$ (B) $x^2 - 5x + 3 = 0$

(C) $x^2 + 3x - 5 = 0$ (D) $3x^2 + 15x + 3 = 0$

(7) مربعی مساوات $\sqrt{5}\,m^2 - \sqrt{5}\,m + \sqrt{5} = 0$ کے لیے درج ذیل میں سے کون سا بیان درست ہوگا؟

(A) حقیقی اور غیر مساوی جذر (B) حقیقی اور مساوی جذر

(C) جذر غیر حقیقی عدد ہیں (D) تین جذر ہیں

(8) مربعی مساوات $x^2 + mx - 5 = 0$ کا ایک جذر 2 ہو تو m کی قیمت درج ذیل میں سے کون سی ہوگی؟

(A) −2 (B) $-\frac{1}{2}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) 2

2. مندرجہ ذیل میں کون سی مساوات مربعی مساوات ہیں؟

(1) $m^2 + 2m + 11 = 0$ (2) $x^2 - 2x + 5 = x^2$ (3) $(x + 2)^2 = 2x^2$

3. مندرجہ ذیل میں سے ہر مساوات کے لیے ممیّز کی قیمت معلوم کیجیے۔

(1) $2y^2 - y + 2 = 0$ (2) $5m^2 - m = 0$ (3) $\sqrt{5}x^2 - x - \sqrt{5} = 0$

4. مربعی مساوات $2x^2 + kx - 2 = 0$ کا ایک جذر -2 ہے تو k کی قیمت معلوم کیجیے۔

5. ایسے مربعی مساوات بنائیے جس کے جذر ذیل کے مطابق ہیں۔

(1) 10 اور -10 (2) $1-3\sqrt{5}$ اور $1+3\sqrt{5}$ (3) 0 اور 7

6. مندرجہ ذیل مربعی مساوات کے جذروں کی نوعیت طے کیجیے۔

(1) $3x^2 - 5x + 7 = 0$ (2) $\sqrt{3}x^2 + \sqrt{2}x - 2\sqrt{3} = 0$ (3) $m^2 - 2m + 1 = 0$

7. مندرجہ ذیل مربعی مساواتیں حل کیجیے۔

(1) $\frac{1}{x+5} = \frac{1}{x^2} \quad \dots (x \neq 0, x + 5 \neq 0)$ (2) $x^2 - \frac{3x}{10} - \frac{1}{10} = 0$ (3) $(2x + 3)^2 = 25$

(4) $m^2 + 5m + 5 = 0$ (5) $5m^2 + 2m + 1 = 0$ (6) $x^2 - 4x - 3 = 0$

8.★ مربعی مساوات $(m - 12)x^2 + 2(m - 12)x + 2 = 0$ کے جذر حقیقی اور مساوی ہوں تو m کی قیمت معلوم کیجیے۔

9. ایک مربعی مساوات کے دو جذروں کا مجموعہ 5 اور اس کے مکعبوں کا مجموعہ 35 ہے۔ وہ مربعی مساوات لکھیے۔

10.★ ایسی مربعی مساوات بنائیے کہ جس کے جذر $2x^2 + 2(p + q)x + p^2 + q^2 = 0$ اس مساوات کے جذروں کے مجموعے کا مربع اور فرق کا مربع ہو۔

11.★ مکند کے پاس ساگر کی بہ نسبت 50 روپے زیادہ ہے۔ ان کے پاس موجود رقموں کا حاصل ضرب 15000 ہو تو ہر ایک کے پاس کتنی رقم ہے؟

12.★ دو اعداد کے مربعوں کا فرق 120 ہے۔ چھوٹے عدد کا مربع، بڑے عدد کا دگنا ہے۔ وہ اعداد معلوم کیجیے۔

13.★ فردوس کو سالگرہ کے موقع پر 540 سنترے کچھ طلبہ میں مساوی طور پر تقسیم کرنا ہے۔ اگر 30 طلبہ زیادہ ہوتے تو ہر ایک کو 3 سنترے کم ملے ہوتے تو طلبہ کی تعداد معلوم کیجیے۔

14.★ تلویل کے کسان شری دِنیش کے مستطیل نما کھیت کی لمبائی، چوڑائی کے دگنا سے 10 میٹر زیادہ ہے۔ انھوں نے کھیت میں بارش کا پانی جمع کرنے کے لیے کھیت کی چوڑائی کا $\frac{1}{3}$ گنا ضلع کا مربع نما چھوٹا سا تالاب بنایا۔ اصل کھیت کا رقبہ، چھوٹے تالاب کے رقبے کا 20 گنا ہے تو اس کھیت کی لمبائی اور چوڑائی نیز چھوٹے تالاب کا ضلع معلوم کیجیے۔

15.★ ایک حوض دو نل کے ذریعے 2 گھنٹے میں مکمل بھرا جاتا ہے۔ صرف چھوٹے نل سے حوض کو بھرنے کے لیے درکار وقت، صرف بڑے نل کے ذریعے حوض بھرنے کے لیے درکار وقت سے 3 گھنٹا زیادہ لگتا ہے تو ہر نل سے حوض بھرنے کے لیے کتنا وقت درکار ہوگا؟

NHZJ42

□□□

3 حسابی تصاعد (Arithmetic Progression)

آیئے، سیکھیں۔

- تواتر
- حسابی تصاعد میں n واں رکن
- حسابی تصاعد
- حسابی تصاعد میں پہلے n ارکان کی جمع

آیئے، سمجھ لیں۔

تواتر (Sequence)

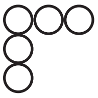
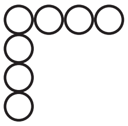
ہم $1, 2, 3, 4, \ldots$ اِن اعداد کو ترتیب سے لکھتے ہیں۔ یہ اعداد کی ایک ترتیب ہے۔ اس ترتیب میں کون سا عدد کس مقام پر ہے، یہ ہم بتا سکتے ہیں جیسے 13 عدد 13 ویں نمبر پر ہے۔ اعداد کی دوسری ترتیب $1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, \ldots.$ دیکھیے۔ اس میں اعداد ایک خاص ترتیب سے لکھے ہوئے ہیں۔ یہاں عدد $16 = 4^2$ چوتھے نمبر پر، جبکہ عدد $25 = 5^2$ 5 ویں مقام پر ہے۔ عدد $49 = 7^2$ ساتویں مقام پر ہے یعنی اس ترتیب میں کون سا عدد کس مقام پر ہے، ہم بتا سکتے ہیں۔

طبعی اعداد کے مطابق خاص ترتیب میں لکھے ہوئے اعداد کے گروہ کو **تواتر** کہتے ہیں۔

تواتر میں خاص مقام پر ایک خاص طبعی عدد لکھا جاتا ہے۔ ان طبعی اعداد کو $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots\ldots, a_n$ اس ترتیب میں لکھتے ہیں تو سمجھ میں آتا ہے کہ a_1 پہلا، a_2 دوسرا، .... اس طرح a_n یہ n واں عدد ہے۔ اعداد کے تواتر کو $f_1, f_2, f_3, \ldots.$ جیسے حروف سے بھی ظاہر کیا جاتا ہے۔ یہاں ایسا سمجھ میں آتا ہے کہ اس میں بھی ایک خاص ترتیب سے اعداد لکھے ہوئے ہیں۔

کسی جماعت میں بچے قواعد کے لیے میدان پر ایک قطار میں کھڑے ہوتے ہیں ان کی ترتیب طے ہوتی ہے۔ اس سے ان کا تواتر بنتا ہے۔ ہمیں تجربہ ہے کہ کچھ تواتر میں خاص ترتیبی سلسلہ ہوتا ہے۔

ذیل کے تواتر کو مکمل کیجیے۔

تواتر									
دائروں کی تعداد	1	3	5	7					

				ΔΔΔΔ Δ Δ Δ ΔΔΔΔ	ΔΔΔ Δ Δ ΔΔΔ	ΔΔ Δ ΔΔ	تواتر
				11	8	5	مثلثوں کی تعداد

اعداد کا اس طرح تیار ہونے والا تواتر دیکھیے۔ پہلے والے عدد پر کون سا عمل کریں گے کہ اگلا (بعد والا) عدد حاصل ہوتا ہے؟ اس اصول کو معلوم کیجیے۔ اس اُصول سے بعد کے تمام اعداد لکھ سکتے ہیں۔

آگے دیے ہوئے اعداد کا سلسلہ دیکھیے۔ $2,\ 11,\ -6,\ 0,\ 5,\ -37,\ 8,\ 2,\ 61$ →

یہاں $a_1 = 2$ ، $a_2 = 11$ ، $a_3 = -6$ ، .... ان اعداد کی فہرست بھی تواتر ہے۔ لیکن ایک خاص رکن اس مقام پر کیوں ہے، یہ بتا نہیں سکتے۔ اسی طرح ان ترتیب وار ارکان میں کیا تعلق ہے، یہ صحیح طور پر بتا نہیں سکتے۔

عام طور پر جس ترتیب سے بعد میں آنے والا رکن بتا سکے، اس کا ایک اصول ہوتا ہے۔ آیئے، اس ترتیب پر غور کریں۔

مثال: (i) $4, 8, 12, 16, \dots$ → (ii) $2, 4, 8, 16, 32, \dots$ (iii) $\frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \frac{1}{15}, \frac{1}{20}, \dots$

تواتر میں ارکان (Terms in sequence)

تواتر میں ترتیب وار ارکان $t_1,\ t_2,\ t_3, \dots\ t_n, \dots$ → اس طرح بھی ظاہر کرتے ہیں۔ عام طور پر تواتر کو $\{t_n\}$ لکھتے ہیں۔

تواتر غیر مختتم ہو تو اس وقت یہ فرض کر لیا جاتا ہے کہ ہر مثبت صحیح عدد n ، سے منسلک ایک عدد ہوتا ہے۔

عملی کام I : درج ذیل تواتر دیکھیے۔ اس میں ارکان کے نمبر t_1 ، t_2 ، t_3 ، . . . سے دِکھائیے۔

(1) $9,\ 15,\ 21,\ 27, \dots$ → یہاں $t_1 = 9$ ، $t_2 = 15$ ، $t_3 = 21$ ، . . .

(2) $7,\ 7,\ 7,\ 7, \dots$ → یہاں $t_1 = 7$ ، $t_2 = \boxed{}$ ، $t_3 = \boxed{}$ ، . . .

(3) $-2,\ -6,\ -10,\ -14, \dots$ → یہاں $t_1 = -2$ ، $t_2 = \boxed{}$ ، $t_3 = \boxed{}$ ، . . .

عملی کام II : ذیل میں کچھ تواتر دیے ہوئے ہیں۔ اُن کے ارکان میں اگر کوئی اُصول سمجھ میں آتا ہو تو وہ بتائیے۔ دو تواتر میں یکسانیت تلاش کیجیے۔ ان تواتر کے ارکان میں کچھ اُصول دِکھائی دیتا ہو تو اسے سمجھنے کے لیے ذیل میں دی ہوئی ترتیب کا مشاہدہ کیجیے اور اگلے صفحے پر دیے ہوئے خالی چوکون پُر کیجیے۔

(1) $1, 4, 7, 10, 13, \dots$ (2) $6, 12, 18, 24, \dots$ (3) $3, 3, 3, 3, \dots$

(4) $4, 16, 64, \dots$ (5) $-1, -1.5, -2, -2.5, \dots$ (6) $1^3, 2^3, 3^3, 4^3, \dots$

اس تواتر میں تعلق معلوم کیجیے۔ اس پر غور و خوض کیجیے۔

(1)
$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
1 \arrow[dr] & & 4 \arrow[dr] & & 7 \arrow[dr] & & 10 \arrow[dr] & & \boxed{} \arrow[dr] & & \boxed{}, \dots \\
& 1\enclose{circle}{+3} \arrow[ur] & & 4\enclose{circle}{+3} \arrow[ur] & & 7\enclose{circle}{+3} \arrow[ur] & & 10\enclose{circle}{+3} \arrow[ur] & & \boxed{} \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

(2)
$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
6 \arrow[dr] & & 12 \arrow[dr] & & 18 \arrow[dr] & & 24 \arrow[dr] & & \boxed{} \arrow[dr] & & \boxed{}, \dots \\
& 6+6 \arrow[ur] & & 12+6 \arrow[ur] & & 18+6 \arrow[ur] & & \boxed{} \arrow[ur] & & \boxed{} \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

(3)
$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
3 \arrow[dr] & & 3 \arrow[dr] & & 3 \arrow[dr] & & 3 \arrow[dr] & & \boxed{} \arrow[dr] & & \boxed{} \quad \dots \\
& 3+0 \arrow[ur] & & 3+0 \arrow[ur] & & 3+0 \arrow[ur] & & \boxed{} \arrow[ur] & & \boxed{} \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

(4)
$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
4 \arrow[dr] & & 16 \arrow[dr] & & 64 \arrow[dr] & & \boxed{} \arrow[dr] & & \boxed{} \arrow[dr] & & \boxed{}, \dots \\
& 4\times 4 \arrow[ur] & & 16\times 4 \arrow[ur] & & 64\times 4 \arrow[ur] & & \boxed{}\times 4 \arrow[ur] & & \boxed{}\times 4 \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

(5)
$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
-1 \arrow[dr] & & -1.5 \arrow[dr] & & -2 \arrow[dr] & & -2.5 \arrow[dr] & & \boxed{} \quad \dots \\
& (-1)+(-0.5) \arrow[ur] & & -1.5+(-0.5) \arrow[ur] & & -2+(-0.5) \arrow[ur] & & -2.5+(-0.5) \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

(6) $1^3, \quad 2^3, \quad 3^3, \quad \dots$

یہاں تواتر (1) ، (3) ، (5) میں پہلے والے رکن میں متعین عدد ملا کر بعد کا رکن ملتا ہے۔ یہ یکسانیت ہے۔ اس قسم کے تواتر کو حسابی تصاعد کہتے ہیں۔

اوپر دیا ہوا (4) کا تواتر حسابی تصاعد نہیں ہے۔ اس تواتر میں پہلے والے رکن کو ایک متعین عدد سے ضرب دے کر بعد والا رکن حاصل ہوتا ہے۔ اس قسم کے تواتر کو ہندسی تصاعد (Geometric Progression) کہتے ہیں۔

اوپر دیا ہوا (6) تواتر حسابی تصاعد نہیں ہے اور نہ ہی ہندسی تصاعد ہے۔

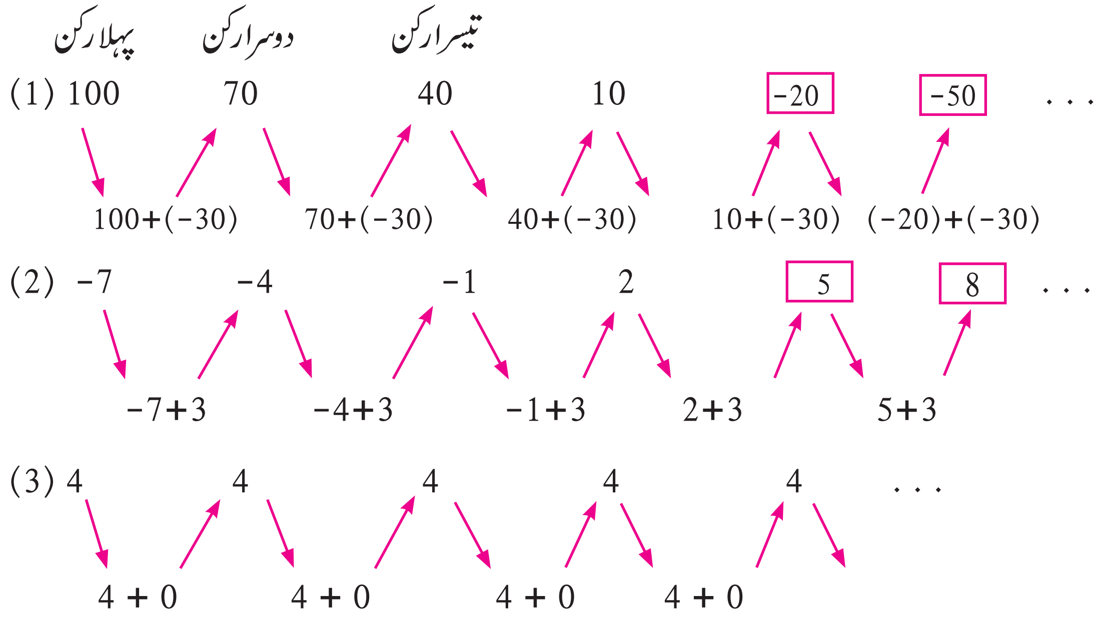
اس جماعت میں ہم حسابی تصاعد کا مطالعہ کرنے والے ہیں۔

حسابی تصاعد (Arithmetic Progression)

ذیل میں کچھ تواتر دیے ہوئے ہیں۔ ہر تواتر کے آگے آنے والے تین ارکان لکھیے۔

(1) 100, 70, 40, 10, . . . (2) −7, −4, −1, 2, . . . (3) 4, 4, 4, . . .

ذیل میں دیے ہوئے تواتر میں بعد میں آنے والے ارکان معلوم کرنے کے لیے کون سا عمل کیا گیا ہے۔ اسے سمجھ لیجیے۔



مذکورہ بالا اعداد کی ہر فہرست میں ہر رکن اُس سے پہلے والے رکن میں ایک متعین عدد ملانے سے حاصل ہوتا ہے۔ دو متواتر ارکان کے درمیان فرق مستقل ہے۔

مثال (1) میں فرق منفی ہے، (2) میں فرق مثبت ہے اور (3) میں فرق 0 ہے۔

دو متواتر ارکان میں فرق مستقل ہو تب اس کو مشترک فرق (common difference) کہتے ہیں۔ اس فرق کو ‘d’ حرف سے ظاہر کرتے ہیں۔

دیے ہوئے تواتر میں کوئی بھی دو متواتر ارکان کے درمیان فرق $(t_{n+1} - t_n)$ مستقل ہو تب اس تواتر کو حسابی تصاعد کہتے ہیں۔

ایسے تواتر میں $t_{n+1} - t_n = d$ مشترک فرق ہوتا ہے۔

حسابی تصاعد کا پہلا رکن a اور مشترک فرق d ہو، تب ،

$$t_1 = a, \quad t_2 = a + d, \quad t_3 = (a + d) + d = a + 2d$$

پہلا رکن a اور مشترک فرق d والا حسابی تصاعد ذیل میں دیا ہوا ہے۔

$$a, (a + d), (a + 2d), (a + 3d), \quad . . .$$

حسابی تصاعد سے متعلق کچھ مثالیں دیکھتے ہیں۔

مثال (1) عارف ہر ماہ 100 روپے کی بچت کرتا ہے۔ ایک سال میں ہر ماہ کے آخر میں کل بچت ذیل کے مطابق ہے۔

XII	XI	X	IX	VIII	VII	VI	V	IV	III	II	I	مہینہ
1200	1100	1000	900	800	700	600	500	400	300	200	100	بچت (₹)

ماہانہ کل بچت دِکھانے والے اعداد حسابی تصاعد میں ہیں۔

مثال (2) پرکاش نے اپنے دوست سے 10000 روپے قرض لیے اور ہر ماہ 1000 روپے کے حساب سے قرض کی ادائیگی طے ہوئی تو ہر ماہ کتنی رقم ادا کرنا باقی رہ جائے گی، وہ ذیل کے مطابق ہے۔

مہینے کا نمبر شمار	1	2	3	4	5	...	...	...	...
ادائیگی کے لیے باقی رقم ₹	10,000	9,000	8,000	7,000	...	...	2,000	1,000	0

مثال (3) 5 کا پہاڑہ یعنی 5 سے تقسیم پذیر اعداد ذیل میں دیے ہوئے ہیں۔

$\rightarrow$ 5, 10, 15, 20, . . . 50, 55, 60, . . . یہ حسابی تصاعد ہے۔

اوپر دی ہوئی مثال (1) اور مثال (2) محدود حسابی تصاعد ہے جبکہ مثال (3) لامحدود حسابی تصاعد ہے۔

اسے ذہن میں رکھیں۔

(1) اگر تواتر میں $(t_{n+1} - t_n)$ فرق مستقل ہو تب اس تواتر کو حسابی تصاعد کہتے ہیں۔

(2) حسابی تصاعد کے دو متواتر ارکان کے درمیان مستقل فرق کو d حرف سے ظاہر کرتے ہیں۔

(3) فرق 'd' مثبت، منفی یا صفر ہو سکتا ہے۔

(4) حسابی تصاعد میں پہلا رکن a اور مشترک فرق d ہو تب اس حسابی تصاعد کے ارکان $a, (a+d), (a+2d), \dots$ ہوتے ہیں۔

عملی کام : محدود حسابی تصاعد اور لامحدود حسابی تصاعد کی ایک ایک مثال لکھیے۔

حل کردہ مثالیں

مثال (1) ذیل میں کون سا تواتر حسابی تصاعد ہے، پہچانیے۔ اگر ہو تو اس کے بعد کے دو ارکان معلوم کیجیے۔

(1) 5, 12, 19, 26, . . .

(2) 2, −2, −6, −10, . . .

(3) 1, 1, 2, 2, 3, 3, . . .

(4)

حل (1): 5, 12, 19, 26, . . . اِس تواتر میں،

پہلا رکن = $t_1 = 5, \quad t_2 = 12, \quad t_3 = 19, \dots$

$t_2 - t_1 = 12 - 5 = 7$

$t_3 - t_2 = 19 - 12 = 7$

یہاں، پہلا رکن = 5 اور مشترک فرق = $d = 7$ ہے اور یہ مستقل ہے۔

∴ یہ تواتر حسابی تصاعد ہے۔ اس حسابی تصاعد کے بعد والے دو ارکان

$$26 + 7 = 33, \qquad 33 + 7 = 40$$

یہاں 33 اور 40 دیے ہوئے حسابی تصاعد کے بعد کے دو ارکان ہیں۔

(2) $2, -2, -6, -10, \ldots$ اس تواتر میں،

$t_1 = 2, \quad t_2 = -2, \quad t_3 = -6, \quad t_4 = -10 \ldots$

$t_2 - t_1 = -2 - 2 = -4$

$t_3 - t_2 = -6 - (-2) = -6 + 2 = -4$

$t_4 - t_3 = -10 - (-6) = -10 + 6 = -4$

اِس بنا پر ہر دو متواتر ارکان کے درمیان فرق، یعنی $t_{n+1} - t_n = -4$ ہے۔ اس لیے مشترک فرق $d = -4$ ہے۔ جو مستقل ہے۔ اس لیے یہ حسابی تصاعد ہے۔

اس حسابی تصاعد کے بعد والے دو ارکان $(-10) + (-4) = -14$ اور $(-14) + (-4) = -18$ ہیں۔

(3) تواتر $1, 1, 2, 2, 3, 3, \ldots$ → میں،

$t_1 = 1, \quad t_2 = 1, \quad t_3 = 2, \quad t_4 = 2, \quad t_5 = 3, \quad t_6 = 3 \ldots$

$t_2 - t_1 = 1 - 1 = 0, \qquad t_3 - t_2 = 2 - 1 = 1$

$t_4 - t_3 = 2 - 2 = 0, \qquad t_3 - t_2 \neq t_2 - t_1$

اس تواتر میں متواتر دو ارکان کے درمیان فرق مستقل نہیں ہے۔ اس لیے دیا ہوا تواتر حسابی تصاعد نہیں ہے۔

(4) تواتر $\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, \ldots$ میں،

$t_1 = \frac{3}{2}, \quad t_2 = \frac{1}{2}, t_3 = -\frac{1}{2}, \quad t_4 = -\frac{3}{2}$

$t_2 - t_1 = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -\frac{2}{2} = -1$

$t_3 - t_2 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -\frac{2}{2} = -1$

$t_4 - t_3 = -\frac{3}{2} - (-\frac{1}{2}) = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2} = -\frac{2}{2} = -1$

یہاں مشترک فرق $d = -1$ ہے جو مستقل ہے۔

∴ دیا ہوا تواتر حسابی تصاعد ہے۔

اس کے بعد والے دو ارکان معلوم کریں گے۔

$-\frac{3}{2} - 1 = -\frac{5}{2}, \qquad -\frac{5}{2} - 1 = -\frac{7}{2}$

∴ بعد کے دو ارکان $-\frac{5}{2}$ اور $-\frac{7}{2}$ ہیں۔

مثال (2) پہلا رکن a اور مشترک فرق d ذیل میں دیے ہوئے ہیں۔ اس کے مطابق پہلے چار ارکان معلوم کر کے حسابی تصاعد لکھیے۔

(1) $a = -3, \quad d = 4$ (2) $a = 200, \quad d = 7$

(3) $a = -1, \quad d = -\frac{1}{2}$ (4) $a = 8, \quad d = -5$

حل: (1) $a = -3, \quad d = 4$ اِس بنا پر

$a = t_1 = -3$

$t_2 = t_1 + d = -3 + 4 = 1$

$t_3 = t_2 + d = 1 + 4 = 5$

$t_4 = t_3 + d = 5 + 4 = 9$

$\therefore$ حسابی تصاعد، $\rightarrow -3, 1, 5, 9, \ldots$

(3) $a = -1, \quad d = -\frac{1}{2}$

$a = t_1 = -1$

$t_2 = t_1 + d = -1 + (-\frac{1}{2}) = -\frac{3}{2}$

$t_3 = t_2 + d = -\frac{3}{2} + (-\frac{1}{2}) = -\frac{4}{2} = -2$

$t_4 = t_3 + d = -2 + (-\frac{1}{2})$

$= -2 - \frac{1}{2} = -\frac{5}{2}$

$\therefore$ حسابی تصاعد، $-1, -\frac{3}{2}, -2, -\frac{5}{2}, \ldots$

(2) $a = 200, \quad d = 7$

$a = t_1 = 200$

$t_2 = t_1 + d = 200 + 7 = 207$

$t_3 = t_2 + d = 207 + 7 = 214$

$t_4 = t_3 + d = 214 + 7 = 221$

$\therefore$ حسابی تصاعد، $200, 207, 214, 221, \ldots$

(4) $a = 8, \quad d = -5$

$a = t_1 = 8$

$t_2 = t_1 + d = 8 + (-5) = 3$

$t_3 = t_2 + d = 3 + (-5) = -2$

$t_4 = t_3 + d = -2 + (-5) = -7$

$\therefore$ حسابی تصاعد، $8, 3, -2, -7, \ldots$

مشقی سیٹ 3.1

.1 درج ذیل میں سے کون سا تواتر حسابی تصاعد ہے؟ اگر حسابی تصاعد ہو تو ان میں سے ہر ایک کا مشترک فرق معلوم کیجیے۔

(1) $2, 4, 6, 8, \ldots$ (2) $2, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}, \ldots$ (3) $-10, -6, -2, 2, \ldots$

(4) $0.3, 0.33, .0333, \ldots$ (5) $0, -4, -8, -12, \ldots$ (6) $-\frac{1}{5}, -\frac{1}{5}, -\frac{1}{5}, \ldots$

(7) $3, 3 + \sqrt{2}, 3 + 2\sqrt{2}, 3 + 3\sqrt{2}, \ldots$ (8) $127, 132, 137, \ldots$

.2 اگر حسابی تصاعد کا پہلا رکن a اور مشترک فرق d ہو تب حسابی تصاعد لکھیے۔

(1) $a = 10, d = 5$ (2) $a = -3, d = 0$ (3) $a = -7, d = \frac{1}{2}$

(4) $a = -1.25, d = 3$ (5) $a = 6, d = -3$ (6) $a = -19, d = -4$

3. ذیل میں دیے ہوئے ہر حسابی تصاعد کا پہلا رکن اور مشترک فرق معلوم کیجیے۔

(1) $5, \ 1, -3, -7, \ . . .$ (2) $0.6, \ 0.9, \ 1.2, \ 1.5, \ . . .$

(3) $127, \ 135, \ 143, \ 151, \ . . .$ (4) $\frac{1}{4}, \frac{3}{4} \ \frac{5}{4}, \frac{7}{4}, . . .$

آیئے، غور کریں۔

- 5, 8, 11, 14, . . . کیا یہ حسابی تصاعد ہے؟ اگر ہے تو اس کا 100 واں رکن بتایئے۔ کیا اس تصاعد میں 92 ہے؟ کیا 61 ہے؟

آیئے، سمجھ لیں۔

حسابی تصاعد کا **n** واں رکن (n^{th} term of an A.P.)

تواتر 5, 8, 11, 14, . . . میں دو متواتر ارکان کے درمیان فرق 3 ہے۔ اس لیے یہ تواتر حسابی تصاعد ہے۔ اس میں پہلا رکن 5 ہے۔ 5 میں 3 ملانے سے 8 دوسرا رکن حاصل ہوتا ہے۔ اس طرح 100 واں رکن حاصل کرنے کے لیے کیا کرنا ہوگا؟

	پہلا رکن	دوسرا رکن	تیسرا رکن	. . .
عدد →	5,	5 + 3 = 8,	8 + 3 = 11,	. . .

اس طریقے سے 100 ویں رکن تک پہنچنے کے لیے بہت وقت درکار ہوگا۔ اس کے لیے کیا کوئی ضابطہ حاصل ہوگا؟ آیئے، دیکھتے ہیں۔

5	8	11	14	. . .	. . .	. . .	. . .
5	$5 + 1 \times 3$	$5 + 2 \times 3$	$5 + 3 \times 3$	. . .	$5 + (n - 1) \times 3$	$5 + n \times 3$	. . .
پہلا رکن t_1	دوسرا رکن t_2	تیسرا رکن t_3	چوتھا رکن t_4	. . .	n واں رکن t_n	$n + 1$ واں رکن $t_n + 1$	. . .

عام طور پر t_1، t_2، t_3، . . . اس حسابی تصاعد میں پہلا رکن a اور مشترک فرق d ہو تو،

$$t_1 = a$$

$$t_2 = t_1 + d = a + d = a + (2 - 1)\, d$$

$$t_3 = t_2 + d = a + d + d = a + 2d = a + (3 - 1)d$$

$$t_4 = t_3 + d \ = a + 2d + d = a + 3d = a + (4 - 1)d$$

$$t_n = a + (n - 1)\,d$$

یہ ضابطہ حاصل ہوتا ہے۔

اب اس ضابطے کا استعمال کر کے حسابی تصاعد $5, 8, 11, 14, \ldots$ کا 100 واں رکن معلوم کریں گے۔

یہاں $a = 5$ اور $d = 3$ ہے۔

$$t_n = a + (n - 1)d$$

$$\therefore \quad t_{100} = 5 + (100 - 1) \times 3$$

$$= 5 + 99 \times 3$$

$$= 5 + 297$$

$$= 302$$

اس لیے اس حسابی تصاعد کا 100 واں رکن 302 ہے۔

اب کیا عدد 61 اس تصاعد میں ہے؟ یہ جواب حاصل کرنے کے لیے اسی ضابطے کا استعمال کرتے ہیں۔

$$t_n = a + (n - 1)d$$

$$t_n = 5 + (n - 1) \times 3$$

اگر n واں رکن 61 ہو، یعنی t_n

$$61 = 5 + 3n - 3$$

$$= 3n + 2$$

$$\therefore \quad 3n = 59$$

$$\therefore \quad n = \frac{59}{3}$$

لیکن n مکمل عدد نہیں ہے۔

$\therefore$ 61 اس تصاعد میں نہیں ہے۔

آیئے، غور کریں۔

کبیر کی والدہ، اس کی ہر سالگرہ کے وقت اس کی اونچائی نوٹ کرتی ہیں۔ وہ ایک سال کا تھا تب اس کی اونچائی 70 سم تھی۔ 2 سال کی عمر کا تھا تب 80 سم اونچائی تھی۔ 3 سال کی عمر پر اونچائی 90 سم تھی۔ اُس کی خالہ جان دسویں جماعت میں پڑھتی تھی۔ اس نے کہا کبیر کی اونچائی ہر سال حسابی تصاعد کی صورت میں بڑھتی ہوئی دِکھائی دیتی ہے۔ اسے تسلیم کرتے ہوئے اس نے بتایا کہ کبیر جب 15 سال کی عمر میں دسویں میں داخل ہوگا تب اس کی اونچائی کتنی ہوگی؟ اسے تعجب ہوا۔ آپ بھی کبیر کی اونچائی حسابی تصاعد کی صورت میں بڑھتی ہے، اس بات کو تسلیم کرتے ہوئے 15 سال کی عمر میں اس کی اونچائی کتنی ہوگی، معلوم کیجیے۔

حل کردہ مثالیں

مثال (1) ذیل کے حسابی تصاعد کے لیے t_n معلوم کیجیے اور اس بنا پر اس تصاعد کا 30 واں رکن معلوم کیجیے۔

$$3,\ 8,\ 13,\ 18,\ \ldots$$

حل: (دیا ہوا حسابی تصاعد) $3,\ 8,\ 13,\ 18,\ \ldots$

یہاں $t_1 = 3,\ t_2 = 8,\ t_3 = 13,\ t_4 = 18, \ldots$

$$d = t_2 - t_1 = 8 - 3 = 5,\quad n = 30$$

ہمیں معلوم ہے کہ $t_n = a + (n - 1)\, d$

$$\therefore\ t_n = 3 + (n - 1) \times 5 \ldots (\because a = 3,\ d = 5)$$

$$\therefore\ t_n = 3 + 5n - 5$$

$$\therefore\ t_n = 5n - 2$$

$\therefore$ 30 واں رکن $= t_{30} = 5 \times 30 - 2$

$$= 150 - 2 = 148$$

مثال (2) درج ذیل حسابی تصاعد کا 560 کتنواں رکن ہے؟

$$2,\ 11,\ 20,\ 29,\ \ldots$$

حل: دیا ہوا حسابی تصاعد $2,\ 11,\ 20,\ 29, \ldots \rightarrow$

یہاں $a = 2$ ، $d = 11 - 2 = 9$

فرض کیجیے، اس تصاعد کا n واں رکن 560 ہے۔ $t_n = 560$

$$t_n = a + (n - 1)d$$

$$\therefore\ 560 = 2 + (n - 1) \times 9$$

$$= 2 + 9n - 9$$

$$\therefore\ 9n = 567$$

$$\therefore\ n = \frac{567}{9} = 63$$

$\therefore$ دیے ہوئے حسابی تصاعد کا 63 واں رکن 560 ہے۔

مثال (3) دیے ہوئے تواتر $5, 11, 17, 23, \ldots$ میں کیا 301 عدد ہے؟

حل: تواتر $5, 11, 17, 23, \ldots$ میں

$$t_1 = 5,\ t_2 = 11,\ t_3 = 17,\ t_4 = 23, \ldots$$

$$t_2 - t_1 = 11 - 5 = 6$$

$$t_3 - t_2 = 17 - 11 = 6$$

$\therefore$ یہ تواتر حسابی تصاعد ہے۔

اس تصاعد میں پہلا رکن $a = 5$ اور $d = 6$ ہے۔

فرض کیجیے، n واں رکن 301 ہے۔

$$t_n = a + (n - 1)\, d = 301$$

$$\therefore\ 301 = 5 + (n - 1) \times 6$$

$$= 5 + 6n - 6$$

$$\therefore\ 6n = 301 + 1 = 302$$

$\therefore\ n = \frac{302}{6}$ . . . (یہ مثبت صحیح عدد نہیں ہے۔)

اس بنا پر دیے ہوئے تواتر میں 301 عدد موجود نہیں ہے۔

مثال (4) 4 سے تقسیم ہونے والے دو ہندسی عدد کتنے ہیں؟

حل: 4 سے تقسیم پذیر دو ہندسی اعداد کی فہرست :

$$\rightarrow 12,\ 16,\ 20,\ 24,\ \ldots,\ 96$$

اس طرح یہ اعداد کتنے ہیں، ہم معلوم کریں گے۔

یہاں $t_n = 96$ ، $a = 12$ ، $d = 4$ اور $n = ?$

اس کی مدد سے ہم n کی قیمت معلوم کریں گے۔

$\therefore$ ضابطے کے مطابق ،

$$t_n = a + (n - 1)\, d$$

$$96 = 12 + (n - 1) \times 4$$

$$= 12 + 4n - 4$$

$$\therefore\ 4n = 88$$

$$\therefore\ n = 22$$

$\therefore$ 4 سے تقسیم پذیر دو ہندسی اعداد کی تعداد 22 ہے۔

مثال (5) اگر ایک حسابی تصاعد کا 10 واں رکن 25 اور 18 واں رکن 41 ہو تب اس تصاعد کا 38 واں رکن معلوم کیجیے۔ اسی طرح n واں رکن 99 ہو تب n کی قیمت معلوم کیجیے۔

حل : دیے ہوئے حسابی تصاعد میں $t_{10} = 25$ اور $t_{18} = 41$

ہمیں ضابطہ معلوم ہے کہ $t_n = a + (n-1)d$

$\therefore \quad t_{10} = a + (10-1)\,d$

$\therefore \quad 25 = a + 9d \qquad \ldots \text{(I)}$

اِس طرح، $t_{18} = a + (18-1)\,d$

$\therefore \quad 41 = a + 17d \qquad \ldots \text{(II)}$

$25 = a + 9d \qquad \ldots$ [(I) سے]

$\therefore \quad a = 25 - 9d$

یہ قیمت مساوات (II) میں رکھنے پر

$\therefore \quad a + 17d = 41 \qquad \ldots$ (مساوات II)

$\therefore \quad 25 - 9d + 17d = 41$

$\therefore \quad 8d = 41 - 25 = 16$

$\therefore \quad d = 2$

$d = 2$ مساوات I میں لکھنے پر،

$a + 9d = 25$

$\therefore \quad a + 9 \times 2 = 25$

$\therefore \quad a + 18 = 25$

$\therefore \quad a = 7$

اب، $t_n = a + (n-1)\,d$ ضابطہ لیں گے۔

$\therefore \; t_{38} = 7 + (38 - 1) \times 2$

$= 7 + 37 \times 2$

$= 7 + 74$

$= 81$

اب ، n واں رکن 99 ہو تب n کی قیمت معلوم کرنا ہے۔

$t_n = a + (n-1)\,d$

$99 = 7 + (n-1) \times 2$

$99 = 7 + 2n - 2$

$99 = 5 + 2n$

$\therefore \quad 2n = 94$

$\therefore \quad n = 47$

$\therefore$ دیے ہوئے تصاعد کا 38 واں رکن 81 ہے اور 47 واں رکن 99 ہے۔

مشق سیٹ 3.2

1. ذیل میں دیے ہوئے حسابی تصاعد کی مدد سے چوکونوں میں صحیح عدد لکھیے۔

(1) $1, 8, 15, 22, \dots$

یہاں $a = \square, \quad t_1 = \square, \quad t_2 = \square, \quad t_3 = \square, \dots$

$t_2 - t_1 = \square - \square = \square$

$t_3 - t_2 = \square - \square = \square, \quad \therefore \; d = \square$

(2) $3, 6, 9, 12, \dots$

یہاں $t_1 = \square, \quad t_2 = \square, \quad t_3 = \square, \quad t_4 = \square, \dots$

$t_2 - t_1 = \square, \quad t_3 - t_2 = \square, \quad \therefore \; d = \square$

(3) $-3, -8, -13, -18, \dots$

یہاں $t_1 = \square, \quad t_2 = \square, \quad t_3 = \square, \quad t_4 = \square, \dots$

$t_2 - t_1 = \square, \quad t_3 - t_2 = \square, \quad \therefore \; a = \square, \; d = \square$

(4) $70, 60, 50, 40, \dots$

یہاں ، $t_1 = \square, \quad t_2 = \square, \quad t_3 = \square, \dots$

$\therefore \; a = \square, \; d = \square$

2. ذیل میں دیا ہوا تواتر حسابی تصاعد ہے یا نہیں، طے کیجیے۔ اگر ہے تو اس حسابی تصاعد کا بیسواں رکن معلوم کیجیے۔

$-12, -5, 2, 9, 16, 23, 30, \dots$

3. حسابی تصاعد $12, 16, 20, 24, \dots \rightarrow$ کا 24 واں رکن معلوم کیجیے۔

4. ذیل میں دیے ہوئے حسابی تصاعد کا 19 واں رکن معلوم کیجیے۔

$7, 13, 19, 25, \dots$

5. ذیل میں دیے ہوئے حسابی تصاعد کا 27 واں رکن معلوم کیجیے۔

$9, 4, -1, -6, -11$

6. تین ہندسی طبعی اعداد کے سیٹ میں 5 سے تقسیم پذیر اعداد کتنے ہیں؟ انھیں معلوم کیجیے۔

7. ایک حسابی تصاعد کا 11 واں رکن 16 اور 21 واں رکن 29 ہے تو اس تصاعد کا 41 واں رکن معلوم کیجیے۔

8. حسابی تصاعد $11, 8, 5, 2, \dots \rightarrow$ میں -151 عدد کتنواں رکن ہے؟

9. 10 سے 250 تک کے طبعی اعداد میں سے کتنے اعداد 4 سے تقسیم پذیر ہیں؟

10. ایک حسابی تصاعد کا 17 واں رکن، 10 ویں رکن سے 7 زیادہ ہے تو مشترک فرق معلوم کیجیے۔

عقل مند اتالیق

ایک راجا تھا۔ اس نے اپنے بچوں یشونت راج اور گیتا دیوی کو گھڑ سواری سکھانے کے لیے بالترتیب تارا اور میرا نامی اتالیق کو مقرر کیا۔ ان دونوں کو سال بھر کتنی تنخواہ دی جائے، اُن سے پوچھا۔

تارا نے کہا، ”مجھے پہلے مہینے کی تنخواہ 100 سکے دیے جائیں اور بعد کے ہر مہینے میں 100 سکوں کا اضافہ کیا جائے۔“ میرا نے کہا، مجھے پہلے مہینے 10 سکے تنخواہ دیجیے اور بعد کے ہر مہینے میں قبل والے مہینے کی تنخواہ کے دُگنا تنخواہ دی جائے۔“

مہاراجا نے اسے منظور کر لیا۔ تین مہینے بعد یشونت راج نے اپنی بہن سے کہا، ”میری اتالیق تیری اتالیق سے زیادہ عقل مند محسوس ہوتی ہے، اس نے زیادہ تنخواہ مانگی ہے۔“ گیتا دیوی نے کہا، ”مجھے پہلے ایسا ہی محسوس ہوا لیکن میں نے میری اتالیق سے بھی پوچھا، ”آپ نے تنخواہ کم کیوں مانگی؟“ تب اس نے مسکراتے ہوئے کہا کہ آٹھ مہینے بعد دلچسپ واقعہ وقوع پذیر ہوگا۔ اس وقت دیکھنا۔ میں نے آٹھویں مہینے کی تنخواہ معلوم کی۔ آپ بھی معلوم کر کے دیکھیے۔“

مہینہ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
تارا کی تنخواہ	100	200	300	400	500	600	700	800	900	. . .	. . .	. . .
میرا کی تنخواہ	10	20	40	80	160	320	640	1280	2560	. . .	. . .	. . .

آپ یہ جدول مکمل کیجیے۔

تارا کی تنخواہ 100، 200، 300، 400، ... یہ حسابی تصاعد ہے۔ کیا آپ کی سمجھ میں آیا۔

$$t_1 = 100, \quad t_2 = 200,\ t_3 = 300, \ . . . \quad ; \quad t_2 - t_1 = 100 \ = d$$

یہاں مشترک فرق 100 ہے۔

میرا کی تنخواہ 10، 20، 40، 80، ... حسابی تصاعد نہیں ہے کیونکہ $20 - 10 = 10$ ، $40 - 20 = 20$ ، $80 - 40 = 40$ یعنی یہاں مشترک فرق d مستقل نہیں ہے حالانکہ اس تصاعد میں ہر رکن اس سے قبل کے رکن کے دُگنا ہوجاتا ہے۔

یہاں ، $$\frac{t_2}{t_1} = \frac{20}{10} = 2, \quad \frac{t_3}{t_2} = \frac{40}{20} = 2, \quad \frac{t_4}{t_3} = \frac{80}{40} = 2$$

اس لیے $\frac{t_{n+1}}{t_n}$ یعنی بعد کے رکن اور قبل کے رکن کی نسبت مساوی ہے۔ اس تصاعد کو ہندسی تصاعد کہتے ہیں۔ $\frac{t_{n+1}}{t_n}$ نسبت 1 سے زیادہ ہو تب ہندسی تصاعد حسابی تصاعد کی بہ نسبت تیزی سے بڑھتا ہے۔ اسے معلوم کیجیے۔

اگر نسبت 1 کی بہ نسبت کم ہو تو وہ تصاعد کس طرح بدلتا ہے، اسے بھی معلوم کیجیے۔ ہم ان میں سے صرف حسابی تصاعد کا مطالعہ کرنے والے ہیں۔ حسابی تصاعد میں n واں رکن کس طرح معلوم کرتے ہیں، اس کا مطالعہ کر چکے ہیں۔ اب پہلے n ارکان کی جمع کس طرح معلوم کریں، اس کا مطالعہ کریں گے۔

فوراً جمع

تین سو سال قبل کی بات ہے۔ جرمنی میں بیوٹنر (Buttner) نام کے ایک استاد کا یک معلّمی اسکول تھا۔ جوہان مارٹن بارٹیلس نام کا صرف ایک معاون مددگاران کے پاس تھا۔ اس کا کام بچوں کو حروفِ تہجی سکھانا اور انھیں لکھنے کے قابل بنانا تھا۔ بیوٹنر کا سخت نظم وضبط تھا۔ بیوٹنر ماسٹر کو کوئی کام پورا کرنا تھا۔ جماعت میں طلبہ شور وغل نہ کریں، اس لیے کام میں مشغول رکھنے کے لیے انھوں نے ان بچوں کو حساب دینے کا فیصلہ کیا۔ انھوں نے طلبہ سے کہا، 1 سے 100 تک اعداد سلیٹ پر لکھو اور ان کی جمع کرو۔ ماسٹر صاحب نے اپنا کام شروع کر دیا۔ بچے اعداد لکھنے لگے۔ پانچ ہی منٹ میں ایک سلیٹ نیچے رکھنے کی آواز آئی۔ انھوں نے کارل گاؤس کی طرف دیکھا اور پوچھا، یہ کیا؟ میں نے تجھے 1 سے 100 اعداد لکھنے کے لیے کہا، اُن کی جمع کرنے کے لیے بھی کہا، سلیٹ اُلٹ کر کیوں رکھ دی؟ کیا تمھیں کچھ کرنا نہیں ہے؟“

کارل گاؤس نے کہا، ”میں جمع کر چکا ہوں۔“

ماسٹر صاحب نے کہا، ”کیا! اتنی جلدی جمع کر لی؟ اعداد بھی نہیں لکھا ہوگا، جواب کتنا آیا؟“

کارل گاؤس نے کہا، ”پانچ ہزار پچاس۔“

ماسٹر صاحب حیرت زدہ رہ گئے اور پوچھا، ”کس طرح جمع کیا؟“

کارل گاؤس کا فوراً جمع کرنے کا طریقہ :

متواتر ترتیب سے اعداد	1	2	3	4	. . . .	100
	+	+	+	+		+
اُلٹ ترتیب سے اعداد	100	99	98	97	. . . .	1
جمع	101	101	101	101	. . . .	101

ہر جوڑی کے عددوں کی جمع 101 آتی ہے۔ یہ جمع 100 مرتبہ کی گئی یعنی 101 × 100 کا ضرب کیا۔ وہ 10100 آیا۔ یہاں 1 سے 100 تک اعداد کو دو مرتبہ لیا گیا ہے۔ اس لیے 10100 کا نصف کیا۔ وہ 5050 آیا۔ لہٰذا 1, 2, 3, ..., 100 اِن اعداد کی جمع 5050 ہے۔ ماسٹر صاحب نے اسے شاباشی دی۔

اب گاؤس کی جمع کرنے کی تکنیک کا استعمال کر کے حسابی تصاعد کے n ارکان کی جمع معلوم کرنے کا ضابطہ حاصل کریں گے۔

جوہان فریڈرِچ کارل گاؤس

30 اپریل 1777 - 23 فروری 1855

کارل گاؤس ایک عظیم جرمن ریاضی داں تھے۔ وہ براؤن سوائک میں ایک غیر تعلیم یافتہ خاندان میں پیدا ہوئے۔ بیوٹنر کے اسکول میں انھوں نے اپنی ذہانت کی جھلک دِکھائی۔ اسی دوران بیوٹنر کے معاون مددگار جوہان مارٹن بارٹیلس سے گاؤس کی دوستی ہوگئی۔ دونوں نے مل کر الجبرا پر ایک کتاب شائع کی۔ بارٹیلس نے گاؤس کی غیر معمولی ذہانت کو بہت سے لوگوں کے سامنے اُجاگر کیا۔

آئیے، سمجھ لیں۔

حسابی تصاعد کے پہلے n ارکان کی جمع (Sum of first n terms of an A.P.)

حسابی تصاعد $a,\ a+d,\ a+2d,\ a+3d,\ ...a+(n-1)d$

اس تصاعد میں پہلا رکن a ہے اور مشترک فرق d ہے۔ اس تصاعد میں پہلے n ارکان کی جمع S_n سے ظاہر کریں گے۔

$$S_n = [a] + [a+d] + \dots + [a+(n-2)d] + [a+(n-1)d]$$

اِن ارکان کو اُلٹی ترتیب میں لکھنے پر،

$$S_n = [a+(n-1)d] + [a+(n-2)d] + \dots + [a+d] + [a]$$

جمع کرنے پر،

$$2S_n = [a+a+(n-1)d] + [a+d+a+(n-2)d] + \dots + [a+(n-2)d+a+d] + [a+(n-1)d+a]$$

$2S_n = [2a+(n-1)d] + [2a+(n-1)d] + \dots + [2a+(n-1)d] \dots$ n مرتبہ

$$2S_n = n\,[2a+(n-1)d]$$

$S_n = \frac{n}{2}\,[2a+(n-1)d]$ یا $S_n = na+\frac{n(n-1)}{2}d$

مثال: حسابی تصاعد $14,\ 16,\ 18,\ ...$ کے پہلے 100 ارکان کی جمع معلوم کیجیے۔

یہاں $a = 14$ ، $d = 2$ ، $n = 100$

$$S_n = \frac{n}{2}\,[2a+(n-1)d]$$

$$\therefore\ S_{100} = \frac{100}{2}\,[2\times 14+(100-1)\times 2]$$

$$= 50\,[28 + 198]$$

$$= 50\times 226 = 11300$$

∴ دیے ہوئے حسابی تصاعد کے پہلے 100 ارکان کی جمع 11,300 ہے۔

اسے ذہن میں رکھیں۔

دیے ہوئے حسابی تصاعد کا پہلا رکن a اور مشترک فرق d ہو تب

$$t_n = a+(n-1)d$$

$$S_n = \frac{n}{2}\,[2a+(n-1)d] = na+\frac{n(n-1)}{2}d$$

حسابی تصاعد کے پہلے n ارکان کی جمع کا ایک اور ضابطہ معلوم کریں گے۔

$$a, a + d, a + 2d, a + 3d, . . . [a +(n - 1)d]$$

اس حسابی تصاعد میں، پہلا رکن $t_1 = a$ ہے اور n واں رکن $[a + (n - 1) d]$ ہے۔

اب، $S_n = \frac{n}{2}[\underline{a}+\underline{a+(n-1)d}]$

$\therefore \quad S_n = \frac{n}{2}[t_1 + t_n] = \frac{n}{2}$ [پہلا رکن + آخری رکن]

حل کردہ مثالیں

مثال (1) پہلے n طبعی اعداد کی جمع کیجیے۔

حل: پہلے n طبعی اعداد $1, 2, 3, . . . , n$ ہیں۔

یہاں $a = 1$، $d = 1$، n واں رکن $= n$

$$S_n = 1 + 2 + 3 + . . . + n$$

$S_n = \frac{n}{2}$ [پہلا رکن + آخری رکن]

$$= \frac{n}{2}[1 + n] \quad = \frac{n(n+1)}{2}$$

$\therefore$ پہلے n طبعی اعداد کی جمع $\frac{n(n+1)}{2}$ ہے۔

مثال (2) پہلے n جفت طبعی اعداد کی جمع کیجیے۔

حل: پہلے n جفت طبعی اعداد $\rightarrow 2, 4, 6, 8, . . . , 2n$ ہیں۔

$t_n =$ آخری رکن $= 2n$ ، $t_1 =$ پہلا رکن

طریقہ I

$$S_n = \frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$$
$$= \frac{n}{2}[2 \times 2+(n-1)2]$$
$$= \frac{n}{2}[4+2n-2]$$
$$= \frac{n}{2}[2 + 2n]$$
$$= \frac{n}{2} \times 2 (1 + n)$$
$$= n (1 + n) = n (n+1)$$

طریقہ II

$$S_n = 2 + 4 + 6 . . . + 2n$$
$$= 2(1 + 2 + 3 + ... + n)$$
$$= \frac{2[n(n+1)]}{2}$$
$$= n (1+ n)$$
$$= n (n+1)$$

طریقہ III

$$S_n = \frac{n}{2}[t_1 + t_n]$$
$$= \frac{n}{2}[2 + 2n]$$
$$= \frac{n}{2} \times 2 (1 + n)$$
$$= n (1+ n)$$
$$= n (n+1)$$

$\therefore$ پہلے n جفت طبعی اعداد کی جمع $n (n + 1)$ ہوتی ہے۔

مثال (3) پہلے n طاق طبعی اعداد کی جمع معلوم کیجیے۔

حل : پہلے n طاق طبعی اعداد

$$1,\ 3,\ 5,\ 7,\ \ldots,\ n(2-1)$$

$$a = t_1 = 1,\ t_n = (2n-1),\ d = 2$$

طریقہ I

$$S_n = \frac{n}{2}[t_1 + t_n]$$
$$= \frac{n}{2}[1 + (2n - 1)]$$
$$= \frac{n}{2}[1 + 2n - 1]$$
$$= \frac{n}{2} \times 2n$$
$$= n^2$$

طریقہ II

$$S_n = \frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$$
$$= \frac{n}{2}[2 \times 1 + (n-1) \times 2]$$
$$= \frac{n}{2}[2 + 2n - 2]$$
$$= \frac{n}{2} \times 2n$$
$$= n^2$$

طریقہ III

$$S_n = 1 + 3 + \ldots + (2n-1)$$
$$= (1 + 2 + 3 + \ldots + 2n)$$
$$- (2 + 4 + 6 + \ldots + 2n)$$
$$= \frac{2n(2n+1)}{2} - \frac{2n(n+1)}{2}$$
$$= (2n^2 + n) - (n^2 + n)$$
$$= n^2$$

اس لیے پہلے n طاق طبعی اعداد کا مجموعہ n^2 ہوتا ہے۔

مثال (4) : 1 سے 150 تک تمام طاق اعداد کی جمع کیجیے۔

حل : 1 سے 150 تک تمام طاق اعداد $1,\ 3,\ 5,\ 7,\ \ldots,\ 149$ یہ حسابی تصاعد ہے۔

یہاں $a = 1$، $d = 2$، پہلے 1 سے 150 تک طاق اعداد کتنے ہیں معلوم کریں گے یعنی n کی قیمت معلوم کریں گے۔

$$t_n = a + (n-1)d$$

$$149 = 1 + (n-1)2 \quad , \quad \therefore\ 149 = 1 + 2n - 2 \quad , \quad \therefore\ n = 75$$

اب $1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + 149$ ان 75 اعداد کا مجموعہ معلوم کریں گے۔

$$a = 1,\ d = 2,\ n = 75$$

طریقہ I

$$S_n = \frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$$
$$S_n = \boxed{}$$
$$S_n = \square \times \square$$
$$S_n = \square$$

طریقہ II

$$S_n = \frac{n}{2}[t_1 + t_n]$$
$$S_n = \frac{75}{2}[1 + 149]$$
$$S_n = \square \times \square$$
$$S_n = \square$$

مشقی سیٹ 3.3

1. ایک حسابی تصاعد کا پہلا رکن 6 اور مشترک فرق 3 ہے تو S_{27} معلوم کیجیے۔

$a = 6,\ d = 3,\ S_{27} = ?$

$S_n = \frac{n}{2}\,[\square + (n-1)\,d]$

$S_{27} = \frac{27}{2}\,[12 + (27-1)\,\square]$

$= \frac{27}{2} \times \square$

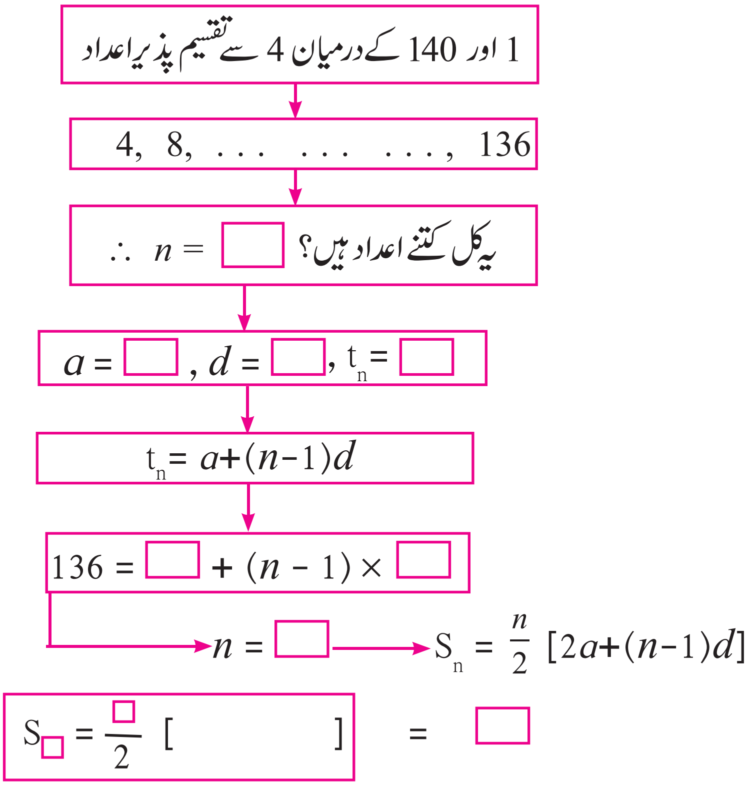
$= 27 \times 45 \quad = \square$

2. پہلے 123 جفت طبعی اعداد کی جمع کیجیے۔

3. 1 اور 350 کے درمیان تمام جفت اعداد کی جمع کیجیے۔

4. ایک حسابی تصاعد کا 19 واں رکن 52 اور 38 واں رکن 128 ہے۔ اس کے پہلے 56 ارکان کی جمع معلوم کیجیے۔

5. درج ذیل عملی کام مکمل کیجیے۔ 1 اور 140 کے درمیان، 4 سے تقسیم پذیر طبعی اعداد کتنے ہیں، معلوم کیجیے۔ ان اعداد کی جمع کیجیے۔ جمع کرنے کے لیے درج ذیل عمل کیجیے۔



$\therefore$ 1 اور 140 کے درمیان 4 سے تقسیم پذیر اعداد کی جمع $= \square$

★6. ایک حسابی تصاعد کے پہلے 55 ارکان کی جمع 3300 ہے، اس کا 28 واں رکن معلوم کیجیے۔

***7.** ایک حسابی تصاعد کے متواتر تین ارکان کی جمع 27 اور ان کا حاصل ضرب 504 ہے۔ وہ ارکان معلوم کیجیے۔ [فرض کیجیے تین مسلسل اعداد $a - d, \ a, \ a + d$ ہے]

***8.** ایک حسابی تصاعد کے متواتر چار ارکان کی جمع 12 ہے۔ ان چار متواتر ارکان میں سے تیسرے اور چوتھے ارکان کی جمع 14 ہے۔ وہ چار ارکان معلوم کیجیے۔ (فرض کیجیے، چار متواتر ارکان $a - d, \ a, \ a + d, \ a + 2d$ ہیں۔)

***9.** ایک حسابی تصاعد کا 9 واں رکن صفر ہے تو دِکھائیے کہ 29 واں رکن، 19 ویں رکن کا دگنا ہے۔

آئیے، سمجھ لیں۔

حسابی تصاعد کا اطلاق (Application of A.P.)

مثال (1) مکسر بنانے والی ایک کمپنی نے تیسرے سال 600 مکسر تیار کیے اور ساتویں سال 700 مکسر بنائے۔ ہر سال تیار ہونے والے مکسر کی تعداد میں مخصوص اضافہ ہو تو ذیل کی قیمتیں معلوم کیجیے۔

(i) پہلے سال کی پیداوار (ii) 10 ویں سال کی پیداوار (iii) پہلے سات سال میں کل پیداوار

حل : کمپنی ہر سال مخصوص مقدار (تعداد) میں مکسر کی پیداوار میں اضافہ کرتی ہے۔

اس بنا پر لگاتار ہر سال میں تیار کیے گئے مکسروں کی تعداد حسابی تصاعد میں ہوگی۔

(i) فرض کیجیے، کمپنی نے n ویں سال t_n مکسر کی پیداوار کی ہے۔ دی ہوئی معلومات کی بنا پر $t_3 = 600, \ t_7 = 700$

ہم جانتے ہیں کہ $t_n = a+(n-1)d$

$$t_3 = a+(3-1)d$$

$$= 600 = a+2d \qquad \ldots \text{(I)}$$

$$t_7 = a+(7-1)d$$

$$= a+6d = 700 \qquad \ldots \text{(II)}$$

$a+2d = 600 \ , \ \therefore \ a = 600 - 2d$ (مساوات (II) میں مساوات (I) رکھنے پر)

$$600 - 2d + 6d = 700$$

$$4d = 100 \ , \ \therefore \ d = 25$$

$$a+2d = 600 \ , \ \therefore \ a + 2 \times 25 = 600$$

$$a + 50 = 600 \ , \ \therefore \ a = 550$$

اس لیے پہلے سال کی پیداوار 550 ہوگی۔

(ii)

$$t_n = a+(n-1)d$$

$$t_{10} = 550+(10-1) \times 25$$

$$= 550 + 225 = 775$$

اس لیے 10 ویں سال پیداوار 775 ہوگی۔

(iii) پہلے 7 سال میں کل پیداوار کے لیے S_n کا ضابطہ استعمال کریں گے۔

$$S_n = \frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$$

$$\therefore\ S_7 = \frac{7}{2}[1100+150] = \frac{7}{2}[1250] = 7 \times 625 = 4375$$

اس لیے پہلے سات سالوں میں 4375 مکسر تیار کیے گئے۔

مثال (2) قرض لی گئی رقم 3,25,000 روپے واپس ادا کرنے کے لیے اَجۓ شرما پہلے مہینے میں 30,500 روپے دیتا ہے۔ اس کے بعد انھیں ہر ماہ پہلے مہینے میں ادا کی گئی رقم سے 1500 روپے کم دینے ہوتے ہیں تو قرض لی گئی رقم کو ادا کرنے کے لیے انھیں کتنے مہینے درکار ہوں گے؟

حل : فرض کیجیے قرض لی گئی رقم ادا کرنے کے لیے n مہینے درکار ہوں گے۔ 30,500 روپے میں سے ہر ماہ 1500 روپے کم دینے ہیں۔

$\therefore\ 30500,\ 30500 - 1500,\ 30500 - 2 \times 1500\ \ldots$ (ادا کی جانے والی رقمیں حسابی تصاعد میں ہوں گی)

پہلا رکن $= a = 30500,\ d = -1500,$ قرض لی گئی رقم $= S_n = 3,25,000$

$$S_n = \frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$$

$$325000 = \frac{n}{2}[2 \times 30500+(n-1) \times (-1500)]$$

$$= \frac{n}{2}[2 \times 30500 - 1500n + 1500]$$

$$325000 = 30500n - 750n^2 + 750n$$

$$\therefore\ 750n^2 - 31250n + 325000 = 0$$

$$\therefore\ 3n^2 - 125n + 1300 = 0 \quad \ldots$$ (طرفین کو 250 سے تقسیم کرنے پر)

$$\therefore\ 3n^2 - 60n - 65n + 1300 = 0$$

$$\therefore\ 3n(n-20) - 65(n-20) = 0$$

$$\therefore\ (n-20)(3n-65) = 0$$

$\therefore\ n - 20 = 0$ یا $3n - 65 = 0$

$n = 20$ یا $n = \frac{65}{3} = 21\frac{2}{3}$

n حسابی تصاعد کے ارکان کا نمبر شمار ہے اس لیے n طبعی عدد ہے۔

$$\therefore\ n \neq \frac{65}{3}, \qquad \therefore\ n = 20$$

(یا، 20 مہینے بعد $S_{20} = 3,25,000$ اس لیے اس وقت قرض لی گئی تمام رقم ادا کی جائے گی۔ اس کے بعد کی قسط کا خیال کرنا ضروری نہیں ہے۔)

∴ قرض لی گئی رقم، واپس ادا کرنے کے لیے 20 مہینے درکار ہوں گے۔

مثال (3) انور ہر ماہ مخصوص رقم کی بچت کرتا ہے۔ پہلے مہینے میں وہ 200 روپے کی بچت کرتا ہے۔ دوسرے مہینے میں 250 روپے، تیسرے مہینے میں 300 روپے بچت کرتا ہو تو بتائیے 1000 روپے کی بچت کوتھے نمبر کے مہینے میں ہوگی؟ اور اس مہینے میں اس کی کل کتنی بچت ہوئی ہوگی؟

حل : پہلے مہینے میں بچت 200 روپے، دوسرے مہینے میں بچت 250 روپے، . . .

اس طرح ہر ماہ ہونے والی بچت 200, 250, 300, . . . یہ حسابی تصاعد ہے۔

یہاں $a = 200$ ، $d = 50$ ، t_n کے ضابطے کی مدد سے پہلے n معلوم کریں گے۔ بعد میں S_n معلوم کریں گے۔

$$t_n = a+(n-1)d$$

$$= 200 + (n-1)50$$

$$= 200 + 50n - 50$$

$$\therefore \quad 1000 = 150 + 50n$$

$$150 + 50n = 1000$$

$$50n = 1000 - 150$$

$$50n = 850$$

$$\therefore \quad n = 17$$

اس لیے 1000 روپے کی بچت 17 ویں مہینے میں ہوگی۔

اب ، 17 مہینوں میں کل کتنی بچت ہوئی، معلوم کرتے ہیں۔

$$S_n = \frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$$

$$= \frac{17}{2}[2 \times 200+(17-1) \times 50]$$

$$= \frac{17}{2}[400 + 800]$$

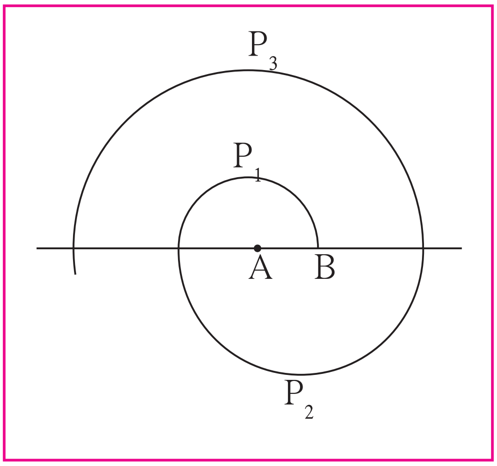
$$= \frac{17}{2}[1200]$$

$$= 17 \times 600$$

$$= 10200$$

اس لیے 17 مہینوں میں کل بچت 10200 روپے ہوگی۔

مثال (4) مندرجہ ذیل کے مطابق ایک خط پر A مرکز لے کر 0.5 سم نصف قطر کا P_1 نصف دائرہ بنایا گیا۔ وہ خط کو نقطہ B پر قطع کرتا ہے۔ اب B مرکز لے کر 1 سم نصف قطر کا P_2 نصف دائرہ خط کے مخالف پہلو میں بنایا گیا۔



اب دوبارہ نقطہ A کو مرکز مان کر 1.5 سم نصف قطر لے کر نصف دائرہ P_3 بنایا گیا۔ اسی طرح A اور B مرکز مان کر بالترتیب 0.5 سم، 1 سم، 1.5 سم، 2 سم، ...... نصف قطروں کے نصف دائرے بنانے پر ایک پیچ دار (spiral) شکل بن جاتی ہے تو اس ترتیب سے 13 نصف دائروں سے بنی پیچ دار شکل (منحنی) کی کل لمبائی کتنی ہوگی۔ $(\pi = \frac{22}{7})$

حل : فرض کیجیے A، B، A، B، ... اس ترتیب سے مرکز مان کر نکالے گئے نصف دائروں کے محیط کی لمبائی بالترتیب P_1، P_2، P_3، ... ہے۔

پہلے نصف محیط کا نصف قطر 0.5 سم ہے۔ دوسرے نصف محیط کا نصف قطر 1.0 سم، ... اس طرح اس معلومات کی بنا پر P_1، P_2، P_3، ... معلوم کریں گے۔

پہلے نصف محیط کی لمبائی $= P_1 = \pi r_1 = \pi \times \frac{1}{2} = \frac{\pi}{2}$

$$P_2 = \pi r_2 = \pi \times 1 = \pi$$

$$P_3 = \pi r_3 = \pi \times 1.5 = \frac{3}{2}\pi$$

P_1، P_2، P_3، ... یہ نصف محیط ہیں یعنی $\rightarrow \frac{1}{2}\pi, 1\pi, \frac{3}{2}\pi, \ldots$ یہ اعداد حسابی تصاعد ہیں۔

یہاں $a = \frac{1}{2}\pi$ ، $d = \frac{1}{2}\pi$ اس بنا پر S_{13} معلوم کریں گے۔

$$S_n = \frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$$

$$S_{13} = \frac{13}{2}\left[2 \times \frac{\pi}{2} + (13-1) \times \frac{\pi}{2}\right]$$

$$= \frac{13}{2}[\pi + 6\pi]$$

$$= \frac{13}{2} \times 7\pi$$

$$= \frac{13}{2} \times 7 \times \frac{22}{7}$$

$= 143$ سم

اس لیے 13 نصف دائروں سے بنی ہوئی پیچ دار شکل (منحنی) کی کل لمبائی 143 سم ہے۔

مثال (5) ایک گاؤں کی آبادی میں سال 2010ء میں 4000 لوگ خواندہ تھے۔ اس میں ہر سال 400 کا اضافہ ہوتا ہے تو سال 2020ء میں کتنے لوگ خواندہ ہوجائیں گے؟

حل :

سال	2010ء	2011ء	2012ء	. . .	2020ء
خواندہ لوگ	4000	4400	4800	. . .	

$a = 4000, \quad d = 400, \quad n = 11$

$$t_n = a+(n-1)d$$

$$= 4000 + (11-1)400$$

$$= 4000 + 4000$$

$$= 8000$$

سال 2020ء میں 8000 خواندہ لوگ ہوجائیں گے۔

مثال (6) محترمہ رقیہ شیخ کو 2015ء کی سالانہ تنخواہ 1,80,000 روپے کی نوکری ملی۔ آفس کی جانب سے انھیں سالانہ 10,000 روپے اضافہ دینا منظور کیا گیا تو بتائیے کس سن میں ان کی سالانہ تنخواہ 2,50,000 روپے ہوجائے گی؟

حل :

سال	پہلے سال (2015)	دوسرے سال (2016)	تیسرے سال (2017)	. . .
تنخواہ	[1,80,000]	[1,80,000 + 10,000]	. . .	. . .

$a = 1,80,000, \quad d = 10,000, \quad n = ? \quad t_n = 2,50,000$ روپے

$$t_n = a + (n - 1)\, d$$

$$\therefore \quad 250000 = 180000 + (n + 1) \times 10000$$

$$\therefore \quad (n + 1) \times 10000 = 70000$$

$$\therefore \quad n - 1 = 7$$

$$\therefore \quad n = 8$$

∴ 8 ویں سال یعنی 2023ء میں ان کی تنخواہ 2,50,000 روپے ہوجائے گی۔

مشقی سیٹ 3.4

.1 صائمہ نے 1 جنوری 2016 کو طے کیا کہ وہ آج 10 روپے، دوسرے دن 11 روپے، تیسرے دن 12 روپے اس طرح بچت کرتی رہے گی تو بتائیے 31 دسمبر 2016 تک اس کی کل کتنی بچت ہوئی؟

.2 ایک صاحب خانہ نے 8000 روپے بطور قرض لیا اور اس پر 1360 روپے سود ادا کرنا قبول کیا۔ ہر ایک قسط پہلی والی قسط سے 40 روپے کم دے کر کل 12 ماہانہ قسطوں میں رقم ادا کی تو اس نے پہلی قسط اور آخری قسط کتنی ادا کی تھی؟

.3 سچن نے قومی بچت سرٹیفکیٹ میں پہلے سال 5000 روپے، دوسرے سال 7000 روپے، تیسرے سال 9000 روپے؛ اس طرح سرمایہ کاری کی تو 12 سال میں اس نے کل کتنی سرمایہ کاری کی؟

.4 ایک تماشہ گاہ (تھیٹر) میں کرسیوں کی کل 27 قطاریں ہیں۔ پہلی قطار میں 20 کرسیاں ہیں، دوسرے قطار میں 22 کرسیاں، تیسری قطار میں 24 کرسیاں ہیں تو 15 ویں قطار میں کل کتنی کرسیاں ہوں گی اور تھیٹر میں کل کتنی کرسیاں ہیں؟

.5 کارگل میں ایک ہفتے کے پیر سے سنیچر تک کا درجۂ حرارت نوٹ کیا گیا۔ وہ درجۂ حرارت حسابی تصاعد میں ہے۔ پیر اور سنیچر کے درجۂ حرارت کا مجموعہ، منگل اور سنیچر کے درجۂ حرارت کے مجموعے سے 5° سیلسی اَس زیادہ ہے۔ اگر بدھ کا درجۂ حرارت -30° سیلسی اَس ہو تو ہر روز کا درجۂ حرارت معلوم کیجیے۔

.6 ’عالمی یومِ ماحولیات‘ کے موقع پر ایک اسکول کے میدان میں مثلثی شکل میں درخت لگانے کا پروگرام ترتیب دیا گیا۔ پہلی قطار میں ایک درخت، دوسری قطار میں 2 درخت، تیسری قطار میں 3 درخت اور اسی طرح آگے بھی۔ اگر کل 25 قطاریں ہوں تو درختوں کی کل تعداد معلوم کیجیے۔

مجموعۂ سوالات 3

.1 درج ذیل متبادل میں سے درست جواب تلاش کیجیے۔

(1) تواتر $-10, -6, -2, 2, \ldots \rightarrow$ .... ہے۔

(A) حسابی تصاعد ہے کیونکہ $d = -16$ (B) حسابی تصاعد ہے کیونکہ $d = 4$

(C) حسابی تصاعد ہے کیونکہ $d = -4$ (D) حسابی تصاعد نہیں ہے۔

(2) ایسا حسابی تصاعد جس کا پہلا رکن -2 اور مشترک فرق -2 ہے اس کے پہلے چار ارکان .... ہیں۔

(A) -2, 0, 2, 4 (B) -2, 4, -8, 16

(C) -2, -4, -6, -8 (D) -2, -4, -8, -16

(3) پہلے 30 طبعی اعداد کی جمع درج ذیل میں سے کیا ہے؟

(A) 464 (B) 465 (C) 462 (D) 461

(4) دیے ہوئے حسابی تصاعد میں $t_n = 4, n = 7, d = -4$ ہو تو $a = \ldots$

(A) 6 (B) 7 (C) 20 (D) 28

(5) ایک حسابی تصاعد کے لیے $a = 3.5$، $d = 0$، $n = 101$ ہو تو $t_n = \ldots\ldots\ldots$

(A) 0 (B) 3.5 (C) 103.5 (D) 104.5

(6) ایک حسابی تصاعد کے پہلے دو ارکان –3 اور 4 ہیں تو 21 واں رکن .... ہے۔

(A) –143 (B) 143 (C) 137 (D) 17

(7) اگر ایک حسابی تصاعد کے لیے $d = 5$ ہو تو $t_{18} - t_{13} = \ldots\ldots\ldots$

(A) 5 (B) 20 (C) 25 (D) 30

(8) 3 کے پہلے 5 ضعف کی جمع .... ہے۔

(A) 45 (B) 55 (C) 15 (D) 75

(9) حسابی تصاعد $15, 10, 5, \ldots$ کے پہلے 10 ارکان کی جمع .... ہے۔

(A) –75 (B) –125 (C) 75 (D) 125

(10) ایک حسابی تصاعد کا پہلا رکن 1 اور n واں رکن 20 ہے۔ اگر $S_n = 399$ ہو تو $n = \ldots\ldots\ldots$

(A) 42 (B) 38 (C) 21 (D) 19

2. حسابی تصاعد $-11, -8, -5, \ldots, 49$ کا آخر سے چوتھا رکن معلوم کیجیے۔

3. ایک حسابی تصاعد کا 10 واں رکن 46 ہے۔ 5 ویں اور 7 ویں ارکان کی جمع 52 ہے تو وہ حسابی تصاعد لکھیے۔

4. ایک حسابی تصاعد کا چوتھا رکن –15 اور 9 واں رکن –30 ہے تو پہلے 10 ارکان کی جمع معلوم کیجیے۔

5. دو حسابی تصاعد $9, 7, 5, \ldots$ → اور $24, 21, 18, \ldots$ → اس طرح دیے ہوئے ہیں۔ اگر ان دو حسابی تصاعد کا n واں رکن مساوی ہو تو n کی قیمت معلوم کیجیے اور n واں رکن بھی معلوم کیجیے۔

6. اگر ایک حسابی تصاعد کے تیسرے اور آٹھویں رکن کی جمع 7 ہو اور ساتویں اور 14 ویں ارکان کی جمع –3 ہو تو 10 واں رکن معلوم کیجیے۔

7. ایک حسابی تصاعد کا پہلا رکن –5 اور آخری رکن 45 ہے۔ اگر ان تمام ارکان کی جمع 120 ہو تو وہ کتنے ارکان ہیں؟ اور ان کا مشترک فرق معلوم کیجیے۔

.8 1 سے n تک طبعی اعداد کی جمع 36 ہو تو n کی قیمت معلوم کیجیے۔

.9 عدد 207 کے تین حصے اس طرح کیجیے کہ وہ اعداد حسابی تصاعد میں ہوں اور دونوں چھوٹے حصوں کا حاصل ضرب 4623 ہو۔

.10 ایک حسابی تصاعد میں 37 ارکان ہیں۔ وسط کے تین ارکان کی جمع 225 ہے اور آخر کے تین ارکان کی جمع 429 ہے۔ وہ حسابی تصاعد لکھیے۔

.11★ ''ایک حسابی تصاعد کا پہلا رکن a ہے۔ دوسرا رکن b ہے اور تیسرا رکن c ہے تو اس حسابی تصاعد کے ان تینوں ارکان کی جمع $\frac{(a+c)(b+c-2a)}{2(b-a)}$ ہے۔'' ثابت کیجیے۔

.12★ اگر کسی حسابی تصاعد (A.P.) میں پہلے p ارکان کی جمع اور پہلے q ارکان کی جمع مساوی ہو تو دِکھائیے کہ پہلے $(p + q)$ ارکان کی جمع صفر ہوتی ہے۔ $(p \neq q)$

.13★ اگر ایک حسابی تصاعد کے m ویں رکن کا m گنا اور n ویں رکن کا n گنا مساوی ہوں تب دِکھائیے کہ حسابی تصاعد کا $(m + n)$ واں رکن صفر ہے۔

.14 تصدیق کیجیے کہ 1000 روپے کی رقم 10% مفرد سود کی شرح سے سرمایہ کاری کی گئی ہو تو ہر سال کے آخر میں حاصل ہونے والی رقم حسابی تصاعد میں ہوگی۔ اگر وہ حسابی تصاعد ہو تو 20 سال بعد حاصل ہونے والا سود معلوم کیجیے۔ اس کے لیے درج ذیل عملی کام کیجیے۔

مفرد سود $= \frac{P \times R \times N}{100}$

1 سال بعد حاصل ہونے والا سود $= \frac{1000 \times 10 \times 1}{100} = \square$

2 سال بعد حاصل ہونے والا سود $= \frac{1000 \times 10 \times 2}{100} = \square$

3 سال بعد حاصل ہونے والا سود $= \frac{\square \times \square \times \square}{100} = 300$

اس طرح 4، 5، 6 سال بعد حاصل ہونے والا سود بالترتیب 400، $\square$، $\square$ ہوگا۔

ان اعداد کی بنا پر $a = \square$ اور $d = \square$

20 سال بعد حاصل ہونے والا سود،

$$t_n = a + (n-1)d$$

$$t_{20} = \square + (20-1)\square$$

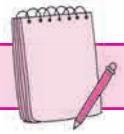
$$t_{20} = \square$$

$\therefore$ 20 سال بعد حاصل ہونے والا سود $= \square$

NI9F5P

4

معاشی منصوبہ بندی (Financial planning)



آئیے، سیکھیں۔

- جی ایس ٹی کا تعارف
- ٹیکس اِنوائس
- جی ایس ٹی کی تحسیب اور اِن پٹ ٹیکس کریڈٹ
- شیئرس، میچول فنڈ اور SIP

آئیے، بحث کریں۔

معلّمہ : پیارے بچو! ہمارے ملک میں تجارت کے لیے ٹیکس کا کون سا نظام جاری ہے؟

عارف : ہمارے ملک میں ’جی ایس ٹی‘ یعنی اشیا اور خدمات ٹیکس نامی محصولاتی نظام جاری ہے۔

معلّمہ : شاباش! اس کے بارے میں آپ کو کیا کیا معلوم ہے؟

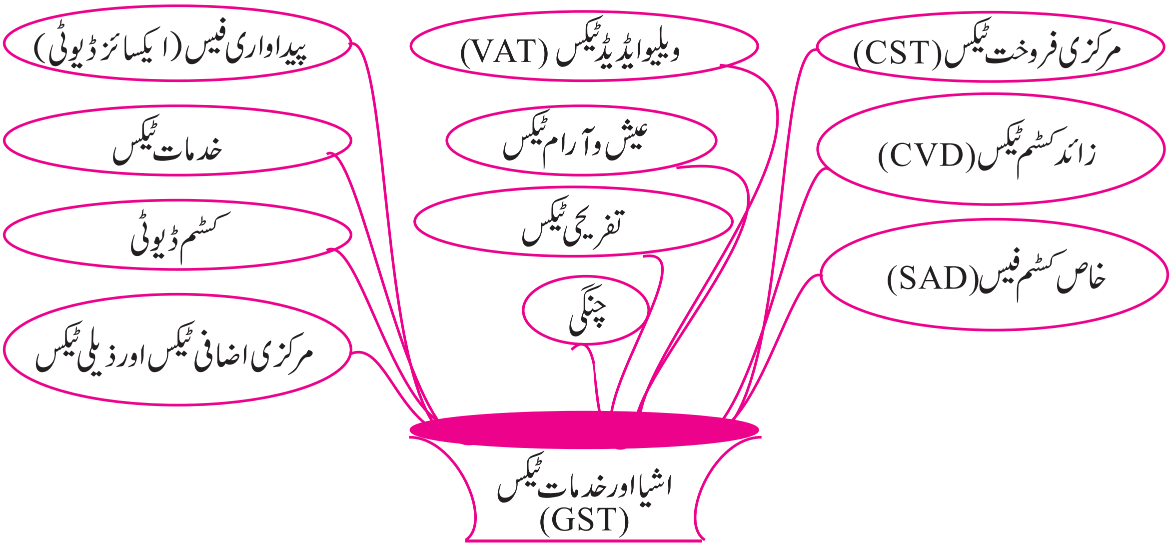
ریحان : GST یعنی Goods and Services Tax

عائشہ : پورے ملک میں صرف ایک ٹیکس کا نظام روبہ عمل آیا ہے۔

معلّمہ : بالکل صحیح، اس سے قبل مختلف ریاستوں میں مختلف ٹیکس مختلف اوقات میں دینے پڑتے تھے۔ اس سے قبل کے ٹیکسوں میں سے کون سے ٹیکس ’اشیا اور خدمات ٹیکس‘ میں شامل کیے گئے ہیں، انھیں ذیل میں دی ہوئی تصویر دیکھ کر بتائیے۔

شفیق : پیداوار فیس، سرحد فیس، VAT، تفریحی ٹیکس، مرکزی فروخت ٹیکس (CST)، خدمات ٹیکس، چنگی وغیرہ۔

معلّمہ : یہ تمام ٹیکس رد کر کے اب صرف ’اشیا اور خدمات‘ یہی ایک ٹیکس خرید و فروخت پر محسوب کیا جاتا ہے۔ اس لیے کہتے ہیں، ’ایک ملک، ایک ٹیکس، ایک بازار‘۔ محصول کا یہ نظام 1 جولائی 2017 سے روبہ عمل آیا ہے۔



آئیے، سمجھ لیں۔

ٹیکس اِنوائس Tax Invoice

اشیا کی خریدی کا ٹیکس انوائس (نمونہ)

SUPPLIER : A to Z SWEET MART **GSTIN :27ABCDE1234H1Z5**
143, Shivaji Rasta, Mumbai : 400001 Maharashtra
Mob. No. 92636 92111 email : atoz@gmail.com
Invoice No. GST/110 Invoice Date: 31-Jul-2017

S. No.	HSN code	Name of Product	Rate	Quantity	Taxable Amount	CGST		SGST		Total
						Rate	Tax	Rate	Tax	Rs.
1	210690	پیڑے	₹ 400 فی کلو	500 گرام	200.00	2.5%	5.00	2.5%	5.00	210.00
2	210691	چاکلیٹ	₹ 80	1 لاڈی	80.00	14%	11.20	14%	11.20	102.40
3	2105	آئس کریم	₹ 200	1 پیکٹ (500 گرام)	200.00	9%	18.00	9%	18.00	236.00
4	1905	بریڈ	₹ 35	1 پیک	35.00	0%	0.00	0%	0.00	35.00
5	210690	اچار	₹ 500 فی کلو	250 گرام	125.00	6%	7.50	6%	7.50	140.00
					کل رقم		41.70		41.70	723.40

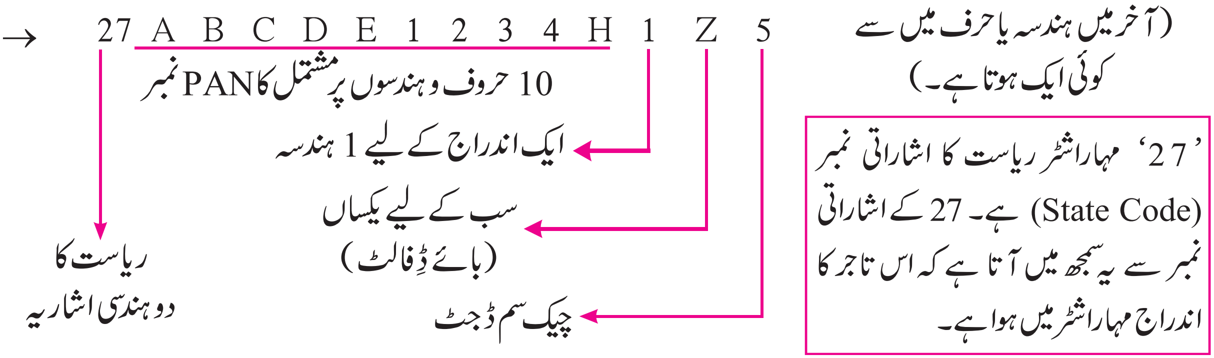
ولی : ہمیں تو اس بل میں کچھ نئے الفاظ دِکھائی دے رہے ہیں۔ اُن کا مطلب بتائیے۔

معلّمہ : **CGST** اور **SGST** یہ GST کے دو حصے ہیں۔ CGST یعنی **C**entral **G**oods and **S**ervices **T**ax یعنی **مرکزی اشیا اور خدمات ٹیکس** ۔ یہ ٹیکس مرکزی حکومت کے پاس جمع ہوتا ہے۔ **SGST** یعنی **S**tate **G**oods & **S**ervices **T**ax یعنی **ریاستی اشیا اور خدمات ٹیکس**۔ یہ ریاستی حکومت کے پاس جمع ہوتا ہے۔

رعنا : ٹیکس اِنوائس کے اوپر دائیں کونے میں ہندسے اور حروف کی ایک بڑی لائن دِکھائی دیتی ہے۔ وہ کیا ہے؟

معلّمہ : یہ GSTIN ہے یعنی تاجروں کا شناختی نمبر (GSTIN - GST Identification Number)۔ جس تاجر نے گزشتہ مالیاتی سال میں 20 لاکھ روپے سے زائد کا کاروبار/ لین دین کیا ہے، اسے یہ نمبر لینا لازمی ہے۔ PAN میں جس طرح 10 حرفی ہندسی عدد ہوتا ہے، ویسے ہی ہر تاجر کو دیے ہوئے GSTIN میں 15 حرفی ہندسی عدد ہوتا ہے۔ اس پندرہ حرفی ہندسی عدد میں اس تاجر کے PAN کا 10 حرفی ہندسی عدد شامل ہوتا ہے۔

مثلاً :→



‘27’ مہاراشٹر ریاست کا اشاراتی نمبر (State Code) ہے۔ 27 کے اشاراتی نمبر سے یہ سمجھ میں آتا ہے کہ اس تاجر کا اندراج مہاراشٹر میں ہوا ہے۔

(چیک سم ڈجٹ یعنی GST کی ویب سائٹ پر GSTIN لکھتے ہی یہ سمجھ میں آتا ہے کہ یہ نمبر قابلِ قبول ہے یا نہیں۔)

جویریہ : اِنوائس میں HSN کوڈ، بھی تو لکھا ہوا ہے۔

معلّمہ : HSN کوڈ یعنی اشیا کی جماعت بندی میں مخصوص نمبر ہوتا ہے۔ ٹیکس اِنوائس میں اس کو شامل کرنا ہوتا ہے۔ HSN یعنی Harmonized System of Nomenclature

جعفر : ٹیکس اِنوائس میں دکان کا نام، پتا، تاریخ، اِنوائس نمبر، موبائل نمبر اور ای-میل آئی ڈی بھی لکھا ہوا ہے۔

معلّمہ : اب اس اِنوائس میں اشیا اور خدمات ٹیکس کی تحسیب کیسے کی جاتی ہے، اسے سمجھیں گے۔ اس کے لیے ذیل کے دیے ہوئے جملوں میں خالی چوکون پُر کیجیے۔ اِنوائس میں پیڑے کا نرخ 400 روپے فی کلوگرام ہے۔ آدھا کلوگرام پیڑے خریدے گئے ہیں۔ اس کی قیمت 200 روپے ہے۔

- پیڑے پر مرکزی ٹیکس 2.5% کی شرح سے ☐ روپے، اسی طرح ریاستی ٹیکس ☐ شرح سے 5 روپے۔
- اس کی مدد سے پیڑے پر اشیا اور خدمات ٹیکس کی شرح 5% = 2.5% + 2.5% اور کل ٹیکس 10 روپے۔
- اسی طرح چاکلیٹ پر اشیا اور خدمات ٹیکس کی شرح ٪ ☐ ہے۔ لہٰذا اس پر کل ٹیکس ☐ روپے۔
- آئس کریم پر اشیا اور خدمات ٹیکس کی شرح ٪ ☐ ہے۔ اس لیے آئس کریم کی قیمت ☐ روپے۔
- اچار پر مرکز کی شرح ٪ ☐ اور ریاست کی شرح ٪ ☐، کل ملا کر اشیا-خدمات ٹیکس کی شرح ٪ ☐ ہے۔

عادل : بریڈ پر ٹیکس کی شرح 0% ہے۔ اسی طرح مرکز اور ریاست کے ٹیکس کی شرح مساوی ہے۔

ناہید : اشیا کے مطابق ٹیکس کی شرحیں مختلف ہیں جیسے 0%، 5%، 12%، 18% اور 28%

معلّمہ : ہر شے پر ٹیکس کی شرح حکومت طے کرتی ہے۔ اب خدمات کی اِنوائس کا ایک نمونہ دیکھیں گے۔

دی ہوئی معلومات کی مدد سے خالی جگہ پُر کر کے خدمات ٹیکس اِنوائس مکمل کیجیے۔

خدمات مہیا کرنے کا ٹیکس اِنوائس (نمونہ)

Aahar Soneri, Khed Shivapur, Pune **Invoice No. 58**

Mob. No. 7588580000 email - ahar.khed@yahoo.com

GSTIN : 27 AAAAA5555B1ZA **Invoice Date : 25-Dec-2017**

S A Code (SAC)	Food items	Qty	Rate (in Rs.)	Taxable amount	CGST		SGST	
9963	Coffee	1	20	20.00	2.5%	₹ 0.50	2.5%	. . .
9963	Masala Tea	1	10	10.00	. . . .	. . .	2.5%	. . .
9963	Masala Dosa	2	60	. . . .	2.5%	. . .	. . .	. . .
			Total	. . .		. . .		. . .

Grand Total = Rs. ________

معلّمہ : اشیا اور خدمات، اِن دونوں بِلوں کا بغور مطالعہ کر کے دونوں بِلوں کے کوڈ میں فرق معلوم کیجیے۔

پرویز : اشیا کی بل پر HSN کوڈ دیا ہوا ہے لیکن ہوٹل کے بل پر SAC کوڈ دیا ہوا ہے۔

معلّمہ : SAC یعنی خدمات کی جماعت بندی میں مخصوص نمبر ہوتا ہے۔ اسے **SAC** یعنی **S**ervice **A**ccounting **C**ode کہتے ہیں۔

ذیل کی جدول میں کچھ اشیا، خدمات اور ان پر محصول ٹیکس کی شرحیں بطور نمونہ دی ہوئی ہیں۔

نمبر شمار	قسم	ٹیکس کی شرح	اشیا اور خدمات کی اقسام
I	صفر والی (Nil rated)	0%	**اشیا** – اناج کے ساتھ زندگی کے لازمی اشیا، سبزی ترکاری، پھل، دودھ، نمک، مٹی کے برتن وغیرہ۔ **خدمات** – امدادِ باہمی اداروں کی سرگرمیاں، پانی کا نقل وحمل (آب رسانی)، راستے اور پُل کا استعمال، تعلیم اور صحت کی خدمت، عوامی لائبریری، کاشتکاری سے منسلک خدمت وغیرہ
II	ادنیٰ شرح	5%	**اشیا** – عام استعمال کی اشیا جیسے LPG سلنڈر، چائے، تیل، شہد، سردائی ہوئی سبزیاں، لونگ، مرچ، مسالے، مٹھائی، وغیرہ۔ **خدمات** – ریل کے ذریعے نقل وحمل، بس کے ذریعے نقل وحمل، ٹیکسی خدمت، ہوائی جہاز کے ذریعے نقل وحمل (ایکونومی کلاس)، ہوٹل میں اشیاءِ خورد ونوش دستیاب کرنا وغیرہ۔
III	متناسب شرح (سطح I)	12%	**اشیا** – گاہک کے استعمال کی چیزیں، اچار، گھی، خشک میوہ، سبزیوں اور پھل سے بنائے گئے اچار، مربّہ، جام، جیلی، چٹنیاں، موبائل وغیرہ۔ **خدمات** – چھپائی کے کام، گیسٹ ہاؤس، تعمیراتی پیشے سے منسلک خدمت وغیرہ۔
IV	متناسب شرح (سطح II)	18% (بڑے پیمانے پر اشیا اور خدمات کی شمولیت	**اشیا** – ماربل، گرینائٹ، پرفیومس، دھاتی اشیا، کمپیوٹر، پرنٹر، مانیٹر، سی سی ٹی وی وغیرہ **خدمات** – کوریئر سروس، آؤٹ ڈور کیٹرنگ، سرکس، ناٹک، نمائش، سینما، خدمت تبادلۂ زر، شیئر خرید وفروخت میں بچولیا کی خدمت وغیرہ۔
V	اعلیٰ شرح	28%	**اشیا** – عیش وآرام کی چیزیں (لکژری آئیٹم)، موٹر سائیکل کے پارٹس، لکژری کار، پان مسالہ، ویکیوم کلینر، ڈِش واشر، AC یونٹ، واشنگ مشین، تمباکو کی پیداوار، کولڈ ڈرِنکس وغیرہ۔ **خدمات** – فائیو اسٹار ہوٹل میں رہائش کا انتظام، امیوزمنٹ پارک، واٹر پارک، تھیم پارک، قمارخانہ، ریس کورس، IPL جیسے کھیل، ہوائی آمد ورفت/نقل وحمل (بزنس کلاس) وغیرہ

حوالہ : www.cbec.gov.in (Central Board of Excise & Customs کی ویب سائٹ)

اس کے علاوہ 0% سے 5% کے درمیان کن چیزوں پر GST ہے، معلوم کیجیے۔

نوٹ : اس باب میں لکھنے کے دوران حکومت کے طے کردہ GST کی قسمیں اور شرح لی گئی ہیں۔ اس میں تبدیلی ہوسکتی ہے۔ بجلی، پٹرول، ڈیزل وغیرہ GST کے دائرے میں نہیں ہیں۔