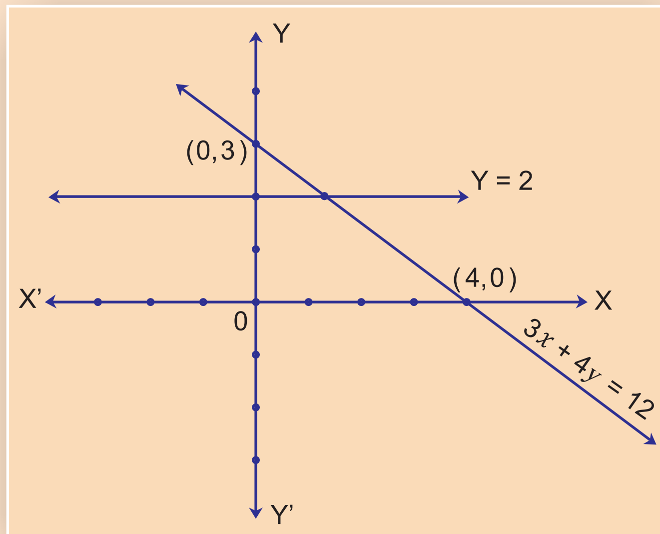
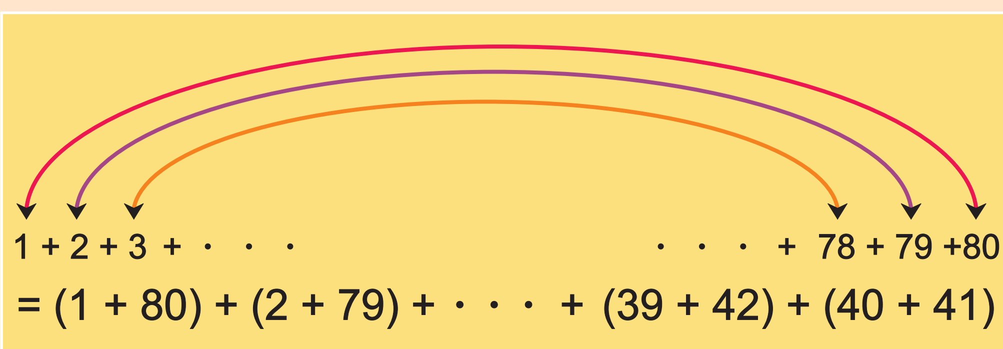
गणित भाग – I

दसवीं कक्षा





शासन निर्णय क्रमांक : अभ्यास–२११६/(प्र.क्र.४३/१६) एसडी–४ दिनांक २५.४.२०१६ के अनुसार गठित की गयी समन्वय समिति के दि. २९.१२.२०१७ की बैठक में इस पाठ्यपुस्तक को वर्ष २०१८ – १९ इस शैक्षणिक वर्ष से निर्धारित करने हेतु मान्यता प्रदान की गई ।

गणित

भाग I

दसवीं कक्षा

महाराष्ट्र राज्य पाठ्यपुस्तक निर्मिति व अभ्यासक्रम संशोधन मंडल, पुणे – ४११ ००४

HQTJJI

आपके स्मार्टफोन में ‘DIKSHA App’ द्वारा, पुस्तक के प्रथम पृष्ठ पर Q.R.Code के माध्यम से डिजिटल पाठ्यपुस्तक एवं प्रत्येक पाठ में अंतर्निहित Q.R.Code में अध्ययन अध्यापन के लिए पाठ से संबंधित उपयुक्त दृक–श्राव्य सामग्री उपलब्ध कराई जाएगी ।

प्रथमावृत्ति : 2018 © महाराष्ट्र राज्य पाठ्यपुस्तक निर्मिति व अभ्यासक्रम संशोधन मंडल पुणे - ४११ ००४.

इस पाठ्यपुस्तक का सर्वाधिकार महाराष्ट्र राज्य पाठ्यपुस्तक निर्मिति तथा अभ्यासक्रम संशोधन मंडल के अधीन सुरक्षित है । इस पुस्तक का कोई भी भाग महाराष्ट्र राज्य पाठ्यपुस्तक निर्मिति व अभ्यासक्रम संशोधन मंडल के संचालक की लिखित अनुमति के बिना प्रकाशित नहीं किया जा सकता !

गणित विषयतज्ज्ञ समिति

डॉ. मंगला नारळीकर (अध्यक्ष)
डॉ. जयश्री अत्रे (सदस्य)
श्री. विनायक गोडबोले (सदस्य)
श्रीमती प्राजक्ती गोखले (सदस्य)
श्री. रमाकांत सरोदे (सदस्य)
श्री. संदीप पंचभाई (सदस्य)
श्रीमती पूजा जाधव (सदस्य)
श्रीमती उज्ज्वला गोडबोले (सदस्य-सचिव)

गणित विषय - राज्य अभ्यासगट सदस्य

श्रीमती जयश्री पुरंदरे
श्री. राजेंद्र चौधरी
श्री. रामा व्हन्याळकर
श्री. आण्णापा परीट
श्री. अन्सार शेख
श्री. श्रीपाद देशपांडे
श्री. सुरेश दाते
श्री. उमेश रेळे
श्री. बन्सी हावळे
श्रीमती रोहिणी शिर्के
श्री. प्रकाश झेंडे
श्री. लक्ष्मण दावणकर
श्री. श्रीकांत रत्नपारखी
श्री. सुनिल श्रीवास्तव
श्री. अन्सारी अब्दुल हमीद
श्रीमती सुवर्णा देशपांडे
श्रीमती तरुबेन पोपट
श्री. प्रमोद ठोंबरे
डॉ. भारती सहस्रबुद्धे
श्री. वसंत शेवाळे
श्री. प्रताप काशिद
श्री. मिलिंद भाकरे
श्री. ज्ञानेश्वर माशाळकर
श्री. गणेश कोलते
श्री. संदेश सोनावणे
श्री. सुधीर पाटील
श्री. प्रकाश कापसे
श्री. रवींद्र खंदारे
श्रीमती स्वाती धर्माधिकारी
श्री. अरविंदकुमार तिवारी
श्री. मल्लेशाम बेथी
श्रीमती आर्या भिडे

मुखपृष्ठ व संगणकीय आरेखन
श्री. संदीप कोळी, चित्रकार, मुंबई

अक्षरांकन
डी.टी.पी. विभाग, पाठ्यपुस्तक मंडळ, पुणे

भाषांतरकार : श्री. लीलाराम बोपचे
श्री. सुनील श्रीवास्तव
समीक्षण : श्री. अरविंदकुमार तिवारी

प्रमुख संयोजक
उज्ज्वला श्रीकांत गोडबोले
प्र. विशेषाधिकारी गणित,
पाठ्यपुस्तक मंडळ, पुणे.

निर्मिती : **सच्चितानंद आफळे**
मुख्य निर्मिती अधिकारी
संजय कांबळे
निर्मिती अधिकारी
प्रशांत हरणे
सहायक निर्मिती अधिकारी

कागद : ७० जी.एस.एम.क्रीमवोव्ह
मुद्रणादेश : N/PB/2018/19/70,000
मुद्रक : INDIA PRINTING WORKS, MUMBAI

प्रकाशक
विवेक उत्तम गोसावी, नियंत्रक
पाठ्यपुस्तक निर्मिती मंडळ,
प्रभादेवी, मुंबई २५

भारत का संविधान

उद्देशिका

हम, भारत के लोग, भारत को एक **संपूर्ण प्रभुत्व-संपन्न समाजवादी पंथनिरपेक्ष लोकतंत्रात्मक गणराज्य** बनाने के लिए, तथा उसके समस्त नागरिकों को :

सामाजिक, आर्थिक और राजनैतिक **न्याय,**

विचार, अभिव्यक्ति, विश्वास, धर्म
और उपासना की **स्वतंत्रता,**

प्रतिष्ठा और अवसर की **समता**

प्राप्त कराने के लिए,

तथा उन सब में

व्यक्ति की गरिमा और राष्ट्र की एकता
और अखंडता सुनिश्चित करने वाली **बंधुता**

बढ़ाने के लिए

दृढ़संकल्प होकर **अपनी इस संविधान सभा में** आज तारीख 26 नवंबर, 1949 ई. (मिति मार्गशीर्ष शुक्ला सप्तमी, संवत् दो हजार छह विक्रमी) **को एतद् द्वारा इस संविधान को अंगीकृत, अधिनियमित और आत्मार्पित करते हैं ।**

राष्ट्रगीत

जनगणमन – अधिनायक जय हे
भारत – भाग्यविधाता ।
पंजाब, सिंधु, गुजरात, मराठा,
द्राविड, उत्कल, बंग,
विंध्य, हिमाचल, यमुना, गंगा,
उच्छल जलधितरंग,
तव शुभ नामे जागे, तव शुभ आशिस मागे,
गाहे तव जयगाथा,
जनगण मंगलदायक जय हे,
भारत – भाग्यविधाता ।
जय हे, जय हे, जय हे,
जय जय जय, जय हे ।।

प्रतिज्ञा

भारत मेरा देश है । सभी भारतीय मेरे भाई–बहन हैं ।

मुझे अपने देश से प्यार है । अपने देश की समृद्‌ध तथा विविधताओं से विभूषित परंपराओं पर मुझे गर्व है ।

मैं हमेशा प्रयत्न करूँगा/करूँगी कि उन परंपराओं का सफल अनुयायी बनने की क्षमता मुझे प्राप्त हो ।

मैं अपने माता–पिता, गुरुजनों और बड़ों का सम्मान करूँगा/करूँगी और हर एक से सौजन्यपूर्ण व्यवहार करूँगा/करूँगी ।

मैं प्रतिज्ञा करता/करती हूँ कि मैं अपने देश और अपने देशवासियों के प्रति निष्ठा रखूँगा/रखूँगी । उनकी भलाई और समृद्‌धि में ही मेरा सुख निहित है ।

प्रस्तावना

विद्‌यार्थी मित्रों,

दसवीं कक्षा में आप सभी का स्वागत ।

इस वर्ष हम गणित भाग I और गणित भाग II इन पुस्तको का अध्ययन करने वाले हैं । गणित भाग I में बीजगणित, आलेख, अर्थनियोजन तथा सांख्यिकी प्रमुख क्षेत्र हैं । आपको इस वर्ष कक्षा नौंवी तक परिचित घटकों का और अधिक अध्ययन करना होगा । आर्थिक नियोजन में GST इस नये करप्रणाली का परिचय दिया गया है । जहाँ नया भाग सूत्र या उपयोजन है, वहाँ सुलभ स्पष्टीकरण भी दिया गया है । प्रत्येक प्रकरण में नमूना उदाहरण, हल किए गये उदाहरण, अभ्यास के लिए उदाहरण ही, इसके अलावा प्रज्ञावान विद्‌यार्थियों के लिए कुछ चुनौतीपूर्ण प्रश्नों को तारांकित किया गया है । कुछ विद्‌यार्थियों को दसवीं के पश्चात गणित का अभ्यास न करना हो, फिर भी गणित की मूलभूत संकल्पना उन्हें समझे एवं वे अन्य क्षेत्रों में काम करने के लिए आवश्यक गणित का उपयोग कर पायें, ऐसा ज्ञान उन्हें इस पुस्तक में मिलेगा । 'अधिक जानकारी हेतु' इस शीर्षक के अंतर्गत दी गयी जानकारी, जिन विद्‌यार्थियों को दसवीं के बाद गणित का अध्ययन कर उसमें प्रावीण्य प्राप्त करने की इच्छा हो, उनके लिए यह पुस्तक उपयोगी सिद्‌ध होगी इसलिए ऐसे विद्‌यार्थियों को पूरी पुस्तक को एक बार पढ़कर तथा समझकर अवश्य अध्ययन करना चाहिए ।

प्रत्येक प्रकरण से संबंधित अधिक उपयुक्त दृक-श्राव्य साहित्य, ॲप के माध्यम से क्यू.आर. कोड द्‌वारा आपको उपलब्ध होंगे । अध्ययन के लिए इसका उपयोग निश्चित रूप से होगा ।

कक्षा दसवीं की परीक्षा बहुत महत्त्वपूर्ण मानी जाती है इसका तनाव न लेते हुए खूब अध्ययन करके मन मुताबिक सफलता प्राप्त करने के लिए आप सभी को शुभकामनाएँ !

(डॉ. सुनिल मगर)
संचालक
महाराष्ट्र राज्य पाठ्यपुस्तक निर्मिति व
अभ्यासक्रम संशोधन मंडल, पुणे.

पुणे
दिनांक : १८ मार्च २०१८, गुढीपाडवा
भारतीय सौर दिनांक : २७ फाल्गुन १९३९

कक्षा १० वीं गणित भाग I अभ्यासक्रम से निम्नलिखित क्षमता विद्यार्थियों में विकसित होंगी ।

क्षेत्र	घटक	क्षमता कथन
1. **संख्याज्ञान**	1.1 अंकगणितीय श्रृंखला	• अंकगणितीय श्रृंखला का उपयोग कर प्रश्नों को हल करना • भविष्य में किसी चीज को प्राप्त करने के लिए सोपानानुसार नियोजन करना
2. **बीजगणित**	2.1 वर्गसमीकरण 2.2 दो चरांकों वाले रेखीय समीकरण	• व्यवहार में किसी समस्या को वर्ग समीकरण के स्वरूप में व्यक्त करना, उसका हल ज्ञात करना • इबारती प्रश्नों के हल ज्ञात करने के लिए कितने चरांको का उपयोग करना होगा इसका निर्णय करना • इबारती प्रश्नों का रूपांतर दो चरांको के समीकरण में करके हल कर पाना
3. **व्यवहारिक गणित**	3.1 आर्थिक नियोजन	• बचत, निवेश इन मुद्दों की समझ निर्माण होना • उद्योग, व्यवसाय में आर्थिक व्यवहारों का परिचय होना
4. **सांख्यिकी तथा संभाव्यता**	4.1 संभाव्यता 4.2 आलेख तथा केंद्रीय प्रवृत्ति के माप	• खेल, मतदान आदि क्षेत्रों में संभाव्यता का उपयोग कर सकना • विशेष प्रकार की जानकारी एकत्र कर आलेखरूप/चित्ररूप में प्रतिरूपण करने के लिए विशेष आलेख का चुनाव कर पाना • वर्गीकृत सामग्री दिया जाने पर माध्य, माध्यिका बहुलक ज्ञात कर सकना

शिक्षकों के लिए सूचना

सर्वप्रथम पुस्तक का पूर्ण वाचन कर उसे समझ लें । विविध घटकों के स्पष्टीकरण तथा सूत्रों की जांच कर, इन महत्त्वपूर्ण मुद्दों के लिए कृति की मदद लें ।

प्रयोग से मूल्यमापन करना है । इसके लिए भी कृति का उपयोग किया जा सकता है, विद्यार्थियों के स्वतंत्र विचारों को प्रोत्साहन दें । किसी उदाहरण को अलग किंतु तर्कशुद्ध पद्धति से हल करने पर विद्यार्थियों को शाबासी दें ।

प्रयोगों की सूची

1. आलेख कागज पर X–अक्ष अथवा Y–अक्ष के समांतर रेखा खींचकर उस रेखा पर किन्ही चार बिंदुओं के निर्देशांक लिखिए । निर्देशांकों से रेखा का समीकरण कैसे बनायेंगे लिखिए ।

   [समांतर रेखा के स्थान पर आरंभ बिंदु से जाने वाली या X तथा Y- अक्षों को प्रतिच्छेदित करनेवाली रेखा लें तो भी सही होगा]

2. मन में किसी भी दो संख्या को निश्चित करें, उसे बिना बताए पहचानने के लिए पहेली बनाइए । संख्या के अंको में दो बैजिक संबंध बनाइए तथा पहेली हल कर के दिखाइए ।

   [उपर्युक्त प्रयोग तीन अंको की संख्या के लिए किया जा सकेगा]

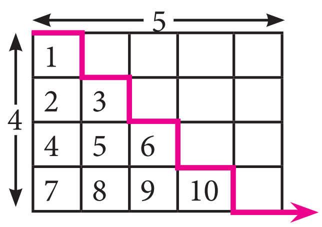
3. किसी भी खाद्‌य पदार्थों के पैकेट पर घटकों की जानकारी का वाचन करिए तथा उस जानकारी को दर्शानेवाला वृतालेख खींचिए । उदाहरणार्थ बिस्कुट के पैकेट पर - कार्बोहाइड्रेट, स्निग्ध, प्रोटीन तथा अन्य ऐसे घटकों के चार भाग कर सकते है ।

4. शिक्षकों द्‌वारा दी गई बारंबारता, बंटन सारिणी, संगणक में Excel Sheet पर बनाइए उस सारणी से बारंबारता बहुभुज तथा स्तंभालेख, Excel में बनाइए ।

5. एक पाँसा दस बार फेकने पर मिले परिणामों को दर्ज करें तथा उसकी सारिणी बनाएँ ।

6. शिक्षकों द्‌वारा दिये गये जीएसटी व्यवहारों का करबीजक देखें । उसमें से सभी मुद्‌दों को दर्ज करें । उसके कर आकारणी की फिर से गणना कर दिखाये तथा सभी गणना ठीक होने की पुष्टि करें ।

7. शिक्षकों के बताएनुसार प्रथम n प्राकृत संख्या का योग करने के लिए दी हुई कृति कर के देखें । उदाहरण, 1 से 4 तक प्राकृत संख्याओं का योग करने के लिए 4×5 का एक आयताकार कागज ले तथा आकृति में दर्शाएनुसार काट लें । (यहाँ n = 4 है) इससे $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$ इस सूत्र की जाँच करे ।



$$S_n = \frac{n(n+1)}{2} \quad \therefore\ S_4 = \frac{4\ (4+1)}{2} = \frac{4\times5}{2} = \frac{20}{2} = 10$$

[संकेत : यहाँ a = 1 तथा d = 1 है, अधिक संख्या लेकर, a तथा d इन संख्याओं को बदलकर; वैसे ही सम या विषम संख्याओं के योग के लिए वैसे ही प्राकृत संख्याओं के घनों के योग के लिए ऐसी कृति कर सकते हैं ।]

8. किसी कार्ड पर आगे की ओर $\alpha = 6$ तथा पीछे की ओर $\alpha = -6$ लिखिए वैसे ही दूसरे कार्ड पर एक-एक पृष्ठ पर $\beta = -3$ व $\beta = 7$ ऐसे लिखें । उससे $(\alpha + \beta)$, $(\alpha\beta)$ के अलग अलग मान प्राप्त होंगे । उसका उपयोग कर वर्ग समीकरण बनाइए ।

अनुक्रमणिका

	प्रकरण	पृष्ठ
1.	दो चरांकों वाले रेखीय समीकरण	1 से 29
2.	वर्गसमीकरण	30 से 54
3.	अंकगणितीय शृंखला	55 से 80
4.	आर्थिक नियोजन	81 से 112
5.	संभाव्यता	113 से 128
6.	सांख्यिकी	129 से 168
•	उत्तरसूची	169 से 176

1 दो चरांकों वाले रेखीय समीकरण

आओ सीखें

- दो चरांकों वाले रेखीय समीकरण हल करने की विधि – आलेख विधि, क्रेमर का नियम ।
- दो चरांकों वाले रेखीय समीकरण में रूपांतर करने योग्य समीकरण ।
- युगपत रेखीय समीकरण का उपयोजन ।

थोड़ा याद करें

दो चरांकों वाले रेखीय समीकरण (Linear equation in two variables)

जिस समीकरण में दो चरांकों का उपयोग किया जाता है और चरांक वाले प्रत्येक पद का घात 1 होता है उस समीकरण को दो चरांकों वाले रेखीय समीकरण कहते हैं । पिछली कक्षा में हमने इसका अध्ययन किया है।

हम जानते हैं कि $ax + by + c = 0$ यह दो चरांकों वाले रेखीय समीकरण का सामान्य रूप है जिसमें a, b, c यह वास्तविक संख्याएँ हैं तथा a और b एक ही समय में शून्य नहीं होते हैं।

उदा. समीकरण $3x = 4y - 12$ का $3x - 4y + 12 = 0$ यह सामान्य स्वरूप है ।

कृति : निम्नलिखित सारिणी को पूर्ण कीजिए ।

क्रमांक	समीकरण	दो चरांकों वाले रेखीय समीकरण हैं या नहीं ?
1	$4m + 3n = 12$	है ।
2	$3x^2 - 7y = 13$	
3	$\sqrt{2}x - \sqrt{5}y = 16$	
4	$0x + 6y - 3 = 0$	
5	$0.3x + 0y - 36 = 0$	
6	$\frac{4}{x} + \frac{5}{y} = 4$	
7	$4xy - 5y - 8 = 0$	

युगपत रेखीय समीकरण (Simultaneous linear equations)

जब हम दो चरांक वाले, दो रेखीय समीकरणों का एक ही समय पर विचार करते हैं तब उन समीकरणों को युगपत समीकरण कहते हैं ।

पिछली कक्षा में हमने एक चरांक वाले दो रेखीय समरकरणों का अध्ययन किया है। उसका संक्षेप में पुनरावर्तन करेंगे ।

उदा. (1) निम्न युगपत समीकरण हल कीजिए ।

$5x - 3y = 8;\ 3x + y = 2$

हल :

विधि I : $5x - 3y = 8 \ldots$ (I)

$3x + y = 2 \ldots$ (II)

समीकरण (II) के दोनों पक्षों में 3 से गुणा करने पर

$\therefore 9x + 3y = 6 \ldots$ (III)

$5x - 3y = 8 \ldots$ (I)

अब समीकरण (I) तथा (III) को जोड़ने पर

$$\begin{array}{r} 5x - 3y = 8 \\ +\ 9x + 3y = 6 \\ \hline 14x = 14 \end{array}$$

$\therefore x = 1$

$x = 1$ समीकरण (II) में रखने पर

$3x + y = 2$

$\therefore 3 \times 1 + y = 2$

$\therefore 3 + y = 2$

$\therefore y = -1$

$x = 1, y = -1$ यह हल है ।

इस हल को $(x, y) = (1, -1)$ ऐसा भी लिखते हैं ।

विधि (II)

$5x - 3y = 8 \ldots$ (I)

$3x + y = 2 \ldots$ (II)

समीकरण (II) के चरांक y का मान चरांक x के रूप में लिखेंगे ।

$y = 2 - 3x \ldots$ (III)

अब y का मान समीकरण (I) में रखने पर

$5x - 3y = 8$

$\therefore 5x - 3(2 - 3x) = 8$

$\therefore 5x - 6 + 9x = 8$

$\therefore 14x - 6 = 8$

$\therefore 14x = 8 + 6$

$\therefore 14x = 14$

$\therefore x = 1$

$x = 1$ समीकरण (III) में रखने पर

$y = 2 - 3x$

$\therefore y = 2 - 3 \times 1$

$\therefore y = 2 - 3$

$\therefore y = -1$

$x = 1, y = -1$ यह हल है ।

उदा. (2) हल कीजिए $3x + 2y = 29;\ 5x - y = 18$

हल : $3x + 2y = 29 \ldots$ (I) और $5x - y = 18 \ldots$ (II)

दिए गए समीकरण में y चरांक का विलोपन करके हल करेंगे । इसके लिए निम्नलिखित चौखट में उचित संख्या लिखिए ।

समीकरण (II) को 2 से गुणा करने पर

$\therefore\ 5x \times \square - y \times \square = 18 \times \square$

$\therefore\ 10x - 2y = \square \ldots$ (III)

समीकरण (I) में समीकरण (III) को जोड़ने पर

$$
\begin{array}{rl}
 & 3x + 2y = 29 \\
+ & \square - \square = \square \\
\hline
 & \square = \square
\end{array}
\qquad \therefore\ x = \square
$$

$x = 5$ इस मान को समीकरण (I) में रखने पर –

$3x + 2y = 29$

$\therefore\ 3 \times \square + 2y = 29$

$\therefore\ \square + 2y = 29$

$\therefore\ 2y = 29 - \square$

$\therefore\ 2y = \square \qquad \therefore\ y = \square$

$(x, y) = (\square, \square)$ यह हल है ।

उदा. (3) $15x + 17y = 21;\ 17x + 15y = 11$

हल : $15x + 17y = 21 \ldots$ (I)

$17x + 15y = 11 \ldots$ (II)

इन दो समीकरणों में x और y के गुणांकों का स्थान परस्पर परिवर्तित है । इस प्रकार के युगपत समीकरणों को हल करते समय दोनों समीकरणों को जोड़ने और घटाने पर दो नए आसान समीकरण प्राप्त होते हैं । इन दोनों समीकरणों का हल सरलता से प्राप्त होता है ।

समीकरण (I) तथा समीकरण (II) को जोड़ने पर –

$$
\begin{array}{rl}
 & 15x + 17y = 21 \\
+ & 17x + 15y = 11 \\
\hline
 & 32x + 32y = 32
\end{array}
$$

समीकरण के दोनों पक्षों में 32 से भाग देने पर

$$x + y = 1 \; . \; . \; . \quad \text{(III)}$$

समीकरण (I) में से समीकरण (II) को घटाने पर –

$$\begin{array}{rl} & 15x + 17y = 21 \\ - & 17x \underset{-}{+} 15y = \underset{-}{}11 \\ \hline & -2x + 2y = 10 \end{array}$$

समीकरण के दोनों पक्षों में 2 से भाग देने पर –

$$-x + y = 5 \; . \; . \; . \quad \text{(IV)}$$

समीकरण (III) तथा समीकरण (IV) को जोड़ने पर –

$$\begin{array}{rl} & x + y = 1 \\ + & -x + y = 5 \\ \hline \end{array}$$

$\therefore \quad 2y = 6 \qquad \therefore \quad y = 3$

$y = 3$ यह मान समीकरण (III) में रखने पर –

$x + y = 1$

$\therefore \; x + 3 = 1$

$\therefore \; x = 1 - 3 \qquad \therefore \; x = -2$

$(x, \; y) = (-2, \; 3)$ समीकरण का हल है ।

प्रश्नसंग्रह 1.1

(1) निम्न कृति पूर्ण करके युगपत समीकरण हल कीजिए ।

$5x + 3y = 9$ -----(I)

$2x - 3y = 12$ ----- (II)

समीकरण (I) तथा समीकरण (II) को जोड़ने पर

$$\begin{array}{rl} & 5x + 3y = 9 \\ + & 2x - 3y = 12 \\ \hline & \square \; x = \square \end{array}$$

$x = \dfrac{\square}{\square} \qquad x = \square$

$x = 3$ समीकरण (I) में रखने पर –

$5 \times \square + 3y = 9$

$3y = 9 - \square$

$3y = \square$

$y = \dfrac{\square}{3}$

$y = \square$

$(x, \; y)(\square, \; \square)$ समीकरण का हल है ।

(2) निम्न युगपत समीकरणों को हल कीजिए ।

(1) $3a + 5b = 26;\ a + 5b = 22$ (2) $x + 7y = 10;\ 3x - 2y = 7$

(3) $2x - 3y = 9;\ 2x + y = 13$ (4) $5m - 3n = 19;\ m - 6n = -7$

(5) $5x + 2y = -3;\ x + 5y = 4$ (6) $\frac{1}{3}x + y = \frac{10}{3};\ 2x + \frac{1}{4}y = \frac{11}{4}$

(7) $99x + 101y = 499;\ 101x + 99y = 501$

(8) $49x - 57y = 172;\ 57x - 49y = 252$

थोड़ा याद करें

दो चरांकों वाले रेखीय समीकरणों का आलेख (Graph of linear equation in two variables)

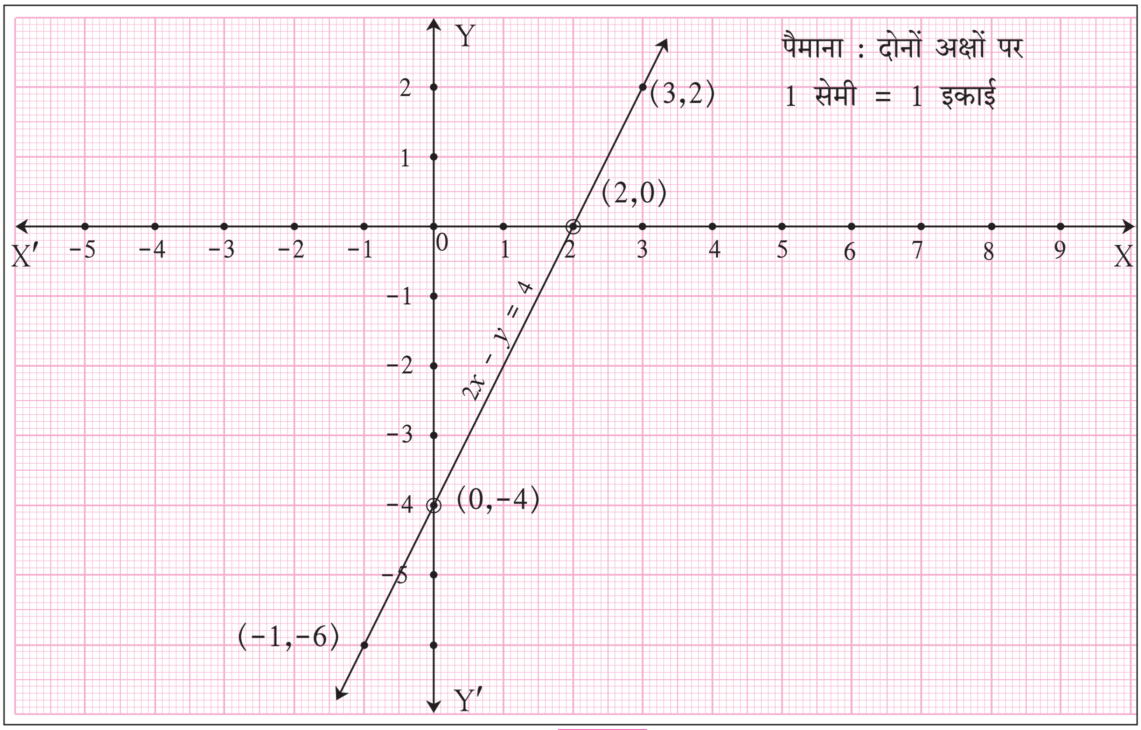
हमने पिछली कक्षा में दो चरांकों वाले रेखीय समीकरणों के आलेख का एक सरल रेखा के रुप में अध्ययन किया है । इनका क्रमिक युग्म दिए गए समीकरण की संपुष्टि (समाधान) करता हो तो वह युग्म उस समीकरण का हल होता है । इसी प्रकार वह क्रमिक युग्म उन समीकरण के आलेख पर एक बिंदु दर्शाता है।

उदा. $2x - y = 4$ इस समीकरण का आलेख खींचिए ।

हल : $2x - y = 4$ इस समीकरण का आलेख खींचने के लिए (x, y) का 4 युग्म (जोड़ी) प्राप्त करेंगे।

x	0	2	3	-1
y	-4	0	2	-6
(x, y)	$(0, -4)$	$(2, 0)$	$(3, 2)$	$(-1, -6)$

ध्यान रहें कि क्रमिक युग्म सरल विधि से प्राप्त करने के लिए $x = 0$ और $y = 0$ यह मान लेना आसान होगा ।



दो चरांको वाले रेखीय समीकरण का आलेख खींचने के लिए निम्नलिखित सोपानों पर ध्यान दें ।

दिए गए समीकरण के लिए कम से कम 4 क्रमिक युग्म बिंदुओं के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

↓

आलेख कागज पर X- अक्ष तथा Y- अक्ष निश्चित कर बिंदु प्रस्थापित कीजिए ।

↓

सभी बिंदु रेखा में आएँगे उन बिंदुओं से जाने वाली रेखा खींचिए ।

रेखा निश्चित करने के लिए दो बिंदु पर्याप्त होते हैं, किंतु उनमें से एक बिंदु का निर्देशांक ज्ञात करने में गलती होने पर रेखा भी गलत बनेगी ।

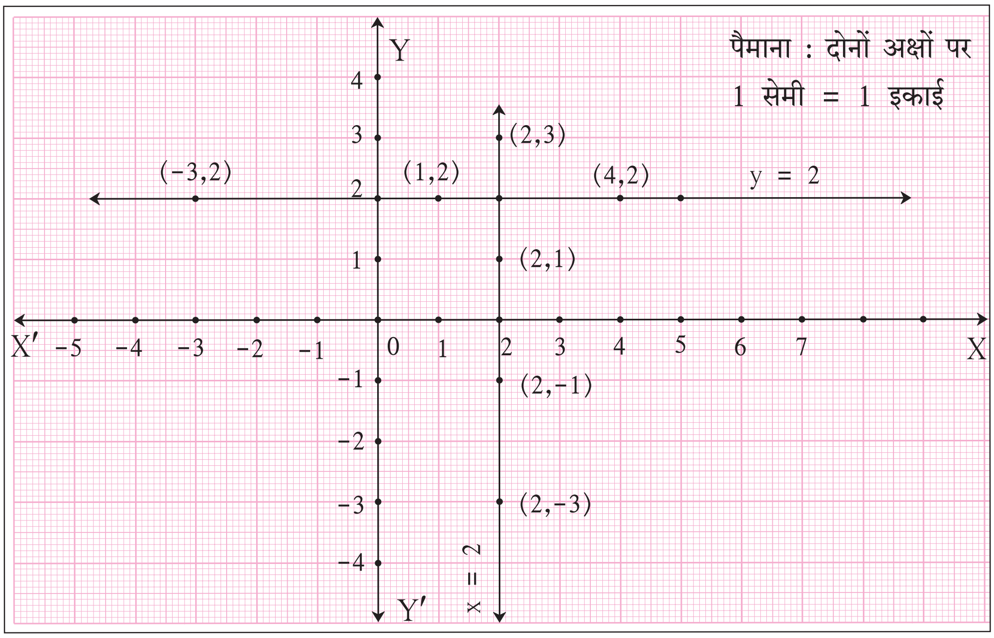
तीन बिंदुओं के निर्देशांक ज्ञात करते समय एक बिंदु का निर्देशांक गलत होने पर तीनों बिंदु एक रेखा में नहीं होंगे इससे ध्यान में आता है कि किसी एक बिंदु का निर्देशांक गलत है, किंतु निश्चित रूप से कौन-से बिंदु का निर्देशांक गलत है इसे ज्ञात करने में समय लगेगा।

चार बिंदुओं के निर्देशांक ज्ञात करते समय किसी एक बिंदु का निर्देशांक गलत होने पर भी उसे छोड़कर अन्य तीन बिंदु एक ही रेखा पर होंगे इससे गलती तुरंत ध्यान में आयेगी । अतः चार बिंदुओं के निर्देशांक निश्चित करना हितकर होता है ।

$y = 2$ इस रेखीय समीकरण को सुविधा के लिए $0x + y = 2$ ऐसा लिख सकते हैं । इस समीकरण का आलेख X-अक्ष के समांतर होता है क्योंकि x के निर्देशांक कोई भी संख्या होने पर बिंदु y का निर्देशांक 2 ही आता है।

x	1	4	-3
y	2	2	2
(x, y)	(1, 2)	(4, 2)	(-3, 2)

इसी प्रकार $x = 2$ यह समीकरण $x + 0y = 2$ ऐसा लिख सकते हैं तथा उसका आलेख Y-अक्ष के समांतर होता है ।



आओ जानें

युगपत समीकरण हल करने की आलेख विधि
(Solution of simultaneous equation by graphical method)

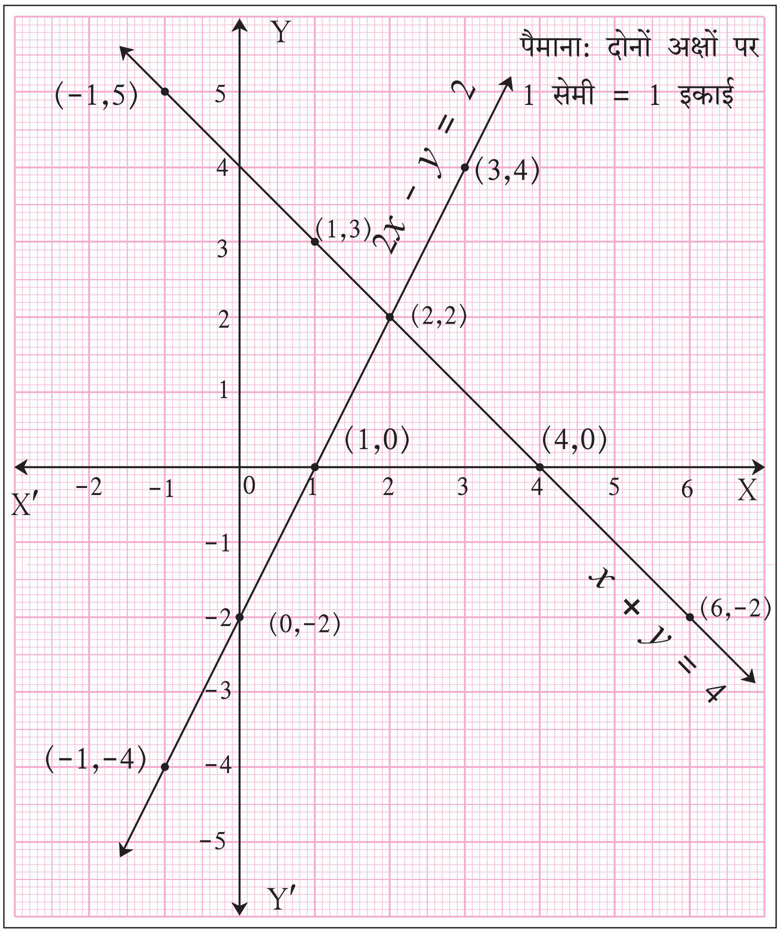
उदा. $x + y = 4$ और $2x - y = 2$ इस समीकरण का आलेख खींचकर उसका अवलोकन कीजिए।

$x + y = 4$

x	-1	4	1	6
y	5	0	3	-2
(x, y)	$(-1, 5)$	$(4, 0)$	$(1, 3)$	$(6, -2)$

$2x - y = 2$

x	0	1	3	-1
y	-2	0	4	-4
(x, y)	$(0, -2)$	$(1, 0)$	$(3, 4)$	$(-1, -4)$



आलेख पर स्थित प्रत्येक बिंदु उस आलेख के समीकरण की संपुष्टि (समाधान) करता है । दोनों रेखाएँ परस्पर (2, 2) इस बिंदु पर प्रतिच्छेदित करती हैं ।

इसलिए (2, 2) यह क्रमिक युग्म अर्थात $x = 2$ और $y = 2$ का मान $x + y = 4$ और $2x - y = 2$ इन दोनों समीकरणों का समाधान (संपुष्टि) करता है ।

चरांकों का जो मान दिए गए युगपत समीकरण की संपुष्टि करता है। वह मान उस समीकरण का हल होता है ।

$x + y = 4$ और $2x - y = 2$ इस युगपत समीकरण का हल $x = 2$ और $y = 2$ है ।

इस समीकरण को निरसन विधि से हल करके इन हलों की जाँच करेंगे ।

$x + y = 4$ . . . (I)

$2x - y = 2$ . . . (II)

समीकरण (I) तथा (II) को जोड़ने पर

$3x = 6 \quad \therefore \ x = 2$

समीकरण (I) में $x = 2$ मान रखने पर

$x + y = 4$

$\therefore \ 2 + y = 4$

$\therefore \ y = 2$

कृति I : $x - y = 1$; $5x - 3y = 1$ यह युगपत समीकरण आलेख विधि से हल करने के लिए–

- नीचे दी गई तालिका पूर्ण कर निर्देशांक प्राप्त कीजिए ।

$x - y = 1$

x	0		3	
y		0		−3
(x, y)				

$5x - 3y = 1$

x	2			−4
y		8	−2	
(x, y)				

- एक ही निर्देशांक पद्धति में निर्देशांको के अनुसार बिंदु प्रस्थापित कीजिए ।
- समीकरण का आलेख खींचिए ।
- रेखाओं के प्रतिच्छेदन बिंदु के निर्देशांक का वाचन कीजिए । उससे युगपत समीकरण का हल लिखिए ।

कृति II : ऊपर दिए गए युगपत समीकरण को निरसन पद्धति से हल कर, आलेख द्वारा प्राप्त हल की जाँच कीजिए ।

थोड़ा सोचें

$5x - 3y = 1$ इस आलेख को खींचने के लिए सारिणी में कुछ निर्देशांक दिए गए हैं, देखिए ।

x	0	$\frac{1}{5}$	1	−2
y	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{4}{3}$	$-\frac{11}{3}$
(x, y)	$\left(0, -\frac{1}{3}\right)$	$\left(\frac{1}{5}, 0\right)$	$\left(1, \frac{4}{3}\right)$	$\left(-2, -\frac{11}{3}\right)$

- क्या बिंदु प्रस्थापित करने के लिए क्या निर्देशांक सुविधाजनक हैं ?
- निर्देशांक ज्ञात करने में कौन-सी सावधानी बरतनी होगी, जिससे बिंदु स्थापित करना सरल होगा ?

प्रश्नसंग्रह 1.2

(1) निम्नलिखित युगपत समीकरण आलेख विधि से हल करने के लिए सारिणी पूर्ण कीजिए ।

(I) $x + y = 3$ (II) $x - y = 4$

$x + y = 3$

x	3	□	□
y	□	5	3
(x, y)	(3, 0)	□	(0, 3)

$x - y = 4$

x	□	−1	0
y	0	□	−4
(x, y)	□	□	(0, −4)

(2) निम्नलिखित युगपत समीकरण आलेख विधि से हल कीजिए ।

(1) $x + y = 6$; $x - y = 4$
(2) $x + y = 5$; $x - y = 3$
(3) $x + y = 0$; $2x - y = 9$
(4) $3x - y = 2$; $2x - y = 3$
(5) $3x - 4y = -7$; $5x - 2y = 0$
(6)★ $2x - 3y = 4$; $3y - x = 4$

आओ चर्चा करें

$x + 2y = 4$; $3x + 6y = 12$ युगपत समीकरण दिया गया है । आलेख विधि से हल करने के लिए निश्चित की गई कुछ क्रमिक जोड़ियाँ निम्नप्रकार से हैं ।

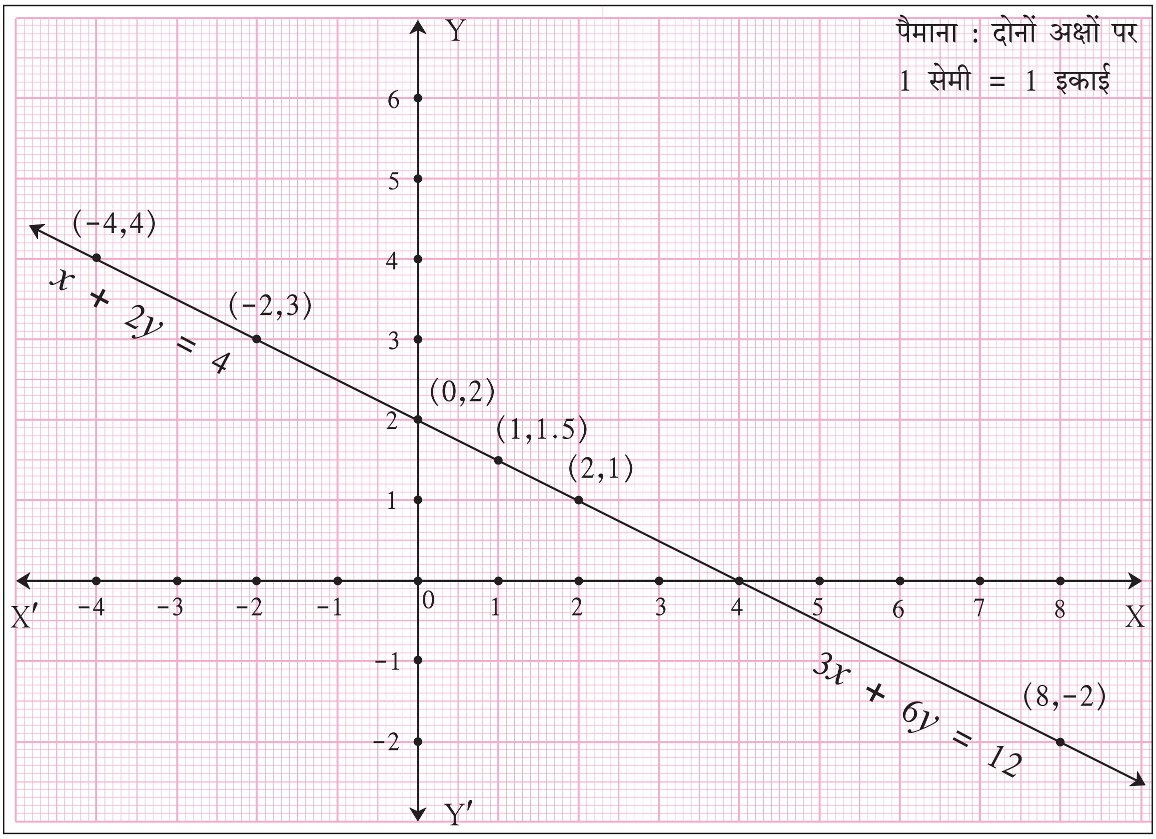
$x + 2y = 4$

x	-2	0	2
y	3	2	1
(x, y)	$(-2, 3)$	$(0, 2)$	$(2, 1)$

$3x + 6y = 12$

x	-4	1	8
y	4	1.5	-2
(x, y)	$(-4, 4)$	$(1, 1.5)$	$(8, -2)$

इन क्रमिक युग्मों को प्रस्थापित कर आलेख खींचा गया है । इसका निरीक्षण कीजिए और दिए गए प्रश्नों पर चर्चा कीजिए ।



(1) उपर्युक्त दो समीकरणों के आलेख एक ही हैं या अलग-अलग हैं ?

(2) $x + 2y = 4$ और $3x + 6y = 12$ इन युगपत समीकरणों के हल कौन-से हैं और कितने हल हैं ?

(3) ऊपरोक्त दोनों समीकरणों में x का गुणांक, y का गुणांक और अचर पदों में कौन-सा संबंध है ?

(4) दो रेखीय समीकरण दिए गए हों और उन समीकरणों का आलेख एक रेखा है, इसे कैसे पहचानेंगे ?

अब दूसरा उदाहरण देखेंगे ।

$x - 2y = 4$ और $2x - 4y = 12$ इन समीकरणों के आलेख ऊपरोक्त प्रकार से एक ही निर्देशांक पद्धति पर खींचिए । आलेख का अवलोकन कीजिए । $x - 2y = 4$; $2x - 4y = 12$ इन युगपत समीकरणों के हल पर विचार कीजिए । x और y के गुणांक, वैसे ही अचर पदों में संबंधों पर विचार करके निष्कर्ष ज्ञात कीजिए ।

ICT Tools or Links

Geogebra software की सहायता से X-अक्ष, Y-अक्ष खींचिए । विभिन्न युगपत समीकरण का आलेख खींचकर उनके हल की जाँच कीजिए ।

आओ जानें

निश्चयक (Determinant)

$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ यह चार घटकों का निश्चयक हैं। इनमें (a, b), (c, d) क्षैतिज पंक्तियाँ हैं

इसी प्रकार

$\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ यह दो उर्ध्वाधर स्तंभ (column) हैं । इस निश्चयक की घात 2 है कारण प्रत्येक पंक्ति (row) तथा स्तंभ (column) में 2 घटक हैं। यह निश्चयक एक संख्या के लिए लिखा जाता है, वह संख्या ad-bc है ।

अर्थात $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

ad-bc यह $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ निश्चयक का मान है ।

निश्चयक का नाम देने के लिए साधारणत: A, B, C, D, ... ऐसे अंग्रेजी के बड़े अक्षरों का उपयोग किया जाता है ।

हल किए गए उदाहरण

उदा. निम्नलिखित निश्चयकों के मान ज्ञात कीजिए ।

(1) $A = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix}$ (2) $N = \begin{vmatrix} -8 & -3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$ (3) $B = \begin{vmatrix} 2\sqrt{3} & 9 \\ 2 & 3\sqrt{3} \end{vmatrix}$

हल :

(1) A = $\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix}$ $= (5 \times 9) - (3 \times 7) = 45 - 21 = 24$

(2) N = $\begin{vmatrix} -8 & -3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$ $= [(-8) \times (4)] - [(-3\ ) \times 2] = -32 - (-6)$

$= -32 + 6 = -26$

(3) B = $\begin{vmatrix} 2\sqrt{3} & 9 \\ 2 & 3\sqrt{3} \end{vmatrix}$ $= [2\sqrt{3} \times 3\sqrt{3}] - [2 \times 9] = 18 - 18 = 0$

आओ जानें

निश्चयक पद्धति (क्रेमर की पद्धति) Determinant method (Crammer's method)

दिए गए युगपत समीकरणों को सरल विधि से तथा कम-से-कम जगह का उपयोग कर निश्चयकों की सहायता से हल किया जाता है । इसे ही युगपत समीकरण हल करने की निश्चयक पद्धति कहते हैं । इस पद्धति की खोज स्विस गणितज्ञ ग्रेबियल क्रेमर ने की थी इसलिए इस पद्धति को क्रेमर पद्धति कहते हैं ।

इस पद्धति से युगपत समीकरणों को $a_1x + b_1y = c_1$ तथा $a_2x + b_2y = c_2$ ऐसे लिखते हैं ।

माना, $a_1x + b_1y = c_1 \ . \ . \ .$ (I)

और $a_2x + b_2y = c_2 \ . \ . \ .$ (II)

यहाँ a_1, b_1, c_1 तथा a_2, b_2, c_2 वास्तविक संख्याएँ है ।

हम इस युगपत समीकरण निरसन पद्धति से हल करेंगे ।

समीकरण (I) को b_2 से गुणा करने पर

$a_1 b_2 x + b_1 b_2 y = c_1 b_2 \ . \ . \ .$ (III)

समीकरण (II) को b_1 से गुणा करने पर

$a_2 b_1 x + b_2 b_1 y = c_2 b_1 \ . \ . \ .$ (IV)

समीकरण (III) से (IV) को घटाने पर

$$a_1 b_2 x + b_1 b_2 y = c_1 b_2$$

$$\begin{array}{l} a_2 b_1 x + b_2 b_1 y = c_2 b_1 \\ - \quad\quad - \quad\quad\quad - \\ \hline (a_1 b_2 - a_2 b_1)\, x = c_1 b_2 - c_2 b_1 \end{array}$$

$x = \dfrac{c_1 b_2 - c_2 b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}$ . . .(V) इसी प्रकार x का निरसन करके $y = \dfrac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}$ . . . (VI)

ऊपरोक्त हल में $c_1 b_2 - c_2 b_1$, $a_1 b_2 - a_2 b_1$, $a_1 c_2 - a_2 c_1$ इन राशियों को ध्यान में रखने और कम जगह में व्यवस्थित रूप लिखने के लिए निश्चयक के रूप में लिखेंगे ।

निम्नलिखित समीकरणों में गुणांक तथा अचर पद देखिए ।

अब $a_1 x + b_1 y = c_1$

और $a_2 x + b_2 y = c_2$

यहाँ $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ ये तीन स्तंभ प्राप्त होते हैं।

समीकरण (V) तथा समीकरण (VI) में x तथा y का मान निश्चयकों की सहायता से लिखिए ।

$$x = \frac{c_1 b_2 - c_2 b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

और $y = \dfrac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} = \dfrac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$, $(a_1 b_2 - a_2 b_1) \neq 0$

ध्यान देने योग्य $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = D$, $\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = D_x$, $\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = D_y$ से दर्शाइए।

अर्थात संक्षेप में $x = \dfrac{D_x}{D}$ तथा $y = \dfrac{D_y}{D}$

D, D_x , D_y निश्चयक लिखने के लिए $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ स्तंभों के क्रम को ध्यान में रखिए ।

और $\begin{matrix} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{matrix}$ इन समीकरणों से $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ ऐसे तीन स्तंभ प्राप्त होते हैं।

D में अचरपद के $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ स्तंभ को छोड़ा गया है ।

- D_x के लिए D के $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ x के गुणांको का स्तंभ छोड़कर उसकी जगह अचर पद का स्तंभ लिया गया है ।
- D_y के लिए D के $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ y के गुणांकों का स्तंभ छोड़कर उसकी जगह पर अचर पदों का स्तंभ लिया गया है ।

इसे ध्यान में रखें

क्रेमर की पद्धति का उपयोग कर युगपत समीकरण हल करने की विधि

दिया गया समीकरण $ax + by = c$ स्वरूप में लिखिए ।

↓

D, D_x तथा D_y इन निश्चयकों का मान ज्ञात कीजिए।

↓

$x = \frac{D_x}{D}$ तथा $y = \frac{D_y}{D}$

के आधार पर x तथा y का मान ज्ञात कीजिए ।

अधिक जानकारी हेतु :

गेब्रियल क्रेमर (Gabriel Cramer) (31 जुलाई, 1704 से 4 जनवरी, 1752) नामक स्विस गणितज्ञ का जन्म जेनेवा में हुआ । गणित विषय में बचपन से ही प्रवीण थे । आयु के अठारहवें वर्ष में उन्होंने डॉक्टरेट की उपाधि प्राप्त की। वे जेनेवा में प्राध्यापक थे ।

हल किए गए उदाहरण

उदा. क्रेमर की पद्धति से निम्नलिखित युगपत समीकरण हल कीजिए ।

$5x + 3y = -11$; $2x + 4y = -10$

हल : दिए गए समीकरण

$5x + 3y = -11$

$2x + 4y = -10$

$$D = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = (5 \times 4) - (2 \times 3) = 20 - 6 = 14$$

$$Dx = \begin{vmatrix} -11 & 3 \\ -10 & 4 \end{vmatrix} = (-11) \times 4 - (-10) \times 3 = -44 - (-30)$$

$$= -44 + 30 = -14$$

$$Dy = \begin{vmatrix} 5 & -11 \\ 2 & -10 \end{vmatrix} = 5 \times (-10) - 2 \times (-11) = -50 - (-22)$$

$$= -50 + 22 = -28$$

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-14}{14} = -1$$

तथा $y = \frac{D_y}{D} = \frac{-28}{14} = -2$

$\therefore (x, y) = (-1, -2)$ यह दिए गए युगपत समीकरण का हल है ।

कृति 1 : निश्चयक पद्धति से दिए गए युगपत समीकरणों को हल करने के लिए निम्नलिखित चौखटों को पूर्ण कीजिए ।

$y + 2x - 19 = 0$; $2x - 3y + 3 = 0$

हल : दिए गए समीकरण $ax + by = c$ को इस स्वरूप में लिखेंगे ।

$2x + y = 19$

$2x - 3y = -3$

$$D = \begin{vmatrix} \square & \square \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = [\square \times (-3)] - [2 \times (\square)] = \square - (\square)$$

$$= \square - \square = \square$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 19 & \square \\ \square & -3 \end{vmatrix} = [19 \times (\square)] - [(\square) \times (\square)] = \square - \square$$

$$= \square$$

$D_y = \begin{vmatrix} \square & 19 \\ 2 & \square \end{vmatrix} = [(\square) \times (\square)] - [(\square) \times (\square)]$

$= \square - \square = \square$

क्रेमर के नियमानुसार

$x = \dfrac{D_x}{D}$ | $y = \dfrac{D_y}{D}$

$\therefore\ x = \dfrac{\square}{\square}$ | $y = \dfrac{\square}{\square}$

$\therefore\ x = \square$ | $y = \square$

$\therefore\ (x,\ y) = (\square,\ \square)$ यह दिए गए युगपत समीकरण का हल है ।

कृति 2 : निम्न कृति पूर्ण कीजिए ।

$3x-2y=3$ $2x+y=16$

ऊपरोक्त समीकरणों के निश्चयकों का मान

$D = \begin{vmatrix} & \end{vmatrix} = \square$ $D_x = \begin{vmatrix} & \end{vmatrix} = \square$ $D_y = \begin{vmatrix} & \end{vmatrix} = \square$

क्रेमर के नियमानुसार हल प्राप्त होते हैं ।

$x = \dfrac{\square}{\square} = \square$ $y = \dfrac{\square}{\square} = \square$

$\therefore\ (x,\ y)\ (\square,\ \square)$ यह हल है ।

थोड़ा सोचें

- यदि $D = 0$ तो हल का रूप क्या होगा ?
- सामान्य हल संभव न हो तो उन समीकरणों की रेखा का स्वरूप क्या होगा ?

प्रश्नसंग्रह 1.3

(1) $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 3 \times \square - \square \times 4 = \square - 8 = \square$

(1) निम्नलिखित निश्चयकों का मान ज्ञात कीजिए ।

i) $\begin{vmatrix} -1 & 7 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$ ii) $\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -7 & 0 \end{vmatrix}$ iii) $\begin{vmatrix} \frac{7}{3} & \frac{5}{3} \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix}$

(2) निम्नलिखित युगपत समीकरणों को क्रेमर की पद्धति से हल कीजिए ।

(i) $3x - 4y = 10;\ 4x + 3y = 5$ (ii) $4x + 3y - 4 = 0;\ 6x = 8 - 5y$

(iii) $x + 2y = -1;\ 2x - 3y = 12$ (iv) $6x - 4y = -12;\ 8x - 3y = -2$

(v) $4m + 6n = 54;\ 3m + 2n = 28$ (vi) $2x + 3y = 2;\ x - \frac{y}{2} = \frac{1}{2}$

आओ जानें

दो चरांकों वाले रेखीय समीकरण में रूपांतर करने योग्य समीकरण
(Equations reducible to a pair of linear equations in two variables)

कृति : निम्नलिखित सारिणी पूर्ण कीजिए।

समीकरण	चरांकों की संख्या	रेखीय है या नहीं
$\frac{3}{x} - \frac{4}{y} = 8$	2	नहीं
$\frac{6}{x-1} + \frac{3}{y-2} = 0$	$\square$	$\square$
$\frac{7}{2x+1} + \frac{13}{y+2} = 0$	$\square$	$\square$
$\frac{14}{x+y} + \frac{3}{x-y} = 5$	$\square$	$\square$

थोड़ा याद करें

ऊपरोक्त सारिणी में दो चरांकों के कुछ समीकरण दिए गए हैं, वे रेखीय नहीं हैं किंतु क्या उन समीकरणों को रेखीय समीकरणों में रूपांतरित कर सकते हैं ?

इसे ध्यान में रखें

दिए गए चरांकों में उचित परिवर्तन कर हम नए चरांकों का निर्माण कर सकते हैं । इन नए चरांकों का उपयोग करके उस समीकरण को रेखीय समीकरण के रूप में लिख सकते हैं । किसी भी $\frac{m}{n}$ ऐसे अपूर्णांकों का हर शून्य नहीं हो सकता इसे नहीं भूले ।

हल किए गए उदाहरण

निम्नलिखित युगपत समीकरण हल कीजिए ।

उदा.(1) हल कीजिए $\frac{4}{x} + \frac{5}{y} = 7;\ \frac{3}{x} + \frac{4}{y} = 5$

हल : $\frac{4}{x} + \frac{5}{y} = 7;\ \frac{3}{x} + \frac{4}{y} = 5$

$$4\left(\frac{1}{x}\right) + 5\left(\frac{1}{y}\right) = 7 \quad . . . \quad \text{(I)}$$

$$3\left(\frac{1}{x}\right) + 4\left(\frac{1}{y}\right) = 5 \quad . . . \quad \text{(II)}$$

समीकरण (I) तथा (II) में $\left(\frac{1}{x}\right) = m$ तथा $\left(\frac{1}{y}\right) = n$ रखने पर निम्नलिखित समीकरण प्राप्त होते हैं।

$$4m + 5n = 7 \quad . . . \quad \text{(III)}$$

$$3m + 4n = 5 \quad . . . \quad \text{(IV)}$$

समीकरण हल करने पर

$m = 3,\ n = -1$ यह हल प्राप्त होता है ।

अब, $m = \frac{1}{x}$ $\quad \therefore\ 3 = \frac{1}{x}$ $\quad \therefore\ x = \frac{1}{3}$

इसी प्रकार, $n = \frac{1}{y}$ $\quad \therefore\ -1 = \frac{1}{y}$ $\quad \therefore\ y = -1$

$\therefore\ (x,\ y) = (\frac{1}{3},\ -1)$ यह दिए गए युगपत समीकरण का हल है ।

उदा.(2) हल कीजिए $\frac{4}{x-y} + \frac{1}{x+y} = 3$; $\frac{2}{x-y} - \frac{3}{x+y} = 5$

हल : $\frac{4}{x-y} + \frac{1}{x+y} = 3$; $\frac{2}{x-y} - \frac{3}{x+y} = 5$

$$4\left(\frac{1}{x-y}\right) + 1\left(\frac{1}{x+y}\right) = 3 \quad . . . \quad (I)$$

$$2\left(\frac{1}{x-y}\right) - 3\left(\frac{1}{x+y}\right) = 5 \quad . . . \quad (II)$$

समीकरण (I) तथा (II) में $\left(\frac{1}{x-y}\right) = a$ व $\left(\frac{1}{x+y}\right) = b$ रखने पर प्राप्त समीकरण इस प्रकार हैं।

$$4a + b = 3 \quad . . . \quad (III)$$

$$2a - 3b = 5 \quad . . . \quad (IV)$$

समीकरण (III) तथा (IV) को हल करने पर $a = 1$ और $b = -1$ यह हल प्राप्त होता है ।

किंतु $a = \left(\frac{1}{x-y}\right)$ तथा $b = \left(\frac{1}{x+y}\right)$

$\left(\frac{1}{x-y}\right) = 1$ तथा $\left(\frac{1}{x+y}\right) = -1$

$$x - y = 1 \quad . . . \quad (V)$$

$$x + y = -1 \quad . . . \quad (VI)$$

समीकरण (V) तथा समीकरण (VI) हल करने पर $x = 0$ और $y = -1$ यह हल प्राप्त होता है।

$\therefore$ $(x, y) = (0, -1)$ यह दिए गए समीकरण का हल है ।

थोड़ा याद करें

ऊपरोक्त उदाहरणों को रूपांतरित कर प्राप्त युगपत समीकरण निरसन पद्धति से हल किए गए हैं । वह समीकरण क्रेमर के नियमानुसार या आलेख विधि से हल करने पर भी क्या वही हल प्राप्त होता है ? करके देखिए ।

कृति : चौखटों के समीकरणों के हल ज्ञात करने के लिए निम्नलिखित कृति कीजिए ।

$$\frac{5}{x-1} + \frac{1}{y-2} = 2 \;;\; \frac{6}{x-1} - \frac{3}{y-2} = 1$$

$\left(\frac{1}{x-1}\right) = m$ तथा $\left(\frac{1}{y-2}\right) = n$ रखने पर

$\boxed{}$ नए समीकरण $6m - 3m = 1$

हल करने पर

$m = \square$ तथा $n = \square$

m तथा n का मान रखने पर प्राप्त समीकरण

$\left(\frac{1}{x-1}\right) = \frac{1}{3}$ समीकरण हल करने पर $\boxed{}$

$x = \square$ तथा $y = \square$

$\therefore$ $(x,\ y) = (\quad,\quad)$ यह दिए गए युगपत समीकरण का हल है ।

प्रश्नसंग्रह 1.4

1) निम्नलिखित युगपत समीकरण हल कीजिए ।

(1) $\frac{2}{x} - \frac{3}{y} = 15 \;;\; \frac{8}{x} + \frac{5}{y} = 77$

(2) $\frac{10}{x+y} + \frac{2}{x-y} = 4 \;;\; \frac{15}{x+y} - \frac{5}{x-y} = -2$

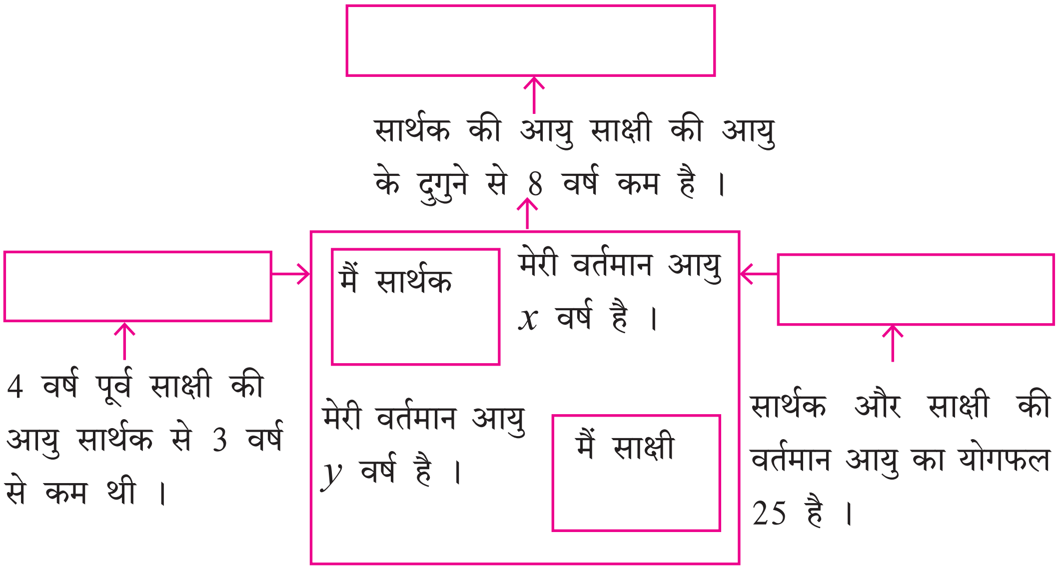
(3) $\frac{27}{x-2} + \frac{31}{y+3} = 85 \;;\; \frac{31}{x-2} + \frac{27}{y+3} = 89$

(4) $\frac{1}{3x+y} + \frac{1}{3x-y} = \frac{3}{4} \;;\; \frac{1}{2(3x+y)} - \frac{1}{2(3x-y)} = -\frac{1}{8}$

आओ जानें

युगपत समीकरण का उपयोजन (Application of simultanious equation)

कृति : नीचे दिए गए चौखटों में तीर के चिह्न के पास कुछ सूचना दी गई है । इससे प्राप्त होने वाले समीकरण तीर के सामने वाली चौखटों में लिखेंगे ।



उदा. (1) किसी आयत की परिमिति 40 सेमी है । आयत की लंबाई, चौड़ाई की दुगुनी से 2 सेमी अधिक है । तो आयत की लंबाई तथा चौड़ाई ज्ञात कीजिए ।

हल : माना कि आयत की लंबाई x सेमी तथा चौड़ाई y सेमी है ।

पहली शर्त के अनुसार

$$2(x + y) = 40$$

$$x + y = 20 \quad . . . \quad (I)$$

दूसरी शर्त के अनुसार

$$x = 2y + 2$$

$$\therefore \; x - 2y = 2 \quad . . . \quad (II)$$

समीकरण (I) तथा (II) निश्चयक विधि से हल करेंगे ।

$$x + y = 20$$

$$x - 2y = 2$$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = [1 \times (-2)] - (1 \times 1) = -2 - 1 = -3$$

$$Dx = \begin{vmatrix} 20 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = [20 \times (-2)] - (1 \times 2) = -40 -2 = -42$$

$$Dy = \begin{vmatrix} 1 & 20 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = (1 \times 2) - (20 \times 1) = 2 - 20 = -18$$

$x = \frac{Dx}{D}$ तथा $y = \frac{Dy}{D}$

$\therefore\ x = \frac{-42}{-3}$ तथा $y = \frac{-18}{-3}$

$\therefore\ x = 14$ तथा $y = 6$

$\therefore$ आयत की लंबाई 14 सेमी तथा चौड़ाई 6 सेमी है ।

उदा. (2)

सेल ! सेल !! सेल !!! केवल 2 ही दिन

मेरे पास कुछ घड़ियाँ काँटे वाली और कुछ डिजिटल घड़ियाँ हैं । वो मुझे सस्ती कीमत पर बेचनी हैं ।

प्रथम दिन की बिक्री	
काँटेवाली घड़ी	= 11
डिजिटल घड़ी	= 6
मुझे प्राप्त	= 4330 रु.

दूसरे दिन की बिक्री	
काँटेवाली घड़ी	= 22
डिजिटल घड़ी	= 5
मुझे प्राप्त	= 7330 रु.

तो मेरे द्वारा बेची हुई प्रत्येक प्रकार की घड़ियों का मूल्य कितना होगा ?

हल : माना कि काँटेवाली एक घड़ी का मूल्य = x रु.

तथा एक डिजिटल घड़ी का मूल्य = y रु.

प्रथम शर्त के अनुसार

$$11x + 6y = 4330 \quad . . . \quad (I)$$

दूसरी शर्त के अनुसार

$$22x + 5y = 7330 \quad . . . \quad (II)$$

समीकरण (I) को 2 से गुणा करने पर

$$22x + 12y = 8660 \quad . . . \quad (III)$$

समीकरण (II) में से समीकरण (III) घटाने पर

$$\begin{array}{r} 22x + 5y = 7330 \\ - \\ \pm 22x \pm 12y = \pm 8660 \\ \hline -7y = -1330 \end{array}$$

$$y = 190$$

$y = 190$ यह मान समीकरण (I) में रखने पर

$$11x + 6y = 4330$$

$$\therefore \quad 11x + 6(190) = 4330$$

$$\therefore \quad 11x + 1140 = 4330$$

$$\therefore \quad 11x = 3190$$

$$\therefore \quad x = 290$$

$\therefore$ काँटेवाली एक घड़ी का मूल्य 290 रु. तथा

एक डिजिटल घड़ी का मूल्य 190 रु. है ।

उदा. (3)

एक नाव 6 घंटों में प्रवाह की विपरीत दिशा में 16 किमी तथा प्रवाह की दिशा में 24 किमी दूरी तय करती है ।

वही नाव 13 घंटों में प्रवाह की विपरीत दिशा में 36 किमी और प्रवाह की दिशा में 48 किमी दूरी तय करती है ।

तो बताइए नाव का स्थिर जल में वेग तथा प्रवाह का वेग कितना होगा ?

हल : माना, नाव की स्थिर जल में वेग = x किमी/घंटा, तथा प्रवाह की वेग = y किमी/घंटा ।

$\therefore$ नाव की प्रवाह की दिशा में वेग = $(x + y)$ किमी/घंटा

नाव की प्रवाह की विपरीत दिशा में वेग = $(x - y)$ किमी/घंटा

अब दूरी = वेग $\times$ समय $\quad \therefore$ समय = $\frac{\text{दूरी}}{\text{वेग}}$

नाव को प्रवाह की विपरीत दिशा में 16 किमी दूरी तय करने में लगा समय = $\frac{16}{x-y}$ घंटा

नाव को प्रवाह की दिशा में 24 किमी दूरी तय करने में लगनेवाला समय = $\frac{24}{x+y}$ घंटा

प्रथम शर्त के अनुसार

$$\frac{16}{x-y} + \frac{24}{x+y} = 6 \quad . . . \quad (I)$$

दूसरी शर्त के अनुसार

$$\frac{36}{x-y} + \frac{48}{x+y} = 13 \quad . . . \quad (II)$$

समीकरण (I) तथा (II) में $\frac{1}{x-y} = m$ तथा $\frac{1}{x+y} = n$ रखकर निम्नलिखित समीकरण प्राप्त होते हैं ।

$16m + 24n = 6 \quad . . . \quad (III)$

$36m + 48n = 13 \quad . . . \quad (IV)$

समीकरण (III) तथा (IV) को हल करने पर $m = \frac{1}{4}$, $n = \frac{1}{12}$

m तथा n का मान पुन: रखने पर निम्नलिखित समीकरण प्राप्त होते हैं ।

$x - y = 4$ . . . (V)

$x + y = 12$ . . . (VI)

समीकरण (V) तथा (VI) हल करने पर $x = 8$, $y = 4$ यह मान प्राप्त होता है ।

$\therefore$ नाव की स्थिर जल में वेग = 8 किमी/घंटा और प्रवाह वेग = 4 किमी/घंटा

उदा. (4) कुछ रकम कुछ लड़कों में समान रूप से बाँटी गई । 10 लड़के अधिक हों तो प्रत्येक को 2 रूपये कम मिलते हैं और यदि 15 लड़के कम हों तो प्रत्येक को 6 रु. अधिक मिलते हैं । तो कुल रकम कितनी होगी ? वह रकम कितने लड़कों में बाँटी गई ?

हल : माना लड़कों की संख्या x तथा प्रत्येक को मिलने वाली रकम y है ।

$\therefore$ कुल xy रूपये बाँटे गए ।

प्रथम शर्त के अनुसार

$(x + 10)(y - 2) = xy$

$xy - 2x + 10y - 20 = xy$

$-2x + 10y = 20$

$-x + 5y = 10$ . . . (I)

दूसरी शर्त के अनुसार

$(x - 15)(y + 6) = xy$

$xy + 6x - 15y - 90 = xy$

$6x - 15y = 90$

$2x - 5y = 30$ . . . (II)

समीकरण (I) और समीकरण (II) को जोड़ने पर

$$\begin{array}{rl} & -x + 5y = 10 \\ + & 2x - 5y = 30 \\ \hline & x = 40 \end{array}$$

$x = 40$ का मान समीकरण (I) में रखने पर

$-x + 5y = 10$

$\therefore -40 + 5y = 10$

$\therefore 5y = 50$

$\therefore \quad y = 10$

कुल रकम $= xy = 40 \times 10 = 400$ रु.

$\therefore$ 40 लड़कों को 400 रूपये समान रूप से बाँटे गए ।

उदा. (5) तीन अंकों वाली एक संख्या उसके अंकों के योगफल की 17 गुनी है । उस संख्या में 198 जोड़ने पर प्राप्त संख्या अंकों के विपरीत क्रम में मिलती है । इसी प्रकार इकाई स्थान और सैकड़ा के स्थान के अंकों का योगफल बीच के अंक की अपेक्षा 1 कम है तो वह तीन अंकों वाली संख्या ज्ञात कीजिए।

हल : माना सैकड़ा के स्थान का अंक x तथा इकाई स्थान का अंक y है ।

दहाई के स्थान का (बीच का) अंक = इकाई स्थान और सैकड़े के स्थान के अंकों के योगफल से 1 अधिक है ।

सैकड़ा	दहाई	इकाई
x	$x + y + 1$	y

$\therefore$ तीन अंकोंवाली संख्या $= 100x + 10(x + y + 1) + y$

$= 100x + 10x + 10y + 10 + y \quad = 110x + 11y + 10$

इन संख्याओं के अंकों का योगफल $= x + (x + y + 1) + y = 2x + 2y + 1$

$\therefore$ प्रथम शर्त के अनुसार

तीन अंकोंवाली संख्या $= 17 \times$ (अंको का योग)

$= 110x + 11y + 10 = 17 \times (2x + 2y + 1)$

$110x + 11y + 10 = 34x + 34y + 17$

$76x - 23y = 7 \; . \; . \; . \quad$ (I)

दी गई संख्या में अंक विपरीत (उलटे) क्रम में लिखने पर प्राप्त नई संख्या

$= 100y + 10(x + y + 1) + x = 110y + 11x + 10$

दी गई संख्या $= 110x + 11y + 10$

दी गई दूसरी शर्त के अनुसार, दी गई संख्या + 198 = अंक विपरीत क्रम में रखने पर प्राप्त संख्या

$110x + 11y + 10 + 198 = 110y + 11x + 10$

$99x - 99y = -198$

$x - y = -2$

अर्थात $x = y - 2 \; . \; . \; . \quad$ (II)

समीकरण (II) से प्राप्त x का मान समीकरण (I) में रखने पर,

$\therefore \; 76(y - 2) - 23y = 7$

$\therefore \; 76y - 152 - 23y = 7$

$53y = 159$

$\therefore \quad y = 3 \qquad \therefore$ इकाई स्थान का अंक = 3

$y = 3$ यह मान समीकरण (II) में रखने पर

$x = y - 2$

$\therefore \quad x = 3 - 2 = 1$

$\therefore \qquad x = 1 \qquad \therefore$ सैकड़ा स्थान का अंक = 1

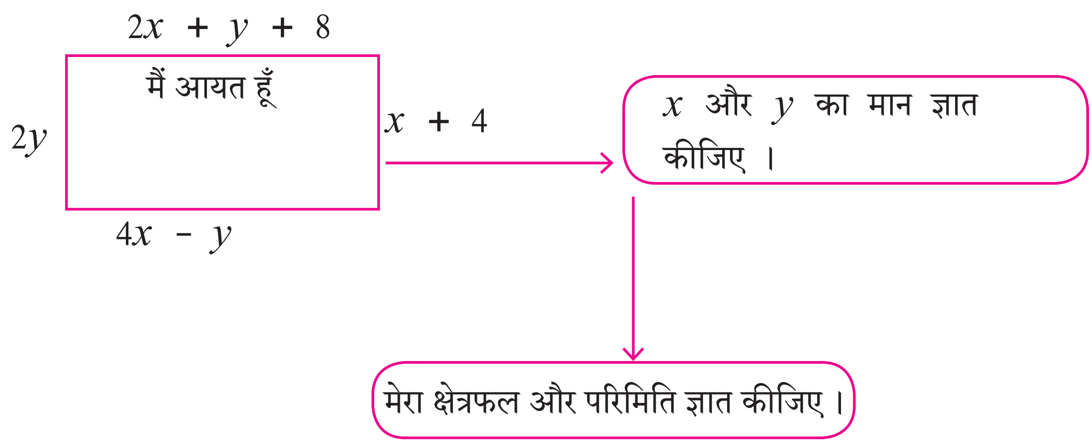
दहाई स्थान का अंक = बीच का अंक = $x + y + 1 = 3 + 1 + 1 = 5$

$\therefore$ दी गई तीन अंकोवाली संख्या = 153.

प्रश्नसंग्रह 1.5

1. दो संख्याओं का अंतर 3 है । बड़ी संख्या का तीन गुना और छोटी संख्या के दुगुने का योगफल 19 हो तो वह संख्या ज्ञात कीजिए ।

2. कृति पूर्ण कीजिए ।



3. पिता की आयु में पुत्र की आयु का दुगुना जोड़ने पर योगफल 70 प्राप्त होता है और पुत्र की आयु में पिता की आयु का दुगुना जोड़ने पर 95 प्राप्त होता है तो दोनों की वर्तमान आयु ज्ञात कीजिए।

4. किसी भिन्न का हर उसके अंश के दुगुने से 4 अधिक है । अंश और हर दोनों में से 6 घटाने पर हर, अंश का 12 गुना होता है तो वह भिन्न ज्ञात कीजिए ।

5. 10 टन क्षमतावाले मालवाहक ट्रक में A और B ऐसे दो प्रकार के बक्से भरे हैं। यदि A प्रकार के 150 बक्से तथा B प्रकार के 100 बक्से भरे हैं तो ट्रक की 10 टन की क्षमता पूर्ण होती है। यदि A प्रकार के 260 बक्से भरें तब उस ट्रक की 10 टन क्षमता को पूर्ण करने के लिए B प्रकार के 40 बक्से लगते हैं, तो प्रत्येक प्रकार के बक्सों का भार ज्ञात कीजिए ।

6.* विशाल ने 1900 किमी के सफर में कुछ दूरी बस से और कुछ दूरी हवाई जहाज से पूरी की । बस का औसत वेग 60 किमी/घंटा है तथा हवाई जहाज का औसत वेग 700 किमी/घंटा है । यदि इस सफर को उसने 5 घंटे में पूरा किया हो तो विशाल ने बस से कितने किमी सफर तय किया ?

प्रकीर्ण प्रश्नसंग्रह 1

1. निम्नलिखित प्रश्नों के लिए दिए गए विकल्पों में से उचित विकल्प को चुनिए ।

(1) $4x + 5y = 19$ का आलेख खींचने के लिए $x = 1$ हो तो y का मान ज्ञात कीजिए ।

(A) 4 (B) 3 (C) 2 (D) -3

(2) x तथा y चरांक वाले युगपत समीकरण के लिए यदि $D_x = 49$, $D_y = -63$ तथा $D = 7$ हो तो x = कितना?

(A) 7 (B) -7 (C) $\frac{1}{7}$ (D) $\frac{-1}{7}$

(3) $\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -7 & -4 \end{vmatrix}$ इस निश्चयक का मान ज्ञात कीजिए ।

(A) -1 (B) -41 (C) 41 (D) 1

(4) $x + y = 3$; $3x - 2y - 4 = 0$ इस युगपत समीकरण को हल करने के लिए D का मान कितना होगा ?

(A) 5 (B) 1 (C) -5 (D) -1

(5) $ax + by = c$; तथा $mx + ny = d$ इस युगपत समीकरण में यदि $an \neq bm$ तो दिए गए समीकरण का

(A) एक ही हल होगा (B) हल नहीं होगा

(C) असंख्य हल होंगे (D) सिर्फ दो हल होंगे

2. $2x - 6y = 3$ इस समीकरण का आलेख खींचने के लिए सारिणी पूर्ण कीजिए ।

x	-5	☐
y	☐	0
(x, y)	☐	☐

3. निम्नलिखित युगपत समीकरणों को आलेख विधि से हल कीजिए ।

(1) $2x + 3y = 12$; $x - y = 1$

(2) $x - 3y = 1$; $3x - 2y + 4 = 0$

(3) $5x - 6y + 30 = 0$; $5x + 4y - 20 = 0$

(4) $3x - y - 2 = 0$; $2x + y = 8$

(5) $3x + y = 10$; $x - y = 2$

4. निम्नलिखित निश्चयकों का मान ज्ञात कीजिए ।

(1) $\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}$ (2) $\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}$ (3) $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$

5. निम्नलिखित युगपत समीकरणों को क्रेमर की पद्धति से हल कीजिए ।

(1) $6x - 3y = -10$; $3x + 5y - 8 = 0$

(2) $4m - 2n = -4$; $4m + 3n = 16$

(3) $3x - 2y = \frac{5}{2}$; $\frac{1}{3}x + 3y = -\frac{4}{3}$

(4) $7x + 3y = 15$; $12y - 5x = 39$

(5) $\frac{x+y-8}{2} = \frac{x+2y-14}{3} = \frac{3x-y}{4}$

6. निम्नलिखित युगपत समीकरण हल कीजिए ।

(1) $\frac{2}{x}+\frac{2}{3y}=\frac{1}{6}$; $\frac{3}{x}+\frac{2}{y}=0$ (2) $\frac{7}{2x+1}+\frac{13}{y+2}=27$; $\frac{13}{2x+1}+\frac{7}{y+2}=33$

(3) $\frac{148}{x}+\frac{231}{y}=\frac{527}{xy}$; $\frac{231}{x}+\frac{148}{y}=\frac{610}{xy}$ (4) $\frac{7x-2y}{xy}=5$; $\frac{8x+7y}{xy}=15$

(5) $\frac{1}{2(3x+4y)}+\frac{1}{5(2x-3y)}=\frac{1}{4}$; $\frac{5}{(3x+4y)}-\frac{2}{(2x-3y)}=-\frac{3}{2}$

7. निम्नलिखित प्रश्न हल कीजिए ।

(1) किसी दो अंकोंवाली संख्या में उसके अंकों का स्थान परस्पर बदलने पर प्राप्त संख्या को जोड़ने पर योगफल 143 आता है। यदि दी गई संख्या के इकाई के स्थान का अंक, दहाई स्थान के अंक से 3 अधिक हो तो दी गई मूल संख्या कौन-सी है ? उत्तर ज्ञात करने के लिए निम्नलिखित कृति पूर्ण कीजिए ।

माना इकाई स्थान का अंक = x

दहाई स्थान का अंक = y

$\therefore$ मूल संख्या = $\square\ y + x$

अंकों के परस्पर स्थान परिवर्तन से प्राप्त संख्या = $\square\ x + y$

प्रथम शर्त के अनुसार : दो अंकोंवाली संख्या + अंकों के स्थान परिवर्तन से प्राप्त संख्या = 143

$\boxed{10x + y} + \square = 143$

$\square\ x + \square\ y = 143$

$x + y = \square$ . . . . . (I)

दूसरी शर्त के अनुसार,

इकाई स्थान का अंक = दहाई स्थान का अंक + 3

$x = \square + 3$

$\therefore\ x - y = 3$ . . . . . (II)

(I) तथा (II) को जोड़ने पर

$$2x = \square \qquad \therefore\ x = 8$$

$x = 8$ समीकरण (I) में रखने पर

$$x + y = 13$$
$$8 + \square = 13$$
$$y = \square$$

मूल संख्या $= 10\,y + x$

$$= \square + 8 = 58$$

(2) कांताबेन ने दुकान से डेढ़ किलो चाय की पत्ती तथा पाँच किलो शक्कर खरीदी । दुकान जाने-आने के लिए उन्हें रिक्शा का किराया 50 रूपये देना पड़ा । ऐसे कुल 700 रूपये खर्च हुए । बाद में उन्हें समझ में आया कि यह वस्तुएँ ऑनलाइन ऑर्डर देकर भी उसी दर पर ही घर पहुँच मिलती हैं । अगले महीने उन्होंने 2 किलोग्राम चाय की पत्ती तथा 7 किलोग्राम शक्कर ऑनलाईन मँगवाई तब उन्होंने 880 रूपये खर्च किए । चाय की पत्ती और शक्कर का प्रति किलोग्राम दर ज्ञात कीजिए।

(3)

अनुष्का के पास 100 रुपयों के नोट x तथा 50 रुपयों के नोट y

अनुष्का को आनंद द्वारा दिए गए ऊपरोक्त नोटों का रुपयों में मान 2500 है ।
समीकरण I

आनंद ने उसे नोटों की संख्या परस्पर बदल कर पैसे दिए होते तो वह राशि 500 रुपये कम हो जाती ।
समीकरण II

समीकरण हल करके उत्तर लिखिए ।

100 रुपये के नोटों की संख्या $\square$, 50 रूपये के नोटों की संख्या $\square$

(4) मनीषा और सविता की वर्तमान आयु का योगफल 31 वर्ष है । 3 वर्ष पूर्व मनीषा की आयु सविता की उस समय की आयु की चौगुना थी, तो दोनों की वर्तमान आयु ज्ञात कीजिए।

(5) एक कारखाने में कुशल और अकुशल मजदूरों के मजदूरी का अनुपात 5:3 है । एक कुशल और एक अकुशल मजदूर के एक दिन की कुल मजदूरी 720 रूपये है । तो प्रत्येक कुशल मजदूर और अकुशल मजदूरों की मजदूरी ज्ञात कीजिए ।

(6) एक सीधे रास्ते पर A और B दो स्थान हैं । उनके बीच दूरी 30 किमी है । हमीद मोटरसाइकिल से A से B दिशा जाने के लिए निकलता है । उसी समय जोसफ B से A की दिशा में जाने के लिए निकलता है वे दोनों 20 मिनट में एक-दूसरे से मिलते हैं । यदि उसी समय जोसेफ निकलकर विपरीत दिशा में गया होता, तो उसे हमीद तीन घंटे बाद मिलता तो प्रत्येक की गति ज्ञात कीजिए ।

2 वर्गसमीकरण

आओ जानें

- वर्गसमीकरण : परिचय
- वर्गसमीकरण हल करने की विधि
- वर्गसमीकरण के मूल का स्वरूप
- मूल तथा गुणांको में संबंध
- वर्गसमीकरण का उपयोजन

थोड़ा याद करें

विद्‌यार्थी मित्रों, कक्षा नौंवी में हमने बहुपद का अध्ययन किया है । इसमें बहुपद के कोटी के अनुसार होने वाले प्रकार का अध्ययन किया है। एक चरांक वाले जिस बहुपद की कोटि एक होती है, उसे रेखीय बहुपद और जिसकी कोटि दो होती है, उसे वर्ग (द्‌विघात) बहुपद कहते हैं ।

कृति : निम्न बहुपदों का रेखीय बहुपद और वर्ग बहुपद में वर्गीकरण करें ।

$5x + 9$, $x^2 + 3x - 5$, $3x - 7$, $3x^2 - 5x$, $5x^2$

रेखीय बहुपद	वर्ग बहुपद

अब हम वर्ग बहुपद का मान 0 रखने पर जो समीकरण मिलेगा उसका अध्ययन करेंगे । ऐसे समीकरण को वर्ग समीकरण कहते है । हम दैनिक जीवन में अनेक बार इस वर्ग समीकरण का उपयोग करते है ।

उदा. संकेत ने 200 वर्ग मी. क्षेत्रफलवाला एक आयताकार भूखंड खरीदा । भूखंड की लंबाई, चौड़ाई से 10 मीटर से अधिक हो तो उस भूखंड की लबांई तथा चौड़ाई कितनी होगी ?

माना भूखंड की लंबाई x मीटर है ।

$\therefore$ लंबाई = $(x + 10)$ मीटर ।

आयताकार भूखंड का क्षेत्रफल = लंबाई $\times$ चौड़ाई

$\therefore 200 = (x + 10) \times x$

$\therefore 200 = x^2 + 10x$

अर्थात $x^2 + 10x = 200$

$\therefore \; x^2 + 10x - 200 = 0$

अब $x^2 + 10x - 200 = 0$ यह वर्गसमीकरण हल कर भूखंड की चौड़ाई तथा लंबाई निश्चित कर सकते हैं । वर्गसमीकरण कैसे हल करना है इसका अभ्यास करेंगे ।

थोड़ा याद करें

कृति : $x^2 + 3x - 5$, $3x^2 - 5x$, $5x^2$; इन बहुपदों को घातांक स्वरूप में लिखकर उनके पदों के गुणांकों का निरीक्षण कर रिक्त स्थान भरो ।

$x^2 + 3x - 5$, $3x^2 - 5x + 0$, $5x^2 + 0x + 0$

- ✦ x^2 का गुणांक क्रमश : [1], [3] , [+5] है । अर्थात 0 नहीं ।
- ✦ x का गुणांक क्रमश : 3, [ ] तथा [ ] है ।
- ✦ अचरांक क्रमश : [ ], [ ] तथा [ ] है ।

यहाँ दूसरे तथा तीसरे बहुपद में अचरांक पद 0 है ।

आओ जानें

वर्गसमीकरण का मानक रुप (Standard form of quadratic equation)

जिस एक चरांक वाले समीकरण में सभी घातांक पूर्ण संख्या हो तथा चर का अधिकतम घात 2 हो तो वह वर्ग समीकरण होता है ।

उसे मानक रूप में $ax^2 + bx + c = 0$ लिखते है ।

$ax^2 + bx + c = 0$ में a, b तथा c वास्तविक संख्याए होने से a यह शून्येतर संख्या होती है ।

$ax^2 + bx + c = 0$ इस स्वरूप वाले समीकरण को वर्ग समीकरण का मानक रूप कहते है ।

निम्नलिखित सारिणी पूर्ण करो ।

वर्गसमीकरण	मानक रूप	a	b	c
$x^2 - 4 = 0$	. . . .	1	0	4
$y^2 = 2y - 7$	. . . .	. . .	. . .	. . .
$x^2 + 2x = 0$	. . . .	. . .	. . .	. . .

हल किए गए उदाहरण

उदा. निम्नलिखित में से कौन-से समीकरण वर्ग समीकरण है निश्चित करें ।

(1) $3x^2 - 5x + 3 = 0$ (2) $9y^2 + 5 = 0$

(3) $m^3 - 5m^2 + 4 = 0$ (4) $(l + 2)(l - 5) = 0$

हल : (1) $3x^2 - 5x + 3 = 0$ इसमें एक ही चरांक है । चरांक का सबसे बड़ा घात 2 है ।

$\therefore$ यह समीकरण वर्गसमीकरण है ।

(2) $9y^2 + 5 = 0$ में चरांक का सबसे बड़ा घात 2 है ।

$\therefore$ यह समीकरण वर्ग समीकरण है ।

(3) $m^3 - 5m^2 + 4 = 0$ में चरांक का सबसे बड़ा घात 2 नहीं है ।

$\therefore$ यह समीकरण वर्गसमीकरण नहीं ।

(4) $(l + 2)(l - 5) = 0$

$\therefore l(l - 5) + 2(l - 5) = 0$

$\therefore l^2 - 5l + 2l - 10 = 0$

$\therefore l^2 - 3l - 10 = 0$ में चरांक का सबसे बड़ा घात 2 है ।

$\therefore$ दिया गया समीकरण वर्गसमीकरण है ।

आओ जानें

वर्ग समीकरण के हल (Roots of a quadratic equations)

हम ने पिछली कक्षा में देखा है कि x का मान a रखने पर बहुपद का मान शून्य प्राप्त होता हो तो $(x-a)$ यह उस बहुपद का गुणनखंड होता है। अर्थात $p(x)$ यह बहुपद है और $p(a) = 0$ हो तो $(x-a)$ यह $p(x)$ का गुणनखंड होता है। इस स्थिति में a यह $p(x) = 0$ का एक हल है अथवा $p(x) = 0$ का मूल है ऐसा कहा जाता है ।

उदाहरणार्थ,

$x^2 + 5x - 6$ इस बहुपद में $x = -6$ रखने पर

$x^2 + 5x - 6 = (-6)^2 + 5 \times (-6) - 6$

$= 36 - 30 - 6 \quad = 0$

$\therefore x = -6$ यह इस वर्ग समीकरण का हल है

अर्थात -6 यह संख्या $x^2 + 5x - 6 = 0$ इस समीकरण का एक मूल (हल) है ।

$x^2 + 5x - 6$ इस बहुपद में $x = 2$ रखने पर

$x^2 + 5x - 6 = 2^2 + 5 \times 2 - 6$

$= 4 + 10 - 6$

$= 8 \quad \neq 0$

$\therefore x = 2$ यह संख्या $x^2 + 5x - 6 = 0$ इस समीकरण का हल नहीं है ।

हल किए गए उदाहरण

उदा. $2x^2 - 7x + 6 = 0$ इस समीकरण का (i) $x = \frac{3}{2}$ और (ii) $x = -2$ हल है क्या यह निश्चित करो ।

हल: (i) $2x^2 - 7x + 6$ इस बहुपद में $x = \frac{3}{2}$ मान रखने पर बहुपद का मान ज्ञात करेंगे ।

$$2x^2 - 7x + 6 = 2\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 7\left(\frac{3}{2}\right) + 6$$

$$= 2 \times \frac{9}{4} - \frac{21}{2} + 6$$

$$= \frac{9}{2} - \frac{21}{2} + \frac{12}{2} = 0$$

$\therefore$ इस समीकरण का $x = \frac{3}{2}$ एक हल है ।

(ii) $2x^2 - 7x + 6$ इस बहुपद में $x = -2$ यह मान रखकर बहुपद का मान ज्ञात करेंगे ।

$$2x^2 - 7x + 6 = 2(-2)^2 - 7(-2) + 6$$

$$= 2 \times 4 + 14 + 6$$

$$= 28 \neq 0$$

$\therefore$ $x = -2$ यह समीकरण का हल नही है ।

कृति : यदि $x = 5$ यह $kx^2 - 14x - 5 = 0$ इस समीकरण का एक मूल हो तो k का मान ज्ञात करने लिए निम्न कृति पूर्ण करें ।

हल : $kx^2 - 14x - 5 = 0$ इस वर्गसमीकरण का एक मूल $\square$ है ।

$\therefore$ $x = \square$ यह मान वर्गसमीकरण में रखने पर

$k\square^2 - 14\square - 5 = 0$

$\therefore$ $25k - 70 - 5 = 0$

$25k - \square = 0$

$25k = \square$

$\therefore$ $k = \frac{\square}{\square} = 3$

इसे ध्यान में रखें

(1) $ax^2 + bx + c = 0$ यह वर्गसमीकरण का मानक रूप है । इसमें a, b तथा c वास्तविक संख्या होने पर a यह शून्येतर संख्या होती है ।

(2) चरांकों के जिस मान के लिए वर्गसमीकरण के दोनों पक्ष समान होते हैं (अर्थात वर्गसमीकरण का समाधान करते हैं) उस मान को वर्गसमीकरण का हल या वर्गसमीकरण का मूल कहते हैं ।

प्रश्नसंग्रह 2.1

(1) कोई भी दो वर्गसमीकरण लिखिए ।

(2) निम्नलिखित समीकरणों में से कौन-से वर्गसमीकरण हैं ?

(1) $x^2 + 5x - 2 = 0$ (2) $y^2 = 5y - 10$ (3) $y^2 + \frac{1}{y} = 2$

(4) $x + \frac{1}{x} = -2$ (5) $(m + 2)(m - 5) = 0$ (6) $m^3 + 3m^2 - 2 = 3m^3$

(3) निम्नलिखित समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ इस स्वरूप में लिखिए, तथा प्रत्येक के लिए a, b, c का मान ज्ञात करें ।

(1) $2y = 10 - y^2$ (2) $(x - 1)^2 = 2x + 3$ (3) $x^2 + 5x = -(3 - x)$

(4) $3m^2 = 2m^2 - 9$ (5) $p(3 + 6p) = -5$ (6) $x^2 - 9 = 13$

(4) वर्गसमीकरण के साथ दिए गए चर का मान, इन समीकरणों का मूल है क्या ? निश्चित करें ।

(1) $x^2 + 4x - 5 = 0$, $x = 1, -1$ (2) $2m^2 - 5m = 0$, $m = 2, 5/2$

(5) यदि $x = 3$ यह $kx^2 - 10x + 3 = 0$ इस वर्गसमीकरण का एक मूल है, तो k का मान कितना होगा ?

(6) $5m^2 + 2m + k = 0$ इस वर्गसमीकरण का एक मूल $\frac{-7}{5}$ हो तो k का मान ज्ञात करने के लिए निम्न कृति पूरी करें ।

हल : $5m^2 + 2m + k = 0$ इस वर्गसमीकरण का एक मूल ☐ है ।

$\therefore m =$ ☐ ऊपरोक्त वर्गसमीकरण में रखने पर

$5 \times \square^2 + 2 \times \square + k = 0$

$\square + \square + k = 0$

$\square + k = 0$

$k = \square$

थोड़ा याद करें

हमने पिछले वर्ष बहुपद प्रकरण में $x^2 - 4x - 5$, $2m^2 - 5m$, $a^2 - 25$ ऐसे गुणनखंड ज्ञात करने की विधि का अध्ययन किया है । निम्नलिखित कृति कर उसका पुनरावृती करेंगे ।

कृति : नीचे दिए गए बहुपदों के गुणनखंड ज्ञात करेंगे ।

(1) $x^2 - 4x - 5$

$= \underline{x^2 - 5x} + \underline{1x - 5}$

(−5 → −5, +1)

$= x(\ldots\ldots) + 1(\ldots\ldots)$

$= (\ldots\ldots)(\ldots\ldots)$

(2) $2m^2 - 5m$

$= \ldots\ldots\ldots$

(3) $a^2 - 25$

$= a^2 - 5^2$

$= (\ldots\ldots)(\ldots\ldots)$

आओ जानें

गुणनखंड विधि से वर्गसमीकरण हल करना

(Solution of a quadratic equation by factorisation)

हमनें चर का भिन्न- भिन्न मान रखकर वर्गसमीकरण का हल निश्चित किया है । किंतु यह अधिक समय लगानेवाली विधि है । इसलिए हम इस भाग में वर्गसमीकरण का मूल गुणनखंड विधि से ज्ञात करने का अध्ययन करेंगे ।

$$x^2 - 4x - 5 = (x - 5)(x + 1)$$

यहाँ $(x - 5)$ तथा $(x + 1)$ यह वर्ग (द्विघात) बहुपद $x^2 - 4x - 5$ के दो रेखीय गुणनखंड है । इसलिए $x^2 - 4x - 5$ इस बहुपद से मिलने वाले $x^2 - 4x - 5 = 0$ को निम्नालिखित प्रकार से लिख सकते हैं ।

$$(x - 5)(x + 1) = 0$$

यदि दो संख्याओं का गुणनफल शून्य हो तो उन दोनों संख्याओं में से कम से कम एक संख्या शून्य होती है।

$\therefore \; x - 5 = 0$ या $x + 1 = 0$

$\therefore \; x = 5$ या $x = -1$

$\therefore$ दिए गए वर्गसमीकरण के मूल 5 और -1 है ।

यह उदहरण हल करते हुए हमने बहुपद के दो रेखीय गुणनखंड प्राप्त किए । इस विधि से वर्गसमीकरण को हल करने की विधि को गुणनखंड विधि कहते हैं ।

हल किए गए उदाहरण

उदा. निम्न वर्गसमीकरणों को गुणनखंड विधि से हल करो ।

(1) $m^2 - 14m + 13 = 0$ (2) $3x^2 - x - 10 = 0$

(3) $3y^2 = 15y$ (4) $x^2 = 3$ (5) $6\sqrt{3}x^2 + 7x = \sqrt{3}$

(1) $m^2 - 14m + 13 = 0$

(13 → -13, -1)

$\therefore \; m^2 - 13m - 1m + 13 = 0$

$\therefore \; m(m - 13) - 1(m - 13) = 0$

$\therefore \; (m - 13)(m - 1) = 0$

$\therefore \; m - 13 = 0$ या $m - 1 = 0$

$\therefore \; m = 13$ या $m = 1$

$\therefore$ दिए गए वर्गसमीकरण के मूल 13 और 1 हैं ।

(2) $3x^2 - x - 10 = 0$

($3 \times (-10) = -30$ → -6, $+5$)

$\therefore \; 3x^2 - 6x + 5x - 10 = 0$

$\therefore \; 3x(x - 2) + 5(x - 2) = 0$

$\therefore \; (3x + 5)(x - 2) = 0$

$\therefore \; (3x + 5) = 0$ या $(x - 2) = 0$

$\therefore \; x = -\frac{5}{3}$ या $x = 2$

$\therefore$ दिए गए वर्गसमीकरण के मूल $-\frac{5}{3}$ और 2 हैं ।

(3) $3y^2 = 15y$

$\therefore\ 3y^2 - 15y = 0$

$\therefore\ 3y(y-5) = 0$

$\therefore\ 3y = 0$ या $(y-5) = 0$

$\therefore\ y = 0$ या $y = 5$

$\therefore$ दिए गए वर्गसमीकरण के मूल 0 और 5 हैं ।

(4) $x^2 = 3$

$\therefore\ x^2 - 3 = 0$

$\therefore\ x^2 - (\sqrt{3})^2 = 0$

$\therefore\ (x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3}) = 0$

$\therefore (x+\sqrt{3}) = 0$ या $(x-\sqrt{3}) = 0$

$\therefore\ x = -\sqrt{3}$ या $x = \sqrt{3}$

$\therefore$ दिए गए वर्गसमीकरण के मूल $-\sqrt{3}$ और $\sqrt{3}$ हैं ।

(5) $6\sqrt{3}x^2 + 7x = \sqrt{3}$

$\therefore\ 6\sqrt{3}x^2 + 7x - \sqrt{3} = 0$

$\therefore\ 6\sqrt{3}x^2 + 9x - 2x - \sqrt{3} = 0$

$\therefore 3\sqrt{3}x(2x+\sqrt{3}) - 1(2x+\sqrt{3}) = 0$

$\therefore\ (2x+\sqrt{3})(3\sqrt{3}x - 1) = 0$

$\therefore 2x + \sqrt{3} = 0$ या $3\sqrt{3}x - 1 = 0$

$\therefore\ 2x = -\sqrt{3}$ या $3\sqrt{3}x = 1$

$\therefore\ x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ या $x = \frac{1}{3\sqrt{3}}$

$6\sqrt{3} \times -\sqrt{3} = -18$

-18: 9, -2

$9 = 3\sqrt{3} \times \sqrt{3}$

$\therefore$ वर्गसमीकरण के मूल $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ और $\frac{1}{3\sqrt{3}}$ हैं ।

प्रश्नसंग्रह 2.2

निम्न वर्गसमीकरणों को गुणनखंड विधि से हल करें ।

(1) $x^2 - 15x + 54 = 0$ (2) $x^2 + x - 20 = 0$ (3) $2y^2 + 27y + 13 = 0$

(4) $5m^2 = 22m + 15$ (5) $2x^2 - 2x + \frac{1}{2} = 0$ (6) $6x - \frac{2}{x} = 1$

(7) $\sqrt{2}x^2 + 7x + 5\sqrt{2} = 0$ इस वर्गसमीकरण को गुणनखंड विधि से हल करने के लिए निम्न कृति पूरी करें।

हल : $\sqrt{2}x^2 + 7x + 5\sqrt{2} = 0$

$\sqrt{2}x^2 + \square + \square + 5\sqrt{2} = 0$

$x(\ .\ .\ .\ .\ .\ ) + \sqrt{2}(\ .\ .\ .\ .\ .\ ) = 0$

$(\ldots\ldots)(x + \sqrt{2}) = 0$

$(\ldots\ldots) = 0$ या $(x + \sqrt{2}) = 0$

$\therefore x = \square$ या $x = -\sqrt{2}$

$\therefore$ वर्गसमीकरण के मूल $\square$ और $-\sqrt{2}$ है ।

(8*) $3x^2 - 2\sqrt{6}\,x + 2 = 0$ (9) $2m(m - 24) = 50$

(10) $25m^2 = 9$ (11) $7m^2 = 21m$ (12) $m^2 - 11 = 0$

आओ जानें

पूर्ण वर्ग विधि से वर्गसमीकरण हल करना
(Solution of a quadratic equation by completing the square)

शिक्षक : $x^2 + 10x + 2 = 0$ यह वर्गसमीकरण है या नहीं ?

योगेश : जी श्रीमान, क्योंकि $ax^2 + bx + c = 0$ इस स्वरूप में है यहाँ x इस चरांक का अधिक-से-अधिक घात 2 है । a का मान शून्य नहीं हैं ।

शिक्षक : क्या इस समीकरण को आप हल कर सकते हो ?

वर्षा : नहीं श्रीमान, क्योंकि 2 इस संख्या का गुणनखंड नहीं बता सकते जिनका योगफल 10 होगा ।

शिक्षक : इसीलिए ऐसे उदाहरणों को हल करने के लिए भिन्न विधि का उपयोग करना होगा । इस विधि को समझेंगे।

$x^2 + 10x$ इस राशि में योग्य पद जोड़ने पर एक पूर्ण वर्ग प्राप्त होगा ।

यदि $x^2 + 10x + k = (x + a)^2$

तो $x^2 + 10x + k = x^2 + 2ax + a^2$

$\therefore 10 = 2a$ या $a = 5$ और $k = a^2 = 25$

$\therefore a = 5$ और इसलिए $k = a^2 = (5)^2 = 25$

अब $x^2 + 10x + 2 = (x + 5)^2 - 25 + 2 = (x + 5)^2 - 23$

$x^2 + 10x + 2 = 0$ यह समीकरण क्या अब आप हल कर सकते हो ?

रेहाना : जी श्रीमान, समीकरण के बाँए पक्ष में दो वर्गों के घटाने के रूप में आने से इसके गुणनखंड ज्ञात कर सकते हैं ।

$(x + 5)^2 - (\sqrt{23})^2 = 0$

$\therefore (x + 5 + \sqrt{23})(x + 5 - \sqrt{23}) = 0$

$\therefore x + 5 + \sqrt{23} = 0$ या $x + 5 - \sqrt{23} = 0$

$\therefore x = -5 - \sqrt{23}$ या $x = -5 + \sqrt{23}$

हमीद : श्रीमान, हल करने की एक भिन्न विधि मुझे ध्यान में आयी है ।

$(x + 5)^2 - (\sqrt{23})^2 = 0$

$\therefore (x + 5)^2 = (\sqrt{23})^2$

$\therefore x + 5 = \sqrt{23}$ या $x + 5 = -\sqrt{23}$

$\therefore x = -5 + \sqrt{23}$ या $x = -5 - \sqrt{23}$

हल किए गए उदाहरण

उदा. (1) हल करो : $5x^2 - 4x - 3 = 0$

हल : समीकरण में वर्ग राशि का रूपांतरण, दो वर्गों के जोड़- घटाना के रूप में लाने के लिए x^2 का गुणांक 1 सहजता से होगा । इसलिए दिए गए समीकरण को 5 से भाग देने पर

$x^2 - \frac{4}{5}x - \frac{3}{5} = 0$

अब यदि $x^2 - \frac{4}{5}x + k = (x - a)^2$ तब $x^2 - \frac{4}{5}x + k = x^2 - 2ax + a^2$.

$x^2 - \frac{4}{5}x$ की तुलना $x^2 - 2ax$ से करने पर

$-2ax = -\frac{4}{5}x \quad \therefore a = \frac{1}{2} \times \frac{4}{5} = \frac{2}{5}$

$\therefore k = a^2 = \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{4}{25}$

अब $x^2 - \frac{4}{5}x - \frac{3}{5} = 0$

$\therefore x^2 - \frac{4}{5}x + \frac{4}{25} - \frac{4}{25} - \frac{3}{5} = 0$

$\therefore \left(x - \frac{2}{5}\right)^2 - \left(\frac{4}{25} + \frac{3}{5}\right) = 0$

$\therefore \left(x - \frac{2}{5}\right)^2 - \left(\frac{19}{25}\right) = 0$

$\therefore \left(x - \frac{2}{5}\right)^2 = \left(\frac{19}{25}\right)$

$\therefore x - \frac{2}{5} = \frac{\sqrt{19}}{5}$ या $x - \frac{2}{5} = -\frac{\sqrt{19}}{5}$

$\therefore x = \frac{2}{5} + \frac{\sqrt{19}}{5}$ या $x = \frac{2}{5} - \frac{\sqrt{19}}{5}$

$\therefore x = \frac{2+\sqrt{19}}{5}$ या $x = \frac{2-\sqrt{19}}{5}$

$\therefore$ वर्गसमीकरण के मूल $\frac{2+\sqrt{19}}{5}$ और $\frac{2-\sqrt{19}}{5}$

> समीकरण $x^2 + bx + c = 0$ इस स्वरूप में हों तो
> $x^2 - bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 + c = 0$
> इस स्वरूप में
> अर्थात $\left(x + \frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - c$ इस रूप में लिख सकते हैं ।

उदा. (2) हल करो : $x^2 + 8x - 48 = 0$

विधि I : पूर्ण वर्ग विधि

$x^2 + 8x - 48 = 0$

$\therefore x^2 + 8x + 16 - 16 - 48 = 0$

$\therefore (x + 4)^2 - 64 = 0$

$\therefore (x + 4)^2 = 64$

$\therefore x + 4 = 8$ या $x + 4 = -8$

$\therefore x = 4$ या $x = -12$

विधि II : गुणनखंड विधि

$x^2 + 8x - 48 = 0$

$\therefore x^2 + 12x - 4x - 48 = 0$

$\therefore x(x + 12) - 4(x + 12) = 0$

$\therefore (x + 12)(x - 4) = 0$

$\therefore x + 12 = 0$ या $x - 4 = 0$

$\therefore x = -12$ या $x = 4$

प्रश्नसंग्रह 2.3

निम्न वर्गसमीकरण पूर्ण वर्ग विधि से हल करें ।

(1) $x^2 + x - 20 = 0$ (2) $x^2 + 2x - 5 = 0$ (3) $m^2 - 5m = -3$

(4) $9y^2 - 12y + 2 = 0$ (5) $2y^2 + 9y + 10 = 0$ (6) $5x^2 = 4x + 7$

आओ जानें

वर्ग समीकरण हल करने का सूत्र (Formula for solving a quadratic equations)

$ax^2 + bx + c$, इस राशि को a से भाग देनेपर ($\because a \neq 0$) $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}$ यह राशि मिलेगी ।

$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}$ इस राशि को दो वर्गों के घटाने के रूप में रख कर $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$ इस समीकरण का अर्थात $ax^2 + bx + c = 0$ इस समीकरण का सामान्य हल या मूल ज्ञात करते हैं ।

$ax^2 + bx + c = 0 \ldots$ (I)

$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \ldots\ldots$ दोनों पक्षों में a से भाग देनेपर

$$\therefore x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} = 0$$

$$\therefore \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0$$

$$\therefore \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2} = 0 \qquad \therefore \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

$$\therefore\ x+\frac{b}{2a} = \sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}} \text{ या } x+\frac{b}{2a} = -\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$$

$$\therefore\ x = -\frac{b}{2a}+\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}} \text{ या } x = -\frac{b}{2a}-\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$$

$$\therefore x = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \text{ या } x = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

इस हल को संक्षेप में $x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ ऐसा लिखते है और उसे α (अल्फा), β (बीटा) इन अक्षरों से दिखाते हैं। $\therefore\ \alpha = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ और $\beta = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ . . . . (I)

$ax^2 + bx + c = 0$ इस समीकरण में a, b, c का मान $\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ इस राशि में रखकर, सरल रुप देनेपर समीकरण के हल प्राप्त होते हैं। इसलिए $x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ वर्ग समीकरण हल करने का सूत्र कहते हैं। (वर्गसमीकरण के दो हलों में से किसी भी एक हल को किसी भी चिह्न द्‌वारा दर्शा सकते हैं।)

कथन (I) के बजाय $\alpha = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ और $\beta = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ . . . . (II)

ऐसा माना जाता है।

हल किए गए उदाहरण

सूत्रों का उपयोग कर निम्न वर्गसमीकरण हल करें।

उदा.(1) $m^2 - 14m + 13 = 0$

हल : $m^2 - 14m + 13 = 0$ की

$ax^2 + bx + c = 0$ तुलना करने पर

$a = 1,\ b = -14,\ c = 13,$

$\therefore b^2 - 4ac = (-14)^2 - 4 \times 1 \times 13$

$= 196 - 52$

$= 144$

$$m = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-(-14)\pm\sqrt{144}}{2\times1}$$

$$= \frac{14\pm12}{2}$$

$\therefore m = \frac{14+12}{2}$ या $m = \frac{14-12}{2}$

$\therefore m = \frac{26}{2}$ या $m = \frac{2}{2}$

$\therefore m = 13$ या $m = 1$

$\therefore$ वर्गसमीकरण के मूल 13 और 1 है।

उदा. (2) $x^2 + 10x + 2 = 0$

हल : $x^2 + 10x + 2 = 0$ की

$ax^2 + bx + c = 0$ तुलना करने पर

$a = 1,\ b = 10,\ c = 2,$

$\therefore b^2 - 4ac = (10)^2 - 4 \times 1 \times 2$

$= 100 - 8$

$= 92$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-10 \pm \sqrt{92}}{2 \times 1}$$

$$x = \frac{-10 \pm \sqrt{4 \times 23}}{2}$$

$$= \frac{-10 \pm 2\sqrt{23}}{2}$$

$$= \frac{2(-5 \pm \sqrt{23})}{2}$$

$\therefore \quad x = -5 \pm \sqrt{23}$

$\therefore \quad x = -5 + \sqrt{23}$ या $x = -5 - \sqrt{23}$

$\therefore$ वर्गसमीकरण के मूल $-5 + \sqrt{23}$ और $-5 - \sqrt{23}$ हैं।

उदा. (3) $x^2 - 2x - 3 = 0$

हल : दिए गए समीकरण में से $ax^2 + bx + c = 0$ से तुलना करने पर

$a = 1,\ b = -2,\ c = -3,$

$\therefore b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 4 + 12 = 16$

$\therefore \quad x = \frac{-(-2) + \sqrt{16}}{2}$ या $x = \frac{-(-2) - \sqrt{16}}{2}$

$= \frac{2+4}{2}$ या $\frac{2-4}{2}$

$= 3$ या -1

अधिक जानकारी हेतु :

$x^2 - 2x - 3 = 0$ इसी वर्गसमीकरण को आलेख की सहायता से हल किया गया है उसे समझेंगे ।

$x^2 - 2x - 3 = 0$ अर्थात $x^2 = 2x + 3$

x की जिस मान का $x^2 = 2x + 3$ समीकरण संपुष्ट करता है यह मान इस समीकरण का हल होगा

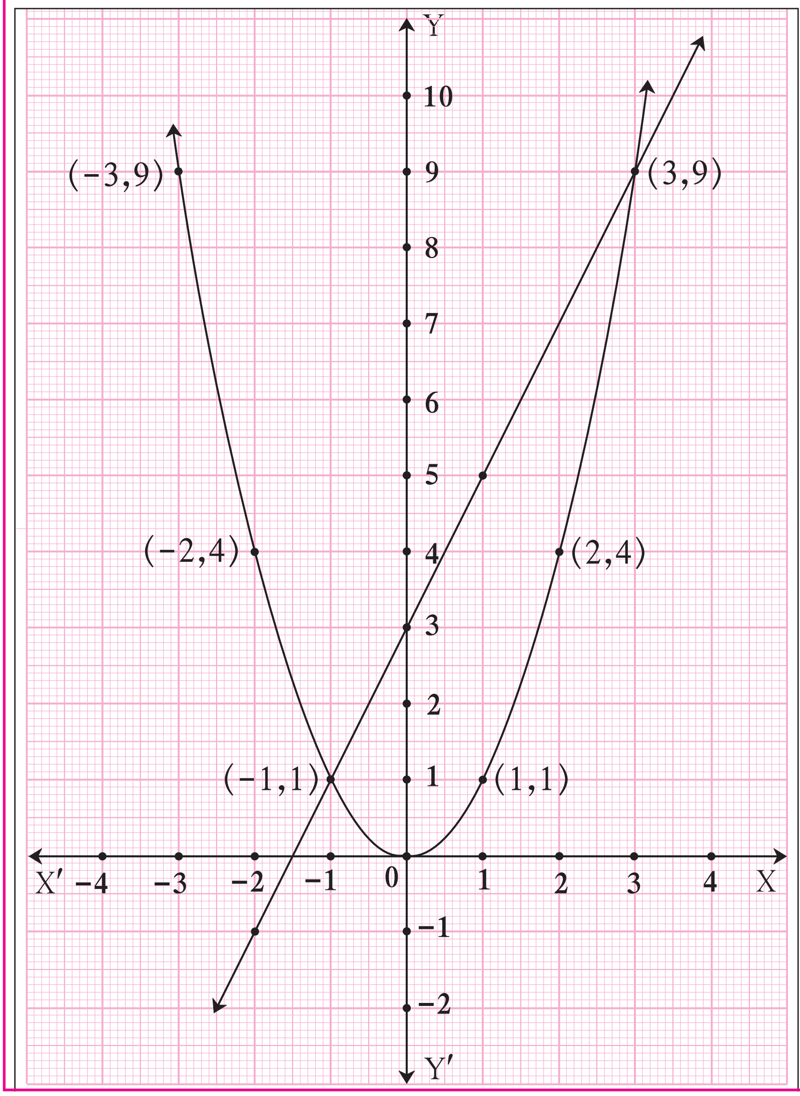
$y = x^2 = 2x + 3$ में माना $y = x^2$ और $y = 2x + 3$ इस समीकरण का आलेख खीचेंगे ।

$y = x^2$

x	3	2	1	0	−1	−2	−3
y	9	4	1	0	1	4	9

$y = 2x + 3$

x	−1	0	1	−2
y	1	3	5	−1



यह आलेख परस्पर (−1, 1) और (3, 9) इन बिंदुओ मे प्रतिच्छेदित करते हैं ।

$\therefore x^2 = 2x + 3$ इस समीकरण का अर्थात $x^2 - 2x - 3 = 0$ का हल $x = -1$ या $x = 3$ होगा

संलग्न आकृति में $y = x^2$ और $y = 2x + 3$ का आलेख खींचा गया हैं

इनके प्रतिच्छेदित बिंदु से $x^2 = 2x + 3$ इस समीकरण का अर्थात $x^2 - 2x - 3 = 0$ का हल कैसे प्राप्त होगा इसे समझेंगे ।

उदा. (4) $25x^2 + 30x + 9 = 0$

हल : $25x^2 + 30x + 9 = 0$ की

$ax^2 + bx + c = 0$ तुलना करने पर

$a = 25,\ b = 30,\ c = 9,$

$\therefore b^2 - 4ac = (30)^2 - 4 \times 25 \times 9$

$= 900 - 900 \quad = 0$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-30 \pm \sqrt{0}}{2 \times 25}$$

$$\therefore \quad x = \frac{-30 + 0}{50} \text{ या } x = \frac{-30 - 0}{50}$$

$$\therefore \quad x = -\frac{30}{50} \text{ या } x = -\frac{30}{50}$$

$$\therefore \quad x = -\frac{3}{5} \text{ या } x = -\frac{3}{5}$$

ध्यान दें, कि $25x^2 + 30x + 9 = 0$ इस समीकरण के दोनों मूल समान हैं ।

इसी प्रकार $25x^2 + 30x + 9 = 0$

$(5x + 3)^2 = 0$ इसे ध्यान रखे ।

उदा. (5) $x^2 + x + 5 = 0$

हल: $x^2 + x + 5 = 0$ की

$ax^2 + bx + c = 0$ से तुलना करने पर

$a = 1,\ b = 1,\ c = 5,$

$\therefore b^2 - 4ac = (1)^2 - 4 \times 1 \times 5$

$= 1 - 20$

$= -19$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{-19}}{2 \times 1}$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{-19}}{2}$$

किंतु $\sqrt{-19}$ यह वास्तविक संख्या नहीं है । इसलिए दिए गए वर्गसमीकरण के मूल वास्तविक संख्या नहीं हैं ।

कृति : $2x^2 + 13x + 15 = 0$ इस वर्गसमीकरण को गुणनखंड विधि पूर्ण वर्ग विधि तथा सूत्र विधि का उपयोग कर हल करें । उत्तर समान ही प्राप्त होगा जांच करें ।

प्रश्नसंग्रह 2.4

1. निम्नलिखित वर्ग समीकरणों की मानक रूप से तुलना कर a, b, c मान लिखें ।

   (1) $x^2 - 7x + 5 = 0$ (2) $2m^2 = 5m - 5$ (3) $y^2 = 7y$

2. निम्नलिखित वर्गसमीकरण सूत्र विधि से हल करें ।

   (1) $x^2 + 6x + 5 = 0$ (2) $x^2 - 3x - 2 = 0$ (3) $3m^2 + 2m - 7 = 0$

   (4) $5m^2 - 4m - 2 = 0$ (5) $y^2 + \frac{1}{3}y = 2$ (6) $5x^2 + 13x + 8 = 0$

(3) $x^2 + 2\sqrt{3}x + 3 = 0$ इस वर्गसमीकरण को सूत्र की सहायता से निम्न प्रवाह आकृति में दी गई जानकारी के अनुसार हल करें ।

हल :

$x^2 + 2\sqrt{3}x + 3 = 0$ की $ax^2 + bx + c = 0$ से तुलना करने पर a,b,c का मान निश्चित करें । → $b^2 - 4ac$ का मान ज्ञात करें । → वर्गसमीकरण हल करने की सूत्र विधि लिखें । → सूत्र में मान रखकर हल ज्ञात करें ।

आओ जानें

वर्गसमीकरण के मूलों का स्वरूप : (Nature of roots of a quadratic equation)

हमने अध्ययन किया है कि वर्गसमीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ का मूल $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ होते हैं।

(1) यदि $b^2 - 4ac = 0$ हो तो $x = \frac{-b \pm \sqrt{0}}{2a} = \frac{-b}{2a}$

$\therefore$ वर्गसमीकरण के मूल वास्तविक तथा समान होते हैं ।

(2) यदि $b^2 - 4ac > 0$ हो तो $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

अर्थात $x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ और $x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$\therefore$ वर्गसमीकरण के मूल वास्तविक तथा असमान होते है ।

(3) यदि $b^2 - 4ac < 0$ हो तो $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ यह वास्तविक संख्या नहीं होती है । अर्थात वर्गसमीकरण के मूल वास्तविक संख्या नहीं होते ।

इसलिए वर्गसमीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के मूलों का स्वरुप $b^2 - 4ac$ के मान पर निश्चित होता है । $b^2 - 4ac$ को वर्गसमीकरण का विवेचक (discriminant) कहते है । उसे Δ (डेल्टा) चिहन से दर्शाया जाता है । (Δ यह ग्रीक अक्षर है ।)

कृति : नीचे दी गई जानकारी के अनुसार रिक्त स्थान भरें ।

	विवेचक का मान		मूलों का स्वरुप
(1)	50	→	
(2)	-30	→	
(3)	0	→	

हल किए गए उदाहरण

उदा. (1) $x^2 + 10x - 7 = 0$ इस समीकरण में विवेचक का मान ज्ञात करो ।

हल : $x^2 + 10x - 7 = 0$ की तुलना $ax^2 + bx + c = 0$ से करने पर

$a = 1,\ b = \boxed{10},\ c = \boxed{-7},$

$\therefore b^2 - 4ac = \boxed{10}^2 - 4 \times 1 \times \boxed{-7}$

$= \boxed{100} + \boxed{28}$

$= \boxed{128}$

उदा. (2) विवेचक के आधार पर वर्गसमीकरण के मूलों का स्वरुप निश्चित करें ।

(i) $2x^2 - 5x + 7 = 0$

हल : $2x^2 - 5x + 7 = 0$ की

$ax^2 + bx + c = 0$ से तुलना करने पर,

यहा $a = 2,\ b = -5,\ c = 7,$

$\therefore b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \times 2 \times 7$

$\Delta = 25 - 56$

$\Delta = -31$

$\therefore b^2 - 4ac < 0$

$\therefore$ वर्गसमीकरण के मूल वास्तविक संख्या नहीं है ।

(ii) $x^2 + 2x - 9 = 0$

हल : $x^2 + 2x - 9 = 0$ की

$ax^2 + bx + c = 0$ से तुलना करने पर,

यहाँ $a = \boxed{},\ b = 2,\ c = \boxed{},$

$\therefore b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \times \boxed{} \times \boxed{}$

$\Delta = 4 - \boxed{}$

$\Delta = 40$

$\therefore b^2 - 4ac > 0$

$\therefore$ वर्गसमीकरण के मूल वास्तविक तथा असमान हैं।

उदा. (3) $\sqrt{3}x^2 + 2\sqrt{3}x + \sqrt{3} = 0$

हल : $\sqrt{3}x^2 + 2\sqrt{3}x + \sqrt{3} = 0$ की

$ax^2 + bx + c = 0$ से तुलना करने पर,

यहाँ $a = \sqrt{3},\ b = 2\sqrt{3},\ c = \sqrt{3},$

$\therefore b^2 - 4ac = (2\sqrt{3})^2 - 4 \times \sqrt{3} \times \sqrt{3}$

$= 4 \times 3 - 4 \times 3$

$= 12 - 12$

$= 0$

$\therefore b^2 - 4ac = 0$

$\therefore$ वर्गसमीकरण के मूल वास्तविक तथा समान हैं ।

आओ जानें

वर्गसमीकरण के मूल तथा गुणांकों में संबंध (Relation between roots and coefficients of quadratic equation)

यदि $ax^2 + bx + c = 0$ इस समीकरण के मूल α तथा β हों तो

$$\alpha + \beta = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} + \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$= -\frac{2b}{2a}$$

$$\therefore \alpha + \beta = -\frac{b}{a}$$

इसी प्रकार

$$\alpha \times \beta = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \times \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$= \frac{\left(-b+\sqrt{b^2-4ac}\right)\times\left(-b-\sqrt{b^2-4ac}\right)}{4a^2}$$

$$= \frac{b^2-\left(b^2-4ac\right)}{4a^2}$$

$$= \frac{4ac}{4a^2}$$

$$= \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

$$\therefore \alpha\,\beta = \frac{c}{a}$$

कृती : निचे दिए गऐ चौखट में योग्य संख्या भरो.

$10x^2 + 10x + 1 = 0$ के लिये $\alpha + \beta =$ [ ] और

$\alpha \times \beta =$ [ ]

हल किए गए उदाहरण

उदा. (1) α और β यह $2x^2 + 6x - 5 = 0$ इस वर्गसमीकरण के मूल हो, तो $\alpha + \beta$ और $\alpha \times \beta$ का मान ज्ञात करें ।

हल : $2x^2 + 6x - 5 = 0$ की तुलना $ax^2 + bx + c = 0$ से करने पर,

$\therefore\ a = 2,\ b = 6,\ c = -5$

$\therefore\ \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -\frac{6}{2} = -3$

और $\alpha \times \beta = \frac{c}{a} = \frac{-5}{2}$

उदा. (2) वर्गसमीकरण $x^2 - 13x + k = 0$ के मूलों का अंतर 7 हो, तो k का मान ज्ञात करो ।

हल : $x^2 - 13x + k = 0$ की तुलना $ax^2 + bx + c = 0$ से करने पर

$a = 1,\ b = -13,\ c = k$

मानो α और β दिए गए वर्गसमीकरण के मूल हैं ।

और $\alpha > \beta$ गृहीत मानकर

$\alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -\frac{(-13)}{1} = 13 \ldots$ (I)

किंतु $\alpha - \beta = 7 \ldots\ldots\ldots\ldots$ (दिया गया है) (II)

$2\alpha = 20 \ldots$ (समीकरण (I) तथा (II) को जोड़ने पर)

$\therefore \alpha = 10$

$\therefore 10 + \beta = 13 \ldots$ ((I) से)

$\therefore \beta = 13 - 10$

$\therefore \beta = 3$

किंतु $\alpha \times \beta = \frac{c}{a}$

$\therefore 10 \times 3 = \frac{k}{1}$

$\therefore k = 30$

उदा. (3) α और β वर्गसमीकरण $x^2 + 5x - 1 = 0$ के मूल हों तो

(i) $\alpha^3 + \beta^3$ (ii) $\alpha^2 + \beta^2$ के मान ज्ञात करो ।

हल : $x^2 + 5x - 1 = 0$

$a = 1,\ b = 5,\ c = -1$

$\alpha + \beta = -\frac{b}{a} = \frac{-5}{1} = -5$

$\alpha \times \beta = \frac{c}{a} = \frac{-1}{1} = -1$

(i) $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta)$

$= (-5)^3 - 3 \times (-1) \times (-5)$

$= -125 - 15$

$\alpha^3 + \beta^3 = -140$

(ii) $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$

$= (-5)^2 - 2 \times (-1)$

$= 25 + 2$

$\alpha^2 + \beta^2 = 27$

आओ जानें

मूल दिए गए हों तो वर्गसमीकरण कैसे प्राप्त करेंगे ?

माना α और β चर x चरांकवाले वर्गसमीकरण के मूल हैं ।

$\therefore\ x = \alpha$ या $x = \beta$

$\therefore\ x - \alpha = 0$ या $x - \beta = 0$

$\therefore\ (x - \alpha)(x - \beta) = 0$

$\therefore\ x^2 - (\alpha + \beta)\,x + \alpha\beta = 0$

अर्थात α और β मूल वाले वर्गसमीकरण में x^2 – (मूलो का योगफल) x + मूलों का गुणनफल = 0

इस सूत्र से प्राप्त करेंगे ।

कृति (I) : मूलों का योगफल = 10 और मूलों का गुणनफल = 9 का उपयोग कर वर्ग समीकरण लिखो ।

$\therefore$ वर्गसमीकरण $x^2 - \square\, x + \square = \square$

कृति (II) : $\alpha = 2$ और $\beta = 5$ मूलवाले वर्गसमीकरण कौन–से हैं ?

$x^2 - (\square + \square)x + \square \times \square = 0$ ऐसा लिखा जाता है ।

अर्थात $\square\, x^2 - \square\, x + \square = 0$ ऐसे लिखते है ।

इस समीकरण को किसी भी शुन्येतर संख्या से गुणा करने पर प्राप्त समीकरण के मूल α और β होते है इसे ध्यान में रखें ।

हल किए गए उदाहरण

उदा. 1 जिस वर्गसमीकरण के मूल –3 तथा –7 हों ऐसे वर्गसमीकरण बनाइए ।

हल : माना $\alpha = -3$ और $\beta = -7$

$\therefore\ \alpha + \beta = (-3) + (-7) = -10$ और $\alpha\times\beta = (-3) \times (-7) = 21$

$\therefore$ प्राप्त होने वाले वर्गसमीकरण, $x^2 - (\alpha + \beta)\,x + \alpha\beta = 0$

$\therefore\ x^2 - (-10)\,x + 21 = 0$

$\therefore\ x^2 + 10x + 21 = 0$

इसे ध्यान मे रखें

(1) $ax^2 + bx + c = 0$ इस वर्गसमीकरण के मूल α और β हों, तो

(1) $\alpha = \dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ और $\beta = \dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

(2) $\alpha + \beta = -\dfrac{b}{a}$ और $\alpha \times \beta = \dfrac{c}{a}$

(2) $ax^2 + bx + c = 0$ इस वर्गसमीकरण के मूलो का स्वरुप $b^2 - 4ac$ इस राशि के मान पर आधारित होता है। इसलिए इस राशि को विवेचक (discriminant) कहते हैं। विवेचक को Δ इस ग्रीक अक्षर से दर्शाते हैं।

(3) यदि $\Delta = 0$ हो, तो वर्गसमीकरण के दोनों मूल दो समान वास्तविक संख्याए होती हैं।

यदि $\Delta > 0$ हो, तो वर्गसमीकरण के दोनों मूल विभिन्न वास्तविक संख्याए होती है।

यदि $\Delta < 0$ हो, तो वर्गसमीकरण के मूल वास्तविक संख्या नहीं होती हैं।

(4) जिस के वर्गसमीकरण के मूल α तथा β होते हो, वे वर्गसमीकरण $x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$ होते हैं।

प्रश्नसंग्रह 2.5

1. निम्नलिखित रिक्त चौखट भरिए।

(1) वर्गसमीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ ⇨ $b^2 - 4ac = 5$ → मूलों के स्वरूप ....
$b^2 - 4ac = -5$ → मूलों के स्वरूप ....

(2) मूलों का योगफल $= -7$ → वर्गसमीकरण . . . . ← मूलों का गुणनफल $= 5$

(3) यदि α तथा β यह दिए गए वर्गसमीकरण के मूल हो तो,

$2x^2 - 4x - 3 = 0$ → $\alpha + \beta = .\ .\ .\ .\ .\ .$
→ $\alpha \times \beta = .\ .\ .\ .\ .\ .$

2. निम्नलिखित वर्गसमीकरणों के लिए विवेचक का मान ज्ञात कीजिए।

(1) $x^2 + 7x - 1 = 0$ (2) $2y^2 - 5y + 10 = 0$ (3) $\sqrt{2}x^2 + 4x + 2\sqrt{2} = 0$

3. विवेचक के आधार पर निम्नलिखित वर्गसमीकरणों के मूल निश्चित कीजिए।

(1) $x^2 - 4x + 4 = 0$ (2) $2y^2 - 7y + 2 = 0$ (3) $m^2 + 2m + 9 = 0$

4. वर्गसमीकरण प्राप्त करें जिनके मूल निम्नलिखित हैं ।

(1) 0 तथा 4 (2) 3 तथा −10 (3) $\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$ (4) $2-\sqrt{5}, 2+\sqrt{5}$

5*. $x^2 - 4kx + k + 3 = 0$ इस वर्गसमीकरण के मूलों का योगफल उसके गुणनफल का दुगना हो तो k का मान ज्ञात करीए ।

6*. यदि α और β यह $y^2 - 2y - 7 = 0$ इस वर्गसमीकरण के मूल हो तो,

(1) $\alpha^2 + \beta^2$ (2) $\alpha^3 + \beta^3$ का मान ज्ञात करो ।

7. निम्नलिखित वर्गसमीकरण के मूल वास्तविक तथा समान हों तो k का मान ज्ञात करीए।

(1) $3y^2 + ky + 12 = 0$ (2) $kx(x - 2) + 6 = 0$

वर्गसमीकरण का उपयोजन (Application of quadratic equation)

आओ जानें

दैनिक जीवन के अनेक मुद्‌दों का हल प्राप्त करने के लिए वर्गसमीकरण उपयोगी होता है । ऐसे ही मुद्‌दों का अध्ययन हम इस भाग में करने वाले हैं ।

उदा. (1) तिवसा ग्राम में श्री. रत्नाकरराव के खेत में प्याज से भरी आयताकार जाली के आधार की लंबाई उसकी चौड़ाई से 7 मीटर अधिक है और विकर्ण, लंबाई से 1 मीटर से अधिक हो, तो प्याज से भरी उस जाली की लंबाई और चौड़ाई ज्ञात करो ।

हल : माना आयताकार प्याज से भरी आयताकार जाली के आधार की चौड़ाईx मीटर है ।

$\therefore$ लंबाई = $(x + 7)$ मीटर, विकर्ण = $x + 7 + 1 = (x + 8)$ मीटर

पाइथागोरस के प्रमेय से,

$x^2 + (x + 7)^2 = (x + 8)^2$

$x^2 + x^2 + 14x + 49 = x^2 + 16x + 64$

$\therefore x^2 + 14x - 16x + 49 - 64 = 0$

$\therefore x^2 - 2x - 15 = 0$

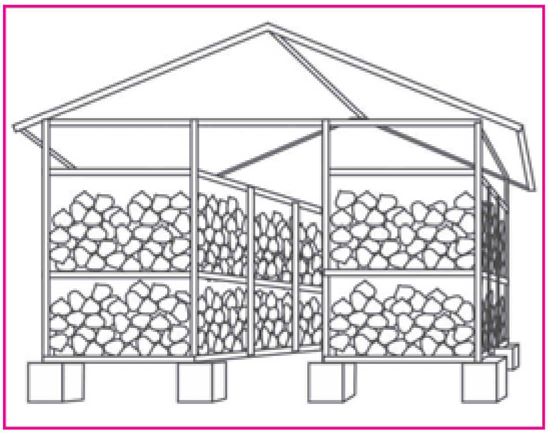
$\therefore x^2 - 5x + 3x - 15 = 0$

$\therefore x(x - 5) + 3(x - 5) = 0$

$\therefore (x - 5)(x + 3) = 0$

$\therefore x - 5 = 0$ या $x + 3 = 0$

$\therefore x = 5$ या $x = -3$



प्याज से भरी जाली (कांदाचाळ)

किंतु चौड़ाई ऋणात्मक नहीं होती । $\therefore x \neq -3$

$\therefore x = 5$ और $x + 7 = 5 + 7 = 12$

$\therefore$ प्याज से भरी जाली के आधार की लंबाई 12 मीटर और चौड़ाई 5 मीटर होगी ।

उदा. (2) एक रेलगाडी समान चाल से 360 किमी की दूरी तय करती है । यदि उसकी चाल 5 किमी प्रति घंटा से बढ़ा दिया जाय तो वही दूरी तय करने में 48 मिनट कम समय लगता है । रेलगाडी की चाल ज्ञात कीजिए ।

हल : माना कि रेलगाड़ी का प्रारंभिक चाल x किमी प्रति घंटा है ।

$\therefore$ रेलगाडी की चाल बढ़ने पर चाल $(x+5)$ किमी / घंटा होगी

360 किमी दूरी तय करने में लगनेवाला प्रारंभिक समय = $\dfrac{\text{दूरी}}{\text{चाल}} = \dfrac{360}{x}$ घंटा ।

चाल बढ़ने पर उसी दूरी को तय करने में लगनेवाला समय = $\dfrac{360}{x+5}$

दी गई शर्त के अनुसार

$$\frac{360}{x+5} = \frac{360}{x} - \frac{48}{60}$$ ----- ($\because$ 48 मिनट = $\frac{48}{60}$ घंटा)

$$\therefore \frac{360}{x} - \frac{360}{x+5} = \frac{48}{60}$$

$$\therefore \frac{1}{x} - \frac{1}{x+5} = \frac{48}{60\times360}$$ ----- (दोनों पक्षों में 360 से भाग देने पर)

$$\therefore \frac{x+5-x}{x(x+5)} = \frac{4}{5\times360}$$

$$\therefore \frac{5}{x^2+5x} = \frac{1}{5\times90}$$

$$\therefore \frac{5}{x^2+5x} = \frac{1}{450}$$

$\therefore x^2 + 5x = 2250$

$\therefore x^2 + 5x - 2250 = 0$

$\therefore x^2 + 50x - 45x - 2250 = 0$

$\therefore x(x+50) - 45(x+50) = 0$

-2250: $+50$, -45

$\therefore (x+50)(x-45) = 0$

$\therefore x + 50 = 0$ या $x - 45 = 0$

$\therefore x = -50$ या $x = 45$

किंतु चाल ऋणात्मक नहीं होती $\therefore x \neq -50$

$\therefore x = 45$

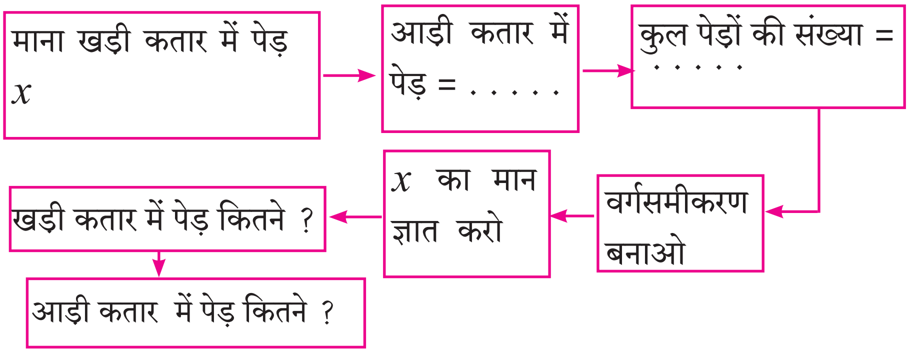
$\therefore$ रेलगाडी की प्रारंभिक चाल 45 किमी/ घंटा होगी ।

प्रश्नसंग्रह 2.6

1. प्रगती की 2 वर्ष पूर्व और 3 वर्ष के बाद की आयु का गुणनफल 84 है, तो उसकी वर्तमान आयु ज्ञात करो ?

2. दो क्रमिक सम प्राकृत संख्याओं के वर्गों का योगफल 244 है, वे संख्याएँ ज्ञात करें ।

3. श्री. मधुसूदन के संतरा के बगीचे में आड़ी कतार में पेड़ों की संख्या, खड़ी कतार के पेड़ों की संख्या से 5 अधिक है । यदि संतरे के बगीचे में कुल 150 पेड़ हो । तो आड़ी तथा खड़ी कतार में पेड़ों की संख्या कितनी होगी ? निम्न प्रवाहआकृति के आधार पर उदाहरण हल कीजिए ।



4. विवेक किशोर से 5 वर्ष से बड़ा है । इनके गुणात्मक प्रतिलोम का योगफल $\frac{1}{6}$ हो, तो उनकी वर्तमान आयु ज्ञात करें ।

5. सुयश को गणित विषय की प्रथम जांच परीक्षा में प्राप्त अंक की अपेक्षा द्वितीय जांच परीक्षा में 10 अंक अधिक प्राप्त हुए हैं । द्वितीय जांच परीक्षा में प्राप्त अंको का 5 गुना प्रथम जांच परीक्षा के अंकों के वर्ग के बराबर हो तो उसे प्रथम जांच परीक्षा में कितने अंक प्राप्त हुए ?

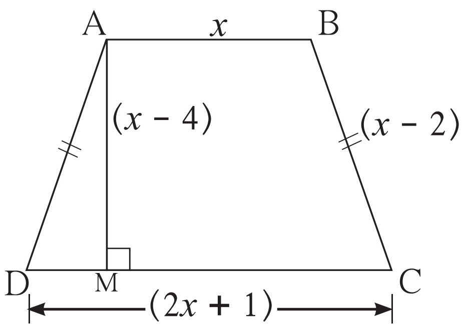
6. ★ श्री. कासम का मिट्‌टी के बर्तन बनाने का कुटीर उद्योग है । वे प्रतिदिन निश्चित संख्या में बर्तन बनाते हैं । प्रत्येक बर्तन का लागत मूल्य बनाये गए बर्तनों की संख्या के 10 गुना से 40 रु अधिक होता है । यदि एक दिन में बर्तनो का लागत मूल्य 600 रु हो तो प्रत्येक बर्तन का लागत मूल्य तथा एक दिन में बनाये गए बर्तनो की संख्या ज्ञात करो ।

7. ★ किसी नदी में नाव से प्रवाह के विपरीत 36 किमी जाकर वापस उसी स्थान पर आने में प्रतीक को 8 घंटे लगते हैं । यदि शांत पानी में नाव का वेग 12 किमी/ घंटा हो तो नदी के प्रवाह का वेग ज्ञात करो ।

8. ★ किसी काम को पूरा करने के लिए पिंटू को निशू से 6 दिन अधिक लगते हैं । दोनों मिलकर वही काम 4 दिन में पूरा कर लेते हैं । उस काम को अकेले पूरा करने के लिए प्रत्येक को कितने दिन लगेंगे ?

9. ★ संख्या 460 को किस प्राकृत संख्या से भाग देने पर भागफल, भाजक के 5 गुने से 6 अधिक तथा शेषफल 1 आता हो तो भागफल तथा भाजक कितना होगा ?

10. ★



संलग्न समलंब □ABCD में AB ∥ CD, उसका क्षेत्रफल 33 वर्ग सेमी है, तो आकृति में दी गई जानकारी के आधार पर दी गई कृति पूर्ण करो तथा चतुर्भुज के चारों भुजाओं की लंबाई ज्ञात करो ।

हल: $\square$ABCD समलंब चतुर्भुज है। AB || CD

$A(\square ABCD) = \frac{1}{2}(AB + CD) \times \square$

$33 = \frac{1}{2}(x + 2x + 1) \times \square$

$\therefore \square = (3x + 1) \times \square$

$\therefore 3x^2 + \square - \square = 0$

$\therefore 3x(\ldots\ldots) + 10(\ldots\ldots) = 0$

$\therefore (3x + 10)(----) = 0$

$\therefore (3x + 10) = 0$ या $\square = 0$

$\therefore x = -\frac{10}{3}$ या $x = \square$

किंतु लंबाई ऋणात्मक नही होती।

$\therefore x \neq -\frac{10}{3}$ $\quad \therefore x = \square$

AB = ---, CD = --- AD = BC = ---

प्रकीर्ण प्रश्नसंग्रह 2

1. निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तरों का उचित पर्याय चुनिए।

(1) निम्नलिखित में से कौन-से वर्गसमीकरण हैं?

(A) $\frac{5}{x} - 3 = x^2$ (B) $x(x + 5) = 2$ (C) $n - 1 = 2n$ (D) $\frac{1}{x^2}(x + 2) = x$

(2) निम्नलिखित में से कौन-से वर्गसमीकरण नहीं हैं?

(A) $x^2 + 4x = 11 + x^2$ (B) $x^2 = 4x$ (C) $5x^2 = 90$ (D) $2x - x^2 = x^2 + 5$

(3) $x^2 + kx + k = 0$ के मूल वास्तविक संख्या तथा समान हो तो k का मान निम्न में से कौन-सा है ?

(A) केवल 0 (B) केवल 4 (C) 0 या 4 (D) 2

(4) $\sqrt{2}x^2 - 5x + \sqrt{2} = 0$ के लिए विवेचक का मान निम्नलिखित में से कौन-सा हैं ?

(A) -5 (B) 17 (C) $\sqrt{2}$ (D) $2\sqrt{2} - 5$

(5) निम्नलिखित समीकरण में से कौन-से समीकरण के मूल 3 तथा 5 हैं ?

(A) $x^2 - 15x + 8 = 0$ (B) $x^2 - 8x + 15 = 0$

(C) $x^2 + 3x + 5 = 0$ (D) $x^2 + 8x - 15 = 0$

(6) निम्नलिखित में से किन समीकरणों के मूलों का योगफल -5 है?

(A) $3x^2 - 15x + 3 = 0$ (B) $x^2 - 5x + 3 = 0$

(C) $x^2 + 3x - 5 = 0$ (D) $3x^2 + 15x + 3 = 0$

(7) $\sqrt{5}m^2 - \sqrt{5}m + \sqrt{5} = 0$ के लिए कौन- से कथन सत्य हैं ?

(A) वास्तविक संख्या तथा असमान मूल (B) वास्तविक संख्या तथा समान मूल

(C) मूल वास्तविक संख्या नहीं हैं (D) तीन मूल

(8) $x^2 + mx - 5 = 0$ इस वर्गसमीकरण का एक मूल 2 हो तो m का मान निम्नलिखित में से कौन-सा है?

(A) -2 (B) $-\frac{1}{2}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) 2

2. निम्नलिखित में से कौन-से समीकरण वर्ग समीकरण है।

(1) $m^2 + 2m + 11 = 0$ (2) $x^2 - 2x + 5 = x^2$ (3) $(x + 2)^2 = 2x^2$

3. निम्नलिखित में से प्रत्येक समीकरण के विवेचक का मान ज्ञात करें ।

(1) $2y^2 - y + 2 = 0$ (2) $5m^2 - m = 0$ (3) $\sqrt{5}x^2 - x - \sqrt{5} = 0$

4. $2x^2 + kx - 2 = 0$ इस वर्गसमीकरण का एक मूल -2 हो, तो k का मान ज्ञात करो ।

5. ऐसे वर्गसमीकरण बनाओ जिसके मूल निम्नप्रकार से हैं ।

(1) 10 और -10 (2) $1-3\sqrt{5}$ और $1+3\sqrt{5}$ (3) 0 और 7

6. नीचे दिए गए वर्गसमीकरण के मूलों का स्वरूप निश्चित करो ।

(1) $3x^2 - 5x + 7 = 0$ (2) $\sqrt{3}x^2 + \sqrt{2}x - 2\sqrt{3} = 0$ (3) $m^2 - 2m + 1 = 0$

7. निम्नलिखित वर्गसमीकरण हल करो ।

(1) $\frac{1}{x+5} = \frac{1}{x^2}$ $(x \neq 0, x + 5 \neq 0)$ (2) $x^2 - \frac{3x}{10} - \frac{1}{10} = 0$ (3) $(2x + 3)^2 = 25$

(4) $m^2 + 5m + 5 = 0$ (5) $5m^2 + 2m + 1 = 0$ (6) $x^2 - 4x - 3 = 0$

★8. $(m - 12)x^2 + 2(m - 12)x + 2 = 0$ इस वर्गसमीकरण के मूल वास्तविक तथा समान हों तो m का मान ज्ञात करिए ।

★9. किसी वर्गसमीकरण के दो मूलों का योगफल 5 और उसके घनों का योगफल 35 हो तो वह वर्गसमीकरण कौन-से हैं ?

★10. ऐसा वर्गसमीकरण बनाओ जिनके मूल, $2x^2 + 2(p + q)x + p^2 + q^2 = 0$ इस समीकरण के मूलों के योगफल का वर्ग, तथा अंतर का वर्ग हों ।

★11. मुकुंद के पास सागर से 50 रूपये अधिक हैं । उनके पास की राशियों का गुणनफल 15000 हो तो प्रत्येक के पास कितने रुपये हैं ?

★12. दो संख्याओं के वर्गों का अंतर 120 है । छोटी संख्या का वर्ग, बड़ी संख्या का दुगुना है । वे संख्याएँ ज्ञात करिए ।

★13. रंजना को जन्मदिन के अवसर पर 540 संतरे कुछ विद्यार्थियों में समान रूप से बाँटने हैं । यदि 30 विद्यार्थी अधिक होते प्रत्येक को 3 संतरे कम मिलते । विद्यार्थियों की संख्या ज्ञात करो ।

★14. तडवेल में किसान श्री. दिनेश के आयताकार खेत की लंबाई, चौड़ाई से 2 गुनी से 10 मीटर अधिक है । उन्होंने उस खेत में बारिश का पानी एकत्र करने के लिए खेत की चौड़ाई के $\frac{1}{3}$ गुने भुजा वाले वर्गाकार खेत में तालाब का निर्माण किया, तब मूल खेत का क्षेत्रफलक खेत में बने तालाब के क्षेत्रफल का 20 गुणा होता है । तो उस खेत की लंबाई और चौड़ाई तथा खेत में बने की तालाब भुजा की लंबाई ज्ञात करो ।

★15. एक टंकी को दो नल से पूरा भरने में 2 घंटे लगते हैं । अकेले छोटे नल से टंकी को भरने में लगनेवाला समय बड़े नल से लगनेवाले समय से 3 घंटे अधिक लगते हैं । तो प्रत्येक नल को वह टंकी भरने के लिए कितना समय लगेगा ?

3 अंकगणितीय श्रृंखला

आओ सीखें

- अनुक्रमणिका
- अंकगणितीय श्रृंखला
- अंकगणितीय श्रृंखला का n वाँ पद
- अंकगणितीय श्रृंखला के पहले n पदों का योग

आओ जानें

अनुक्रमणिका (Sequence)

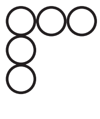
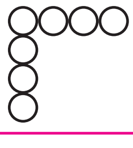
हम 1, 2, 3, 4, . . . संख्याएँ क्रम से लिखते हैं । यह संख्याओं की सूची है । इन संख्याओं में किसी भी संख्या का स्थान (क्रम) हम बता सकते हैं । जैसे 13 यह संख्या 13 वें स्थान पर है । संख्याओं की दूसरी सूची देखें । संख्याएँ 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, . . . विशिष्ट क्रम से लिखी गई हैं । इसमें $16 = 4^2$ चौथे स्थान पर तथा $25 = 5^2$ पाँचवें स्थान पर है । संख्या $49 = 7^2$ सातवें स्थान पर है । अर्थात् इस सूची में भी किसी भी संख्या का स्थान बताया जा सकता है ।

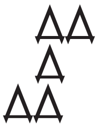
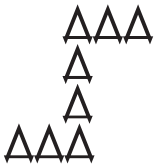
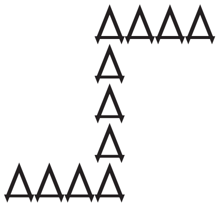
प्राकृत संख्याओं जैसे विशिष्ट क्रम से लिखे गए संख्या समूह को अनुक्रमणिका कहते हैं ।

अनुक्रमणिका में विशिष्ट स्थान पर विशिष्ट संख्या लिखी जाती है । संख्याएँ $a_1, a_2, a_3, a_4 \ldots a_n$ इस प्रकार लिखने पर यह स्पष्ट होता है कि a_1 पहली, a_2 दूसरी, . . . इस प्रकार a_n यह n वीं संख्या है । संख्याओं की अनुक्रमणिका $f_1, f_2, f_3, \ldots$ इसी प्रकार लिखी जाती है । इससे यह ध्यान में आता है कि संख्याएँ निश्चित क्रम में लिखी गई हैं ।

किसी कक्षा के छात्र व्यायाम के लिए मैदान में कतार में खड़े होते हैं । उनका क्रम निश्चित हो तो उनकी अनुक्रमणिका बनती है । कुछ अनुक्रमणिकाओं में विशिष्ट आकृतिबंध होता है यह भी हमने अनुभव किया है ।

कृति : निम्नलिखित आकृतिबंध पूर्ण करो ।

आकृतिबंध									
वृत्तों की संख्या	1	3	5	7					

आकृतिबंध							
त्रिभुजों की संख्या	5	8	11				

संख्याओं का आकृतिबंध देखिए । पहलेवाली संख्या पर कौन-सी क्रिया करने से बादवाली संख्या प्राप्त होती है वह नियम खोजिए। उसी नियम के आधार पर बाद वाली सभी संख्याएँ लिख सकते हैं।

साथ की संख्या सूची देखें 2, 11, −6, 0, 5, −37, 8, 2, 61

इसमें $a_1 = 2$, $a_2 = 11$, $a_3 = -6, \ldots$ यह संख्या सूची भी अनुक्रमणिका है । परंतु विशिष्ट पद (संख्या) उस स्थान पर लिखने का कारण नहीं बताया जा सकता, वैसेही इन विविध पदों में क्या संबंध है, यह भी निश्चित रूप से नहीं बताया जा सकता ।

सामान्यतः जिन अनुक्रमणिकाओं में अगला पद प्राप्त करने का निश्चित नियम हो, ऐसी अनुक्रमणिकाओं पर विचार किया जाता है ।

उदा. (1) 4, 8, 12, 16 . . .

(2) 2, 4, 8, 16, 32, . . .

(3) $\frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \frac{1}{15}, \frac{1}{20} \ldots$

अनुक्रमणिका के पद (Terms in a sequence)

अनुक्रमणिका के क्रमिक पदों को $t_1, t_2, t_3, \ldots \ldots t_n \ldots\ldots$ इस प्रकार भी दर्शाया जाता है। सामान्यत: अनुक्रमणिका को $\{t_n\}$ लिखते हैं। अनुक्रमणिका अनंत हो तो प्रत्येक धन पूर्णांक n से संबंधित एक संख्या है । ऐसा माना जाता है।

कृति I : निम्नलिखित अनुक्रमणिकाओं में पदों के क्रम को $t_1, t_2, t_3 \ldots$ से दर्शाइए ।

(1) 9, 15, 21, 27, . . . यहाँ $t_1 = 9$, $t_2 = 15$, $t_3 = 21, \ldots$

(2) 7, 7, 7, 7, . . . यहाँ $t_1 = 7$, $t_2 =$ ☐, $t_3 =$ ☐, . . .

(3) −2, −6, −10, −14, . . . यहाँ $t_1 = -2$, $t_2 =$ ☐, $t_3 =$ ☐, . . .

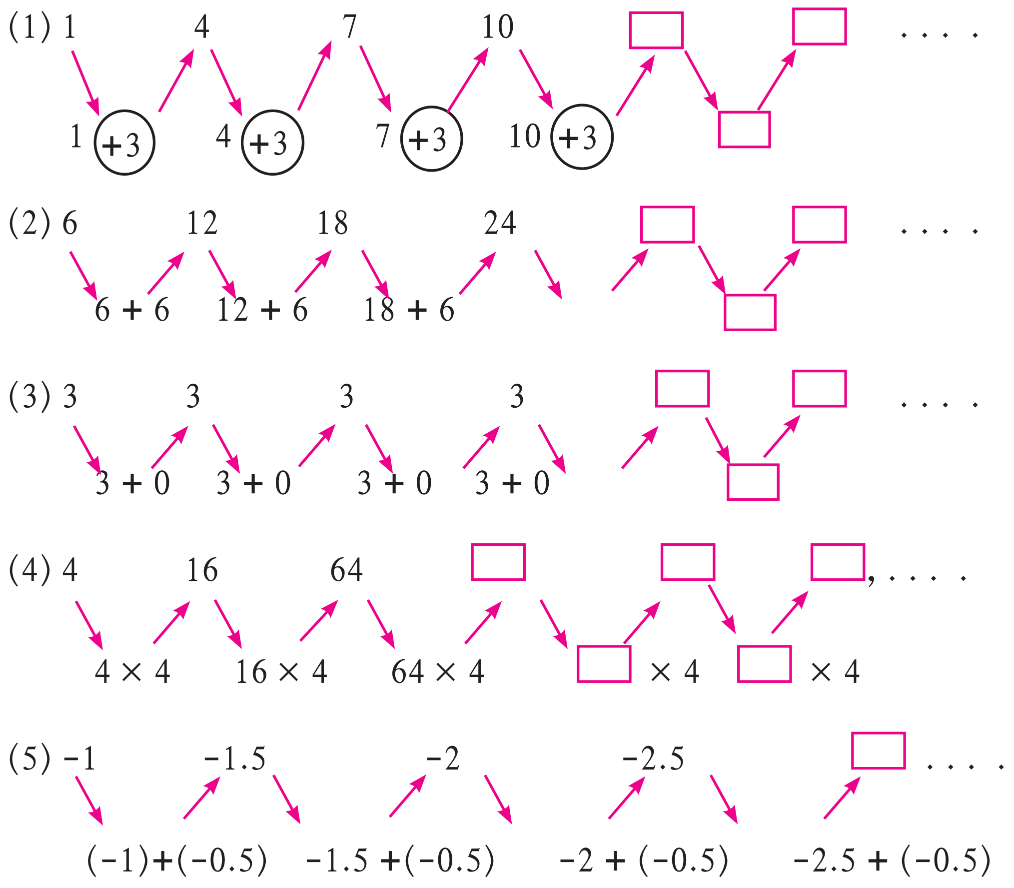
कृति II : निम्नलिखित अनुक्रमणिकाओं के पदों में कोई नियम प्राप्त होता है क्या देखिए, दो अनुक्रमणिकाओं में समानता खोजिए । उन अनुक्रमणिकाओं के पदों में कोई नियम प्राप्त होता है क्या यह देखने के लिए निम्नलिखित रचना देखिए और अगले पृष्ठपर दिए गए रिक्त चौखटों की पूर्ति कीजिए ।

(1) 1, 4, 7, 10, 13, . . . (2) 6, 12, 18, 24, . . .

(3) 3, 3, 3, 3, . . . (4) 4, 16, 64, . . .

(5) −1, −1.5, −2, −2.5, . . . (6) $1^3, 2^3, 3^3, 4^3, \ldots$

निम्नलिखित अनुक्रमणिकाओं में संबंध खोजिए तथा उसके लिए किया गया विचार देखिए ।



(6) 1^3, 2^3, 3^3, ...

जिसमें अनुक्रमणिका (1), (2), (3), (5) में पहलेवाली संख्या में निश्चित संख्या जोड़ने पर उसके बादवाली संख्या (पद) प्राप्त होती है । यह समानता है । इस प्रकार की अनुक्रमणिकाओं को अंकगणितीय शृंखला कहते हैं ।

ऊपरोक्त अनुक्रमणिका (4) अंकगणितीय शृंखला नहीं है । इस अनुक्रमणिका के पहलेवाले पद में निश्चित संख्या से गुणा करने पर बादवाला पद प्राप्त होता है । इस प्रकार की अनुक्रमणिका को भूमितीय शृंखला (Geometric Progression) कहते हैं ।

ऊपरोक्त अनुक्रमणिका (6) भी अंकगणितीय शृंखला नहीं है । उसीप्रकार भूमितीय शृंखला भी नहीं है ।

इस वर्ष हमें अंकगणितीय शृंखला का अध्ययन करना है ।

अंकगणितीय शृंखला (Arithmetic Progression)

निम्नलिखित अनुक्रमणिकाओं में बाद में आनेवाले तीन पद लिखिए ।

(1) 5, 8, 11, 14, . . .   (2) 100, 70, 40, 10, . . .

(3) −7, −4, −1, 2, . . .   (4) 4, 4, 4, . . .

निम्नलिखित अनुक्रमणिकाओं में बाद वाला पद ज्ञात करने के लिए क्या किया गया है देखिए ।

पहला पद   दूसरा पद   तीसरा पद

(1) 100   70   40   10   -20   -50

100+(-30)   70+(-30)   40+(-30)   10+(-30)   (-20)+(-30)

(2) -7   -4   -1   2   5   8

-7+3   -4+3   -1+3   2+3   5+3

(3) 4   4   4   4   4 . . . .

4 + 0   4 + 0   4 + 0   4 + 0

ऊपरोक्त संख्याओं की प्रत्येक सूची में प्रत्येक पद पहलेवाले पद में विशिष्ट संख्या जोड़ने पर प्राप्त होता है । दो क्रमिक पदों का अंतर स्थिर (अचर) होता है ।

उदा. (i) में अंतर ऋणात्मक (ii) में अंतर धनात्मक (iii) में अंतर '0' शून्य है ।

क्रमिक पदों में अंतर स्थिर (अचर) हो तो उस अंतर को **सामान्य अंतर** कहते हैं । यह d इस अक्षर द्वारा दर्शाते हैं ।

दी गई अनुक्रमणिका में किन्हीं दो क्रमिक पदों का अंतर $(t_{n+1} - t_n)$ अचर हो तो उस अनुक्रमणिका को अंकगणितीय शृंखला (Arithmetic Progression) कहते हैं । $t_{n+1} - t_n = d$ यह सामान्य अंतर (Common difference) होता है ।

किसी अंकगणितीय शृंखला का प्रथम पद a तथा सामान्य अंतर d हो,

तो $t_1 = a$, $t_2 = a + d$

$t_3 = (a + d) + d = a + 2d$

प्रथम पद a तथा सामान्य अंतर d हो तो बननेवाली अंकगणितीय शृंखला

$a, (a + d), (a + 2d), (a + 3d), \ldots$ होती है ।

अंकगणितीय शृंखला से संबंधित कुछ उदाहरण देखिए ।

उदा.(1) आरिफा ने प्रत्येक महीने 100 रुपयों की बचत की । एक वर्ष में प्रत्येक माह के अंत की कुल बचत निम्नानुसार है ।

महीना	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
बचत ₹	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000	1100	1200

प्रत्येक महीने की कुल बचत दर्शानेवाली संख्याएँ अंकगणितीय शृंखला हैं ।

उदा. (2) प्रणव ने मित्र से 10000 रूपये उधार लिए तथा 1000 रूपये प्रतिमाह वापस करना का तय किया तो प्रत्येक महीने वापस की जानेवाली शेष राशि निम्नलिखित प्रकार से होगी ।

महीना क्र.	1	2	3	4	5	...	...	...
वापस करने की शेष रकम	10,000	9,000	8,000	7,000	...	2,000	1,000	0

उदा. (3) 5 का पहाड़ा अर्थात 5 से विभाज्य संख्याएँ देखिए ।

5, 10, 15, 20, . . . 50, 55, 60, ... यह एक अंकगणितीय शृंखला है ।

ऊपरोक्त उदा. (1) तथा उदा. (2) की अंकगणितीय शृंखला सीमित है, तो उदा. (3) की अंकगणितीय शृंखला असीमित अनंत शृंखला है ।

इसे ध्यान में रखें

(1) यदि अनुक्रमणिका में $(t_{n+1} - t_n)$ अंतर स्थिर हो तो उस अनुक्रमणिका को अंकगणितीय शृंखला कहते हैं ।

(2) अंकगणितीय शृंखला के दो क्रमिक पदों के स्थिर अंतर को d अक्षर द्‌वारा दर्शाते हैं ।

(3) d का मान धनात्मक, ऋणात्मक या शून्य हो सकता है ।

(4) अंकगणितीय शृंखला का प्रथम पद a, तथा सामान्य अंतर d हो तो वह शृंखला a, $(a + d)$, $(a + 2d)$, . . . होगी ।

कृति : सीमित तथा अनंत अंकगणितीय शृंखला के एक-एक उदा. लिखिए ।

हल किए गए उदाहरण

उदा. (1) निम्नलिखित में से कौन-सी अनुक्रमणिका अंकगणितीय शृंखला है पहचानिए । यदि हो, तो अंकगणितीय शृंखलाओं के बाद के दो पद ज्ञात कीजिए ।

(i) 5, 12, 19, 26, . . . (ii) 2, −2, −6, −10, . . .

(iii) 1, 1, 2, 2, 3, 3, . . . (iv) $\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \ldots$

हल : (i) 5, 12, 19, 26, . . . अनुक्रमणिका में ,

प्रथम पद = $t_1 = 5$, $t_2 = 12$, $t_3 = 19$, . . .

$t_2 - t_1 = 12 - 5 = 7$

$t_3 - t_2 = 19 - 12 = 7$

प्रथम पद = 5 तथा सामान्य अंतर = d = 7 है जो कि स्थिर है ।

$\therefore$ यह अनुक्रमणिका अंकगणितीय शृंखला है । इस शृंखला के अगले दो पद

$26 + 7 = 33$, $33 + 7 = 40$.

अत: 33 तथा 40 दी गई शृंखला के अगले दो पद हैं ।

(ii) 2, −2, −6, −10, . . . इस अनुक्रमणिका में,

$t_1 = 2,\quad t_2 = -2, t_3 = -6,\quad t_4 = -10 \ldots$

$t_2 - t_1 = -2 - 2 = -4$

$t_3 - t_2 = -6 - (-2) = -6 + 2 = -4$

$t_4 - t_3 = -10 - (-6) = -10 + 6 = -4$

अर्थात प्रत्येक दो क्रमिक पदों में अंतर अर्थात $t_n - t_{n-1} = -4$ है $\therefore d = -4$ सामान्य अंतर है जो स्थिर है। $\therefore$ दी गई अनुक्रमणिका अंकगणितीय शृंखला है।

इस शृंखला के अगले दो पद $(-10) + (-4) = -14$ तथा $(-14) + (-4) = -18$ है ।

(iii) 1, 1, 2, 2, 3, 3, . . . इस अनुक्रमणिका में

$t_1 = 1,\ t_2 = 1,\ t_3 = 2,\ t_4 = 2,\quad t_5 = 3,\quad t_6 = 3 \ldots$

$t_2 - t_1 = 1 - 1 = 0 \quad t_3 - t_2 = 2 - 1 = 1$

$t_4 - t_3 = 2 - 2 = 0 \quad t_3 - t_2 \neq t_2 - t_1$

अनुक्रमणिका में दो क्रमिक पदों का अंतर स्थिर नहीं है । $\therefore$ दी गई अनुक्रमणिका अंकगणितीय शृंखला नहीं है।

(iv) $\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, \ldots$ इस अनुक्रमणिका में

$t_1 = \frac{3}{2},\quad t_2 = \frac{1}{2}, t_3 = -\frac{1}{2},\quad t_4 = -\frac{3}{2},\ t_5 = -\frac{5}{2},\quad t_6 = -\frac{7}{2} \ldots$

$t_2 - t_1 = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -\frac{2}{2} = -1$

$t_3 - t_2 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -\frac{2}{2} = -1$

$t_4 - t_3 = -\frac{3}{2} - (-\frac{1}{2}) = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2} = -\frac{2}{2} = -1$

यहाँ सामान्य अंतर $d = -1$ स्थिर (अचर) है ।

$\therefore$ दी गई अनुक्रमणिका अंकगणितीय शृंखला है । शृंखला के अन्य दो पद ज्ञात करें ।

$= -\frac{3}{2} - 1 = -\frac{5}{2}, \frac{5}{2} - 1 = -\frac{7}{2}$

$\therefore$ अगले दो पद $-\frac{5}{2}$ तथा $-\frac{7}{2}$

उदा. (2) प्रथम पद a तथा सामान्य अंतर d निम्नानुसार दिए गए हैं इस आधार पर पहले चार पद ज्ञात कर अंकगणितीय शृंखला लिखिए ।

(i) $a = -3, d = 4$ (ii) $a = 200, d = 7$

(iii) $a = -1, d = -\frac{1}{2}$ (iv) $a = 8, d = -5$

हल : (i) $a = -3, d = 4$ इस आधार पर

$a = t_1 = -3$

$t_2 = t_1 + d = -3 + 4 = 1$

$t_3 = t_2 + d = 1 + 4 = 5$

$t_4 = t_3 + d = 5 + 4 = 9$

$\therefore$ अंकगणितीय शृंखला $= -3, 1, 5, 9, \ldots$

(ii) $a = 200, d = 7$

$a = t_1 = 200$

$t_2 = t_1 + d = 200 + 7 = 207$

$t_3 = t_2 + d = 207 + 7 = 214$

$t_4 = t_3 + d = 214 + 7 = 221$

$\therefore$ अंकगणितीय शृंखला $= 200, 207, 214, 221,$

(iii) $a = -1, d = -\frac{1}{2}$

$a = t_1 = -1$

$t_2 = t_1 + d = -1 + (-\frac{1}{2}) = -\frac{3}{2}$

$t_3 = t_2 + d = -\frac{3}{2} + (-\frac{1}{2}) = -\frac{4}{2} = -2$

$t_4 = t_3 + d = -2 + (-\frac{1}{2})$

$= -2 - \frac{1}{2} = -\frac{5}{2}$

$\therefore$ अंकगणितीय शृंखला $= -1, -\frac{3}{2}, -2, -\frac{5}{2}$

(iv) $a = 8, d = -5$

$a = t_1 = 8$

$t_2 = t_1 + d = 8 + (-5) = 3$

$t_3 = t_2 + d = 3 + (-5) = -2$

$t_4 = t_3 + d = -2 + (-5) = -7$

$\therefore$ अंकगणितीय शृंखला $= 8, 3, -2, -7, \ldots$

प्रश्नसंग्रह 3.1

(1) निम्नलिखित अनुक्रमणिकाओं में से कौन-सी अनुक्रमणिका अंकगणितीय शृंखला है ? जो शृंखला अंकगणितीय शृंखला हो उसमें सामान्य अंतर ज्ञात कीजिए ।

(1) $2, 4, 6, 8, \ldots..$ (2) $2, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{3}, \ldots$ (3) $-10, -6, -2, 2, \ldots$

(4) $0.3, 0.33, .0333, \ldots.$ (5) $0, -4, -8, -12, \ldots$ (6) $-\frac{1}{5}, -\frac{1}{5}, -\frac{1}{5}, \ldots$

(7) $3, 3 + \sqrt{2}, 3 + 2\sqrt{2}, 3 + 3\sqrt{2}, \ldots$ (8) $127, 132, 137, \ldots$

(2) यदि अंकगणितीय शृंखला का प्रथम पद a तथा सामान्य अंतर d हो तो अंकगणितीय शृंखला लिखिए ।

(1) $a = 10, d = 5$ (2) $a = -3, d = 0$ (3) $a = -7, d = \frac{1}{2}$

(4) $a = -1.25, d = 3$ (5) $a = 6, d = -3$ (6) $a = -19, d = -4$

(3) निम्नलिखित प्रत्येक अंकगणितीय शृंखला का प्रथम पद तथा सामान्य अंतर ज्ञात कीजिए ।

(1) 5, 1, −3, −7, . . . (2) 0.6, 0.9, 1.2, 1.5, . . .

(3) 127, 135, 143, 151, . . . (4) $\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{5}{4}, \frac{7}{4}, \ldots$

थोड़ा सोचें

• 5, 8, 11, 14, . . . क्या यह अंकगणितीय शृंखला है ? यदि है तो इसका 100 वा पद क्या होगा ? क्या इस शृंखला में 92 यह संख्या होगी ? क्या संख्या 61 होगी ?

आओ जानें

अंकगणितीय शृंखला का n वाँ पद (n^{th} term of an A. P.)

5, 8, 11, 14, . . . इस अनुक्रमणिका में दो क्रमिक पदों का अंतर 3 है इसलिए यह अंकगणितीय शृंखला है । यहाँ प्रथम पद 5 है । 5 में 3 जोड़ने पर द्वितीय पद 8 प्राप्त होता है । इसी प्रकार 100 वाँ पद ज्ञात करने के लिए क्या करना होगा ?

	प्रथम पद	द्वितीय पद	तृतीय पद	. . .
संख्या	5,	5 + 3 = 8,	8 + 3 = 11	. . .

इसी प्रकार 100 वें पद तक जाने में काफी समय लगेगा । इसके लिए कोई सूत्र प्राप्त होता है क्या देखिए ।

5	8	11	14	. . .	. . .	. . .	. . .
5	$5+1\times3$	$5+2\times3$	$5+3\times3$	. . .	$5+(n-1)\times3$	$5+n\times3$	. . .
प्रथम पद t_1	द्वितीय पद t_2	तृतीय पद t_3	चतुर्थ पद t_4	. . .	n वा पद t_n	$n+1$ वाँ पद t_{n+1}	. . .

सामान्यत: अंकगणितीय शृंखला $t_1, t_2, t_3, \ldots$ में प्रथम पद a तथा सामान्य अंतर d हो तो ,

$t_1 = a$

$t_2 = t_1 + d = a + d = a + (2-1)\,d$

$t_3 = t_2 + d = a + d + d = a + 2d = a + (3-1)d$

$t_4 = t_3 + d = a + 2d + d = a + 3d = a + (4-1)d$

$t_n = a + (n-1)\,d$ सूत्र प्राप्त होता है ।

अब इस सूत्र का उपयोग कर अंकगणितीय शृंखला 5, 8, 11, 14, . . . का 100 वाँ पद ज्ञात कीजिए। यहाँ a = 5 तथा d = 3 है।

$$t_n = a + (n - 1)d$$

$$\therefore \; t_{100} = 5 + (100 - 1) \times 3$$

$$= 5 + 99 \times 3$$

$$= 5 + 297$$

$$t_{100} = 302$$

इस अंकगणितीय शृंखला का 100 वाँ पद 302 है।

अब संख्या 61 इस शृंखला में है क्या? यह जानने के लिए इसी सूत्र का उपयोग कीजिए।

$$t_n = a + (n - 1)d$$

$$t_n = 5 + (n - 1) \times 3$$

$$\therefore \; 61 = 5 + 3n - 3$$

$$= 3n + 2$$

$$\therefore \; 3n = 59$$

$$\therefore \; n = \frac{59}{3}$$

परंतु n पूर्णांक नहीं हैं।

$\therefore$ संख्या 61 इस शृंखला में नहीं है।

थोड़ा सोचें

कबीर की माताजी उसके हर जन्मदिन पर उसके ऊँचाई को लिखकर रखती है। वह 1 वर्ष का था तब उसकी ऊँचाई 70 सेमी थी। दो वर्ष का होने पर वह 80 सेमी ऊँचा था; 3 वर्ष का होनेपर उसकी ऊँचाई 90 सेमी हो गई। उसकी मीरा मौसी 10 वीं में पढ़ती थी। उसने कहा कबीर की ऊँचाई प्रति वर्ष अंकगणितीय शृंखला में बढ़ रही है ऐसा दिख रहा है। इसी बात को मानकर मौसी ने कबीर 15 वर्ष का होने पर जब 10 वी में जाएगा तब की उसकी ऊँचाई ज्ञान की। वह आश्चर्यचकित हुई। आप भी कबीर की ऊँचाई अंकगणितीय शृंखला में बढ़ रही है यह मानकर वह 15 वर्ष का होनेपर उसकी ऊँचाई क्या होगी ज्ञान करो।

हल किए गए उदाहरण

उदा. (1) निम्नलिखित अंकगणितीय शृंखला के लिए t_n ज्ञात कीजिए तथा इसके अधार पर 30 वाँ पद ज्ञात कीजिए।

3, 8, 13, 18, . . .

हल : दी गई अंकगणितीय शृंखला 3, 8, 13, 18, . . .

यहाँ $t_1 = 3,\ t_2 = 8,\ t_3 = 13,\ t_4 = 18, . .$

$d = t_2 - t_1 = 8 - 3 = 5, \quad n = 30$

हम जानते है कि $t_n = a + (n - 1)d$

$\therefore t_n = 3 + (n - 1) \times 5 \quad \because a = 3,\ d = 5$

$\therefore t_n = 3 + 5n - 5$

$\therefore t_n = 5n - 2$

$\therefore$ 30 वाँ पद $= t_{30} = 5 \times 30 - 2$

$= 150 - 2 \quad = 148$

उदा. (2) निम्नलिखित अंकगणितीय शृंखला का कौन-सा पद 560 है?

2, 11, 20, 29, . . .

हल : दी गई अंकगणितीय शृंखला 2, 11, 20, 29, . .

यहाँ $a = 2,\ d = 11 - 2 = 9$

शृंखला का n वाँ पद 560 है।

$t_n = a + (n - 1)d$

$t_n = 560$

$\therefore 560 = 2 + (n - 1) \times 9$

$= 2 + 9n - 9$

$\therefore 9n = 567$

$\therefore n = \frac{567}{9} = 63$

$\therefore$ दी गई अंकगणितीय शृंखला का 63 वाँ पद 560 है।

उदा. (3) दी गई अनुक्रमणिका 5, 11, 17, 23, . . . में क्या संख्या 301 है ?

हल : 5, 11, 17, 23, . . . इस शृंखला में

$t_1 = 5,\ t_2 = 11,\ t_3 = 17,\ t_4 = 23, . . .$

$t_2 - t_1 = 11 - 5 = 6$

$t_3 - t_2 = 17 - 11 = 6$

$\therefore$ यह अनुक्रमणिका अंकगणितीय शृंखला है।

जिसका प्रथम पद $a = 5$ तथा $d = 6$

माना n वाँ पद 301 है।

$t_n = a + (n - 1)d = 301$

$\therefore 301 = 5 + (n - 1) \times 6$

$= 5 + 6n - 6$

$\therefore 6n = 301 + 1 = 302$

$\therefore n = \frac{302}{6}$ यह धन पूर्णांक नहीं है।

अत: दी गई अनुक्रमणिका में संख्या 301 नहीं हो सकती।

उदा. (4) 4 से विभाज्य दो अंकोंवाली कितनी संख्याएँ होंगी?

हल : 4 से विभाज्य दो अंकोंवाली संख्याओं की सूची

12, 16, 20, 24, . . . 96 है।

ऐसी कितनी संख्याएँ होंगी ज्ञात कीजिए।

$t_n = 96,\ a = 12,\ d = 4$

इस आधारपर n का मान ज्ञात कीजिए।

$t_n = 96$

$\therefore$ सूत्र द्वारा,

$96 = 12 + (n - 1) \times 4$

$= 12 + 4n - 4$

$\therefore 4n = 88$

$\therefore n = 22$

$\therefore$ 4 से विभाज्य दो अंकोवाली 22 संख्याएँ है।

उदा. (5) यदि किसी अंकगणितीय शृंखला का 10 वाँ पद 25 तथा 18 वाँ पद 41 हो तो उस शृंखला का 38 वाँ पद ज्ञात कीजिए। इसी प्रकार n वाँ पद 99 हो तो n का मान ज्ञात कीजिए।

हल : दी गई अंकगणितीय शृंखला में $t_{10} = 25$ तथा $t_{18} = 41$ है।

हमें ज्ञात है $t_n = a + (n-1)d$

$\therefore \quad t_{10} = a + (10-1)\,d$

$\therefore \quad 25 = a + 9d \; . \; . \; . \; \text{(I)}$

इसी प्रकार $\quad t_{18} = a + (18-1)\,d$

$\therefore \quad 41 = a + 17d \; . \; . \; . \; \text{(II)}$

$25 = a + 9d \; . \; . \; . \;$ (I) से

$a = 25 - 9d.$

यह मान समीकरण (II) में रखने पर

समीकरण (II) $a + 17d = 41$ है।

$\therefore \quad 25 - 9d + 17d = 41$

$8d = 41 - 25 = 16$

$\therefore \quad d = 2$

$d = 2$ यह मान समीकरण (I) में रखने पर

$a + 9d = 25$

$\therefore \; a + 9 \times 2 = 25$

$\therefore \; a + 18 = 25$

$\therefore \; a = 7$

अब $\quad t_n = a + (n-1)d$

$\therefore \; t_{38} = 7 + (38-1) \times 2$

$= 7 + 37 \times 2$

$= 7 + 74$

$= 81$

n वाँ पद 99 हो तो n का मान ज्ञात करना है।

$t_n = a + (n-1)d$

$99 = 7 + (n-1) \times 2$

$99 = 7 + 2n - 2$

$99 = 5 + 2n$

$\therefore \; 2n = 94$

$\therefore \; n = 47$

$\therefore$ दी गई शृंखला का 38 वाँ पद 81 है तथा 99 यह 47 वाँ पद है।

प्रश्नसंग्रह 3.2

(1) दी गई अंकगणितीय शृंखला के आधारपर रिक्त चौखटों में उचित संख्या लिखिए ।

(1) 1, 8, 15, 22, . . .

यहाँ $a = \square$, $t_1 = \square$, $t_2 = \square$, $t_3 = \square$,

$t_2 - t_1 = \square - \square = \square$

$t_3 - t_2 = \square - \square = \square$ $\therefore\ d = \square$

(2) 3, 6, 9, 12, . . .

यहाँ $t_1 = \square$, $t_2 = \square$, $t_3 = \square$, $t_4 = \square$,

$t_2 - t_1 = \square$, $t_3 - t_2 = \square$ $\therefore\ d = \square$

(3) −3, −8, −13, −18, . . .

यहाँ $t_3 = \square$, $t_2 = \square$, $t_3 = \square$, $t_4 = \square$,

$t_2 - t_1 = \square$, $t_3 - t_2 = \square$ $\therefore\ a = \square$, $d = \square$

(4) 70, 60, 50, 40, . . .

यहाँ $t_1 = \square$, $t_2 = \square$, $t_3 = \square$, . . .

$\therefore\ a = \square$, $d = \square$

2. निम्नलिखित अनुक्रमणिका अंकगणितीय शृंखला है या नहीं निश्चित कीजिए । यदि हो तो उस शृंखला का 20 वाँ पद ज्ञात कीजिए ।

−12, −5, 2, 9, 16, 23, 30, . . .

3. अंकगणितीय शृंखला 12, 16, 20, 24, . . . दी गई है । इस शृंखला का 24 वाँ पद ज्ञात कीजिए ।

4. निम्नलिखित अंकगणितीय शृंखला का 19 वाँ पद ज्ञात कीजिए ।

7, 13, 19, 25, . . .

5. निम्नलिखित अंकगणितीय शृंखला का 27 वाँ पद ज्ञात कीजिए ।

9, 4, −1, −6, −11, . . .

6. तीन अंकोवाली प्राकृत संख्या समूह में 5 से विभाज्य संख्याएँ कितनी है ? ज्ञात कीजिए ।

7. किसी अंकगणितीय शृंखला का 11 वाँ पद 16 तथा 21 वाँ पद 29 हो तो शृंखला का 41 वाँ पद ज्ञात कीजिए ।

8. 11, 8, 5, 2, . . . इस अंकगणितीय शृंखला में संख्या −151 कौन-से क्रमांक का पद होगा ?

9. 10 से 250 तक की प्राकृत संख्याओं में कितनी संख्याएँ 4 से विभाज्य है ?

10. किसी अंकगणितीय शृंखला का 17 वाँ पद उसके 10 वें पद से अधिक हो तो सामान्य अंतर ज्ञात कीजिए ।

चतुर शिक्षिका (Wise Teacher)

एक राजा था । उसने अपने बच्चों यशवंतराजे तथा गीतादेवी को घुड़सवारी सिखाने के लिए क्रमश: तारा तथा मीरा नाम की शिक्षिकाओं की नियुक्ति की । ''1 वर्ष (साल) का वेतन कितना चाहिए ?'' ऐसा उन दोनों से पूँछा गया ।

तारा ने कहा, ''मुझे पहले महीने का वेतन 100 मोहरें दीजिए तथा बाद के प्रत्येक महीने में 100 मोहरों की वृद्धि कीजिए ।'' मीरा ने कहा, ''मुझे पहले महीने में 10 मोहरें दीजिए तथा बाद के प्रत्येक महीने में उसके पहलेवाले महीने के वेतन का दुगुना वेतन मिलना चाहिए ।''

महाराज ने इसे स्वीकार कर लिया । तीन महीने के बाद यशवंतराजे ने अपनी बहन से कहा, ''मेरी शिक्षिका तेरी शिक्षिका से अधिक चतुर लगती है, उसने अधिक वेतन माँगा है ।'' गीतादेवी बोली, ''मुझे भी पहले ऐसा ही लगा। इसलिए मैंने मीरा दीदी से पूँछा भी, ''आपने कम वेतन क्यों मांगा?'', तो उन्होंने हँसकर कहा कि आपको आठ महीने बाद यह बात समझ में आयेगी, आप देखना। ''और मैंने आठवें महीने का वेतन ज्ञात किया। आप भी ज्ञात करके देखिए।''

महीने	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
तारा का वेतन	100	200	300	400	500	600	700	800	900	-	-	-
मीरा का वेतन	10	20	40	80	160	320	640	1280	2560	-	-	-

आप भी सारिणी (तालिका) पूर्ण कीजिए ।

तारा का वेतन 100, 200, 300, 400, . . . यह अंकगणितीय शृंखला है । ध्यान में आया ?

$t_1 = 100, \quad t_2 = 200, t_3 = 300, . . . \qquad t_2 - t_1 = 100 = d$

यहाँ सामान्य अंतर 100 है ।

मीरा का वेतन 10, 20, 40, 80, . . .यह अंकगणितीय शृंखला नहीं है । क्योंकी 20 - 10 = 10, 40 - 20 = 20, 80 - 40 = 40 अर्थात d अंतर स्थिर नहीं है ।

परंतु इस शृंखला में प्रत्येक पद पहलेवाले पद के दुगना हो जाता है ।

यहाँ $\frac{t_2}{t_1} = \frac{20}{10} = 2, \quad \frac{t_3}{t_2} = \frac{40}{20} = 2, \qquad \frac{t_4}{t_3} = \frac{80}{40} = 2$

$\therefore \frac{t_{n+1}}{t_n}$, अर्थात बाद का पद तथा उसके पहलेवाले पद का अनुपात समान है । इसप्रकार बढ़नेवाली शृंखला को भूमितीय शृंखला कहते हैं ।

$\frac{t_{n+1}}{t_n}$ यह अनुपात एक से अधिक हो तो भूमितीय शृंखला, अंकगणितीय शृंखला की अपेक्षा तीव्र गति से बढ़ती है । इसका अनुभव कीजिए ।

यदि यह अनुपात 1 से कम हो तब यह श्रोणी परिवर्तन क्या होगा देखे ।

हम इनमें से सिर्फ अंकगणितीय शृंखला का ही अध्ययन करने वाले हैं । अंकगणितीय शृंखला का n वाँ पद कैसे ज्ञात करना है, यह हमनें देखा है । अब प्रथम n पदों का योगफल कैसे ज्ञात करना है यह हम देखने वाले हैं ।

फटा–फट (शीघ्र) योग क्रिया

तीन सौ साल पुरानी बात है । जर्मनी में ब्यूटनेर (Buttner) नाम के गुरूजी का एक शिक्षकीय विद्यालय था । गुरूजी का जोहान मार्टिन बार्टेलस नाम का केवल एक सहायक (मददगार) था । उसका काम बालकों को वर्णमाला सिखाना तथा उन्हें लेखनी बनाकर देना था । ब्यूटनेर बहुत ही अनुशासनप्रिय थे । ब्यूटनेर गुरूजी को एक काम पूरा करना था । कक्षा के छात्र शोर न करें इसलिए उन्हें काम में लगाने के लिए उन्होंने छात्रों को जोड़–घटाने से संबंधित प्रश्न देने का निश्चय किया । उन्होंने विद्यार्थियों से 1 से 100 तक की संख्याएँ स्लेट पर लिखकर उन्हें जोड़ने के लिए कहा। गुरूजी ने अपना काम शुरु किया । छात्रों ने संख्याएँ लिखना प्रारंभ किया । पाँच ही मिनट में एक स्लेट उलटी रखने की आवाज आयी । उन्होंने कार्ल गाऊस की ओर देखा और पूँछा,''यह क्या है? मैनें तुझे 1 से 100 तक की संख्या लिखकर उनका योग भी करने को कहा है फिर स्लेट उल्टी क्यों रख दी? तुझे कुछ भी नहीं करना है क्या?''

कार्ल गाऊस ने कहा, ''मैंने जोड़ कर लिया है ।''

गुरूजीने कहा, ''क्या? इतनी जल्दी कैसे जोड़ लिया ? संख्या भी नहीं लिखी होगी, उत्तर कितना आया?''

कार्ल गाऊस ने कहा, ''पाँच हजार पचास ।''

गुरूजी ने आश्चर्यचकित होकर पूँछा, ''उत्तर कैसे ज्ञात किया?''

कार्ल गाऊस की शीघ्र योग करने की पद्धति :

सीधे क्रम में संख्या	1	2	3	4. . . .	. . . .	100
	+	+	+	+		+
उल्टे क्रम में संख्या	100	99	98	97	. . . .	1
योग	101	101	101	101		101

प्रत्येक युग्म की संख्याओं का योगफल 101 आता है । यह योगफल 100 बार आया इसलिए 100 × 101 यह गुणा किया । उत्तर 10100 आया । यहाँ 1 से 100 तक की संख्याएँ दो बार जोड़ी गई हैं । अत: 10100 का आधा किया तो 5050 आया । इसलिए 1, 2, 3, . . . , 100 इन संख्याओं का योगफल 5050 है । गुरूजी ने उसे शाबासी दी ।

अब गाऊस की योग करने की युक्ति का उपयोग कर अंकगणितीय शृंखला के n पदों का योगफल ज्ञात करने का सूत्र ज्ञात करें ।

जोहान फ्रेडरिच कार्ल गाऊस

30 अप्रेल 1777 – 23 फरवरी 1855.

कार्ल गाऊस एक महान जर्मन गणितज्ञ थे । उनका जन्म ब्रॉडन स्वाईक में एक अशिक्षित परिवार में हुआ । ब्यूटनेर की शाला में उन्होंने अपने बुद्धि की चमक दिखाई । इसके बाद ब्यूटनेर के मददगार जोहान मार्टिन बार्टेलस की गाऊस से दोस्ती हो गई । दोनों ने मिलकर बीजगणित पर एक किताब प्रकाशित की । बार्टेलस ने गाऊस की असामान्य बुद्धि का परिचय विविध लोगों से कराया ।

आओ जानें

अंकगणितीय शृंखला के प्रथम n पदों का योगफल (sum of first n terms of an A. P.)

अंकगणितीय शृंखला $a, a + d, a + 2d, a + 3d, . . . \ a +(n - 1)d$

में प्रथम पद a तथा सामान्य अंतर d है। इस शृंखला के n पदों का योगफल S_n से दिखाइए।

$$S_n = [a] + [a+d] + \ . . . + [a+(n-2)d] + [a+(n-1)d]2$$

पदों का क्रम उल्टा करने पर,

$$S_n = [a+(n-1)d] + [a+(n-2)d] + \ . . . + [a+d] + [a]$$

योग करने पर,

$$2S_n = [a+a+(n-1)d] + [a+d+a+(n-2)d] + . . . + [a+(n-2)d+ a+d] + [a+(n-1)d+a]$$

$$2S_n = [2a+(n-1)d] + [2a+(n-1)d] + . . . + [2a+(n-1)d] \ . . . n \text{ बार}$$

$$2S_n = n\,[2a+(n-1)d]$$

$$S_n = \frac{n}{2}[2a+(n-1)d] \quad \text{या} \quad S_n = na+\frac{n(n-1)}{2}d$$

उदाहरणार्थ, 14, 16, 18, . . . इस अंकगणितीय शृंखला में प्रथम 100 पदों का योगफल ज्ञात कीजिए।

यहाँ $a = 14,\ d = 2,\ n = 100$

$$S_n = \frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$$

$$\therefore S_n = \frac{100}{2}[2 \times 14+(100-1) \times 2]$$

$$= 50\,[28 + 198]$$

$$= 50 \times 226 = 11300$$

$\therefore$ दी गई शृंखला के प्रथम 100 पदों का योगफल 11,300

इसे ध्यान में रखें

दी गई अंकगणितीय शृंखला का प्रथम पद a तथा सामान्य अंतर d हो तो –

$$t_n = [a+(n-1)d]$$

$$S_n = \frac{n}{2}[2a+(n-1)d] = na + \frac{n(n-1)}{2}d$$

अंकगणितीय शृंखला के प्रथम n पदों के योगफल का एक और सूत्र ज्ञात कीजिए ।

$a, a+d, a+2d, a+3d, \ldots \left[a+(n-1)d\right]$ इस अंकगणितीय शृंखला में प्रथम

पद = $t_1 = a$ तथा n वाँ पद $\left[a+(n-1)d\right]$ है ।

n पदों का योगफल = $S_n = \frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$

अब $S_n = \frac{n}{2}\left[\underline{a}+\underline{a+(n-1)d}\right]$

$\therefore \quad S_n = \frac{n}{2}[t_1 + t_n] = \frac{n}{2}$ [प्रथम पद + अंतिम पद]

हल किए गए उदाहरण

उदा. (1) प्रथम n प्राकृत संख्याओं का योगफल ज्ञात कीजिए ।

हल : प्रथम n प्राकृत संख्याएँ $1, 2, 3, \ldots, n$.

यहाँ $a = 1$, $d = 1$, n वें पद = n

$S_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + n$

$S_n = \frac{n}{2}$ [प्रथम पद + अंतिम पद]

$= \frac{n}{2}[1+n]$

$= \frac{n(n+1)}{2}$

$\therefore$ प्रथम n प्राकृत संख्याओं का योगफल $\frac{n(n+1)}{2}$ होता है ।

उदा. (2) प्रथम n सम प्राकृत संख्याओं का योगफल ज्ञात कीजिए ।

हल : प्रथम n सम प्राकृत संख्या $2, 4, 6, 8, \ldots, 2n$.

t_1 = प्रथम पद = 2 , t_n = अंतिम पद = $2n$

विधि I

$S_n = \frac{n}{2}[t_1 + t_n]$

$= \frac{n}{2}[2 + 2n]$

$= \frac{n}{2} \times 2(1+n)$

$= n(1+n)$

$= n(n+1)$

विधि II

$S_n = 2 + 4 + 6 \ldots + 2n$

$= 2(1 + 2 + 3 + \ldots + n)$

$= \frac{2[n(n+1)]}{2}$

$= n(1+n)$

$= n(n+1)$

विधि III

$S_n = \frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$

$= \frac{n}{2}[2 \times 2+(n-1)2]$

$= \frac{n}{2}[4+2n-2]$

$= \frac{n}{2}[2+2n]$

$= \frac{n}{2} \times 2(1+n)$

$= n(1+n)$

$= n(n+1)$

$\therefore$ प्रथम n सम प्राकृत संख्याओं का योगफल = $n(n+1)$ होता है ।

उदा. (3) प्रथम n विषम प्राकृत संख्याओं का योगफल ज्ञात कीजिए ।

हल : प्रथम n विषम प्राकृत संख्याएँ

$1, 3, 5, 7, \ldots, (2n - 1).$

$a = t_1 = 1$ तथा $t_n = (2n - 1),$

विधि I

$$S_n = \frac{n}{2}[t_1 + t_n]$$
$$= \frac{n}{2}[1 + (2n - 1)]$$
$$= \frac{n}{2}[1 + 2n - 1]$$
$$= \frac{n}{2} \times 2n$$
$$= n^2$$

विधि II

$$S_n = \frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$$
$$= \frac{n}{2}[2 \times 1 + (n-1) \times 2]$$
$$= \frac{n}{2}[2 + 2n - 2]$$
$$= \frac{n}{2} \times 2n$$
$$= n^2$$

विधि III

$$1 + 3 + \ldots\ 2n-1$$
$$= (1 + 2 + 3 + \ldots + 2n) - (2 + 4 + 6 + \ldots + 2n)$$
$$= \frac{2n(2n+1)}{2} - \frac{2n(n+1)}{2}$$
$$= (2n^2 + n) - (n^2 + n)$$
$$= n^2$$

$\therefore$ प्रथम n विषम प्राकृत संख्याओं का योगफल n^2 होता है ।

उदा.(4) 1 से 150 तक की सभी विषम संख्याओं का योग कीजिए ।

हल : 1 से 150 तक की सभी विषम संख्याएँ $1, 3, 5, 7, \ldots, 149.$

यह अंकगणितीय शृंखला है ।

यहाँ $a = 1$ तथा $d = 2$, सर्वप्रथम ज्ञात कीजिए कि 1 से 150 तक की विषम संख्याएँ कितनी हैं । अर्थात n का मान ज्ञात कीजिए ।

$t_n = a + (n - 1)d$

$149 = 1 + (n - 1)2 \quad \therefore 149 = 1 + 2n - 2 \quad n = 75$

अब $1 + 3 + 5 + \ldots + 149$ इन 75 संख्याओं का योग कीजिए ।

$a = 1$ तथा $d = 2, n = 75$

विधि I - $S_n = \frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$

$S_n = \square$

$S_n = \square \times \square$

$S_n = \square$

विधि II - $S_n = \frac{n}{2}[t_1 + t_n]$

$S_n = \frac{75}{2}[1 + 149]$

$S_n = \square \times \square$

$S_n = \square$

प्रश्नसंग्रह 3.3

(1) किसी अंकगणितीय शृंखला का प्रथम पद 6 तथा सामान्य अंतर 3 हो तो S_{27} ज्ञात कीजिए ।

$$a = 6,\ d = 3,\ S_{27} = ?$$

$$S_n = \frac{n}{2}[\square + (n-1)d]$$

$$S_{27} = \frac{27}{2}[12 + (27-1)\square]$$

$$= \frac{27}{2} \times \square$$

$$= 27 \times 45$$

$$= \square$$

(2) प्रथम 123 सम प्राकृत संख्याओं का योगफल ज्ञात कीजिए ।

(3) 1 और 350 के बीच की सभी संख्याओं का योगफल ज्ञात कीजिए ।

(4) किसी अंकगणितीय शृंखला का 19 वाँ पद 52 तथा 38 वाँ पद 148 हो, तो उस शृंखला के प्रथम 56 पदों का योगफल ज्ञात कीजिए ।

(5) 1 और 140 के बीच की, 4 से विभाज्य प्राकृत संख्याओं का योगफल कितना है, यह ज्ञात करने के लिए निम्नलिखित कृति पूर्ण कीजिए ।

1 से 140 के बीच की 4 से विभाज्य संख्याएँ

↓

4, 8, ... , 136

↓

कुल कितनी संख्याएँ है? अर्थात n = कितनी $\square$

↓

$a = \square,\ d = \square,\ t_n = \square$

↓

$t_n = a+(n-1)d$

↓

$136 = \square + (n-1) \times \square$

→ $n = \square$ → $S_n = \frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$

$S_{\square} = \frac{\square}{2}[\qquad\qquad]$ = $\square$

1 से 140 के बीच की, 4 से विभाज्य संख्याओं का योगफल = $\square$

★ (6) किसी अंकगणितीय शृंखला के प्रथम 55 पदों का योगफल 3300 हो, तो उस शृंखला का 28 वाँ पद ज्ञात कीजिए ।

(7) किसी अंकगणितीय शृंखला के तीन क्रमिक पदों का योगफल 27 तथा उनका गुणनफल 504 हो, तो वे पद ज्ञात कीजिए । (तीन क्रमिक पद $a - d$, a, $a + d$ लीजिए ।)

(8) किसी अंकगणितीय शृंखला के चार क्रमिक पदों का योगफल 12 है तथा उन चार क्रमिक पदों में से तृतीय और चतुर्थ पद का योगफल 14 हो, तो वे चार पद ज्ञात कीजिए ।
(चार क्रमिक पद $a - d$, a, $a + d$, $a + 2d$ लीजिए ।)

(9) किसी अंकगणितीय शृंखला का 9 वाँ पद शून्य हो, तो 29 वाँ पद 19 वें पद का दुगुना होता है, सिद्ध कीजिए ।

आओ जानें

अंकगणितीय शृंखला के उपयोजन (Application of A.P.)

उदा. (1) मिक्सर मशीन बनाने वाली किसी कंपनी ने तीसरे वर्ष 600 मिक्सर बनाए तथा 7 वें वर्ष 700 मिक्सर बनाए। प्रतिवर्ष बनने वाले मिक्सरों की संख्या में वृद्धि निश्चित हो तो दिए गए प्रश्नों को हल कीजिए ।
(i) प्रथम वर्ष का उत्पादन (ii) 10 वें वर्ष का उत्पादन (iii) प्रथम 7 वर्षों का कुल उत्पादन

हल : कंपनी द्वारा बनाए जानेवाले मिक्सरों की संख्या में प्रतिवर्ष होने वाली वृद्धि निश्चित है । अत: लगातार वर्षों में होने वाले उत्पादन की संख्या अंकगणितीय शृंखला है । कंपनी द्वारा (i) n वें वर्ष में t_n मिक्सर बनाए गए, दी गई जानकारी के आधार पर

$t_3 = 600$, $t_7 = 700$

हम जानते हैं कि, $t_n = a+(n-1)d$

$t_3 = a+(3-1)d$

$a+2d = 600. . .$ (I)

$t_7 = a+(7-1)d$

$t_7 = a+6d = 700$

$a+2d = 600 \quad \therefore\ a = 600 - 2d$ यह मान समीकरण (II) में रखने पर,

$600 - 2d + 6d = 700$

$4d = 100 \quad \therefore\ d = 25$

$a+2d = 600 \quad \therefore\ a + 2 \times 25 = 600$

$a + 50 = 600 \quad \therefore\ a = 550$

$\therefore$ प्रथम वर्ष का उत्पादन 550 मिक्सर मशीन था ।

(ii) $t_n = a+(n-1)d$

$t_{10} = 550+(10-1) \times 25$

$= 550 + 225$

10 वें वर्ष का उत्पादन 775 मिक्सर मशीन था ।

(iii)प्रथम 7 वर्षों का उत्पादन ज्ञात करने के लिए S_n के सूत्र का उपयोग करें ।

$$S_n = \frac{n}{2}\ [2a+(n-1)d]$$

$$S_n = \frac{n}{2}\ [2a+(n-1)d] = \frac{7}{2}\ [1100 + 150]$$

$$= \frac{7}{2}\ [1250] = 7 \times 625 = 4375$$

$\therefore$ प्रथम 7 वर्षों में 4375 मिक्सरों का उत्पादन हुआ ।

उदा. (2) उधार के रूप में लिए गए 3,25,000 ₹ में से अजय शर्मा पहले महीने 30500 ₹ का भुगतान करते हैं । इसके बाद उन्हें हर महीने उसके पहलेवाले महीने से 1500 ₹ कम भुगतान करना पड़ता हो तो उधार लिए गए रुपयों का भुगतान कितने महीनों में पूरा होगा?

हल : माना उधार का भुगतान पूरा होने के लिए n महीने लगेंगे । 30,500 में से प्रति माह भुगतान की राशि 1500 रु. कम देना है भुगतान की यह राशि $\therefore$ 30,500; 30,500 − 1500; 30,500 − 2 × 1500, . . . यह राशि अंकगणितीय शृंखला में है ।

प्रथम पद = a = 30500, d = −1500

ली गई कर्ज की राशि = S_n = 3,25,000

$$S_n = \frac{n}{2}\ [2a+(n-1)d]$$

$$3,25,000 = \frac{n}{2}\ [2 \times 30500+(n-1)d]$$

$$= \frac{n}{2}\ [2 \times 30500 - 1500n + 1500]$$

$$3,25,000 = 30500n - 750n^2 + 750n$$

$$750n^2 - 31250n + 325000 = 0$$

$3n^2 - 125n + 1300 = 0$ .... (दोनों पक्षों में 250 से भाग देने पर)

$$3n^2 - 60n - 65n + 1300 = 0$$

$$3n(n-20) - 65\ (n-20) = 0$$

$$(n - 20)\ (3n - 65) = 0$$

$$n - 20 = 0\ ,\ 3n - 65 = 0$$

$n = 20$ अथवा $n = \frac{65}{3} = 21\frac{2}{3}$

$\therefore\ n = 20$

n यह अंकगणितीय शृंखला के पदों का क्रमांक है अत: n एक प्राकृत संख्या है ।

$\therefore\ n \neq \frac{65}{3}$

(अथवा 20 महीने के बाद S_{20} = 3,25,000 ₹ अर्थात उस समय उधार ली गई पूरी राशि का भुगतान किया जाएगा । बाद के समय का विचार करने की आवश्यक्ता नहीं है ।)

$\therefore$ उधार लिए गए रुपयों का भुगतान 20 महीनों में पूरा होगा ।

उदा. (3) अनवर प्रतिमाह एक निश्चित राशि की बचत करता है। पहले महीने वह 200 ₹ की बचत करता है। दूसरे महीने 250 ₹ की बचत करता है और तीसरे महीने 300 ₹ की बचत करता हो, तो इस क्रम में 1000 ₹ की मासिक बचत कौन-से महीने में होगी उस महीने तक उसकी कुल बचत कितनी होगी?

हल: पहले महीने की बचत 200 रूपये ; दूसरे महीने की बचत 250 रूपये

200, 250, 300, . . . यह अंकगणितीय शृंखला है।

यहाँ $a = 200$, $d = 50$, t_n के सूत्र का उपयोग कर n ज्ञात कीजिए तत्पश्चात S_n ज्ञात कीजिए।

$$t_n = a+(n-1)d$$

$$= 200 + (n-1)50$$

$$= 200 + 50n - 50$$

$$1000 = 150 + 50n$$

$$150 + 50n = 1000$$

$$50n = 1000 - 150$$

$$50n = 850$$

$$\therefore n = 17$$

1000 ₹ की मासिक बचत 17 वें महीने में होगी।

17 महीनों में कुल बचत ज्ञात करने के लिए S_n ज्ञात करेंगे।

$$S_n = \frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$$

$$= \frac{17}{2}[2 \times 200+(17-1) \times 50]$$

$$= \frac{17}{2}[400 + 800]$$

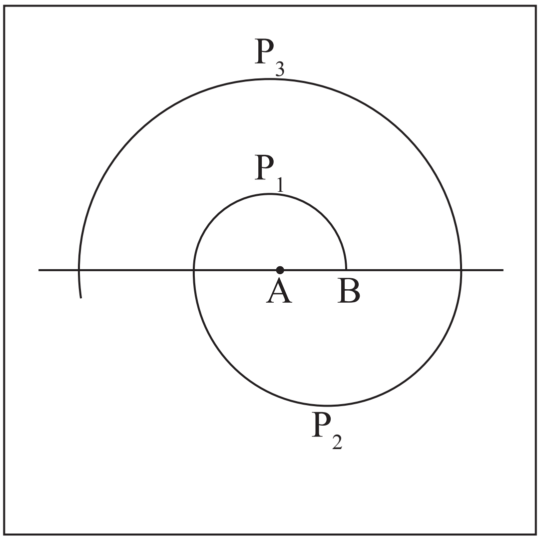
$$= \frac{17}{2}[1200]$$

$$= 17 \times 600$$

$$= 10200$$

17 महीनों की कुल बचत 10,200 ₹ है।

उदा. (4) आकृति में दर्शाएनुसार किसी रेखापर बिंदु A को केंद्रबिंदु लेकर 0.5 सेमी त्रिज्या वाला P_1 का अर्धवृत्त खींचा । यह अर्धवृत्त, उस रेखा को B बिंदु पर प्रतिच्छेदित करता है । बिंदु B को केंद्र मानकर 1 सेमी त्रिज्या वाला P_2 अर्धवृत्त रेखा के दूसरी ओर खींचा । अब पुन: बिंदु A को केंद्र मानकर 1.5 सेमी त्रिज्या वाला अर्धवृत्त P_3 खींचा। इसी प्रकार A तथा B को केंद्र मानकर क्रमश: 0.5 सेमी, 1 सेमी, 1.5 सेमी, 2 सेमी, त्रिज्याओं वाले अर्धवृत्तों की रचना करने पर एक वलयाकृति बनती है, तो इस प्रकार 13 अर्धवृत्तों से बननेवाली वलयाकृति की लंबाई कितनी होगी? ($\pi = \frac{22}{7}$ लीजिए ।)



हल : माना A, B, A, B, . . . इस क्रम में केंद्र मानकर खींचे गए अर्धवृत्तों की लंबाई क्रमश: $P_1, P_2, P_3, \ldots$ है । पहले अर्धवृत्त की त्रिज्या 0.5 सेमी है । दूसरे अर्धवृत्त की त्रिज्या 1.0 सेमी है, ... इसप्रकार दी गई जानकारी के आधार पर $P_1, P_2, P_3, \ldots P_{13}$ ज्ञात करिए ।

पहले अर्धपरिधि की लंबाई $= P_1 = \pi r_1 = \pi \times \frac{1}{2} = \frac{\pi}{2}$

$$P_2 = \pi r_2 = \pi \times 1 = \pi$$

$$P_3 = \pi r_3 = \pi \times 1.5 = \frac{3}{2}\pi$$

$P_1, P_2, P_3, \ldots$ अर्धपरिधि अर्थात $\frac{1}{2}\pi, 1\pi, \frac{3}{2}\pi, \ldots$ संख्याएँ अंकगणितीय शृंखला में हैं ।

जिसमें $a = \frac{1}{2}\pi, d = \frac{1}{2}\pi$, इस आधारपर S_{13} ज्ञात कीजिए ।

$$S_n = \frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$$

$$S_{13} = \frac{13}{2}[2 \times \frac{\pi}{2} + (13-1) \times \frac{\pi}{2}]$$

$$= \frac{13}{2}[\pi + 6\pi]$$

$$= \frac{13}{2} \times 7\pi$$

$$= \frac{13}{2} \times 7 \times \frac{22}{7}$$

$= 143$ सेमी

$\therefore$ 13 अर्धवृत्तों से बनने वाली वलयाकृति की लंबाई 143 सेमी होगी ।

उदा. (5) किसी गाँव में वर्ष 2010 में 4000 लोग साक्षर थे । इस संख्या में प्रतिवर्ष 400 की वृद्धि हो रही हो तो वर्ष 2020 में कितने लोग साक्षर होंगे ?

हल :

वर्ष	2010	2011	2012	...	2020
साक्षर लोग	4000	4400	4800	...	☐

$a = 4000, \quad d = 400 \quad n = 11$

$$t_n = a+(n-1)d$$
$$= 4000 + (11-1)400$$
$$= 4000 + 4000$$
$$= 8000$$

वर्ष 2020 में 8000 लोग साक्षर होंगे ।

उदा. (6) श्रीमती शेख को वर्ष 2015 में 1,80,000 ₹ वार्षिक वेतन वाली नौकरी मिली । कार्यालय ने उन्हें प्रतिवर्ष 10,000 ₹ की वृद्धि देना तय किया हो तो कितने वर्षों बाद उनका वार्षिक वेतन 2,50,000 ₹ होगा ?

हल :

वर्ष	पहला वर्ष (2015)	दूसरा वर्ष (2016)	तीसरा वर्ष (2017)	...
वेतन रुपए	[1,80,000]	[1,80,000 + 10000]		...

$a = 1,80,000, \; d = 1000, \quad n = ? \quad t_n = 2,50,000$ रूपये ।

$t_n = a+(n-1)d$

$2,50,000 = 1,80,000 + (n-1) \times 10000$

$(n-1) \times 10000 = 70,000$

$(n-1) = 7$

$n = 8$

8 वें वर्ष में उनका वार्षिक वेतन 25,00,00 रूपये होगा ।

प्रश्नसंग्रह 3.4

(1) सानिका ने 1 जनवरी 2016 को निश्चित किया कि उस दिन 10 ₹, दूसरे दिन 11 ₹, तीसरे दिन 12 ₹ इस प्रकार बचत करते रहना है । 31 डिसेंबर 2016 तक उसकी कुल बचत कितनी हुई ?

(2) किसी व्यक्ति ने 8000 ₹ कर्ज लिया तथा उसपर 1360 ₹ ब्याज देने का वादा किया । प्रत्येक किस्त के बाद 40 रू कम करते हुए कुल 12 किस्तों में उसने कर्ज का भुगतान कर दिया, तो उस व्यक्ति द्‌वारा भुगतान की गई पहली तथा अंतिम किस्त कितनी होगी ?

(3) सचिन द्‌वारा राष्ट्रीय बचत प्रमाणपत्र में पहले वर्ष 5000 ₹ , दूसरे वर्ष 7000 ₹, तीसरे वर्ष 9000 ₹ इस प्रकार निवेश किया गया तो सचिन ने 12 वर्षों में कुल कितना निवेश किया ?

(4) किसी नाट्यगृह में कुर्सियों की कुल 27 कतारें हैं । पहली कतार में कुल 20 कुर्सियाँ हैं , दूसरी कतार में कुल 22 कुर्सियाँ तथा तीसरी कतार में कुल 24 कुर्सियाँ हों तो 15 वीं कतार में कुल कितनी कुर्सियाँ होंगी तथा नाट्यगृह में कुल कितनी कुर्सियाँ होंगी ?

(5) कारगिल में किसी सप्ताह के सोमवार से शनिवार तक का तापमान दर्ज किया गया । बाद में ध्यान आया कि दर्ज जानकारी अंकगणितीय शृंखला में है । सोमवार तथा शनिवार के तापमान का योगफल मंगलवार तथा शनिवार के तापमान के योगफल से 5° अधिक है । यदि बुधवार का तापमान -30° सेल्सियस हो तो प्रत्येक दिन का तापमान ज्ञात कीजिए ।

(6) अंतरराष्ट्रीय पर्यावरण दिवस के उपलक्ष्य में त्रिभुजाकार जमीन पर वृक्षारोपण कार्यक्रम आयोजित किया गया । पहली पंक्ति में 1 पौधा दूसरी पंक्ति में 2 पौधे तीसरी पंक्ति में तीन इस प्रकार 25 पंक्तियों में पौधे लगाए गए, तो कुल कितने पौधे लगाए गए ?

प्रकीर्ण प्रश्नसंग्रह 3

1. निम्नलिखित उपप्रश्नों में चार विकल्प दिए गए हैं । उसमें से उचित विकल्प चुनिए ।

(1) $-10, -6, -2, 2, \ldots$ यह अनुक्रमणिका ....

(A) अंकगणितीय शृंखला है क्योंकि $d = -16$ (B) अंकगणितीय शृंखला है क्योंकि $d = 4$

(C) अंकगणितीय शृंखला है क्योंकि $d = -4$ (D) अंकगणितीय शृंखला नहीं है ।

(2) जिस अंकगणितीय शृंखला में प्रथम पद -2 तथा सामान्य अंतर -2 हो ऐसे अंकगणितीय शृंखला के प्रथम 4 पद ..... हैं

(A) $-2, 0, 2, 4$ (B) $-2, 4, -8, 16$

(C) $-2, -4, -6, -8$ (D) $-2, -4, -8, -16$

(3) प्रथम 30 प्राकृत संख्याओं का योगफल निम्नलिखित में से कौन-सा है ? . . .

(A) 464 (B) 465 (C) 462 (D) 461

(4) दी गई अंकगणितीय शृंखला में $t_7 = 4$, $n = 7$, $d = -4$ तो $a = . . .$

(A) 6 (B) 7 (C) 20 (D) 28

(5) एक अंकगणितीय शृंखला के लिए $a = 3.5$, $d = 0$, तो $t_n = . . .$

(A) 0 (B) 3.5 (C) 103.5 (D) 104.5

(6) एक अंकगणितीय शृंखला में प्रथम दो पद −3, 4 हों तो 21 वाँ पद . . . है।

(A) −143 (B) 143 (C) 137 (D) 17

(7) यदि एक अंकगणितीय शृंखला के लिए $d = 5$ हो तो $t_{18} - t_{13} = . . .$

(A) 5 (B) 20 (C) 25 (D) 30

(8) 3 की पहली 5 गुणज संख्याओं का योगफल . . . है।

(A) 45 (B) 55 (C) 15 (D) 75

(9) 15, 10, 5, . . . इस अंकगणितीय शृंखला के प्रथम 10 पदों का योगफल . . . है।

(A) −75 (B) −125 (C) 75 (D) 125

(10) किसी अंकगणितीय शृंखला का प्रथम पद 1 हो तो n वाँ पद 20 होता है। यदि $S_n = 399$ हो तो $n = . . .$

(A) 42 (B) 38 (C) 21 (D) 19

2. −11, −8, −5, . . . , 49 इस अंकगणितीय शृंखला का अंत से चौथा पद ज्ञात कीजिए।

3. एक अंकगणितीय शृंखला का 10 वाँ पद 46 है 5 वें तथा 7 वें पदों का योगफल 52 हो तो वह शृंखला ज्ञात कीजिए।

4. किसी अंकगणितीय शृंखला का 4 था पद −15 और 9 वाँ पद −30 है तो पहले 10 पदों का योगफल ज्ञात कीजिए।

5. दो अंकगणितीय शृंखला 9, 7, 5, . . . और 24, 21, 18, ... दी गई हैं यदि इन दोनों शृंखलाओं के n वें पद समान हों तो n का मान ज्ञात कीजिए और n वाँ पद भी ज्ञात कीजिए।

6. यदि किसी अंकगणितीय शृंखला के तीसरे तथा 8 वें पदों का योगफल 7 हो और 7 वें तथा 14 वें पदों का योगफल −3 हो तो 10 वाँ पद ज्ञात कीजिए।

7. एक अंकगणितीय शृंखला का पहला पद −5 और अंतिम पद 45 है। यदि उन सभी पदों का योगफल 120 हो तो वे कितने पद होंगे ? और उनका सामान्य अंतर कितना होगा ?

8. 1 से n तक की प्राकृत संख्याओं का योगफल 36 हो तो n का मान ज्ञात कीजिए ।

9. 207 इस संख्या के 3 भाग इस प्रकार कीजिए कि वे संख्याएँ अंकगणितीय शृंखला में हो तथा उनमें से दो छोटी संख्याओं का गुणनफल 4623 हो ।

10. एक अंकगणितीय शृंखला में 37 पद हैं । सबसे मध्य के तीन पदों का योगफल 225 है और अंतिम तीन पदों का योगफल 429 हो तो अंकगणितीय शृंखला लिखिए ।

★11. जिस अंकगणितीय शृंखला का प्रथम पद a, दूसरा पद b और अंतिम पद c हो तो उस शृंखला के सभी पदों का योगफल $\frac{(a+c)(b+c-2a)}{2(b-a)}$ है सिद्ध कीजिए ।

★12. यदि किसी अंकगणितीय शृंखला के पहले p पदों का योग पहले q पदों के योगफल के बराबर हो दिखाइए कि उसके पहले (p + q) पदों का योगफल शून्य है । $(p \neq q)$

★13. अंकगणितीय शृंखला को m वें पद का m गुना यह n वें पद के n गुने के बराबर हो तो दिखाइए कि उसका $(m + n)$ वाँ पद शून्य होता है ।

14. 1000 रू का 10% साधारण ब्याज की दर से निवेश किया तो प्रत्येक वर्ष के अंत में मिलनेवाली ब्याज की रकम अंकगणितीय शृंखला होगी क्या ? जाँच कीजिए । यदि अंकगणितीय शृंखला में हो तो 20 वर्ष के पश्चात प्राप्त होने वाली ब्याज की रकम ज्ञात कीजिए । इसके लिए नीचे दी गई कृति पूर्ण कीजिए ।

$$\text{साधारण ब्याज} = \frac{P \times R \times N}{100}$$

1 वर्ष के पश्चात प्राप्त होने वाला साधारण ब्याज = $\frac{1000 \times 10 \times 1}{100}$ = $\square$

2 वर्ष के पश्चात प्राप्त होने वाला साधारण ब्याज = $\frac{1000 \times 10 \times 2}{100}$ = $\square$

3 वर्ष के पश्चात प्राप्त होने वाला साधारण ब्याज = $\frac{\square \times \square \times \square}{100}$ = 300

इस प्रकार 4, 5, 6 वर्षों के पश्चात प्राप्त होने वाला ब्याज क्रमश: 400, $\square$, $\square$ होगा ।

इस संख्या के आधारपर d = $\square$, और a = $\square$

20 वर्ष के पश्चात प्राप्त होने वाला ब्याज

$t_n = a+(n-1)d$

$t_{20} = \square + (20-1) \square$

$t_{20} = \square$

20 वर्ष के पश्चात प्राप्त कुल ब्याज = $\square$

N3QK4D

□□□

4 आर्थिक नियोजन

आओ सीखें

- जीएसटी का परिचय
- जीएसटी की गणना तथा इनपुट टैक्स क्रेडीट
- कर पत्र (टैक्स इन्व्हॉइस)
- शेयर्स, म्युच्युअल फंड तथा SIP

आओ चर्चा करें

शिक्षिका : विद्यार्थियों, अपने देश में व्यापार के लिए कौन-सी कर पद्धति चल रही है ?

आयुष : हमारे देश में जीएसटी अर्थात वस्तु एवं सेवा कर यह कर पद्धति चल रही है ।

शिक्षिका : बहुत अच्छा ! इस संबंध में आप और क्या जानते हैं ?

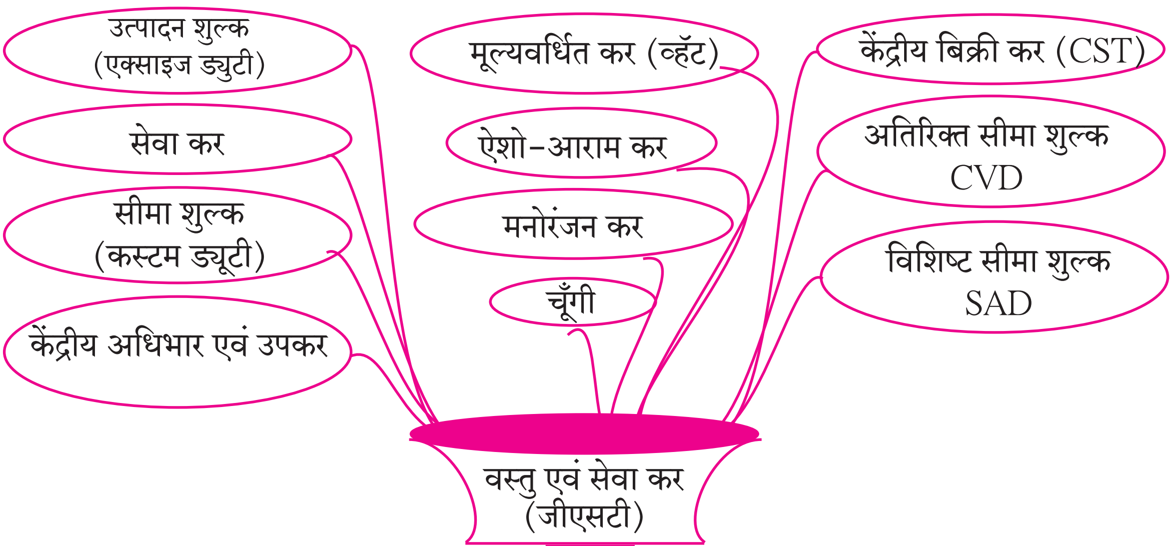
अयान : GST अर्थात Goods and Service Tax.

आयशा : देशभर में एक ही कर पद्धति लागू की गई है ।

शिक्षिका : सही कहा । इसके पहले अलग-अलग राज्यों में विविध कर अलग-अलग समय पर (बार-बार) देना होता था । पहले के करों में से कौन-से कर, वस्तु एवं सेवा कर में समाविष्ट किए गए है? निम्नलिखित चित्र को देखकर बताइए ।

शफीक : उत्पादन शुल्क, सीमा शुल्क, व्हॅट, मनोरंजन कर, केंद्रीय बिक्री कर, सेवा कर, चूँगी कर आदि ।

शिक्षिका : इन सभी करों को निरस्त कर अब केवल वस्तु एवं सेवा कर यह एक ही कर वस्तु एवं सेवा के खरीदी-बिक्री पर लगाया जाता है । यह कर पद्धति जुलाई 2017 से लागू की गई । इसलिए कहा जाता है ! ''एक देश, एक कर, एक बाजार''



आओ जानें

करबीजक (Tax Invoice)

वस्तु खरीद का टैक्स इन्व्हॉईस (नमूना)										
SUPPLIER : A to Z SWEET MART 143, Shivaji Rasta, Mumbai : 400001 Maharashtra Mob. No. 92636 92111 email : atoz@gmail.com								GSTIN :27ABCDE1234H1Z5		
Invoice No. GST/110						Invoice Date: 31-Jul-2017				
S. No.	HSN code	Name of Product	Rate	Quantity	Taxable Amount	CGST		SGST		Total
						Rate	Tax	Rate	Tax	Rs.
1	210690	पेड़ा	₹ 400 प्र. कि.	500 ग्राम	200.00	2.5%	5.00	2.5%	5.00	210.00
2	210691	चॉकलेट	₹ 80	1 बार	80.00	14%	11.20	14%	11.20	102.40
3	2105	आइस्क्रीम	₹ 200	1 पॅक (500 ग्राम)	200.00	9%	18.00	9%	18.00	236.00
4	1905	ब्रेड	₹ 35	1 पॅक	35.00	0%	0.00	0%	0.00	35.00
5	210690	मक्खन	₹ 500 प्र. कि.	250 ग्राम	125.00	6%	7.50	6%	7.50	140.00
						कुल रूपये	41.70		41.70	723.40

वेद : हमें इस बिल में कुछ नए शब्द दिख रहे हैं । उनके अर्थ बताइए ।

शिक्षिका : **CGST** तथा **SGST** ऐसे GST के दो भाग है । **CGST** का अर्थ है (**C**entral **G**oods and **S**ervices **T**ax) अर्थात **केंद्रीय वस्तु एवं सेवा कर,** यह केंद्र सरकार को प्राप्त होता है । **SGST** का अर्थ है (**S**tate **G**oods & **S**ervices **T**ax) अर्थात **राज्य वस्तु एवं सेवा कर,** यह राज्य सरकार को प्राप्त होता है ।

रिया : दाहिनी ओर के ऊपरी कोने में अंक तथा अक्षरों की पंक्ति दिख रही हैं, वह क्या है ?

शिक्षिका : यह जीएसटिएन अर्थात व्यापारी का पहचान क्रमांक है । (GSTIN - GST Identification Number). जिस व्यापारी की गत आर्थिक वर्ष की खरीदी-बिक्री (Turnover) 20 लाख से अधिक हो, उन्हें यह नंबर लेना अनिवार्य होता है । PAN में जैसे 10 अंकाक्षर होते हैं, उसी प्रकार प्रत्येक व्यापारी को दिए गए GSTIN में 15 अंकाक्षर होते हैं । जिसमें उस व्यापारी का PAN समाविष्ट होता है ।

उदाहरणार्थ. : 27 A B C D E 1 2 3 4 H 1 Z 5 (अंत में अक्षर या अंक होता है।)

- 27 → राज्य का संकेतांक 2 अंकोंवाला
- A B C D E 1 2 3 4 H → 10 अंकाक्षरी PAN
- 1 → एक नोंद
- Z → सभी के लिए समान (बाय डीफॉल्ट)
- 5 → चेक सम डिजिट

'27' यह महाराष्ट्र राज्य का संकेतांक (State Code) है । 27 इस संकेतांक से व्यापारी ने महाराष्ट्र में पंजीकरण किया है यह स्पष्ट होता है ।

(चेक सम डिजिट अर्थात GST की वेबसाईट पर GSTIN डालने पर इस नंबर की वैधता समझती है ।)

जेनी : बीजक में HSN कोड यह शब्द भी है ।

शिक्षिका : HSN कोड अर्थात उस वस्तु के वर्गीकरण का विशिष्ट क्रमांक होता है । कर बीजक में उसको संलग्न करना होता है । HSN अर्थात Harmonized System of Nomenclature ।

जोसेफ : कर बीजक में दुकान का नाम, पता, दिनांक, बीजक क्रमांक, मोबाइल नंबर तथा ई-मेंल आयडी भी है ।

शिक्षिका : अब इस बीजक में वस्तु एवं सेवा कर की गणना कैसे की जाती है, देखें । इसके लिए निम्नलिखित वाक्यों में रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए । बीजक में पेडे का दर 400 ₹ प्रतिकिलो है । आधा किलोग्राम पेडे खरीदे हैं । इसलिए उसकी कीमत 200 ₹ है ।

- पेडे का केंद्रीय कर 2.5% की दर से ☐ रूपये, इसी प्रकार राज्य का कर ☐ की दर से 5 रूपये । इस आधार पर पेडे पर वस्तु-सेवा कर की दर 2.5% + 2.5% = 5% तथा कुल कर 10 रूपये ।
- इस प्रकार चॉकलेट पर वस्तु-सेवा कर की कुल दर ☐ % अत: उसपर कुल कर ☐ रूपये ।
- आइस्क्रीम पर वस्तु-सेवा कर की कुल दर ☐% है । अर्थात आइस्क्रीम का मूल्य ☐ रूपये।
- मक्खन पर केंद्र का दर ☐% तथा राज्य का दर ☐% मिलाकर वस्तु-सेवा कर की दर ☐% है ।

आदित्य : ब्रेड पर कर की दर 0% है । उसी प्रकार प्रत्येक वस्तु पर केंद्र तथा राज्य की कर दर समान है ।

निनाद : विविध वस्तुओं के कर की दर अलग-अलग है जैसे 0%, 5%, 12%, 18% व 28% ।

शिक्षिका : प्रत्येक वस्तु पर कर की दर सरकार निर्धारित करती है । अब एक कर सेवा का कर बीजक का नमूना देखें । दी गई जानकारी के आधार पर रिक्त स्थानों की पूर्ति सेवा का कर बीजक पूर्ण कीजिए ।

दी गई सेवा का टैक्स इन्व्हॉइस (नमूना)

आहार सोनेरी, खेड शिवापुर, पुणे **Invoice No. 58**
Mob. No. 7588580000 E-mail :ahar.khed@yahoo.com
GSTIN : 27 AAAAA5555B1ZA Invoice Date : 25-Dec-2017

S A Code (SAC)	Food items	Qty	Rate (in Rs.)	Taxable amount	CGST		SGST	
9963	Coffee	1	20	20.00	2.5%	0.50 ₹	2.5%	. . .
9963	Masala Tea	1	10	10.00	. . . .	. . .	2.5%	. . .
9963	Masala Dosa	2	60	. . . .	2.5%	. . .	. . .	. . .
			Total	. . .		. . .		. . .
					Grand Total =	.... रूपये		

शिक्षिका : वस्तु तथा सेवा इन दोनों बिलों का निरीक्षण कर दोनों बिलों में अंतर ज्ञात कीजिए ।

पॅट्रीक : वस्तु बिल पर HSN कोड दिया है तथा उपाहार गृह के बिल पर SAC कोड दिया गया है।

शिक्षिका : SAC अर्थात सेवा के वर्गीकरण का विशिष्ट क्रमांक, उसे SAC-Service Accounting Code कहते हैं ।

निम्नलिखित सारिणी में कुछ वस्तु-सेवा तथा उनपर कर की दर नमूना रूप में दिए गए हैं ।

अ.क्र.	प्रकार	कर की दर	वस्तु एवं सेवा प्रकार
I	शून्याधारित (Nil rated)	0%	**वस्तु** - अनाज सहित जीवनावश्यक वस्तुएँ सब्जी, फल, दूध, नमक, मिट्टी के बर्तन आदि । **सेवा** - धर्मदाय संस्थाओं के उपक्रम, पानी का परिवहन, सड़क तथा पुलों का उपयोग, शिक्षा तथा स्वास्थ्यसेवा, सार्वजनिक वाचनालय, कृषि संबंधी सेवा आदि ।
II	निम्न दर	5%	**वस्तु** - सामान्य उपयोग की वस्तुएँ - जैसे LPG सिलेंडर, चाय, तेल, शहद, शीत गृह में रक्षित सब्जियाँ, लौंग, काली मिर्च, मसाले, मिठाई आदि । **सेवा** - रेलवे परिवहन, बस परिवहन, टैक्सी सेवा, विमान परिवहन (इकॉनॉमी क्लास) होटल की खाद्य सामग्री तथा पेय आपूर्ति आदि ।
III	प्रमाण दर (स्तर I)	12%	**वस्तु** - ग्राहकोपयोगी वस्तुएँ - मक्खन, घी, सूखा मेवा, सब्जी तथा फलों द्वारा बनाया गया अचार, मुरब्बा, जॅम, जेली, चटनी, मोबाइल आदि । **सेवा** - छपाई के काम, गेस्ट हाऊस, निर्माण कार्य व्यवसाय से संबंधित सेवा आदि।
IV	प्रमाण दर (स्तर II)	18% (अत्याधिक वस्तु एवं सेवा का समावेश)	**वस्तुएँ** - मार्बल, ग्रैनाईट, इत्र, धातू की वस्तु, संगणक, प्रिंटर, मॉनीटर, CCTV आदी. **सेवाएँ** - कुरिअर सर्व्हिसेस, आऊटडोअर केटरिंग, सर्कस, नाटक, प्रदर्शन, सिनेमा, चलन विनिमय सेवा, शेयर खरीदी बिक्री पर दलाली सेवा आदि ।
V	उच्चतम दर	28%	**वस्तु** - ऐशो-आराम की वस्तुएँ - मोटार साइकल पार्ट्स, लक्झरी कार, पान मसाला, व्हॅक्यूम क्लीनर, डीश वॉशर, AC, युनिट, वॉशिंग मशीन, तंबाखु उत्पादन, शीतपेय आदि । **सेवाएँ** - पंचतारांकित होटल निवास व्यवस्था, ॲम्युझमेंट पार्क (मनोरंजन उद्यान), वॉटर पार्क, थीम पार्क, केसीनो, रेसकोर्स, IPL जैसे खेल, विमान परिवहन (बिझनेस क्लास) आदि ।
संदर्भ : www.cbec.gov.in (Central Board of Excise & Customs) की वेबसाइट इसके अतिरिक्त 0% से 5% के बीच किन वस्तुओं पर जीएसटी है इसे खोजिए ।			

टिप्पणी : - यह पाठ लिखते समय शासन द्वारा निश्चित किए गए जीएसटी के प्रकार तथा दर, लिए गए हैं । उसमें परिवर्तन हो सकता है । बिजली, पेट्रोल, डीजल आदि जीएसटी की परिधि में नहीं हैं ।

कृति I : आपकी आवश्यकता की कम-से-कम 10 वस्तुओं की सूची बनाइए तथा उनपर जीएसटी का दर कितना है, यह सूची में, समाचार पत्र, इंटरनेट, जीएसटी संबंधित किताबें या वस्तु खरीदी के बिल का आधार लेकर, खोजकर लिखिए । अपने दोस्तों के साथ इस जानकारी की जाँच कीजिए।

वस्तु	जीएसटी की दर	वस्तु	जीएसटी की दर
1.स्केचबुक 2.कंपास पेटी 3.- - - - -- 4.- - - - - - 5.- - - - - -		6. - - - - -- 7.- - - - - - 8. - - - - - - 9. - - - - - - 10. - - - - - -	

कृति II : कृति **I** के जैसे कम-से-कम दस विविध सेवा (जैसे रेल्वे तथा एस.टी. बस बुकींग सेवा आदि) प्राप्त करने के लिए जीएसटी की दर ज्ञात करें, अथवा सेवा प्राप्ति संबंधी बिल प्राप्त कीजिए, उस आधार पर तालिका पूर्ण करें ।

सेवा	जीएसटी की दर	सेवा	जीएसटी की दर
1.रेलवे बुकींग 2.कुरिअर सर्व्हिस 3.- - - - -- 4.- - - - - - 5.- - - - - -		6. - - - - -- 7.- - - - - - 8. - - - - - - 9. - - - - - - 10. - - - - - -	

कृति III : निम्नलिखित तालिका का निरीक्षण कीजिए तथा और भी वस्तु एवं सेवा कोड खोजकर लिखिए।

सेवा	SAC	GST की दर	वस्तु	HSN Code	GST की दर
रेल यातायात सेवा	996511	--	ड्युलक्स पेंट	3208	28%
विमान यातायात सेवा (इकॉनॉमी)	996411	--	बॉलबेरींग	84821011	28%
चलन विनिमय सेवा	997157	--	स्पीडोमीटर	8714	28%
ब्रोकर सेवा	997152	--	आलू	0701	0%
टैक्सी सर्व्हिस	996423	--	--	--	--
5-स्टार होटल सेवा	--	--	--	--	--
--	--	--	--	--	--

कृति IV : किन्हीं 5 वस्तुएँ तथा 5 सेवाओं के लिए HSN तथा SAC तालिका बनाइए । उस तालिका में वस्तु तथा सेवाओं के चित्र चिपकाइए । उन वस्तुएँ एवं सेवाओं के लिए GST की दर ज्ञात कर लिखिए ।

टीप : वस्तु एवं सेवाओं से संबंधित दर HSN, SAC कोड पर आधारित कृति आदि जानकारी के लिए है । उसे याद करने की आवश्यकता नहीं है ।

उपक्रम : आप विविध प्रकार के बिल प्राप्त कीजिए जैसे वस्तु आपूर्ति बिल, सेवा आपूर्ति करने संबंधी बिल आदि । उन बिलों का जीएसटी से संबंधित विविध पहलुओं का अध्ययन कीजिए तथा कक्षा में चर्चा कीजिए ।

हल किए उदाहरण

उदा. (1) आरती गैस एजन्सी द्‌वारा ₹545 करपात्र मूल्य का LPG सिलेंडर ग्राहक को बेचा गया । जीएसटी की दर 5% हो, तो ग्राहक को दिए गए कर बीजक में केंद्र का तथा राज्य का कर कितने रूपये होगा ? ग्राहक को कुल कितने रूपयों का भुगतान करना होगा ? आरती गैस एजन्सी को कुल कितना वस्तु-सेवा कर का भुगतान करना होगा ?

हल : जीएसटी कर की दर = 5% $\therefore$ सीजीएसटी की दर 2.5%, तथा एसजीएसटी की दर = 2.5%.

सीजीएसटी = $\frac{2.5}{100} \times 545 = 13.625 = 13.63$ रूपये

$\therefore$ एसजीएसटी = सीजीएसटी = 13.63 रूपये

ग्राहक द्‌वारा भुगतान की जाने वाली रकम = करपात्र मूल्य + केंद्र का दर + राज्य का दर

= 545 + 13.63 + 13.63 = 572.26 रूपये

आरती गॅस एजन्सी को केंद्र का कर = 13.63 रूपये व राज्य का कर = 13.63 रूपये भुगतान करना होगा । अर्थात कुल वस्तु-सेवा कर 27.26 रूपये भुगतान करना होगा ।

उदा. (2) कुरिअर सेवा देने वाले किसी एजंट ने एक पार्सल नाशिक से नागपूर भेजने के लिए ग्राहक से कुल 590 रु. लिए, जिसमें 500 रूपये कर पात्र मूल्य पर केंद्र का कर 45 रूपये तथा राज्य का कर 45 हो, तो इस व्यवहार में लगाया गया वस्तु-सेवा कर की दर ज्ञात कीजिए ।

हल : कुल वस्तु एवं सेवा कर = केंद्र का कर + राज्य का कर = 45 + 45 = 90 रूपये.

$\therefore$ वस्तु सेवा कर की दर = $\frac{90}{500} \times 100 = 18\%$

कुरिअर सेवा देनेवाले एजंट ने वस्तु सेवा कर की दर 18% लगाई ।

उदा. (3) श्रीकर ने 50,000 रूपये अंकित मूल्य का लॅपटॉप खरीदना निश्चय किया । दुकानदार ने इस मूल्य पर उसे 10% की छूट दी । लॅपटॉप वस्तु-सेवा कर की दर 18% हो, तो दुकानदार द्‌वारा लगाया गया केंद्र का कर तथा राज्य का कर ज्ञात करो । श्रीकर को वह लॅपटॉप कितने रूपयों में प्राप्त हुआ ?

हल : यहाँ सर्वप्रथम छूट ज्ञात करें । वह छूट दिए गए अंकित मूल्य में से घटाने पर शेष रकम पर 18% दर से वस्तु एवं सेवा कर की गणना करेंगे ।

छूट = 50,000 रूपयों पर 10% = 5,000 रूपये

$\therefore$ लॅपटॉप का करपात्र मूल्य = 50,000 − 5,000 = 45,000 रूपये ।

$\therefore$ 18% जीएसटी दर में केंद्र का कर = 9%

45,000 रूपये पर 9% केंद्र का कर = $\frac{9}{100} \times 45000 = 4050$ रूपये ।

$\therefore$ राज्य का कर = 4050 रूपये ।

$\therefore$ लॅपटॉप की कुल कीमत = 45000 + 4050 + 4050 = 53,100 रूपये ।

उत्तर : श्रीकर को लॅपटॉप कुल 53,100 रूपयों में प्राप्त होगा ।

टीप : करपात्र मूल्य का अर्थ है जिस मूल्य पर कर निर्धारित किया जाता है वह मूल्य । बीजक मूल्य अर्थात कर सहित कुल कीमत । उदाहरण में उल्लेख न हो तो बिक्री की कीमत करपात्र है ऐसा समझा जाए । जितना केंद्र का कर होता है, उतना ही राज्य का भी कर होता है ।

प्रश्नसंग्रह 4.1

1. 'पावन मेडिकल्स' दवाइयों की आपूर्ति करते हैं । उनकी दुकान की कुछ दवाइयों पर GST की दर 12% है, तो CGST तथा SGST की दर कितनी होगी ?

2. किसी वस्तु पर CGST की दर 9% हो तो SGST की दर कितनी होगी ? वैसेही GST की दर कितनी होगी ?

3. 'मेसर्स रियल पेंट' ने प्रत्येक को ₹ 2800 करपात्र मूल्य के लस्टर पेंट के 2 डिब्बे बेचें । GST की दर 28% हो तो कर-बीजक में CGST तथा SGST कितने रूपयों होगा ज्ञात कीजिए ।

4. किसी रिस्ट वॉच बेल्ट का कर पात्र मूल्य 586 रूपये हैं । GST की दर 18% हो तो बेल्ट ग्राहक को कितने रूपयों में प्राप्त होगा ?

5. किसी खिलौना के रिमोट कंट्रोल कार की जीएसटी सहित कुल कीमत 1770 रूपये हैं । जीएसटी की दर 18% हो, तो कार के करपात्र मूल्य पर लगाया गया CGST तथा SGST की गणना करो ।

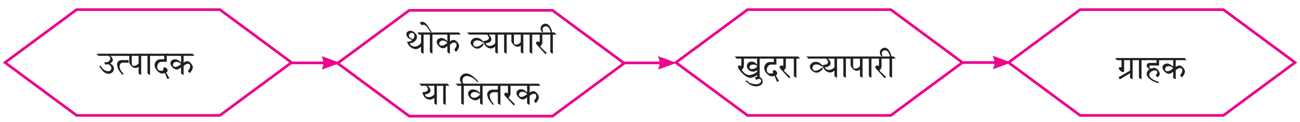
6. 'टीपटॉप इलेक्ट्रॉनिक्स' ने किसी कंपनी को, करसहित 51,000 रूपये कीमत का ड़ेढ़ टन के एअर कंडिशनर की आपूर्ति के एअर कंडिशनर पर CGST का दर 14% लगाया तो कर बीजक में निम्नलिखित मुद्दे का मान कितना दर्शाया उसे ज्ञात कीजिए ।

   (1) SGST का दर (2) एसी पर GST की दर (3) एसी की करपात्र मूल्य
   (4) GST की कुल रकम (5) CGST की रकम (6) SGST की रकम

7. प्रसाद ने 'महाराष्ट्र इलेक्ट्रॉनिक्स गुड्स'से 40,000 रूपये अंकित मूल्य की वॉशिंग मशीन खरीदी की । उसपर दुकानदार ने 5% छूट दी । जीएसटी की दर 28% है । तो प्रसाद को वह वॉशिंग मशीन कितने रूपयों में प्राप्त होगी ? कर बीजक में सीजीएसटी तथा एसजीएसटी कितने रूपये होगा ? ज्ञात कीजिए ।

आओ जानें

व्यवसाय श्रृंखला में जी.एस.टी. (G.S.T. in trading chain)



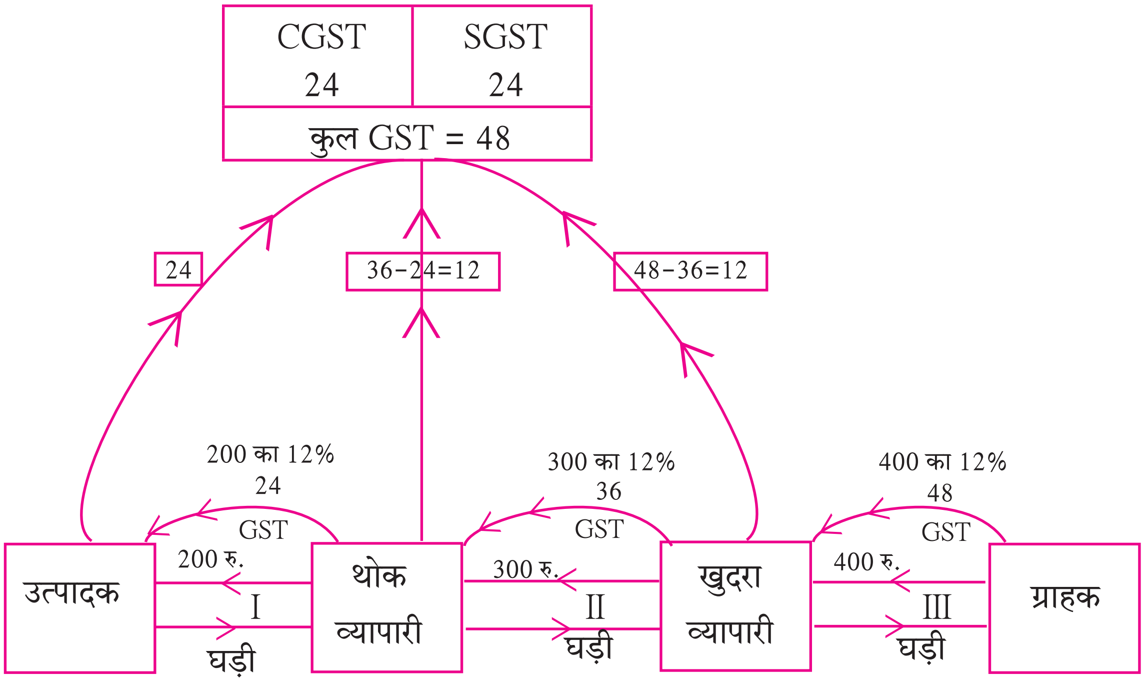
व्यवसाय श्रृंखला (Trading Chain)

व्यवसाय शृंखला में जीएसटी का निर्धारण तथा शासन को जमा किस प्रकार करते हैं, उदाहरण से देखें ।

उदाहरण : माना, किसी उत्पादक ने थोक व्यापारी को एक घड़ी लाभसहित 200 रूपये में बेची । थोक व्यापारी ने खुदरा व्यापारी को 300 रूपयों में तथा खुदरा व्यापारी ने ग्राहक को वह घड़ी 400 रूपयों में बेची । GST की दर 12% है । तो उत्पादक, थोक तथा खुदरा व्यापारी निम्नानुसार इनपुट टैक्स क्रेडीट (ITC) लेकर शेष टैक्स का भुगतान किस प्रकार करते हैं, निम्नलिखित प्रवाह तक्ता से अध्ययन कीजिए ।

स्पष्टीकरण :

उत्पादक से घड़ी ग्राहक तक पहुँचने में तीन व्यवहार होते हैं । हर व्यवहार में किया गया कर निर्धारण, जमा कर राज्य शासन तथा केंद्र शासन को कैसे प्राप्त होता है, यह निम्नलिखित प्रवाह आकृति (तक्ता) में दर्शाया गया है । उसे संपूर्ण सारिणी में आगे दिया गया है ।



ऊपरोक्त व्यवहार में तीन अलग-अलग आर्थिक व्यवहार एक ही राज्य में हुए हैं । प्रत्येक के कर बीजक में GST का निर्धारण समझने के लिए संक्षेप में निम्नानुसार दिया गया है ।

कर बीजक I में GST निर्धारण	
घड़ी का मूल्य	= ₹ 200
CGST 6%	= ₹ 12
SGST 6%	= ₹ 12
कुल कीमत	= ₹ 224

उत्पादक का कर बीजक
(B2B)

कर बीजक II में GST निर्धारण	
घड़ी का मूल्य	= ₹ 300
CGST 6%	= ₹ 18
SGST 6%	= ₹ 18
कुल कीमत	= ₹ 336

थोक व्यापारी का कर बीजक
(B2B)

कर बीजक III में GST निर्धारण	
घड़ी का मूल्य	= ₹ 400
CGST 6%	= ₹ 24
SGST 6%	= ₹ 24
कुल कीमत	= ₹ 448

खुदरा व्यापारी का कर बीजक
(B2C)

इसे ध्यान में रखें

दो GSTIN धारक व्यापारियों के बीच के व्यवहार को Business to Business संक्षेप में B2B कहते हैं।
वस्तु के उत्पादन से लेकर ग्राहक तक पहुँचने की श्रृंखला के अंतिम कड़ी के व्यवहार को Business to Consumer संक्षेप में B2C कहते हैं ।

व्यवसाय श्रृंखला में प्रत्येक व्यापारी द्वारा अदा किए गए GST का विवरण निम्न प्रकार है ।

	CGST		SGST		कुल GST	
• उत्पादक द्वारा	₹ 12	+	₹ 12	=	₹ 24	जमा किया
• थोक व्यापारी द्वारा	₹ 6	+	₹ 6	=	₹ 12	जमा किया
• खुदरा व्यापारी द्वारा	₹ 6	+	₹ 6	=	₹ 12	जमा किया
कुल भुगतान	₹ 24	+	₹ 24	=	₹ 48	

टीप : क्या आपके ध्यान में आया ? हर व्यापारी ने अपने स्तर पर संकलित कर में से इनपुट टैक्स क्रेडिट अर्थात खरिदी के समय दिए गए कर को घटाकर देय GST का भुगतान किया है । अंत में ग्राहक को वह घड़ी 448 रूपये में मिली । जिसमें 48 रूपये केवल कर ऊपरोक्त दर्शाए अनुसार ग्राहक ने भुगतान किया । अत: GST यह अप्रत्यक्ष कर (Indirect Tax) है । इसके पूर्व थोक तथा खुदरा व्यापारियों को उन्होंने खरिदी के समय भुगतान किया गया कर, वापस मिलता है ।

खरीदारी के समय भुगतान किए गए कर को कम करना (ITC – इनपुट टैक्स क्रेडिट)

वस्तु के उत्पादन से लेकर ग्राहक तक पहुँचने तक बीच के प्रत्येक व्यवहार में GST का निर्धारण किया जाता है । वस्तु बेचते समय व्यापारी द्वारा संकलित कर अर्थात आऊटपुट टैक्स । उसी व्यापारी द्वारा वस्तु खरिदते समय भुगतान किया गया टैक्स अर्थात इनपुट टैक्स । व्यापारी संकलित कर में से भुगतान किया गया टैक्स कम करता है । इसे ही इनपुट टैक्स क्रेडिट कहते हैं ।

$\therefore$ देय GST = आऊटपुट टैक्स – इनपुट टैक्स क्रेडिट (ITC)

संक्षेप में सरकार को कर का भुगतान करते समय श्रृंखला का प्रत्येक व्यापारी बिक्री के समय संकलित कर में से उसके द्वारा खरीदते समय भुगतान किए गए कर को घटाकर शेष कर का भुगतान करता है ।

हल किए गए उदाहरण

उदा. (1) श्री. रोहित एक खुदरा व्यापारी है । उन्होंने वस्तु खरीदते समय 6500 रूपये जीएसटी का भुगतान किया तथा बिक्री के समय 8000 रूपये संकलित किए । तो (i) इनपुट टैक्स तथा आऊटपुट टैक्स कितना? (ii) श्री. रोहित को इनपुट टैक्स क्रेडिट कितने रूपये मिलेगा ? (iii) उनकी देय जीएसटी ज्ञात कीजिए । (iv) केंद्र तथा राज्य का देय कर ज्ञात काजिए ।

हल : श्री. रोहित का देय कर अर्थात शासन को उनके द्‌वारा भुगतान किया जानेवाला कर

(i) बिक्री के समय संकलित कर (आऊटपुट टैक्स) = 8000 रूपये

(ii) खरीदते समय दिया गया कर (इनपुट टैक्स) = 6500 रूपये

अर्थात इनपुट टैक्स क्रेडिट (ITC) = 6500 रूपये

(iii) देय कर = बिक्री के समय संकलित कर (आऊटपुट टैक्स) − इनपुट टैक्स क्रेडिट (ITC)

= 8000 − 6500 = 1500 रूपये

(iv) $\therefore$ केंद्र का देय कर = $\frac{1500}{2}$ = 750 रूपये और राज्य का देय कर = 750 रूपये.

उदा. (2) मेसर्स जय केमिकल्स ने 8000 रूपये करपात्र मूल्य का लिक्विड सोप खरीदा तथा ग्राहक को 10,000 रूपये करपात्र मूल्य पर बेचा । GST का दर 18% हो, तो मेसर्स जय केमिकल्स का केंद्र को देय कर तथा राज्य को देय कर ज्ञात कीजिए ।

हल : खरीदते समय दिया गया कर (इनपुट टैक्स) = 8000 रूपयों की खरीदी पर 18% की दर से भुगतान किया गया कर

$= \frac{18}{100} \times 8000$

= 1440 रूपये

$\therefore$ ITC = 1440 रूपये

आऊटपुट टैक्स = बिक्री के समय संकलित कर

$= \frac{18}{100} \times 10000$

= 1800 रूपये

देय कर = आऊटपुट टैक्स − ITC

= 1800 − 1440 = 360 रूपये

मे. जय केमिकल्स का केंद्र का देय कर = 180 रूपये तथा राज्य का देय कर = 180 रूपये

उदा. (3) मे. जय केमिकल्स ने 8000 रूपये (करसहित) लिक्विड सोप खरीदा तथा ग्राहक को 10,000 रूपये (करसहित) बेचा, तो जय केमिकल्स का केंद्र का देय कर तथा राज्य का देय कर ज्ञात कीजिए । यहाँ की दर 18% है ।

हल : उदाहरण में वस्तु का मूल्य कर सहित दिया गया है, यह बात ध्यान में रखें ।

वस्तु का करसहित मूल्य = करपात्र मूल्य + कर

लिक्विड सोप का करपात्र मूल्य 100 रूपये हो तो करसहित मूल्य 118 रूपये होता है ।

$\frac{\text{करसहित मूल्य}}{\text{करपात्र मूल्य}}$ यह अनुपात अचर है ।

118 रूपये कुल मूल्य के लिए 100 रूपये करपात्र मूल्य हो तो 8000 रूपये कुल मूल्य के लिए माना x रूपये करपात्र मूल्य होगा ।

$\therefore \frac{x}{8000} = \frac{100}{118}$

$\therefore x = \frac{8000}{118} \times 100 = 6779.66$ रूपये

$\therefore$ खरिदते समय भुगतान किया गया GST = 8000 − 6779.66

$\therefore$ इनपुट टैक्स = 1220.34 रूपये $\therefore$ ITC = 1220.34 रूपये

उसीप्रकार माना 10,000 रु. कुल मूल्य के लिए y रूपये करपात्र मूल्य

$\therefore \frac{y}{10000} = \frac{100}{118}$

$\therefore y = \frac{10,00,000}{118} = 8474.58$ रूपये

$\therefore$ बिक्री के समय संकलित कर (आऊटपुट टैक्स) = 10000.00 − 8474.58

= 1525.42 रूपये

$\therefore$ देय कर = संकलित कर − ITC = 1525.42 − 1220.34

= 305.08 रूपये

$\therefore$ केंद्र का देय कर = राज्य का देय कर = 305.08 ÷ 2 = 152.54 रूपये

उत्तर : जय केमिकल्स का केंद्र तथा राज्य प्रत्येक का देय कर 152.54 रूपये हैं ।

टीप : उदा. 2 तथा 3 का ध्यान से अध्ययन कीजिए । व्यवहार में आपको दोनों प्रकार के कर बीजक देखने को मिलेंगे, इसलिए दुकानदार ने वस्तु का अंकित मूल्य कर सहित दिया है या अंकित मूल्य पर कर निर्धारित करने वाला है । यह बात समझकर ही वस्तु खरीदें ।

ICT Tools or Links

निश्चित तिथी को कर का भुगतान करने के बाद दी गई तिथी के पूर्व कर विवरण पत्र (GST Returns) दाखिल (जमा) करना आवश्यक है । अब ये सभी बातें online की जा सकती हैं । www.gst.gov.in इस वेबसाइट पर सभी विवरण पत्र आप देख सकते हैं ।

(जीएसटी विवरण पत्र को तैयार करने के लिए ऑफलाइन युटीलिटी का भी उपयोग कर सकते है ।)

उदा. (4) किसी साइकल निर्माता ने थोक व्यापारी को 4000 रूपये करपात्र मूल्य पर साइकिल बेची । थोक व्यापारी ने वह साइकिल 4800 रूपये करपात्र मूल्य पर खुदरा व्यापारी को बेची तथा खुदरा व्यापारी ने वह साइकिल 5200 रूपये करपात्र मूल्य पर ग्राहक को बेची । GST की दर 12% हो तो बिक्री के प्रत्येक स्तर (सोपान) पर देय CGST तथा SGST ज्ञात कीजिए । उसके लिए निम्नलिखित कृति पूर्ण कीजिए ।

हल : व्यवसाय शृंखला

[ ] —₹ 4000, 12%→ [ ] —₹ 4800, 12%→ [ ] —₹ 5200, 12%→ [ ]

निर्माता द्वारा बिक्री के समय संकलित कर = 4000 का 12% = [. . . × $\frac{...}{...}$] = [ ]

निर्माता का देय कर = 480 रूपये ।

थोक व्यापारी द्वारा बिक्री के समय संकलित कर = 4800 का 12% = [576 रूपये]

∴ थोक व्यापारी का देय कर = थोक व्यापारी द्वारा संकलित कर − उसका इनपुट टैक्स क्रेडिट

= [576] − [480]

= [96] रूपये

खुदरा व्यापारी द्वारा निर्धारित GST = 5200 का 12% = [ ]

∴ खुदरा व्यापारी द्वारा देय GST = उसका आऊटपुट टैक्स − उसका इनपुट टैक्स क्रेडिट (ITC)

= [ ] − [ ]

= [ ]

व्यापार शृंखला में GST का भुगतान विवरण :

व्यक्ति	देय GST	देय CGST	देय SGST
उत्पादक (निर्माता)	₹ 480	₹ 240	₹ [ ]
थोक व्यापारी	₹ 96	₹ [ ]	₹ [ ]
दुकानदार	₹ [ ]	₹ [ ]	₹ [ ]
कुल	₹ [ ]	₹ [ ]	₹ [ ]

थोड़ा सोचें

- माना किसी व्यापारी द्‌वारा जुलाई महिने में संकलित आऊटपुट टैक्स उसके इनपुट टैक्स क्रेडिट के समान हो तो कर का मापन कितना होगा ?
- माना किसी व्यापारी का जुलाई महिने का आऊटपुट टैक्स इनपुट टैक्स से कम हो, ऐसे समय कर की गणना कैसे होती है ?

प्रश्नसंग्रह 4.2

(1) चेतना स्टोअर्स ने 01 जुलै 2017 से 31 जुलै 2017 की अवधि में की गई खरीदारी पर 1,00,500 रूपये जीएसटी का भुगतान किया 1,22,500 रूपये जीएसटी संकलित किया तो संबंधित अवधी में चेतना स्टोअर्स को कितना जीएसटी देय होगा ?

(2) जीएसटी नियम के अंतर्गत पंजीकृत दुकान की मालकिन नजमा है । उन्होंने खरीदारी पर कुल जीएसटी 12,500 रूपये का भुगतान किया था तथा बिक्री पर कुल जीएसटी 14,750 रूपये संकलित किया तो उन्हें कितने रूपये इनपुट टॅक्स क्रेडिट मिलेगा ? उनका देय जीएसटी ज्ञात कीजिए ।

(3) अमीर एन्टरप्राइझ ने चॉकलेट सॉस की बॉटल खरीदते समय 3800 रूपये जीएसटी का भुगतान किया तथा अकबरी ब्रदर्स को बेचते समय 4100 रूपये जीएसटी संकलित किया । मयंक फूड कॉर्नर ने अकबरी ब्रदर्स से वे बोतलें 4500 रूपये जीएसटी देकर खरिदी तो उस व्यवहार में देय जीएसटी ज्ञात कीजिए । उस आधार पर प्रत्येक को केंद्र का देय कर (CGST) तथा राज्य का देय कर (SGST) ज्ञात कीजिए ।

(4) चंडीगढ एक केंद्रशासित प्रदेश है । यहाँ के गैस एजन्सी के मालिक ने कुछ गॅस टंकियाँ 24,500 रूपये में खरीदीं तथा उन्होंने ग्राहकों को 26,500 रूपये में बेचीं । इस व्यवहार में 5% की दर से देय कुल जीएसटी ज्ञात कीजिए । इस आधार पर केंद्र का देय कर (CGST) तथा केंद्र शासन प्रदेश का देय कर (UTGST) ज्ञात कीजिए ।(केंद्रशासित प्रदेश में SGST के स्थान पर UTGST होता है ।)

(5) मे. ब्यूटी प्रॉडक्ट्स ने 6000 रूपये पर 18% की दर से जीएसटी देकर सौंदर्य प्रसाधन खरीदे गए और एक ही ग्राहक को वे सभी 10,000 में बेचीं । तो इस व्यवहार के लिए मे. ब्यूटी प्रॉडक्ट्स द्‌वारा बनाए गए कर बीजक में केंद्र तथा राज्य का (CGST तथा SGST) देय वस्तु एवं सेवा कर की रकम कितनी दर्शाई गई ज्ञात कीजिए ।

(6) निम्नलिखित जानकारी के आधार पर दुकानदार से ग्राहक (B2C) के लिए कर बीजक (Tax Invoice) बनाइए ।

नाम, पता, तारीख आदि अपने मन से लिखिए ।

पूर्ति कर्ता : मे. - - - - - पता - - - - - राज्य - - - - - दिनांक

इन्व्हॉइस क्रमांक - - - - - GSTIN - - - - - - -

वस्तु का विवरण - मोबाइल बैटरी की दर	- ₹ 200	GST की दर 12%	HSN 8507, 1 नग
हेडफोन की दर	- ₹ 750	GST की दर 18%	HSN 8518, 1 नग

(7) निम्नलिखित दी गई जानकारी के आधार पर एक व्यापारी का दूसरे व्यापारी से किए गए व्यवहार (B2B) के लिए टैक्स इनव्हॉइस बनाइए । नाम, पता, दिनांक अपनी पसंद के अनुरूप लीजिए ।

पूर्ति कर्ता – नाम, पता, राज्य, GSTIN, बिल क्रमांक तथा दिनांक ।

प्राप्तकर्ता – नाम, पता, राज्य, GSTIN.

वस्तु का विवरण : (1) पेन्सिल बॉक्स 100, HSN 3924, दर 20 रु., GST 12%,

(2) जिग सॉ पझल्स 50, HSN 9503, दर 100 रु., GST 12%

अधिक जानकारी के लिए

संयुक्त कर योजना (Composition Scheme)

जिस व्यक्ति के व्यवसाय का लेन–देन पिछले आर्थिक वर्ष में 1.5 करोड़ रूपयों से कम हो उनके लिए संयुक्त कर योजना (Composition Scheme) है । इस योजना के अंतर्गत करदाता सरकार द्वारा निश्चित किए गए दर से कर का भुगतान करते हैं ।

संयुक्त कर योजना में कर की दर (GST rates for composition Scheme)

क्र.	पूर्ति कर्ता	जीएसटी का दर	(CGST + SGST)
1.	उपाहारगृह	5%	2.5% + 2.5%
2.	निर्माता तथा विक्रेता	1%	0.5% + 0.5%

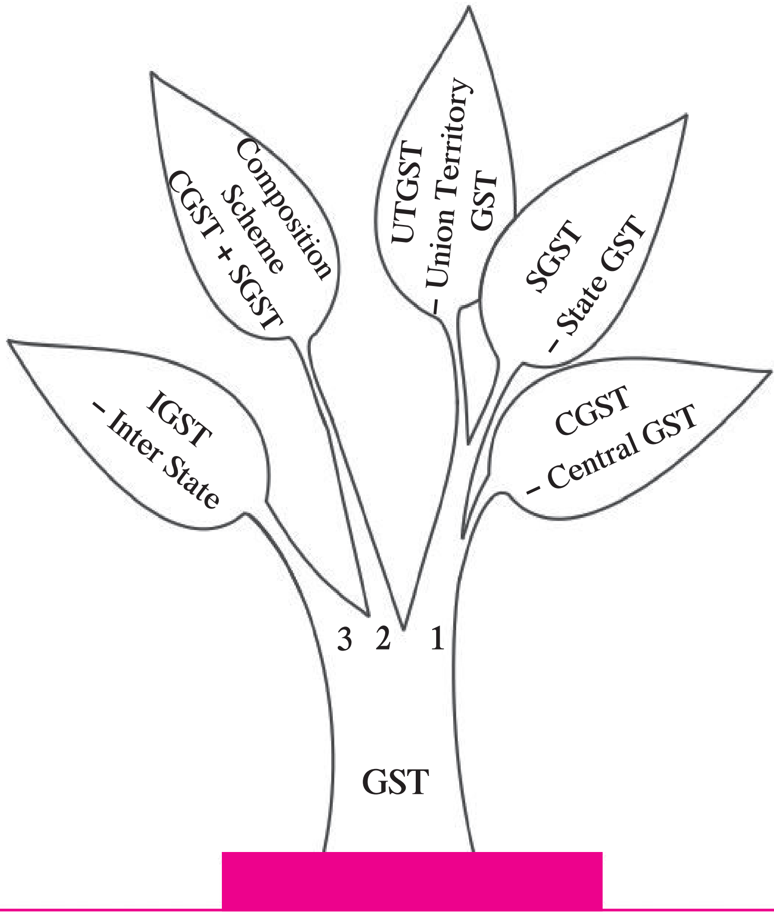
संयुक्त कर योजना के व्यापारियों के लिए नियम :

- संयुक्त कर योजना के अंतर्गत आने वाले व्यापारी ग्राहकों से किसी भी प्रकार का कर संकलित नहीं कर सकते । इसलिए इस योजना के व्यापारी कर बीजक नहीं दे सकते । उन्हें पूर्ति के बिल (Bill of supply) देने हैं ।
- व्यापारी को हर 3 महिने में ऊपरोक्त दी गई सारिणी के अनुसार सरकार को कर का भुगतान करना होता है ।
- इस योजना में व्यापारी दूसरे राज्य में बिक्री नहीं कर सकता परंतु दूसरे राज्य से खरीदारी कर सकता है ।
- इस योजना में व्यापारियों को खरीदारी पर इनपुट टैक्स क्रेडिट (ITC) का लाभ नहीं मिलेगा ।
- इस योजना में व्यापारी को अपनी दुकान के फलक (बोर्ड) पर संयुक्त कर योजना का व्यापारी (Composition taxable person) ऐसा लिखना है ।
- इस योजना के व्यापारी को अपने पूर्ति बिल पर (Bill of supply) मोटे अक्षरों में 'संयुक्त कर' योजना के व्यापारी बिक्री पर कर निर्धारण के लिए अपात्र है । (Composition taxable person not eligible to collect tax on supplies) ऐसा छापना जरूरी है ।

GST की खास विशेषताएँ (Features of GST)

- विभिन्न अप्रत्यक्ष करों की समाप्ति ।
- वस्तु एवं सेवा संबंधी के विवादों की समाप्ति ।
- व्यापारियों के लिए राज्यवार पंजीकरण ।
- GSTIN हो ऐसे व्यापारियों के लिए किए गए व्यवहार का व्यवस्थित दर्ज कर रखना तथा समय पर GST का भुगतान करना होता है ।
- व्यवहार में पारदर्शिता ।
- सरल तथा समझने में आसान कर पद्धति ।
- कर पर कर का भुगतान नहीं करना पड़ता । इस कारण वस्तु तथा सेवा की कीमत नियंत्रण में ।
- वस्तु तथा सेवाओं की अंतर्राष्ट्रीय बाजार से तुलना के कारण गुणवत्ता में वृद्धि ।
- 'मेक इन इंडिया' को गति ।
- तंत्रज्ञान आधारित कर पद्धति होने के कारण शीघ्र निर्णय लेने में सहायता ।
- वस्तु एवं सेवा कर यह दोहरा मॉडेल (Dual model) अर्थात केंद्र तथा राज्य के लिए एक साथ समान कर निर्धारित किया जाता है ।

वस्तु एवं सेवा कर के अंतर्गत आनेवाले कर



1. **CGST-SGST (UTGST):** एक ही राज्य में खरीदी-बिक्री व्यवहार करने वाले व्यापारियों के लिए ।

2. **संयुक्त कर योजना (composition Scheme) :**

   जिनका वार्षिक लेन-देन 20 लाख से 1.5 करोड़ रूपयों तक है ऐसे व्यापारी इस योजना का लाभ ले सकते हैं । उन्हें SGST तथा CGST अलग दर से देना होता है ।

3. **IGST :**

   अंतर-राज्यीय (Inter State) व्यवहार करने वाले व्यापारियों के लिए ।

अधिक जानकारी के लिए

एकात्मिक वस्तु एवं सेवा कर – IGST (Integrated GST)

जब बिक्री का व्यवहार दो राज्यों में होता है (Inter state) तब जो जीएसटी निर्धारित किया जाता है उसे एकात्मिक वस्तु एवं सेवा कर (IGST) कहा जाता है। इस कर का भुगतान पूरा का पूरा केंद्र सरकार को होता है।

एक राज्य के व्यापारी ने दूसरे राज्य के व्यापारी से वस्तु खरीदी तथा अपने राज्य में बेची तो, IGST के रूप में किए गए भुगतान का इनपुट टैक्स क्रेडिट (ITC) किस प्रकार लिया जाएगा यह देखें।

उदाहरण : महाराष्ट्र के व्यापारी M ने 20,000 रूपये के स्कूटर के खुले भाग पंजाब के व्यापारी P से खरीदते समय 28% के दर से 5600 रूपये एकात्मिक वस्तु एवं सेवा कर (IGST) व्यापारी P को दिया।

M ने वे सभी खुले भाग स्थानीय ग्राहक को 25,000 रूपये में बेचें। बेचते समय 28% की दर से 7000 रूपये जीएसटी संकलित किया।

GST 7000 रूपये = CGST 3500 रूपये + SGST 3500 रूपये ग्राहक से संकलित किया।

अब सरकार को भुगतान करते समय 5600 रूपये को ITC के अंतर्गत कैसे कम करते है, देखें।

टीप : IGST का क्रेडित लेते समय, पहले IGST के लिए इसके बाद CGST के लिए तथा बचा हुआ क्रेडिट SGST के लिए लेते हैं। यहाँ M के बिक्री के व्यवहार में IGST नहीं है इसलिए पहले CGST के लिए क्रेडिट तथा बचा हुआ SGST के लिए क्रेडिट लेते हैं।

∴ देय CGST = 3500 − 3500 = 0 रूपये

अर्थात 5600 में से 3500 की क्रेडिट ले ली गई। शेष 5600 − 3500 = 2100 रूपये क्रेडिट SGST के लिए लिया गया।

∴ देय SGST = 3500 − 2100 = 1400 रूपये

'M' को 1400 रूपये SGST का भुगतान करना होगा।

ध्यान दिजिए, व्यापारी M द्वारा खरिदते समय भुगतान किए गए 5600 रूपये की पूरी क्रेडिट (ITC) उन्हे मिली (अर्थात इनपुट टैक्स का पूर्ण क्रेडिट प्राप्त हुआ।)

ITC इस प्रकार लेते हैं

खरीदते समय दिया गया कर (ITC) — संकलित किया गया कर (Output Liability)

IGST का क्रेडिट लेते समय (₹ 5600)

प्रथम (₹ 0) → IGST के लिए उपयोग करते हैं।

बाद (₹ 3500) → CGST के लिए उपयोग करते हैं।

अंत में शेष (₹ 2100) → SGST के लिए उपयोग करते हैं।

(इसलिए ₹ 1400 SGST का भुगतान करना होगा।)

थोड़ा याद करें

हमने पिछले वर्ष बचत तथा निवेश का महत्त्व समझा है । उसके अनुसार जो संभव होगा वह आपने अनुसरण करने का प्रारंभ किया होगा । जैसे सदैव निरोगी रहने के लिए जैसे स्वास्थ्य से संबंधित आदतें बनानी होती हैं, वैसे ही आर्थिक स्वास्थ्य के लिए बचत तथा निवेश की आदत बनानी होती है। वर्तमान में निवेश के क्षेत्र में इतनी विविधताएँ हैं कि उसके संबंध में अध्ययन तथा अनुभव दोनों होना अत्यावश्यक है ।

आओ चर्चा करें

श्वेता किसी कंपनी में नौकरी करती है । इस महिने से उसके वेतन में 5% की वृद्‌धि हुई तथा अगले महिने बोनस भी मिलने वाला है । इसलिए वह वेतन की बढ़ी हुई रकम का उचित निवेश करना चाहती है । उसकी सहेली नेहा आर्थिक सलाहकार के यहाँ नौकरी करने के कारण अपनी सहेली को उचित राय दे सकती है । नेहा बताती है कि, 'अपने निवेश में विविधता होना बहुत ही महत्वपूर्ण है । जीवन बीमा, स्वास्थ्य बीमा, खुद का घर होना, बैंक में एफ.डी तथा आवर्त खाता होना इन सभी का विचार करना चाहिए' श्वेता कहती है, मेरा बीमा है तथा बैंक में सावधि जमा भी की है । इसके अलावा वेतन से प्रॉव्हिडंट फंड की कटौती भी जारी है । तो और कौन-सा मार्ग है ? नेहा बताती है, ''इन दिनों शेयर्स, म्युच्युअल फंड (MF), डिबेंचर्स, बॉन्डस आदि में निवेश करने वालों की संख्या बढ़ी है । वैसे ही एस.आय.पी करने की ओर भी लोगों का झुकाव बढ़ा है। तुम्हें अब प्रतिमाह एक निश्चित रकम अधिक मिलने वाली है अत: नियमित आवर्ती निवेश योजना (SIP - Systematic Investment Plan) में प्रतिमाह निश्चित रकम निवेश कर सकती हो ।''

ऐसी चर्चा हम अनेक स्थानों पर सुनते हैं तथा इनके संबंध में ठीक जानकारी होना 'बहुजन हिताय, बहुजन सुखाय' होता है ।

हम इस पाठ में शेयर्स, म्युच्युअल फंड, SIP इस संबंध में जानकारी प्राप्त करने वाले हैं ।

आओ जानें

शेयर्स (Shares)

किसी व्यक्ति का स्वयं की दुकान होने का अर्थ है दुकान का स्वामित्व (प्रोप्रायटरशीप) होना। दो-चार व्यक्ति एक साथ आकर व्यापार करने का अर्थ है भागीदारी (पार्टनरशीप), इसके लिए पूँजी कम लगती है परंतु किसी कंपनी, उद्योग या कारखाना शुरु करना हो तो बड़ी पूँजी की आवश्यकता होती है। यह पूँजी समाज से जुटानी होती है।

कारखाना या कंपनी शुरु करने के लिए इच्छुक व्यक्ति साथ आकर समाज से पूँजी जुटाकर कंपनी स्थापित करते हैं। भारतीय कंपनी कानून 1956 के अनुसार कंपनी का पंजीकरण होता है। कंपनी स्थापित करने वाले व्यक्तियों को कंपनी के **प्रवर्तक** (**प्रमोटर्स**) कहते हैं तथा ऐसी कंपनी अर्थात मर्यादित **(पब्लिक लिमिटेड) कंपनी** होती है।

कंपनी शुरु करने के लिए लगने वाले धन को **पूँजी** कहते हैं। इस पूँजी के छोटे-छोटे समान भाग करते हैं जो सामान्यत: ₹ 1, ₹ 2, ₹ 5, ₹ 10 या ₹ 100 आदि मूल्य के होते हैं। इन प्रत्येक भागों को **शेयर** कहते हैं। इन शेयर को बेचकर कंपनी के लिए पूँजी जुटाई जाती है।

शेयर (Share) : कंपनी की कुल पूँजी में से एक भाग अर्थात शेयर। शेयर सर्टिफिकेट (share certificate) पर एक शेयर का मूल्य शेयर्स की संख्या, क्रमांक आदि छपा होता है।

भाग धारक या शेयर धारक -(Share holder) : कंपनी के शेयर्स खरीदने वाला व्यक्ति उस कंपनी का भाग धारक अर्थात शेयर धारक होता है। शेयर धारक के पास जितने शेयर होते हैं उस अनुपात में वह कंपनी का मालिक होता है।

शेयर बाजार (Stock Exchange) : जिस स्थान पर शेयर्स का लेन-देन (खरीदी-बिक्री) होती है। उसे शेयर बाजार ('स्टॉक एक्सचेंज' या 'स्टॉक मार्केट' या इक्विटी मार्केट, कॅपीटल मार्केट या शेयर मार्केट) कहते हैं। समाज से पूँजी जुटाकर शुरु की गई कंपनी अर्थात पब्लिक लिमिटेड कंपनी का शेयर बाजार में पंजीकृत (listed company) होना आवश्यक है।

अंकित मूल्य (Face Value - FV) : कंपनी के शेयर सर्टिफिकेट पर छापा गया एक शेयर का मूल्य अर्थात शेयर का अंकित मूल्य (FV) होता है।

बाजार मूल्य (Market Value - MV) : जिस मूल्य पर शेयर बाजार में शेयर की खरिदी-बिक्री होती है, उस मूल्य को शेयर बाजार का मूल्य (MV) कहते हैं।

कंपनी स्थापित होने के बाद यदि उसका कारोबार अपेक्षाकृत अच्छा हो तो उस कंपनी के शेयर्स की **माँग** बाजार में बढ़ती जाती है। शेयर्स की संख्या तो निश्चित होती है। अर्थात शेयर्स की और **आपूर्ति** नहीं की जा सकती, इसलिए उस कंपनी के शेयर्स का बाजार मूल्य बढ़ने लगता है। इसके विपरित यदि कंपनी का कारोबार ठीक नहीं रहा (नीचे गिरने लगा) तो शेयर्स का बाजार मूल्य भी कम होने लगता है। यह उतार-चढ़ाव क्रमश: ▲, ▼ इन चिह्नों से दर्शाते हैं। इस उतार-चढ़ाव के परिणाम से ही बाजार का निर्देशांक बढ़ता या कम होता है।

शेयर बाजार में शेयर्स के मूल्य प्रतिपल बदलते हैं ।

लाभांश (Dividend) : कंपनी को आर्थिक वर्ष में प्राप्त लाभ का वितरण शेयर्स की संख्यानुसार भाग धारकों को मिलने वाला लाभ का भाग (लाभ का अंश) ही लाभांश होता है ।

कंपनी का कारोबार अच्छा होता गया तो स्वाभाविक ही कंपनी की संपत्ति भी बढ़ती जाती है । इस कारण शेयर्स पर लाभांश भी अच्छा मिलता है ।

शेयर धारक को प्राप्त लाभांश पर आयकर नहीं भरना पडता ।

इसे ध्यान में रखें

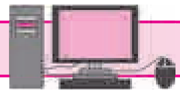
शेयर्स के बाजार मूल्य में कितना भी उतार-चढाव हो तो भी वर्ष के अंत में घोषित लाभांश हमेशा शेयर्स की संख्या के अनुपात में (अंकित मूल्य पर) मिलता है ।

अधिक जानकारी के लिए :

मुंबई में, **मुंबई शेयर बाजार (बॉम्बे स्टॉक एक्सचेंज BSE)** तथा **राष्ट्रीय शेयर बाजार (नॅशनल स्टॉक एक्सचेंज NSE)** भारत के दो मुख्य शेयर बाजार हैं । मुंबई शेयर बाजार एशिया का सबसे पुराना तथा राष्ट्रीय शेयर बाजार, भारत का सबसे बड़ा शेयर बाजार है ।

शेयर बाजार का उतार-चढ़ाव समझने के लिए SENSEX (सेन्सेक्स) तथा NIFTY (निफ्टी) ऐसे दो निर्देशांक (Index) हैं । SENSEX = SENSitive + indEX इन दो शब्दों द्‌वारा बनता है । BSE ने 1-1-1986 में SENSEX देना शुरु किया । सर्वाधिक पूँजीवाली नामचित तथा प्रस्थापित 30 कंपनियों के शेयर्स के दर का उतार-चढाव SENSEX निश्चित करता है ।

'निफ्टी' यह शब्द अपने नाम के अनुसार दो शब्दों से बनता है **NIFTY** = NSE + FIFTY । निफ्टी, NSE सबसे उत्तम कार्य करने वाली 50 कंपनियों के आधार पर निश्चित होता है ।



ICT Tools or Links

SEBI की वेबसाईट देखें वैसे ही मुंबई शेयर बाजार, राष्ट्रीय शेयर बाजार तथा दूरदर्शन के चैनल्स या नेट पर शेयर बाजार की जानकारी देने वाले वीडिओ देखें एवं शेयर बाजार को समझ लीजिए । शेयरों के मूल्य का उतार-चढ़ाव दूरदर्शन पर निरंतर दिखाया जाता है, उसे देखें । सामान्यत: ऊपरवाली पट्‌टी मुंबई शेयर बाजार तथा नीचे की पट्‌टी राष्ट्रीय शेयर बाजार के शेयर्स का बाजार मूल्य दर्शाती है । शेयर्स की बुक व्हॅल्यू (Book Value) क्या होती है, जानकारी प्राप्त कीजिए ।

अंकित मूल्य तथा बाजार मूल्य तुलना (Comparison of FV and MV) :

(1) यदि बाजार मूल्य > अंकित मूल्य हो तो शेयर अधिमूल्य पर (share is at premium) है, ऐसा कहा जाता है ।

(2) यदि बाजार मूल्य = अंकित मूल्य हो, तो शेयर सममूल्य पर है (Share at par) ऐसा कहा जाता है ।

(3) यदि बाजारमूल्य < अंकित मूल्य हो तो शेयर अवमूल्य पर है (share is at discount) ऐसा कहा जाता है ।

उदाहरणार्थ (1) माना, शेयर का अंकित मूल्य = 10 रूपये तथा बाजार मूल्य = 15 रूपये हो तो वह शेयर
15 − 10 = 5 रूपये अधिमूल्य पर है अर्थात प्रिमियम पर है ।

(2) माना, शेयर का अंकित मूल्य = 10 रूपये तथा बाजार मूल्य = 10 रूपये हो तो शेयर
10 − 10 = 0. अर्थात शेयर सममूल्य पर है अर्थात ॲट पार है ।

(3) माना, शेयर का अंकित मूल्य = 10 रूपये तथा बाजार मूल्य = 7 रूपये हो तो शेयर
10 − 7 = 3 रूपये अवमूल्य पर है अर्थात वह डिस्काऊंट पर है ।

कुल निवेश (Sum invested) : शेयर्स खरीदने के लिए लगी कुल रकम को कुल निवेश कहते हैं ।

कुल निवेश = शेयर्स की संख्या × एक शेयर का बाजार मूल्य

उदा. 100 रूपये अंकित मूल्य वाला एक शेयर 120 रूपये बाजार मूल्य पर खरीदा तो ऐसे 50 शेयर्स खरीदने के लिए कितने रूपयों का निवेश करना होगा ?

हल : कुल निवेश = शेयर्स की संख्या × एक शेयर का बाजारमूल्य
= 50 × 120 = 6000 रूपये

शेयर्स पर प्रतिफल का दर (Rate of Return) :

हमने शेयर्स पर निवेश की गई हुई रकम कुछ समय बाद कितना प्रतिफल देती है, यह जानना महत्वपूर्ण है ।

उदा. (1) श्रीयश ने 100 रूपये अंकित मूल्य का एक शेयर, जब बाजार मूल्य 120 रूपये था तब खरीदा । उसपर श्रीयश को कंपनी ने 15% लाभांश दिया, तो निवेश पर प्राप्त प्रतिफल का दर ज्ञात कीजिए ।

हल :अंकित मूल्य = 100 रूपये बाजार मूल्य = 120 रूपये लाभांश = 15%

माना, प्रति शेयर प्रतिफल की दर x% है ।

यह ध्यान रहें, 120 रूपये के निवेश पर 15 रूपये प्राप्त होते हैं ।

$$\therefore \frac{15}{120} = \frac{x}{100}$$

$$\therefore x = \frac{15 \times 100}{120} = \frac{25}{2} = 12.5\%$$

यदि,	120	:	15
तो,	100	:	x

उत्तर : श्रीयश को प्रतिफल की दर 12.5% प्राप्त होगा ।

उदा. (2) अंकित मूल्य = 100 रूपये अधिमूल्य = 65 रूपये तो शेयर का बाजार मूल्य ज्ञात कीजिए ।

हल : बाजार मूल्य = अंकित मूल्य + अधिमूल्य = 100 + 65 = 165 रूपये

∴ शेयर का बाजार मूल्य 165 रूपये प्रतिशेयर

उदा. (3) निम्नलिखित तालिका उचित संख्या लिखकर पूर्ण कीजिए ।

उदा. क्र.	अंकित मूल्य	मूल्य प्रकार	बाजार मूल्य
(i)	₹ 10	अधिमूल्य ₹ 7	
(ii)	₹ 25		₹ 16
(iii)		सममूल्य	₹ 5

हल : (i) बाजार मूल्य 10 + 7 = 17 ₹ (ii) अवमूल्य 25 − 16 = 9 ₹ (iii) अंकित मूल्य 5 ₹

उदा. (4) नीलभाई ने निम्नानुसार शेयर में निवेश किया, तो उन्होंने कुल कितना निवेश किया?

कंपनी A : 350 शेयर्स, अंकित मूल्य = 10 रूपये प्रतिशेयर अधिमूल्य = 7 रूपये

कंपनी B : 2750 शेयर्स, अंकित मूल्य = 5 रूपये बाजार मूल्य = 4 रूपये

कंपनी C : 50 शेयर्स, अंकित मूल्य = 100 रूपये बाजार मूल्य = 150 रूपये

हल : कंपनी A : अधिमूल्य = 7 रूपये अत: बाजार मूल्य = अंकित मूल्य + अधिमूल्य

= 10 + 7 = 17 रूपये

∴ कंपनी A में कुल निवेश = शेयर्स की संख्या × बाजार मूल्य = 350 × 17 = 5950 रूपये

कंपनी B : अंकित मूल्य = 5 रूपये, बाजार मूल्य = 4 रूपये

∴ कंपनी B में कुल निवेश = शेयर्स की संख्या × बाजार मूल्य = 2750 × 4 = 11,000 रूपये

कंपनी C : अंकित मूल्य = 100 रूपये, बाजार मूल्य = 150 रूपये

∴ कंपनी C में कुल निवेश = शेयर्स की संख्या × बाजार मूल्य = 50 × 150 = 7500 रूपये

उत्तर : नीलभाई द्‌वारा तीनों कंपनियों में किया गया कुल निवेश = 5950 + 11000 + 7500

= 24,450 रूपये

उदा. (5) स्मिता ने 12,000 रु निवेश कर 10 रु अंकित मूल्यवाले शेयर्स प्रतिशेयर 2 रु अधिमूल्य पर खरीदे, तो उसे कुल कितने शेयर्स प्राप्त होंगे, यह ज्ञात करने के लिए निम्नलिखित कृति पूर्ण कीजिए ।

हल : अंकित मूल्य = 10 रूपये, अधिमूल्य = 2 रूपये ।

∴ बाजार मूल्य = अंकित मूल्य + ☐ = ☐ + ☐ = ☐

∴ शेयर्स की संख्या = $\frac{\text{कुल निवेश}}{\text{बाजार मूल्य}}$ = $\frac{12000}{☐}$ = ☐ शेयर्स

उत्तर : स्मिता को ☐ शेयर्स प्राप्त होंगे ।

उदा. (6) 10 रूपये अंकित मूल्यवाले 50 शेयर्स 25 रूपये बाजार मूल्य खरीदे । उन शेयर्स पर कंपनी ने 30% लाभांश घोषित किया तो (1) कुल निवेश (2) प्राप्त लाभांश तथा (3) निवेश पर प्रतिफल की दर ज्ञात कीजिए ।

हल : शेयर का अंकित मूल्य = 10 रूपये, बाजार मूल्य = 25 रूपये, शेयर्स की संख्या = 50

$\therefore$ कुल निवेश $25 \times 50 = 1250$ रूपये

लाभांश $= 10 \times \frac{30}{100} = 3$ रूपये प्रतिशेयर

$\therefore$ 50 शेयर पर कुल लाभांश $= 50 \times 3 = 150$ रूपये

$\therefore$ प्रतिफल की दर $= \dfrac{\text{प्राप्त कुल लाभांश}}{\text{कुल निवेश}} \times 100$

$= \frac{150}{1250} \times 100 = 12\%$

उत्तर : (1) कुल निवेश 1250 रूपये (2) 50 शेयर्स पर प्राप्त लाभांश 150 रूपये

(3) निवेश पर प्रतिफल की दर 12%.

प्रश्नसंग्रह 4.3

1. उचित संख्या लिखकर निम्नलिखित सरिणी पूर्ण कीजिए।

उदा. क्र.	अंकित मूल्य	मूल्य प्रकार	बाजार मूल्य
(1)	100 रु.	सममूल्य	. . .
(2)	. . .	अधिमूल्य = 500 रु.	575 रु.
(3)	10 रु.	. . .	5 रु.

2. जब बाजार मूल्य 80 रूपये था तब अमोल ने 100 रूपये अंकित मूल्य वाले 50 शेयर्स खरिदे । उस वर्ष कंपनी ने 20% लाभांश दिया, तो निवेश पर प्रतिफल का दर ज्ञात कीजिए ।

3. जोसेफ ने निम्नानुसार शेयर्स में निवेश किया तो उनके द्वारा की गई कुल निवेश ज्ञात कीजिए ।
   कंपनी A : अंकित मूल्य 2 रूपये तथा अधिमूल्य 18 रूपये वाले 200 शेयर्स
   कंपनी B : बाजार मूल्य 500 रूपये वाले 45 शेयर्स
   कंपनी C : बाजार मूल्य 10,540 रूपये वाला 1 शेयर

4. श्रीमती देशपांडे ने 20,000 रूपयों का निवेश कर 5 रूपये अंकित मूल्यवाले शेयर्स 20 रूपये के अधिमूल्य पर खरीदे तो उन्हें कितने शेयर्स मिलेंगे ?

5. श्री. शांतिलाल ने 100 रूपये अंकित मूल्यवाले 150 शेयर्स 120 रूपये बाजार मूल्य पर खरीदे । बाद में कंपनी ने 7% लाभांश घोषित किया, तो कुल निवेश पर प्रतिफल का दर ज्ञात कीजिए ।

6. दिए गए निवेशों में से कौन-सा निवेश अधिक लाभप्रद है ? दोनों कंपनी के शेयर्स का अंकित मूल्य समान है । कंपनी A के शेयर का बाजार मूल्य 80 रूपये तथा लाभांश 16% और कंपनी B के शेयर का बाजार मूल्य 120 रूपये तथा लाभांश 20% है ।

ICT Tools or Links

किन्हीं पाँच कंपनियों के शेयर्स का अंकित मूल्य, बाजार मूल्य, इंटरनेट या अन्य स्रोतों से ज्ञात कीजिए तथा उनका संयुक्तस्तंभालेख बनाइए और तुलना कीजिए । (संभव हो तो ▲, ▼ ऐसे दोनों प्रकार के शेयर्स देखिए ।)

आओ जानें

शेयर्स के खरीदी-बिक्री पर दलाली तथा कर (Brokerage and taxes on share trading)

दलाली (Brokerage) : शेयर्स की खरीदी-बिक्री व्यक्तिगत रूप से नहीं की जा सकती । वह शेयर बाजार के अधिकृत व्यक्ति या संस्था के माध्यम से की जाती है । उन्हें **'शेयर दलाल' (Share Broker)** कहा जाता है । दलाल के माध्यम से शेयर खरीदते या बेचते समय शेयर के बाजार मूल्य पर जिस दर से अतिरिक्त रकम दलाल लेता है उसे **'दलाली'** कहते हैं ।

उदा (1) माना, 100 ₹ अंकित मूल्यवाले शेयर का बाजार मूल्य 150 रूपये है । दलाली का दर 0.5% है । ऐसे 100 शेयर खरीदते समय कितनी रकम देनी होगी ? ऐसे 100 शेयर बेचे तो कितनी रकम प्राप्त होगी ?

ऊपरोक्त 100 शेयर खरीदते समय –

एक शेयर का कुल क्रय मूल्य = बाजार मूल्य + दलाली

= 150 रूपये + 150 रूपये का 0.5% = 150 + 0.75

∴ एक शेयर का कुल क्रय मूल्य = 150.75 रूपये

ऐसे 100 खरीदे तो कुल निवेश 100 × 150.75 = 15075 रूपये

जिसमें 15000 रूपयों के शेयर्स + 75 रूपये दलाली के ।

100 शेयर बेचते समय –

एक शेयर के विक्रय से प्राप्त मूल्य = बाजार मूल्य – दलाली

= 150 रूपये – 150 रु का 0.5% = 150 – 0.75

∴ एक शेयर के विकय से प्राप्त मूल्य = 149.25 रूपये

∴ 100 शेयर्स के विक्रय से प्राप्त मूल्य = 149.25 × 100 = 14925 रूपये

∴ 100 शेयर्स बेचने पर 14925 रूपये प्राप्त होंगे ।

इसे ध्यान में रखें

- दलाली हमेशा शेयर्स के बाजार मूल्य पर निर्धारित की जाती है ।
- शेयर खरीदी-बिक्री के विवरण में दलाली तथा कर सहित एक शेयर का मूल्य निश्चित किया जाता है ।

उपक्रम I : आपके परिसर में शेयर दलाली सेवा देने वाले व्यक्ति या संस्था की जानकारी प्राप्त कीजिए । तथा उनके द्‌वारा निर्धारित की जानेवाली दलाली की दर की जानकरी प्राप्त कर तुलना कीजिए।

उपक्रम II : डी-मॅट खाता (Demat A/c) तथा ट्रेडिंग खाता के विवरण पत्र (स्टेटमेंट) प्राप्त कीजिए । उसमें किन-किन बातों का समावेश होता है इसकी जानकारी नेट से/ दलालों से मिलकर / ज्येष्ठ लोगों से प्राप्त कीजिए । दोस्तों के साथ चर्चा कीजिए ।

अधिक जानकारी के लिए : हर शेयर दलाल सेबी (SEBI - Securities and Exchange Board of India) नियम 1992 के अंतर्गत पंजीकृत होता है तथा उसके ऊपर सेबी का नियंत्रण होता है ।

शेयर्स, बॉण्डस्, म्युच्युअल फंड आदि को लेखनबद्‌ध रखने के लिए डी-मॅट खाता (Dematerialized Account) तथा उनका खरीदी-बिक्री करने के लिए ट्रेडिंग खाता (Trading Account) खोलना आवश्यक होता है । ऐसा खाता बैंक में या शेयर दलाल के पास खोल सकते है इसे DP अर्थात Depository Participants कहते है । ये DPs, NSDL तथा CDSL इन दो Depositaries के अधीन होते हैं । डी-मॅट खाते में शेयर्स की खरीदी-बिक्री का हिसाब रखा जाता है । वह बैंक खातें जैसा ही होता है । बेचे गए शेयर खर्च की ओर (Debit) लिखे जाते हैं । खरीदे गए शेयर्स जमा की ओर (Credit) लिखते हैं । उनका विवरण पत्र (statement) माँगने पर मिलता है, जिसके लिए निश्चित शुल्क का भुगतान करना होता है । इन खातों में आपके शेयर्स इलेक्ट्रॉनिक फॉर्म में लेखबद्‌ध रहते हैं । इन दोनों खातों को आपके बैंक के बचत खाते से (जोड़ना) संलग्न करना होता है । शेयर्स खरीदते समय लगने वाले रूपये आवश्यकतानुसार उस खाते से कम (Debit) किए जाते हैं । वैसे ही शेयर्स की बिक्री से प्राप्त रकम उस खाते में जमा होती है । इन सब बातों का मार्गदर्शन शेयर दलाल या बैंक इच्छुक व्यक्तियों को करते है ।

आओ जानें

दलाली पर वस्तु एवं सेवा कर (GST on brokerage services)

शेयर दलाल अपने खातेदारों की ओर से शेयर की खरीदी-बिक्री करने की सेवा उपलब्ध करते हैं । दलाली सेवा पर कर की दर 18% है । उसका SAC क्रमांक ज्ञात कीजिए ।

टिप्पणी :- वस्तु एवं सेवा कर के अतिरिक्त ग्राहकों के सुरक्षा की दृष्टि से शेयर की खरीदी-बिक्री पर कुछ और

अल्प दर के कर होते हैं । उदा.सिक्युरीटी ट्रॅन्झॅक्शन टैक्स (STT), SEBI शुल्क, स्टँप ड्यूटी आदि । इन सभी का हम यहाँ विचार नहीं करने वाले हैं । यहाँ केवल ब्रोकरेज पर ही वस्तु- सेवा कर का विचार करने वाले हैं ।

उदा. (2) उदाहरण 1 के अनुसार माना किसी व्यक्ति ने 15075 रु. शेयर्स खरीदने के लिए दिए । इस रकम में 75 रूपये दलाली है । तो उन्हें 75 ₹ से 18% की दर से कर देना होगा वह ज्ञात कर विवरण पत्र बनाइए ।

हल : 18% की दर से 75 रु पर GST = $\frac{18}{100} \times 75$

= 13.50 रूपये

शेयर क्रय विवरण पत्र (B अर्थात खरीदें हैं ।)

शेयर्स की संख्या	शेयर का बाजार मूल्य	शेयर का अंकित मूल्य	दलाली 0.5%	दलाली पर 9% CGST	दलाली पर 9% SGST	शेयर्स का कुल क्रय मूल्य
100(B)	150 रूपये	15000 रूपये	75 रूपये	6.75 रूपये	6.75 रूपये	15088.50 रूपये

उदा. (3) बशीर खान ने 40 रु. बाजार मूल्य पर 100 शेयर खरीदे । दलाली का दर 0.5% तथा दलाली पर वस्तु- सेवा कर की दर 18% है, तो उन्हें 100 शेयर्स के लिए कुल कितना खर्च आएगा?

हल : 100 शेयर्स की बाजार मूल्य के अनुसार कीमत 40 × 100 = 4000 रूपये

एक शेयर पर दलाली = $\frac{0.5}{100} \times 40$ = 0.20 रूपये

∴ एक शेयर का खरीदी मूल्य = बाजार मूल्य + दलाली

= 40 + 0.20 = 40.20 रूपये

∴ 100 शेयर का खरीदी मूल्य = 40.20 × 100 = 4020 रूपये

100 शेयर पर दलाली 0.20 × 100 = 20 रूपये

∴ वस्तु- सेवा कर = $\frac{18}{100} \times 20$

= 3.60 रूपये

उत्तर : बशीर खान को 100 शेयर्स खरीदने के लिए लगनेवाला कुल खर्च

= 4020 + 3.60 = 4023.60 रूपये

उदा. (4) पंकजभाई ने 1,25,295 रूपये का निवेश कर 10 रूपये अंकित मूल्यवाले 100 शेयर 125 रूपये बाजार मूल्य पर खरीदे । इस व्यवहार में दलाली की दर 0.2% तथा दलाली पर GST 18% की दर से दिया, तो (1) कितने शेयर्स खरीदे? (2) कुल कितनी दलाली दी ? (3) इस व्यवहार में वस्तु- सेवा कर कितना दिया ?

हल : निवेश = 1,25,295 रूपये, बाजार मूल्य = 125 रूपये, दलाली = 0.2%, GST की दर = 18%

एक शेयर पर दलाली = 125 × $\frac{0.2}{100}$ = 0.25 रूपये

एक शेयर की दलाली पर (कर) GST = 0.25 का 18% = 0.045 रूपये

$\therefore$ एक शेयर का क्रय मूल्य = बाजार मूल्य + दलाली + कर

= 125 + 0.25 + 0.045 = 125.295 रूपये

$\therefore$ शेयर्स की संख्या = $\frac{125295}{125.295}$ = 1000

कुल दलाली = प्रतिशेयर दलाली × शेयर्स की संख्या

$\therefore$ = 0.25 × 1000 = 250 रूपये

कुल कर = 1000 × 0.045 = 45 रूपये

उत्तर (1) 1000 शेयर्स खरीदे (2) दलाली 250 रूपये दी । (3) दलाली पर कर 45 रूपये दिया ।

उदा. (5) नलिनीताई ने 10 रूपये अंकित मूल्यवाले शेयर के लिए जब बाजार मूल्य 60 रूपये था तब 6024 रूपयों का निवेश किया । उन शेयर्स पर 60% लाभांश प्राप्ति के बाद 50 रूपये बाजार मूल्य पर सभी शेयर्स बेचें । हर व्यवहार में 0.4% दलाली दी । तो इस व्यवहार में उन्हें हुई लाभ या हानि निम्नलिखित चौखटो को भर कर ज्ञात कीजिए ।

हल : इस उदा. में कर की दर नहीं दी गई है । अत: देय कर का विचार नहीं किया है ।

10 रू अंकित मूल्य पर 60 शेयर खरीदने पर

प्रतिशेयर दलाली = $\frac{0.4}{100} \times 60$ = ☐ रूपये

$\therefore$ एक शेयर का मूल्य = 60 + 0.24 = ☐ रूपये

$\therefore$ 6024 रूपये में $\frac{6024}{60.24}$ = 100 शेयर खरिदे

10 रूपये अंकित मूल्यवाले शेयर 50 रूपये के बाजार मूल्य पर बेचें ।

$\therefore$ प्रतिशेयर दलाली = $\frac{0.4}{100} \times 50$ = 0.20 रूपये

$\therefore$ एक शेयर का विक्रय मूल्य = 50 - 0.20 = ☐ रूपये

$\therefore$ 100 शेयर्स का कुल विक्रय मूल्य = 100 × 49.80 = ☐ रूपये

लाभांश 60% मिला ।

$\therefore$ 1 शेयर पर लाभांश = $\frac{60}{100} \times 10$ = 6 रूपये

$\therefore$ 100 शेयर पर लाभांश = 6 × 100 = ☐ रूपये

$\therefore$ नलिनीताई को शेयर्स बिक्री तथा लाभांश से प्राप्त कुल रकम = ☐ + ☐ = 5580 रु

नलिनीताई का निवेश = 6024 रूपये था ।

$\therefore$ नलिनीताई की हानि = ☐ - ☐ = ☐ रूपये

उत्तर : नलिनीताई को इस क्रय-विक्रय व्यवहार में 444 रूपये की हानि हुई ।

कृति : प्रश्न क्र 5 में खरीदी-बिक्री के समय दलाली पर कर की दर 18% हो तो हानि कितनी होगी ज्ञात कीजिए। आपका उत्तर 451.92 रूपये आता है क्या इसकी जाँच कीजिए ।

आओ जानें

म्युच्युअल फंड (Mutual Fund – MF)

शेयर्स का अध्ययन करते समय हमने देखा कि, कंपनी स्थापित करने के लिए इच्छुक व्यक्ति एक साथ आते है तथा समाज का सहभाग लेकर बड़ी पूँजी इकट्ठा करते हैं । कंपनी का कामकाज अच्छा हो तो उन सभी लोगों को उसका लाभ मिलता है । उन्हें लभांश मिलता है शेयर का बाजार मूल्य बढने से कंपनी की पूँजी बढ़ती है । फलस्वरुप देश के विकास में सहयोग मिलता है । संक्षेप में समाजशास्त्र का तत्त्व है । 'Together we can progress', परंतु प्रत्येक सिक्के के दो पहलु होते हैं । शेयर्स में लाभ होने की अपेक्षा कभी-कभी हानि भी हो सकती है । क्या यह हानि कम कर सकते हैं ? क्या निवेशकों के लिए यह जोखिम कम कर सकते है ? हाँ । उसके लिए आजकल अधिकांश लोग म्युच्युअल फंड में निवेश करते हैं ।

म्युच्युअल फंड अर्थात अनेक निवशकों के रूपये एकत्रित कर इकट्ठा की गई पूँजी । वह रकम एक ही प्रकार के शेयर निवेश न करके, निवेश के विविध प्रकारों में निवेश की जाती है, अर्थात जोखिम कम होती है तथा कुल लाभांश सभी निवेशकों में विभाजित किया जाता है । म्युच्युअल फंड में निवेश कैसे किया जाता है ? उसमें प्रतिफल कैसे मिलता है ? कितनी अवधि के लिए निवेश करना चाहिए ? उसके विविध प्रकार क्या हैं ? ऐसे अनेक प्रश्नों के उत्तर आर्थिक सलाहकार दे सकते हैं ।

> Investments in Mutual Funds are subject to Market risks. Read all scheme related documents carefully ऐसा वाक्य आपने कई बार सुना या पढा होगा । उसका ठीक-ठीक अर्थ (मतलब) समझें । कभी-कभार म्युच्युअल फंड में किए गए निवेश पर लाभ की अपेक्षा हानि होती है तथा वह हानि निवेशकों को सहन करनी पड़ती है ।

म्युच्युअल फंड अर्थात तज्ज्ञ व्यवसायी विशेषज्ञ लोगों द्वारा निर्मित फंड योजना । इन तज्ज्ञों को AMC अर्थात 'असेट मॅनेजमेंट कंपनी' कहते हैं । वे बाजार का अंदाजा लेकर इच्छुक लोगों के पैसे विविध योजनाओं, जैसे इक्विटी फंड (शेयर्स), डेब्ट फंड (डिबेंचर्स बाँड्स आदि या दोनों का बॅलन्स फंड) में निवेशकों के सूचना के अनुसार निवेश करते हैं ।

हमने शेयर बाजार में निवेश किया तो शेयर्स मिलते हैं, वैसे ही म्युच्युअल फंड में निवेश करने पर **'युनिट्स'** मिलते है ।

प्रति युनिट जो बाजार मूल्य होगा उसे युनिट का कुल (वास्तविक) संपत्ति मूल्य **(Net asset value – NAV)**

एक युनिट का NAV × युनिट्स की संख्या = म्युच्युअल फंड का कुल निवेश मूल्य ।

टिप्पणी : शेयर्स के अनुसार म्युच्युअल फंड के युनिट्स का NAV भी सतत बदलता रहता है । आवश्यक हो तब युनिट्स बेच सकते हैं ।

बैंक या भारतीय पोस्ट सेवा में निवेश अधिक सुरक्षित होती है । परंतु ऐसे निवेश से प्राप्त प्रतिफल सहसा महँगाई का सामना करने में अपर्याप्त साबित होता है, इसे ध्यान रखना होगा । उसके लिए रूपयों का उचित नियोजन होना चाहिए अर्थात आर्थिक नियोजन (Financial Planning) ।

समग्रता से विचार कर निवेश से संबधित उचित निर्णय लेना महत्त्वपूर्ण होता है । उसका नियमित अध्ययन करने की आदत होनी चाहिए ।

नियमित आवर्ती निवेश योजना (SIP -Systematic Investment Plan)

माना हमें म्युचुअल फंड में एक साथ बड़ी पूँजी निवेश करना संभव न हो, तो छोटी किस्तों में हर महिने निवेश कर सकते हैं । न्यूनतम 500 रूपये प्रतिमाह म्युच्युअल फंड में निवेश कर सकते हैं । इसप्रकार नियमित रुप से मासिक या त्रैमासिक निवेश कर सकते हैं । इस योजना द्वारा बचत की आदत लगती है तथा भविष्य के आर्थिक उद्देश्यों की पूर्ति आसानी से की जा सकेंगी । यह योजना भी दीर्घ कालावधि के लिए लाभप्रद हो सकती है । कारण शेयर बाजार के उतार-चढ़ाव का इस योजना के निवेश पर परिणाम कम होता है । कम-से-कम 3 से 5 संभव हो तो 10-15 वर्षों के लिए इस योजना में निवेश करना उत्तम है ।

म्युच्युअल फंड के लाभ

- अनुभवी, तज्ज्ञ फंड मॅनेजर्स
- निवेश में विविधता (diversifications of funds)
- पारदर्शकता - निवेश में पर्याप्त सुरक्षितता
- तरलता - (आवश्यकता नुसार) बिक्री की सुविधा
- सीमित जोखिम
- लघु तथा दीर्घ अवधि के लाभ
- कुछ निश्चित फंड (ELSS) में निवेश पर आयकर धारा 80C के अंतर्गत छूट मिलती है ।

हल किए गए उदाहरण

उदा. (1) माना, म्युचुअल फंड योजना का बाजार मूल्य 200 करोड़ रूपये हो और कंपनी ने उसके 8 करोड युनिट्स किए हो तो एक युनिट का वास्तविक संपत्ति मूल्य (NAV) ज्ञात कीजिए ।

हल : एक युनिट का NAV = 200 करोड़ रूपये / 8 करोड़ युनिट्स = 25 रूपये प्रतियुनिट ।

उदा. (2) माना, आपने उदा. 1 में दिए गए कंपनी में 10,000 रूपयों का निवेश किया तो आपको कितने युनिट्स प्राप्त होंगे ?

उकल : युनिट्स की संख्या = किया गया निवेश / एक युनिट का NAV

= 10,000/25 = 400 युनिट्स प्राप्त होंगे ।

प्रश्नसंग्रह 4.4

1. एक शेयर का बाजार मूल्य 200 रूपये है । वह शेयर खरीदते समय 0.3% दलाली दी, तो शेयर का क्रय मूल्य ज्ञात करो ।
2. एक शेयर का बाजार मूल्य 1000 रूपये था जब वह बेचा गया, जिसपर 0.1% दलाली दी गई हो, तो बिक्री के बाद प्राप्त रकम ज्ञात कीजिए ।
3. निम्नलिखित शेयर क्रय विवरण पत्र के रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए । (B – खरीदे, S – बिक्री किया)

शेयर्स की संख्या	शेयर्स का बाजार मूल्य	शेयर्स की कुल कीमत	दलाली का दर 0.2%	दलाली पर CGST 9%	दलाली पर SGST 9%	शेयर्स की कुल कीमत
100 B	45 रु.					
75 S	200 रु.					

4. श्रीमती देसाई ने 100 रूपये अंकित मूल्य के शेयर्स, बाजार मूल्य 50 रूपये होने पर बिक्री की तब उन्हें 4988.20 रूपये प्राप्त हुए । दलाली का दर 0.2% तथा दलाली पर जीएसटी की दर 18% हो, तो उन्होंने कितने शेयर्स बिक्री की ? ज्ञात कीजिए ।
5. मिस्टर डिसोझा ने 50 रूपये अंकित मूल्य के 200 शेयर्स 100 रूपये अधिमूल्य पर खरीदी किया। उसपर कंपनी ने 50% लाभांश दिया । लाभांश मिलने पर उनमें से 100 शेयर्स की 10 रूपये अवमूल्य से बिक्री की तथा शेष शेयर्स की 75 रूपये अधिमूल्य से बिक्री की । प्रत्येक व्यवहार में 20 रूपये दलाली दी, तो उन्हें इस व्यवहार में लाभ हुआ या हानि ? कितने रूपये ? ज्ञात कीजिए ।

प्रकीर्ण प्रश्नसंग्रह 4 A

1. निम्नलिखित प्रश्नों के लिए उत्तर का उचित विकल्प चुनिए ।

(1) जीवनावश्यक वस्तुओं पर वस्तु एवं सेवा कर की दर . . . है ।

(A) 5% (B) 12% (C) 0% (D) 18%

(2) एक ही राज्य में होने वाले व्यापार पर केंद्र सरकार द्‌वारा . . . निर्धारित किया जाता है ।

(A) IGST (B) CGST (C) SGST (D) UTGST

(3) हमारे देश में . . . . दिनांक से वस्तु एवं सेवा कर यह कर पद्‌धति अस्तित्व में आई ।

(A) 31 मार्च 2017 (B) 1 अप्रेल 2017

(C) 1 जनवरी 2017 (D) 1 जुलै 2017

(4) स्टील के बर्तनों पर वस्तु एवं सेवा कर की दर 18% हो तो उसपर राज्य वस्तु एवं सेवा कर की दर . . . निर्धारित होती है ।

(A) 18% (B) 9% (C) 36% (D) 0.9%

(5) GSTIN में कुल . . . अंकाक्षर होते हैं ।

(A) 15 (B) 10 (C) 16 (D) 9

(6) जब कोई पंजीकृत व्यापारी दूसरे पंजीकृत व्यापारी को वस्तु बेचता हो उसे GST अंतर्गत . . . . व्यवहार कहते हैं ।

(A) BB (B) B2B (C) BC (D) B2C

2. 25,000 रूपये मुल्य की किसी एक वस्तु पर व्यापारी ने 10% छूट देकर शेष रकम पर 28% GST लगाया । तो कुल बिल कितने रूपये का होगा? उसमें CGST तथा SGST शीर्षक के अंतर्गत कितनी रकम आएगी?

3. किसी रेडीमेड कपड़े की दुकान में 1000 रूपये मूल्य के ड्रेस पर 5% छूट देकर शेष रकम पर 5% GST लगाकर बेचा तो वह कितने रूपये में मिलेगा?

4. सूरत, गुजरात के किसी व्यापारी ने 2.5 लाख रु कर पात्र मूल्य के सुती कपड़े राजकोट, गुजरात के व्यापारी को बेचा तो इस व्यवहार में राजकोट के व्यापारी को 5% की दर से कितना वस्तु एवं सेवा कर (GST) लगेगा?

5. श्रीमती मल्होत्रा ने 85,000 रूपये करपात्र मूल्य के सौर ऊर्जा के उपकरण खरीदे तथा 90,000 रु में बेचे । वस्तु एवं सेवा कर की दर 5% हो तो उन्हें इस व्यवहार में कितना रूपये का (ITC) तथा कितने रूपये का कर भुगतान करना होगा ?

6. Z-सिक्युरिटी सर्व्हिसेस देने वाली कंपनी ने 64,500 रूपये करपात्र मूल्य की सेवा की पूर्ति की । वस्तु सेवा कर की दर 18% है । इन सिक्युरिटी सर्व्हिसेस की पूर्ति करने के लिए कंपनी ने लॉन्ड्री सर्व्हिस तथा युनिफॉर्म आदि मुद्दों पर कुल 1550 रूपये वस्तु सेवा कर का भुगतान किया है । तो उस कंपनी का (इनपुट टैक्स क्रेडिट) ITC ज्ञात कीजिए । उस आधार पर देय वस्तु-सेवा कर में केंद्र तथा राज्य का हिस्सा (CGST तथा SGST) ज्ञात कीजिए ।

7. एक व्यापारी ने पुलिस नियंत्रण कक्ष के लिए वस्तु सेवा कर सहित 84,000 रूपये मूल्य के वॉकीटॉकी संच (Set) की आपूर्ति की । वस्तु सेवा कर की दर 12% हो तो उसके द्‌वारा निर्धारित कर में राज्य तथा केंद्र का हिस्सा ज्ञात कीजिए । वॉकीटॉकी संच का करपात्र मूल्य ज्ञात कीजिए ।

8.★ किसी थोक व्यापारी ने 1,50,000 रूपये करपात्र मूल्य के विद्‌युत उपकरण खरीदे । वे सभी उपकरण खुदरा व्यापारी को 1,80,000 रूपये करपात्र मूल्य पर बेचे । खुदरा व्यापारी ने वे सभी उपकरण ग्राहक को 2,20,000 रूपये करपात्र मूल्य पर बेचे । तो 18% की दर से (1) थोक तथा खुदरा विक्रेता के बीजक में केंद्रीय कर (CGST) और राज्य कर (SGST) की गणना कीजिए । (2) थोक और खुदरा व्यापारी का देय केंद्र का हिस्सा तथा देय राज्य का हिस्सा ज्ञात करो ।

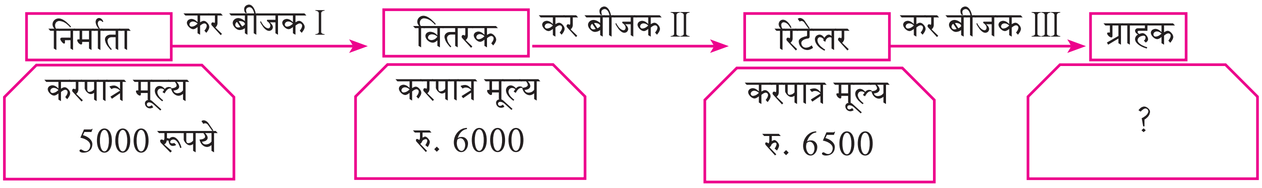
9.★ ठाणे महाराष्ट्र के अण्णा पाटील ने 14,000 रु. करपात्र मूल्य का एक व्हॅक्युम क्लीनर वसई (मुंबई) किसी व्यापारी को बेचा । GST का दर 28% था । वसई के व्यापारी ने व्हॅक्युम क्लीनर 16,800 रु. करपात्र मूल्य पर बेचा तो इस व्यवहार में निम्नलिखित के मान ज्ञात कीजिए ।

(1) अण्णा पाटील द्‌वारा दिए गए कर बीजक में राज्य तथा केंद्र का कर कितना दिखाया गया होगा?

(2) वसई के व्यापारी ने ग्राहक से कितना केंद्र तथा राज्य का हिस्सा निर्धारित किया होगा?

(3) वसई के व्यापारी के लिए सरकार को कर का भुगतान करते समय केंद्र तथा राज्य का कर कितना देना पड़ेगा ? ज्ञात कीजिए ।

10★. निम्नलिखित किसी एक के वितरण व्यवसाय शृंखला के कर बीजक A, B, C में वस्तु एवं सेवा कर निर्धारण की गणना कीजिए। GST का दर 12% है।



(1) निर्माता ने, वितरक ने तथा खुदरा व्यापारी (रिटेलर) ने सरकार को कितना वस्तु एवं सेवा कर किस शीर्षक के अंतर्गत भुगतान किया वह दर्शाने वाला विवरण पत्र बनाइए।

(2) अंत में ग्राहक को वह वस्तु कितने रूपये में मिलेगी?

(3) इस शृंखला में B2B तथा B2C बीजक कौन-सी है? लिखिए।

प्रकीर्ण प्रश्नसंग्रह 4 B

1. निम्नलिखित प्रत्येक प्रश्न के लिए उचित विकल्प चुनिए।

   (1) अंकित मूल्य 100 रूपये वाले शेयर का बाजार मूल्य 75 रूपये हो तो निम्नलिखित में से कौन-से वाक्य सही हैं ?

   (A) यह शेयर 175 रूपये अधिमूल्य पर है। (B) यह शेयर 25 रूपये अवमूल्य पर है।
   (C) यह शेयर 25 रूपये अधिमूल्य पर है। (D) यह शेयर 75 अवमूल्य पर है।

   (2) 50% लाभांश घोषित किसी कंपनी के 10 रूपये अंकित मूल्य वाले एक शेयर पर कितना लाभांश प्राप्त होगा?

   (A) 50 रूपये (B) 5 रूपये (C) 500 रूपये (D) 100 रूपये

   (3) किसी म्युच्युअल फंड के एक युनिट का NAV 10.65 रूपये हो तो 500 युनिट्स खरीदने के लिए कितनी पूँजी लगेगी?

   (A) 5325 (B) 5235 (C) 532500 (D) 53250

   (4) दलाली पर वस्तु सेवा कर की दर . . . है।

   (A) 5% (B) 12% (C) 18% (D) 28%

   (5) शेयर बेचते समय एक शेयर का मूल्य ज्ञात करने के लिए बाजार मूल्य, दलाली तथा GST का....

   (A) योग करना होता है। (B) व्यवकलन करना होता है।

   (C) गुणन करना होता है। (D) भाजन (भाग) करना होता है।

2. 100 रूपये अंकित मूल्यवाला शेयर 30 रूपये अधिमूल्य पर खरीदा। दलाली की दर 0.3% हो तो एक शेयर खरीदी मूल्य ज्ञात कीजिए।

3. प्रशांत ने 100 रूपये अंकित मूल्य वाले 50 शेयर 180 रूपये बाजार मूल्य पर खरीदे । उसपर कंपनी ने 40% लाभांश दिया तो प्रशांत के निवेश पर प्रतिफल (प्रतिप्राप्ती) की दर ज्ञात कीजिए ।

4. यदि 100 रूपये अंकित मूल्यवाले 300 शेयर्स 30 रूपये अवमूल्य पर बेचे गए तो कितने रूपये प्राप्त होंगे?

5. 100 रू अंकित मूल्यवाले तथा 120 रूपये बाजार मूल्यवाले शेयर्स में 60,000 रूपये निवेश किया तो कितने शेयर्स प्राप्त होंगे?

6. श्रीमती मीता अग्रवाल ने 100 रूपये बाजार मूल्य पर 10,200 रु के शेयर खरीदे। जिसमें 60 शेयर्स 125 रूपये बाजार मूल्य पर बेचे तथा शेष शेयर्स 90 रूपये बाजार मूल्य पर बेचे प्रत्येक बार 0.1 की दर से दलाली दी । तो इस व्यवहार में उन्हें लाभ हुआ या हानि ? कितने रूपये ?

7. शेयर बाजार में 100 रूपये अंकित मूल्यवाले दो कंपनियों के शेयर्स का बाजार मूल्य तथा लाभांश निम्ननुसार दिया गया हो तो किस कंपनी में निवेश अधिक लाभप्रद होगा ?

   (1) कंपनी A - 132 रूपये 12%   (2) कंपनी B - 144 रूपये 16%

8.★ श्री. आदित्य संघवी ने 50118 रु निवेश कर 100 रूपये अंकित मूल्य वाले शेयर 50 रूपये बाजार मूल्य पर खरीदे । इस व्यवहार में उन्होंने 0.2% दलाली दी । दलाली पर 18% की दर से GST दिया तो 50118 रूपये में कितने शेयर्स प्राप्त होंगे ?

9.★ श्री.बाटलीवाला के एक दिन में 30,350 रूपये के शेयर्स बेचे तथा 69,650 रूपये के शेयर्स खरीदे । उस दिन कुल खरीदी-बिक्री पर 0.1% की दर से दलाली दी तथा दलाली पर 18% की दर से वस्तु सेवा कर दिया । तो इस व्यवहार में दलाली तथा वस्तु सेवा कर पर होने वाला खर्च ज्ञात कीजिए ।

10.★ श्रीमती अरुणा ठक्कर ने किसी कंपनी के 100 रू अंकित मूल्य के 100 शेयर्स 1200 रु. बाजार मूल्य पर खरीदे । प्रतिशेयर 0.3% दलाली तथा दलाली पर 18% GST दी तो

   (1) कुल निवेश कितने रूपये किया?   (2) निवेश पर दलाली कितनी दी?

   (3) दलाली पर वस्तु सेवा कर ज्ञात कीजिए ।

   (4) 100 शेयर्स के लिए कुल कितने रूपये खर्च हुए?

11.★ श्रीमती अनघा दोशी ने 100 रू अंकित मूल्य तथा 660 बाजार मूल्य पर 22 शेयर्स खरीदे तो उन्होंने कुल कितने रूपये निवेश किया ? उन शेयर्स पर 20% लाभांश लेने के बाद 650 रु बाजार मूल्य पर बेचे । प्रत्येक व्यवहार में 0.1% दलाली दी । तो इस व्यवहार में कितने प्रतिशत लाभ या हानि हुई ज्ञात कीजिए । (उत्तर निकटतम् पूर्णांक में लिखिए ।)

N3ZG61

5 संभाव्यता

आओ सीखें

- संभाव्यता : परिचय
- यादृच्छिक प्रयोग व फल
- नमूना अवकाश व घटना
- घटना की संभाव्यता

आओ चर्चा करें

अध्यापक : विद्यार्थी दोस्तों, अपनी कक्षा के विद्यार्थियों की संख्या के बराबर पर्चियाँ इस बक्से में रखी गई हैं। प्रत्येक विद्यार्थी को एक पर्ची उठानी होगी, पर्चियों पर भिन्न- भिन्न वनस्पतियों के नाम लिखे गए हैं। किन्हीं भी दो पर्चियों पर एक ही वनस्पति का नाम नहीं दिखेगा। तुलसी नामवाली पर्ची किसे मिलेगी इसे देखेंगे। सभी अपनी उपस्थिति क्रमांक के अनुसार खड़े हो जाइए। अंतिम पर्ची उठाने तक किसी को भी पर्ची नहीं खोलना है।

अरुणा : महोदय, कतार में मैं प्रथम हूँ किंतु मैं सबसे पहले पर्ची नहीं उठाऊँगी क्योंकि, सभी पर्चियों में से वह पर्ची मुझे ही मिलेगी जिसकी संभावना बहुत कम है।

जरीना : महोदय, मैं सबसे अंत में हूँ परंतु मैं अंतिम पर्ची नहीं उठाऊँगी क्योंकि, तुलसी नामवाली पर्ची संभवत: मेरे उठाने के पहले ही निकाल ली गई होगी।

संक्षेप में प्रथम और अंतिम के विद्यार्थियों को ऐसा लगता है कि उन्हें तुलसी नामवाली पर्ची मिलने की संभावना बहुत कम है। ऊपरोक्त चर्चा में संभावना के कम या अधिक होने पर विचार हुआ है।

हम दैनिक जीवन में निम्नलिखित शब्दों का उपयोग करते हैं।

- संभवत:
- अधिकतर
- असंभव
- निश्चित
- पास-दूर
- 50 - 50

भविष्य में संभावना संबंधी निम्नलिखित कथन देखिए।

- आज से वर्षा होने की आशा अधिक है।
- महँगाई बढ़ने की संभावना अधिक है।
- भारत को आगामी क्रिकेट स्पर्धा में हराना असंभव है।
- निश्चित ही मुझे प्रथम श्रेणी मिलेगी।
- बच्चों को समय पर पोलिओ की खुराक दी तो उन्हें पोलिओ होने की संभावना नहीं होती।

संलग्न चित्र में क्रिकेट के खिलाड़ी सिक्का उछालते हैं ।

इनमे कौन-कौन-सी संभावनाएँ हैं ?

☐ या ☐

अर्थात, सिक्का उछालने के ☐ परिणाम प्राप्त होते हैं ।

कृति 1 एक सिक्का कक्षा में प्रत्येक छात्र एक बार उछालकर देखें । आपने क्या देखा ?

(अध्यापक बोर्ड पर निम्नलिखित सारिणी बनाते हैं और उसे भरते हैं ।)

संभावना	चित (H)	पट (T)
विद्यार्थी संख्या	. . .	. . .

कृति 2 अब प्रत्येक उस सिक्के को दो बार उछालकर देखें । कौन-कौन-सी संभावना है ?

संभावना	H H	HT	TH	TT
विद्यार्थी संख्या				

कृति 3 किसी एक पाँसे को एक ही बार फेंकने पर ऊपरी पृष्ठभाग के लिए कौन-कौन-सी संभावनाएँ हैं इसका विचार कीजिए ।

प्रत्येक संभावना अर्थात पाँसा फेंकने का एक-एक संभाव्य परिणाम है ।

आओ जानें

यादृच्छिक प्रयोग (Random Experiment)

जिस प्रयोग में सभी संभाव्य परिणाम पहले से ही ज्ञात होते हैं, किंतु उनमें से किसी भी परिणाम की निश्चितता का अनुमान नहीं लगा सकते तथा सभी परिणामों के सत्य होने की संभावना समान होती है, ऐसे प्रयोग को 'यादृच्छिक प्रयोग' कहते हैं ।

उदा. सिक्के उछालना, पाँसा फेंकना, 1 से 50 अंक लिखे गए कार्ड के समूह में से एक कार्ड निकालना, खेलने के ताश के पत्तों का अच्छे तरीके से फेंट कर पत्तों में से एक पत्ता निकालना आदि ।

फल (Outcome)

यादृच्छिक प्रयोग के परिणाम को 'फल' कहते हैं ।

उदा. (i) एक सिक्का उछालना इस यादृच्छिक प्रयोग के दो ही 'फल' हैं ।

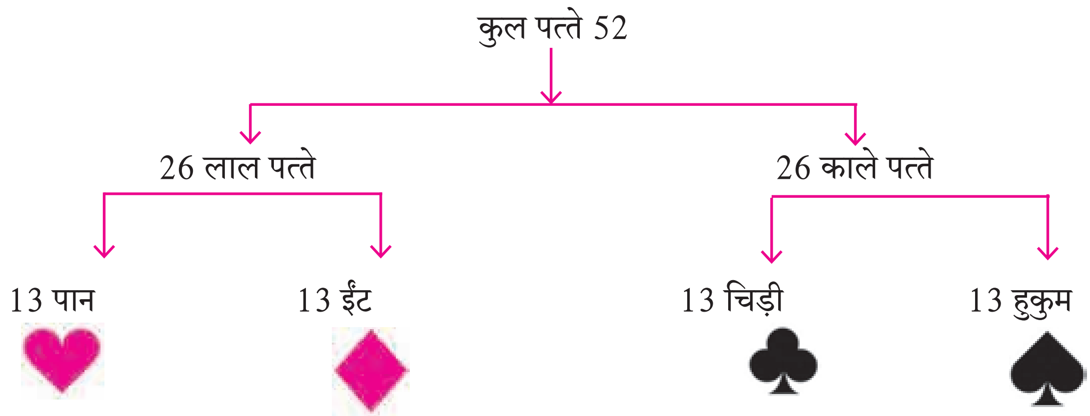
चित (H) या पट (T)

(ii) एक पाँसा फेंकना इस यादृच्छिक प्रयोग में 6 पृष्ठभागों पर रहने वाले बिंदुओं की संख्या से 6 फल संभव हैं ।

1 या 2 या 3 या 4 या 5 या 6

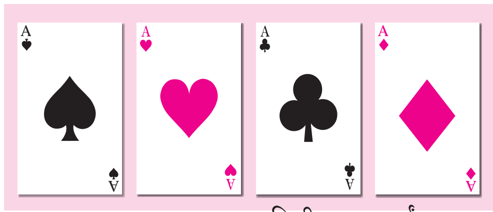
(iii) 1 से 50 अंक लिखे गए कार्ड की गड्डी में से 1 कार्ड निकालना इस प्रयोग में 50 फल संभव हैं ।

(iv) खेल के पत्तों को अच्छी तरह से फेंटकर ताश के पत्तों की गड्डी में से एक ताश का पत्ता खींचना इस यादृच्छिक प्रयोग में 52 पत्ते होते हैं, जिसे निम्नलिखित प्रकार से दर्शाया गया है ।



पत्तों के पैकेट में ईंट, पान, चिड़ी और हुकुम ऐसे चार समूह होते हैं । प्रत्येक समूह में राजा (k), रानी (Q), गुलाम (J) तथा 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2 और इक्का ऐसे 13 पत्ते होते हैं ।

राजा, रानी, गुलाम इन्हें अंकित पत्ते (face cards) कहते हैं । प्रत्येक पैकेट में राजा के चित्रवाले चार, रानी के चित्र वाले चार, और गुलाम के चित्रों के चार ऐसे 12 चित्रयुक्त पत्ते होते हैं ।



हुकुम का इक्का | पान का इक्का | चिड़ी का इक्का | ईंट का इक्का

समान संभाव्यता फल (Equally Likely outcomes) :

यदि हमने एक पाँसा फेंका तो पाँसे के ऊपरी पृष्ठभाग पर 1, 2, 3, 4, 5, 6, इनमें से एक संख्या मिलने की संभावना समान होती है । अर्थात, 1 से 6 में से कोई भी एक संख्या ऊपरी पृष्ठभाग पर मिल सकती है । तथापि यदि पाँसा ऐसा हो जिसमें ऊपरी पृष्ठभाग पर कोई विशिष्ट अंक बार-बार आता है, तो पाँसा असंतुलित (biased) होता है । इस स्थिति में फल समान संभाव्य नहीं होते ।

इसमें आगे यादृच्छिक प्रयोग में उपयोग किए गए मुद्दे संतुलित (fair या unbiased) हैं, ऐसा हम मानने वाले हैं ।

दिए गए फलों में से कोई भी फल प्राधान्य क्रम से न मिले या सभी फलों की संभावना समान हो तो उस फल को समसंभाव्यता फल कहते है । उदा. यदि हमने एक सिक्का उछाला तो चित या पट प्राप्त होने की समान संभावना है । वैसे ही 1 से 6 अंक विभिन्न पृष्ठों पर हों ऐसा पाँसा फेकने पर उनमें से कोई भी एक अंक ऊपरी पृष्ठ पर प्राप्त होने की संभावना की जाँच करें । यहाँ सभी फल समान संभावना वाले हैं ।

प्रश्नसंग्रह 5.1

(1) निम्नलिखित प्रत्येक कथनों में कितनी संभावना (possibility)है ?

(i) वनिता को महाराष्ट्र के निम्नलिखित स्थलों की जानकारी है । उनमें से एक स्थान पर वह मई महीने की छुट्टी में जानेवाली है ।

अजंता, महाबलेश्वर, लोणार झील, ताडोबा अभयारण्य, आंबोली, रायगढ़, माथेरान, आनंदवन.

(ii) सप्ताह के एक दिन का यादृच्छिक पद्धति से चुनाव करना है ।

(iii) दिए गए चित्र में ताश के पत्तों में से एक पत्ता यादृच्छिक पद्धति से चुनना है ।

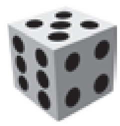
(iv) प्रत्येक कार्ड पर एक संख्या 10 से 20 तक की इस प्रकार से लिखी गई है । उनमें से एक कार्ड यादृच्छिक पद्धति से चुनना है ।

थोड़ा सोचें

निम्नलिखित प्रयोगों में से कौन-से प्रयोगों में अपेक्षित फल मिलने की संभावना अधिक है ?

(1) 1 पाँसा फेंकने पर 1 मिलना ।

(2) एक सिक्का उछालने पर चित मिलना ।



आओ जानें

नमूना अवकाश (Sample Space)

यादृच्छिक प्रयोग में सभी संभाव्य फलों के समूह को नमूना अवकाश कहते हैं ।

नमूना अवकाश 'S' या 'Ω' (यह ग्रीक अक्षर में होने के कारण उच्चारण ओमेगा है ।) इस चिह्न को समूह के रूप में दर्शाया जाता है । नमूना अवकाश के प्रत्येक घटक को 'नमूना घटक' कहते हैं । नमूना अवकाश 'S' में कुल घटकों की संख्या n(S) से दर्शाई जाती है । यदि n(S) सांत हो तो उसे सांत नमूना अवकाश कहते हैं । सांत नमूना अवकाश के कुछ उदाहरण आगे तालिका में दर्शाए गए हैं ।

अ. क्र.	यादृच्छिक प्रयोग	नमूना अवकाश	घटनाओं के नमूना बिंदुओं की संख्या
1	एक सिक्का उछाला गया।	S = {H, T}	n(S) = 2
2	दो सिक्के उछाले गए।	S = { HH, HT, TH, TT}	n(S) =
3	तीन सिक्के उछाले गए।	S = {HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT}	n(S) = 8
4	एक पाँसा फेंका गया।	S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}	n(S) =
5	दो पाँसे फेंके गए।	S = {(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)}	n(S) = 36
6	1 से 25 संख्यावाले कार्डों की गड्डी में से एक कार्ड निकाला गया।	S = {1, 2, 3, 4, ..., 25}	n(S) =
7	अच्छी तरीके से फेंटे हुए ताश की 52 पत्तों की गड्डी में से ताश का एक पत्ता खींचना।	ईंट : इक्का, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, गुलाम, रानी, राजा हुकुम : इक्का, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, गुलाम, रानी, राजा पान : इक्का, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, गुलाम, रानी, राजा चिड़ी : इक्का, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, गुलाम, रानी, राजा	n(S) = 52

इसे ध्यान में रखें

(i) एक सिक्का दो बार उछालना या दो सिक्के एक ही बार उछालना इन दोनों यादृच्छिक प्रयोग में नमूना अवकाश समान होता है। यह तीन सिक्कों के संदर्भ में भी सत्य होता है।

(ii) 'एक पाँसा दो बार फेंकना या दो पाँसे एक ही बार फेंकना' इन दोनों के लिए नमूना अवकाश समान होता है।

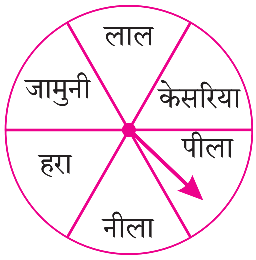
प्रश्नसंग्रह 5.2

1. निम्नलिखित प्रत्येक प्रयोग में, नमूना अवकाश S, तथा उनके नमूना घटकों की संख्या n(S) लिखिए।

(i) एक पाँसा तथा एक सिक्का एक ही समय में फेंकना।

(ii) 2, 3, 5 इन अंकों से अंकों की पुनरावृत्ति न करते हुए दो अंकोंवाली संख्या बनाना।

2. छह रंगोंवाली फिरकी को घुमाने पर उसका तीर कौन-से रंग पर स्थिर होगा देखें ।



MARCH - 2019						
M	T	W	T	F	S	S
				1	2	3
4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17
18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31

3. वर्ष 2019 के मार्च महिने में 5 के गुने में आनेवाली तारीखों का वार मिलना ।(संलग्न कॅलेंडर को देखें ।)

(4) दो लड़के (B_1, B_2) तथा दो लड़कियाँ (G_1, G_2) इनमें से दो लोगों की एक रास्ता सुरक्षा समिति बनाना है । नमूना अवकाश लिखने के लिए निम्नलिखित कृति पूरी कीजिए ।

(1) दो लड़कों की समिति = ☐ (2) दो लड़कियों की समिति = ☐

(3) एक लड़का और एक लड़की लेकर बनने वाली समिति = $B_1 G_1$ ☐ ☐ ☐

(4) $\therefore$ नमूना अवकाश = {..., ..., ..., ..., ..., ...}

आओ जानें

घटना (Event)

विशिष्ट शर्तों को पूरा करने वाले फल को अपेक्षित फल (favourable outcome) कहते हैं ।

नमूना अवकाश दिया गया हो तो अपेक्षित फल के समुच्चय को 'घटना' कहते हैं । घटना यह नमूना अवकाश का उपसमुच्चय होता है ।

घटना को अंग्रेजी के बड़े अक्षरों A, B, C, D..... द्वारा दर्शाते हैं ।

उदा. दो सिक्के एक साथ उछाले गए, माना कि घटना A कम से कम एक पट मिलने की है ।

यहाँ अपेक्षित फल निम्न प्रकार से हैं ।

$$A = \{TT, TH, HT\}$$

घटना A में घटकों की संख्या n(A) से दर्शाई जाती है । यहाँ $n(A) = 3$

अधिक जानकारी के लिए **घटनाओं के प्रकार**

(i) निश्चित घटना (Certain event)

(ii) असंभव घटना (Impossible event)

(iii) एक घटक वाली घटना (Simple event)

(iv) पूरक घटना (Complement of an event)

(v) परस्पर असमावेशी घटना (Mutually exclusive event)

(vi) सर्वसमावेशी (परिपूर्ण) घटना (Exhaustive event)

हल किए गए उदाहरण

उदा. (1) दो सिक्के एक साथ उछाले गए इस प्रयोग के लिए नमूना अवकाश 'S' लिखिए । उनके नमूना घटकों की संख्या n(S) लिखिए । इस प्रयोग से संबंधित निम्नलिखित घटनाओं को समुच्चय के रूप में लिखकर नमूना घटकों की संख्या लिखिए ।

(i) घटना A के लिए शर्त, कम से कम एक 'चित' मिलने की है ।

(ii) घटना B के लिए शर्त, एकही 'चित' मिलने की है ।

(iii) घटना C के लिए शर्त, अधिक-से-अधिक एक 'पट' मिलने की है ।

(iv) घटना D के लिए शर्त, 'चित' न मिलने की है ।

हल : जब दो सिक्के एक साथ उछाले गए तब,

S = {HH, HT, TH, TT}   n(S) = 4

(i) घटना A के लिए शर्त, कम-से-कम एक 'चित' मिलने की है ।

A = {HH, HT, TH}   n(A) = 3

(ii) घटना B के लिए शर्त, एक ही 'चित' मिलने की है ।

B = { HT, TH}   n(B) = 2

(iii) घटना C के लिए शर्त, अधिक-से-अधिक एक 'पट' मिलने की है ।

C = {HH, HT, TH}   n(C) = 3

(iv) घटना D के लिए शर्त, 'चित' न मिलने की है ।

D = {TT}   n(D) = 1

उदा. (2) किसी थैली में 1 से 50 अंक लिखे हुए 50 कार्ड हैं । इनमें से यादृच्छिक पद्धति से कोई भी एक पत्ता (कार्ड) निकाला गया हो तो नमूना अवकाश S लिखिए ।

घटना A, B तथा नमूना घटकों की संख्या लिखिए ।

(i) घटना A के लिए शर्त इस प्रकार है कि, कार्ड पर होने वाली संख्या 6 से विभाज्य है ।

(ii) घटना B के लिए शर्त इस प्रकार है कि, कार्ड पर होने वाली संख्या पूर्ण वर्ग है ।

हल : नमूना अवकाश, S = {1, 2, 3, . . . 49, 50}   n(S) = 50

(i) घटना A के लिए शर्त इस प्रकार है कि, कार्ड पर होने वाली संख्या 6 से विभाज्य है ।

A = {6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48} n(A) = 8

(ii) घटना B के लिए शर्त इस प्रकार है कि कार्ड पर होने वाली संख्या पूर्ण वर्ग है ।

B = {1, 4, 9, 16, 25, 36, 49} n(B) = 7

उदा. (3) 3 लड़के तथा 2 लड़कियों में से दो विद्‌यार्थियों की वृक्ष संवर्धन समिति निम्न शर्तों पर बनानी है । नमूना अवकाश S तथा नमूना घटकों की संख्या लिखिए । इसी प्रकार निम्नलिखित घटना समुच्चय रूप में लिखकर नमूना घटकों की संख्या लिखिए ।

(i) घटना A के लिए शर्त समिति में कम से कम एक लड़की हो ।

(ii) घटना B के लिए शर्त समिति में 1 लड़का तथा 1 लड़की हो ।

(iii) घटना C के लिए शर्त समिति में सिर्फ लड़के ही हों ।

(iv) घटना D के लिए शर्त समिति में अधिक-से-अधिक एक लड़की हो ।

हल : माना B_1, B_2, B_3 यह तीन लड़के तथा G_1, G_1 दो लड़कियाँ हैं ।

दो सभासदों की संवर्धन समिति बनानी है ।

$S = \{B_1B_2, B_1B_3, B_2B_3, B_1G_1, B_1G_2, B_2G_1, B_2G_2, B_3G_1, B_3G_2, G_1G_2\}$ $n(S) = 10$

(i) घटना A के लिए शर्त, समिति में कम से कम एक लड़की हो ।

$A = \{B_1G_1, B_1G_2, B_2G_1, B_2G_2, B_3G_1, B_3G_2, G_1G_2\}$ $n(A) = 7$

(ii) घटना B के लिए शर्त, समिति में 1 लड़का तथा 1 लड़की हो ।

$B = \{B_1G_1, B_1G_2, B_2G_1, B_2G_2, B_3G_1, B_3G_2\}$ $n(B) = 6$

(iii) घटना C के लिए शर्त, समिति में सिर्फ लड़के ही हों ।

$C = \{B_1B_2, B_1B_3, B_2B_3\}$ $n(C) = 3$

(iv) घटना D के लिए शर्त, समिति में अधिक से अधिक एक लड़की हो ।

$D = \{B_1B_2, B_1B_3, B_2B_3, B_1G_1, B_1G_2, B_2G_1, B_2G_2, B_3G_1, B_3G_2\}$ $n(D) = 9$

उदा. (4) दो पाँसे फेंके गए हों तो नमूना अवकाश 'S' तथा नमूना अवकाश के घटकों की संख्या n(S) लिखिए ।

निम्नलिखित शर्त पूरी करने वाली घटना समूह के रूप में लिखकर नमूना घटकों की संख्या लिखिए ।

(i) ऊपरी पृष्ठभाग पर आने वाली संख्याओं का योगफल अभाज्य संख्या है ।

(ii) ऊपरी पृष्ठभाग पर आने वाली संख्याओं का योगफल 5 का गुणज है ।

(iii) ऊपरी पृष्ठभाग पर आने वाली संख्याओं का योगफल 25 है ।

(iv) पहले पाँसे पर मिलने वाली संख्या दूसरे पाँसे पर मिलने वाली संख्या से छोटी है ।

हल : नमूना अवकाश,

$S = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6),$

$(2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6),$

$(3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6),$

$(4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6),$

$(5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6),$

$(6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$ $n(S) = 36$

(i) माना, E यह घटना, ऊपर के पृष्ठभाग पर संख्याओं का योगफल अभाज्य संख्या है ।

$E = \{(1, 1), (1, 2), (1, 4), (1, 6), (2, 1), (2, 3), (2, 5), (3, 2), (3, 4),$
$(4, 1), (4, 3), (5, 2), (5, 6), (6, 1), (6, 5)\}$ $n(E) = 15$

(ii) F यह घटना, पृष्ठभाग पर आने वाली संख्याओं का योगफल 25 के गुणज है ।

$F = \{ (1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1), (4, 6), (5, 5), (6, 4) \}$ $n(F) = 7$

(iii) G यह घटना ऊपर के पृष्ठभाग पर आने वाली संख्याओं का योगफल 25 है ।

$G = \{ \ \} = \phi$ $n(G) = 0$

(iv) H यह घटना पहले पाँसे के पृष्ठभाग पर स्थित संख्या दूसरे पाँसे के पृष्ठभाग पर होने वाली संख्या से कम होने के लिए शर्त है । $H = \{(1, 2) (1, 3) (1, 4) (1, 5) (1, 6) (2, 3) (2, 4) (2, 5) (2, 6)$
$(3, 4) (3, 5) (3, 6) (4, 5) (4, 6) (5, 6)\}$ $n(H) = 15$

प्रश्नसंग्रह 5.3

1. निम्नलिखित प्रत्येक प्रयोग के लिए नमूना अवकाश 'S' उनके नमूना घटकों की संख्या n(S), समुच्चय की सहायता से घटनाएँ A, B, C और n(A), n(B) और n(C) लिखिए ।

(1) एक पाँसा उछालने पर,

घटना A के लिए शर्त, ऊपरी पृष्ठभाग पर आने वाली संख्या सम है ।

घटना B के लिए शर्त, ऊपरी पृष्ठभाग पर आने वाली संख्या विषम है ।

घटना C के लिए शर्त, ऊपरी पृष्ठभाग पर आने वाली संख्या अभाज्य है ।

(2) दो पाँसे फेकने पर,

घटना A के लिए शर्त, ऊपरी पृष्ठभागों पर स्थित संख्याओं का योगफल 6 का गुणज है ।

घटना B के लिए शर्त, ऊपरी पृष्ठों पर आने वाली संख्याओं का योगफल कम से कम 10 है ।

घटना C के लिए शर्त, दोनों ऊपरी पृष्ठभागों पर आने वाली संख्या समान है ।

(3) तीन सिक्कों को एक साथ उछालने पर,

घटना A के लिए शर्त, कम से कम दो 'चित' प्राप्त हो इस प्रकार है ।

घटना B के लिए शर्त, 'चित' प्राप्त न हो, इस प्रकार है ।

घटना C के लिए शर्त, दूसरे सिक्के पर 'चित' प्राप्त हो, इस प्रकार है ।

(4) अंको की पुनरावृत्ति न करते हुए अंक 0, 1, 2, 3, 4, 5 की सहायता से दो अंकोंवाली संख्याएँ तैयार की गई हैं।

घटना A के लिए शर्त इसप्रकार है कि, वे संख्याएँ सम संख्या हो ।

घटना B के लिए शर्त इसप्रकार है कि, संख्या 3 से विभाजित है ।

घटना C के लिए शर्त इसप्रकार है कि, संख्या 50 से बड़ी है ।

(5) तीन पुरुष तथा दो स्त्रियों में से दो लोगों की 'पर्यावरण समिति' बनाना है ।

घटना A के लिए शर्त इसप्रकार है कि, उसमें कम-से-कम एक स्त्री समाविष्ट हो ।

घटना B के लिए शर्त इसप्रकार है कि, समिति में एक पुरुष तथा एक स्त्री समाविष्ट हो ।

घटना C के लिए शर्त इसप्रकार है कि, समिति में स्त्री समाविष्ट नहीं हो ।

(6) एक सिक्का तथा एक पाँसा एक साथ उछाला गया ।

घटना A के लिए शर्त इसप्रकार है कि, 'चित' तथा विषम संख्या मिले ।

घटना B के लिए शर्त इसप्रकार है कि, H या T प्राप्त हो और संख्या सम संख्या हो ।

घटना C के लिए शर्त इसप्रकार है कि, पाँसे पर 7 से बड़ी संख्या हो तथा सिक्के पर 'पट' मिले ।

आओ जानें

घटना की संभाव्यता (Probability of an event)

एक सरल प्रयोग पर विचार कीजिए । एक थैली में समान आकार की चार गेंदें हैं । उनमें से तीन गेंदें सफेद तथा चौथी गेंद काले रंग की है । आँखें बंद कर थैली में से एक गेंद निकालनी है, निकाली गई गेंद सफेद रंग की होने की संभावना अधिक है, यह आसानी से समझा जा सकता है ।

गणितीय भाषा में किसी एक अपेक्षित घटना की संभावना दर्शाने वाली संख्या को ही संभाव्यता कहा जाता है । इसे दिए गए सूत्र का उपयोग कर संख्या में या प्रतिशत में दर्शाते हैं ।

किसी यादृच्छिक प्रयोग के लिए नमूना अवकाश S हो और A प्रयोग संबंधी अपेक्षित घटना हो तब उस घटना A की संभाव्यता 'P(A)' इस प्रकार दर्शाते हैं तथा निम्न सूत्रों से निश्चित करते हैं ।

$$P(A) = \frac{\text{घटना 'A' के नमूना घटकों की संख्या}}{\text{नमूना अवकाश के कुल घटकों की संख्या}} = \frac{n(A)}{n(S)}$$

ऊपर्युक्त प्रयोग में ‘निकाली गई गेंद सफेद हो’ यह घटना A है। तो n(A) = 3 क्योंकि सफेद गेंदें तीन है और कुल गेंद चार हैं अर्थात n(S) = 4

निकाली गई गेंद सफेद हो इसकी संभाव्यता $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(S)} = \dfrac{3}{4}$

इसी प्रकार ‘निकाली गई गेंद काली हो’ यह घटना B हो तो, n(B) = 1 $\therefore P(B) = \dfrac{n(B)}{n(S)} = \dfrac{1}{4}$

हल किए गए उदाहरण

उदा. (1) एक सिक्का उछालने पर निम्नलिखित घटना की संभाव्यता ज्ञात कीजिए।

(i) चित मिलना (ii) पट मिलना

हल : माना नमूना अवकाश ‘S’ है।

$S = \{H, T\} \quad \therefore n(S) = 2$

(i) माना घटना A के लिए शर्त ऊपरी पृष्ठभाग पर चित मिलने की है।

$A = \{H\} \qquad n(A) = 1$

$P(A) = \dfrac{n(A)}{n(S)} \qquad P(A) = \dfrac{1}{2}$

(ii) माना घटना B के लिए शर्त ऊपरी पृष्ठभाग पर पट मिलने की है।

$B = \{T\} \qquad n(B) = 1$

$P(B) = \dfrac{n(B)}{n(S)} \qquad P(B) = \dfrac{1}{2}$

उदा. (2) एक पाँसा फेकने पर निम्नलिखित प्रत्येक शर्त पूर्ण करने वाली घटनाओं की संभाव्यता ज्ञात कीजिए।

(i) ऊपरी पृष्ठभाग पर अभाज्य संख्या मिलना। (ii) ऊपरी पृष्ठभाग पर सम संख्या मिलना।

हल : माना नमूना अवकाश ‘S’ है।

$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \qquad n(S) = 6$

(i) घटना A : ऊपरी पृष्ठभाग पर अभाज्य संख्या मिलना।

$A = \{2, 3, 5\} \qquad n(A) = 3$

$P(A) = \dfrac{n(A)}{n(S)}$

$P(A) = \dfrac{3}{6} \quad P(A) = \dfrac{1}{2}$

(ii) घटना B : ऊपरी पृष्ठभाग पर सम संख्या मिलना ।

$B = \{2, 4, 6\}$ $n(B) = 3$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)}$$

$$P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

उदा. (3) अच्छी तरह से फेंटी गई 52 पत्तों की गड्डी में से एक पत्ता निकाला गया हो तो निम्नलिखित घटनाओं की संभाव्यता ज्ञात कीजिए ।

(i) लाल पत्ता होने की (ii) वह पत्ता चित्रयुक्त होने की, संभाव्यता ज्ञात कीजिए ।

हल : माना, नमूना अवकाश 'S' है । $\therefore n(S) = 52$

(i) घटना A : निकाला गया पत्ता लाल होने की संभावना –

कुल लाल पत्ते = 13 ईंट के पत्ते + 13 पान के पत्ते

$n(A) = 26$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{26}{52} = \frac{1}{2}$$

(ii) घटना B : निकाला गया पत्ता चित्रयुक्त होने की संभावना –

गुलाम, रानी तथा राजा चित्रयुक्त पत्ते हैं । कुल चित्रयुक्त पत्ते 12 हैं $\therefore n(B) = 12$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{12}{52} = \frac{3}{13}$$

उदा. (4) एक डिब्बे में 5 स्ट्रॉबेरी, 6 कॉफी तथा 2 पिपरमिंट के चॉकलेट हैं । उस डिब्बे में से एक चॉकलेट निकालने पर (i) निकाली गई चॉकलेट कॉफी होने की संभावना (ii) निकाली गई चॉकलेट पिपरमिंट होने की संभावना ज्ञात कीजिए ।

हल : माना नमूना अवकाश 'S' है । $\therefore n(S) = 5 + 6 + 2 = 13$

घटना A : निकाली गई चॉकलेट कॉफी की होने की संभावना

$n(A) = 6$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

$$P(A) = \frac{6}{13}$$

घटना B : निकाली गई चॉकलेट पिपरमिंट की होने की संभावना

$n(B) = 2$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)}$$

$$P(B) = \frac{2}{13}$$

इसे ध्यान में रखें

- संभाव्यता बताते समय या लिखते समय अपूर्णांक का या प्रतिशत का उपयोग किया जाता है ।
- किसी घटना की संभाव्यता 0 से 1 या 0% से 100% होती है ।

  माना घटना E हो तो $0 \leq P(E) \leq 1$ या $0\ \% \leq P(E) \leq 100\ \%$ उदा. $\frac{1}{4}$ यह संभाव्यता 25 % ऐसा लिखते है ।
- प्रकरण के आरंभ में कक्षा के विद्यार्थियों को वनस्पतियों के नाम की पर्ची निकालने को कहा गया था । उस समय तुलसी नाम की पर्ची विद्यार्थियों को मिलने की संभावना पर विचार किया गया । एक ही पर्ची पर तुलसी यह नाम है । यदि 40 विद्यार्थी द्वारा प्रत्येक एक पर्ची निकाली गई होती तो प्रत्येक को तुलसी इस नाम की पर्ची मिलने की संभाव्यता $\frac{1}{40}$ होती । पहले या बीच में कोई भी विद्यार्थी या अंत में पर्ची निकालने वाले को वह पर्ची मिलने की संभाव्यता उतनी ही होगी ।

प्रश्नसंग्रह 5.4

1. दो सिक्के को उछालने पर निम्नलिखित घटनाओं की संभाव्यता ज्ञात कीजिए ।

   (i) कम-से-कम एक चित मिलना । (ii) एक भी चित न मिलना ।

2. दो पाँसे एक ही समय फेंकने पर निम्नलिखित घटनाओं की संभाव्यता ज्ञात कीजिए ।

   (i) पृष्ठभागों पर आने वाली संख्याओं का योगफल कम-से-कम 10 है ।

   (ii) पृष्ठभागों पर आने वाली संख्याओं का योगफल 33 है ।

   (iii) पहले पाँसे के ऊपरी पृष्ठभाग पर आने वाली संख्या दूसरे पाँसे की ऊपरी पृष्ठभाग पर आनेवाली संख्या से बड़ी हो ।

3. एक बक्से में 15 टिकट हैं । प्रत्येक टिकट पर 1 से 15 में से एक संख्या लिखी गई है । उस बक्से में एक टिकट यादृच्छिक पद्धति से निकाली गई हो तो टिकट पर की संख्या –

   (i) सम संख्या हो (ii) संख्या 5 की गुणज हो । इन घटनाओं की संभाव्यता ज्ञात कीजिए ।

4. अंकों की पुनरावृत्ति न करते हुए 2, 3, 5, 7, 9 अंकों से दो अंकों वाली संख्या बनायी गई हो तो निम्नलिखित घटनाओं की संभाव्यता ज्ञात कीजिए ।

   (i) वह संख्या विषम हो । (ii) वह संख्याएँ 5 की गुणज हो ।

5. अच्छी तरह से फेंटी गई 52 पत्तों में से एक पता निकाला गया तो निम्नलिखित घटनाओं की संभाव्यता ज्ञात कीजिए ।

   (i) इक्का मिलना (ii) हुकुम का पता मिलना ।

प्रकीर्ण प्रश्नसंग्रह – 5

1. नीचे दिए गए बहु वैकल्पिक प्रश्नों के उत्तरो में से सही विकल्प चुनिए ।

(1) निम्नलिखित विकल्प में से कौन–सी संभाव्यता नहीं हो सकती ?

(A) $\frac{2}{3}$ (B) 1.5 (C) 15 % D) 0.7

(2) एक पाँसा फेकने पर ऊपरी पृष्ठभाग पर 3 से कम संख्या आने की संभाव्यता . . . होती है ।

(A) $\frac{1}{6}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{2}$ D) 0

(3) 1 से 100 में से चुनी गई संख्या के अभाज्य संख्या होने की संभाव्यता . . . होगी ।

(A) $\frac{1}{5}$ (B) $\frac{6}{25}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) $\frac{13}{50}$

(4) प्रत्येक कार्ड पर एक संख्या इस प्रकार 1 से 40 यह संख्या लिखी गई है । 40 कार्ड थैली में हैं । इनमे से एक कार्ड निकाला गया उस कार्ड की संख्या 5 के गुणज में रहने की संभाव्यता . . . होगी ।

(A) $\frac{1}{5}$ (B) $\frac{3}{5}$ (C) $\frac{4}{5}$ (D) $\frac{1}{3}$

(5) यदि $n(A) = 2$, $P(A) = \frac{1}{5}$ तब $n(s) = ?$

(A) 10 (B) $\frac{5}{2}$ (C) $\frac{2}{5}$ (D) $\frac{1}{3}$

2. बास्केटबाल के खिलाड़ी जॉन, वासिम और आकाश एक निश्चित जगह बास्केटबाल डालने का अभ्यास कर रहे थे । बास्केटबाल डालने की जॉन की संभाव्यता $\frac{4}{5}$, वसिम की 0.83 तथा आकाश की 58% है । किसकी संभाव्यता अधिक है ?

3. एक हॉकी टीम में 6 बचाव करने वाले 4 आक्रमक तथा एक गोलरक्षक ऐसे खिलाड़ी हैं । यादृच्छिक पद्धति से इनमें से एक खिलाड़ी का कप्तान के रूप में चुनाव करना है । तो निम्नलिखित घटनाओं की संभाव्यता ज्ञात कीजिए ।

(i) गोलरक्षक का कप्तान होना (ii) बचाव करने वाले खिलाड़ी का कप्तान होना

4. जोसेफ ने एक थैली में प्रत्येक कार्ड पर अंग्रेजी वर्णमाला का एक अक्षर इस प्रकार कुल 26 अक्षरों के कार्ड रखे हैं । उनमें से अक्षरों का एक कार्ड यादृच्छिक पद्धति से निकालना हो तो निकाले गए कार्ड का स्वर होने की संभाव्यता ज्ञात कीजिए ।

5. एक गुब्बारेवाले के पास 2 लाल, 3 नीला और 4 हरा ऐसे रंगीन गुब्बारों में से एक गुब्बारे को यादृच्छिक पद्धति से देना है तो निम्न घटनाओं की संभाव्यता ज्ञात कीजिए ।

(i) प्राप्त गुब्बारे का लाल होना

(ii) प्राप्त गुब्बारे का नीला होना

(iii) प्राप्त गुब्बारे का हरा होना

6. एक बक्से में 5 लाल पेन, 8 नीली पेन और 3 हरी पेन है । यादृच्छिक पद्धति से ऋतुजा को एक पेन निकालना है। तो उस पेन के नीला होने की संभाव्यता ज्ञात कीजिए ।

7. एक पाँसे के छह पृष्ठभाग निम्न प्रकार से हैं ।

A	B	C	D	E	A

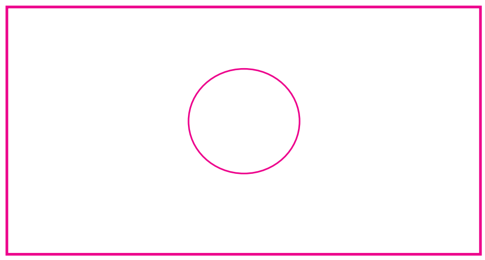
यह पाँसा एक बार फेंकने पर दी गई घटनाओं की संभाव्यता ज्ञात कीजिए ।

(i) ऊपरी पृष्ठभाग पर 'A' मिलना । (ii) ऊपरी पृष्ठभाग पर 'D' मिलना ।

8. किसी बक्से में 30 टिकट हैं । प्रत्येक टिकट पर 1 से 30 में से एक ही संख्या लिखी गई है । इसमें से कोई एक टिकट यादृच्छिक पद्धति से निकाला गया तो निम्न घटनाओं की संभाव्यता ज्ञात कीजिए ।

(i) टिकट पर विषम संख्या मिलने पर । (ii) टिकट पर पूर्ण वर्गसंख्या मिलने पर ।

9. किसी बगीचे की लंबाई तथा चौड़ाई क्रमश: 77 मी. तथा 50 मी. है । बगीचे में 14 मी. व्यास वाला तालाब है । बगीचे के पास की इमारत की छत पर सुखाने के लिए रखा गया तौलिया हवा से उड़कर बगीचे में गिरा । तो उसके बगीचे के तालाब में गिरने की संभावना ज्ञात कीजिए ।



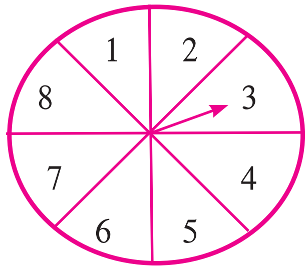
10. संयोग के खेल में 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 में से किसी एक अंक पर तीर स्थिर होता है और यह समसंभाव्यता का फल है । तो निम्न घटनाओं की संभाव्यता ज्ञात कीजिए ।

(1) वह तीर 8 अंक पर स्थिर होगा ।

(2) वह तीर विषम अंक पर स्थिर होगा ।

(3) तीर से दर्शाई गई संख्या 2 से बड़ी होगी ।

(4) तीर से दर्शाई गई संख्या 9 से छोटी होगी ।



11. प्रत्येक कार्डपर एक इस प्रकार से 0 से 5 यह पूर्णांक संख्याएँ लिखकर बने छह कार्ड बक्से में रखे गए हैं । निम्नलिखित प्रत्येक घटनाओं की संभाव्यता ज्ञात कीजिए ।

(i) निकाले गए कार्ड की संख्या प्राकृत संख्या हो ।

(ii) निकाले गए कार्ड की संख्या 1 से छोटी हो ।

(iii) निकाले गए कार्ड की संख्या पूर्ण संख्या हो ।

(iv) निकाले गए कार्ड की संख्या 5 से बड़ी हो ।

12. किसी बैग में तीन लाल, तीन सफेद, तथा तीन हरी गेंदें हैं । बैग में से यादृच्छिक पद्धति से एक गेंद निकाली गई हो । तो निम्नलिखित प्रत्येक घटना की संभाव्यता ज्ञात कीजिए ।

(i) निकाली गई गेंद का लाल होना । (ii) निकाली गई गेंद लाल रंग की न होना ।

(iii) निकाली गई गेंद का लाल या सफेद होना ।

13. प्रत्येक कार्डपर एक इस प्रकार 'mathematics' शब्द के अक्षरों को लिखकर वह कार्ड टेबल पर उलटकर रखा गया । इनमें से एक अक्षर उठाने पर उस अक्षर के 'm' होने की संभाव्यता ज्ञात कीजिए ।

14. किसी विद्यालय के 200 विद्यार्थियों में से 135 विद्यार्थी कबड्डी का खेल पसंद करते हैं तथा अन्य को यह खेल पसंद नहीं है । सभी विद्यार्थियों में से 1 विद्यार्थी को चुना गया तो उसके कबड्डी खेल पसंद न करने की संभाव्यता ज्ञात कीजिए ।

★15. 0, 1, 2, 3, 4 इन अंकों की सहायता से दो अंकोंवाली संख्या बनानी है । अंकों की पुनरावृत्ति की जा सकती हो तो निम्न घटनाओं की संभाव्यता ज्ञात कीजिए ।

(i) वह संख्या अभाज्य संख्या होगी । (ii) वह संख्या 4 की गुणज होगी

(iii) वह संख्या 11 की गुणज होगी ।

★16. किसी पाँसे के पृष्ठभाग पर 0, 1, 2, 3, 4, 5 यह अंक हैं । इस पाँसे को दो बार फेंकने पर ऊपरी पृष्ठभाग पर मिलने वाले अंकों का गुणनफल शून्य होने की संभाव्यता ज्ञात करें ।

17. निम्नलिखित कृति पूर्ण कीजिए ।

कृति I : आपके कक्षा में विद्यार्थियों की कुल संख्या n(S) = ☐

कक्षा में चश्मा लगाने वाले विद्यार्थियों की संख्या n(A) = ☐

सभी विद्यार्थियों में से चश्मा लगाने वाले एक विद्यार्थी के यादृच्छिक पद्धति से चुने जाने की संभावना

P(B) = ☐

कृति II : नमूना अवकाश स्वयं निश्चित करके निम्नलिखित चौखट भरें ।

नमूना अवकाश → S = {   } → n(S) = ☐

घटना A के लिए शर्त है कि संख्या 'सम' हो । → A = {   } → n(A) = ☐

$$P(A) = \frac{\square}{\square} = \square$$

6 सांख्यिकी

आओ सीखें

- **केंद्रीय प्रवृत्ति का मापन – वर्गीकृत बारंबारता सारिणी के लिए माध्य, माध्यिका, बहुलक।**
- **सांख्यिकीय आँकडों का आलेख द्‌वारा प्रस्तुतीकरण – स्तंभालेख, बारंबारता बहुभुज, वृत्तालेख।**

मानव जीवन में सांख्यिकी अनेक क्षेत्रों में उपयोगी होता है; जैसे कृषि, विज्ञान, अर्थशास्त्र, वाणिज्य, औषधि विज्ञान, वनस्पति, जैविक तंत्रज्ञान, भौतिक विज्ञान, रसायन विज्ञान, शिक्षा विज्ञान, समाज विज्ञान व्यवस्थापन आदि । किसी प्रयोग के पश्चात् मिलने वाले परिणामों की अनेक संभावनाएँ होती हैं – जब इन संभावनाओं की जांच करनी होती है तो बडे पैमाने पर प्रयोग कर के सभी परिणामों को दर्ज किया जाता है । इन दर्ज मुद्‌दों का उपयोग कर विभिन्न परिणामों की संभाव्यता की जाँच की जा सकती है । इसके लिए संख्याशास्त्र अर्थात सांख्यिकी में नियम बनाए गए हैं ।

फ्रान्सिस गाल्टन (1822-1911) इस ब्रिटिश गणितज्ञ ने संख्याशास्त्र में मूलभूत कार्य किए हैं । वे प्रश्नावली बनाकर अनेक व्यक्तियों में वितरित कर उसे भरकर देने का आग्रह करते थे । इस विधि से अधिकांश व्यक्तियों की जानकारी एकत्र कर उनकी पृष्ठभूमि, आर्थिक स्थिति, पसंद-नापसंद, स्वास्थ्य आदि को बड़े पैमाने पर दर्ज करते थे । भिन्न-भिन्न व्यक्तियों के अँगुलियों के निशान भिन्न होते हैं, इसकी जानकारी प्राप्त हो चुकी थी । गाल्टन ने अनेक व्यक्तियों के अँगुलियों के निशानों की जाँच कर उसके वर्गीकरण की पद्‌धति निश्चित किया है । संख्याशास्त्र का उपयोग कर उन्होंने दिखाया कि दो भिन्न व्यक्तियों की अँगुलियों के निशान समान रहने की संभावना लगभग शून्य होती है । इसलिए अँगुलियों के निशान से किसी व्यक्ति की पहचान करना संभव हुआ है । प्राणियों तथा मानव के अनुवांशिक विज्ञान में उन्होंने अधिक कार्य किया है ।

थोड़ा याद करें

सर्वेक्षण से प्राप्त सांख्यिकी आँकड़ों में सामान्यत: एक गुणधर्म प्राप्त होता है, अर्थात सभी प्राप्तांकों का किसी विशिष्ट प्राप्तांक या उसके आसपास केंद्रित होने की प्रवृत्ति । यह विशिष्ट प्राप्तांक उस समूह की प्रतिनिधि संख्या होती है । इस संख्या को 'केंद्रीय प्रवृत्ति का मान' कहते हैं ।

हमने अवर्गीकृत सारिणी के लिए माध्य (Mean), माध्यिका (Median) तथा बहुलक (Mode) का अध्ययन पहले भी किया है ।

प्रयोग 1 : अपनी कक्षा के सभी लड़कों की ऊँचाई मापकर सेमी में लिखिए । इससे यह स्पष्ट होता है कि अनेक लड़कों की ऊँचाई किसी विशिष्ट संख्या के इर्दगिर्द या उसके आसपास केंद्रित होती है ।

प्रयोग 2 : पीपल के पेड़ के नीचे गिरे पत्तों को एकत्रित कीजिए । प्रत्येक विद्यार्थी को एक-एक पत्ता दीजिए । अपने-अपने पत्तों की लंबाई डंठल से सिरे तक माप कर लिखने के लिए कहिए । सभी निरीक्षण (प्राप्तांक) दर्ज करने पर यह ध्यान में आता है कि सभी प्राप्तांक किसी विशेष संख्या के इर्दगिर्द ही केंद्रित हैं ।

अब हम सांख्यिकीय सामग्री (आँकड़ों) का केंद्रीय प्रवृत्ति के मापन का 'माध्य' (Mean), 'माध्यिका' (Median) तथा 'बहुलक' (Mode) का अधिक अध्ययन करने वाले हैं । इसके लिए उनकी परिभाषा और चिह्न की जानकारी प्राप्त करेंगे ।

$$\text{सांख्यिकी सामग्री का माध्य} = \frac{\text{सभी प्राप्तांकों का योगफल}}{\text{कुल प्राप्तांक}} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N}$$ (यहाँ x_i यह i वाँ प्राप्तांक है ।)

माध्य को $\overline{X}$ से दर्शाया जाता है और दी गई सामग्री (आँकड़ों) का औसत दर्शाता है ।

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N}$$

आओ जानें

वर्गीकृत बारंबारता सारिणी से माध्य (Mean from group frequency distribution)

जब प्राप्तांकों की संख्या अधिक होती है तब ऊपरोक्त सूत्र में सभी संख्याएँ लिखकर जोड़ना आसान नहीं होता है इसलिए हम कुछ अन्य विधि का उपयोग करते हैं ।

कभी-कभी बड़े पैमाने पर किए गए प्रयोग की सामग्री वर्गीकृत सारिणी में दी गई होती है । ऐसे समय सांख्यिकीय जानकारी की जाँच करने के लिए संख्याओं का सही माध्य नहीं निकाल सकते, इसलिए उसके लगभग (आसपास) की संख्या ज्ञात करने के लिए या अनुमानित माध्य ज्ञात करने की विधि का अभ्यास करेंगे ।

प्रत्यक्ष पद्धति (Direct Method)

अब हम वर्गीकृत सांख्यिकीय जानकारी का माध्य ज्ञात करने की विधि का अध्ययन उदाहरण के माध्यम से करेंगे ।

उदा.(1) नीचे दी गई सारिणी में एक कार्य को पूर्ण करने के लिए प्रत्येक मजदूर को लगने वाले समय का बारंबारता वितरण दिया गया है । इस आधार पर किसी मजदूर को यह कार्य पूर्ण करने में लगने वाले समय का माध्य ज्ञात कीजिए ।

प्रत्येक कार्य पूर्ण करने में लगने वाला समय (घंटों में)	15-19	20-24	25-29	30-34	35-39
मजदूरों की संख्या	10	15	12	8	5

हल :

सोपान- (1) सारणी में दर्शाएनुसार खड़े स्तंभ लिया ।

(2) पहले स्तंभ में वर्ग लिखे हैं ।

(3) दूसरे स्तंभ में वर्ग मध्य x_i लिखा है ।

(4) तीसरे स्तंभ में उस वर्ग में मजदूरों की बारंबारता (f_i) लिखी है ।

(5) चौथे स्तंभ में प्रत्येक वर्ग के लिए $(x_i \times f_i)$ गुणनफल लिखा है ।

(6) बाद में $\sum_{i=1}^{N} x_i f_i$ लिखिए ।

(7) सूत्र का उपयोग कर माध्य ज्ञात कीजिए ।

वर्ग (समय घंटो में)	वर्ग मध्य x_i	मजदूरों की संख्या f_i	$x_i f_i$
15-19	17	10	170
20-24	22	15	330
25-29	27	12	324
30-34	32	8	256
35-39	37	5	185
कुल		$\sum f_i = 50$	$\sum x_i f_i = 1265$

$$\text{माध्य} = \overline{X} = \frac{\sum x_i f_i}{N} = \frac{1265}{50} = 25.3 \quad \because \sum f_i = N$$

प्रत्येक मजदूर को कार्य पूर्ण करने में लगने वाले समय का माध्य = 25.3 घंटे (अनुमानित)

हल किए गए उदाहरण

उदा. (2) दी गई सारिणी में 50 विद्यार्थियों का जाँच परीक्षा में प्राप्त अंकों का प्रतिशत दिया गया है इसके आधार पर अंकों के प्रतिशत का माध्य ज्ञात कीजिए ।

अंकों का प्रतिशत	0-20	20-40	40-60	60-80	80-100
विद्यार्थी संख्या	3	7	15	20	5

हल : सोपान के अनुसार निम्नलिखित सारिणी बनाया ।

वर्ग अंको का प्रतिशत	वर्ग मध्य x_i	बारंबारता (विद्यार्थियों की संख्या) f_i	वर्ग मध्य × बारंबारता $x_i f_i$
0-20	10	3	30
20-40	30	7	210
40-60	50	15	750
60-80	70	20	1400
80-100	90	5	450
कुल		$N = \sum f_i = 50$	$\sum x_i f_i = 2840$

$$\overline{X} = \frac{\sum x_i f_i}{\sum f_i} = \frac{2840}{50}$$

$$= 56.8$$

$\therefore$ अंको का प्रतिशत माध्य = 56.8

उदा. (3) पिछले वर्ष गर्मियों में महाराष्ट्र के 30 विभिन्न शहरों के एक दिन का अधिकतम तापमान °C में सारिणी में दिया गया है, इस आधार पर अधिकतम तापमान का माध्य ज्ञात कीजिए ।

उच्चतम तापमान	24-28	28-32	32-36	36-40	40-44
शहरों की संख्या	4	5	7	8	6

हल :

वर्ग तापमान °C	वर्ग मध्य x_i	शहरों की संख्या f_i	वर्ग मध्य × बारंबारता $x_i f_i$
24-28	26	4	104
28-32	30	5	150
32-36	34	7	238
36-40	38	8	304
40-44	42	6	252
कुल		$\sum f_i = 30$	$\sum x_i f_i = 1048$

माध्य = $\overline{X} = \dfrac{\sum x_i f_i}{\sum f_i} = \dfrac{1048}{30} = 34.93\ ^\circ C$

अनुमानित माध्य पद्धति (Assumed Mean Method)

हल किए गए ऊपरोक्त उदाहरण से हमें ध्यान आता है कि कभी-कभी $x_i\ f_i$ का गुणनफल बहुत बड़ी संख्या होती है । इससे प्रत्यक्ष पद्धति से माध्य ज्ञात करना आसान नहीं होता । इसके लिए हम एक और पद्धति 'अनुमानित माध्य पद्धति' को समझ लेंगे । इस पद्धति से माध्य ज्ञात करते समय छोटी संख्याओ का योग तथा भाग करने मे सुविधाजनक होता है ।

उदाहरण : 40, 42, 43, 45, 47, 48 यह प्राप्तांक हैं । इनका माध्य ज्ञात करना है ।

इस उदाहरण में संख्याओं का निरीक्षण करने पर हमें यह ध्यान में आता है कि इस सामग्री का माध्य 40 से अधिक है इसलिए 40 को माध्य मानेंगे । यह अनुमानित माध्य है । 40-40 = 0, 42 - 40 = 2, 43-40 = 3, 45-40 = 5, 47 - 40 = 7, 48 - 40 = 8 यह अंतर है । इसे विचलन कहते हैं । इसका माध्य ज्ञात करेंगे । माने गए अनुमानित माध्य 40 में मिलाने पर हमें सामग्री का वास्तविक माध्य प्राप्त होता है ।

अर्थात, माध्य = अनुमानित माध्य + अनुमानित माध्य से विचलन का माध्य

$$\overline{X} = 40 + \left(\frac{0+2+3+5+7+8}{6}\right) = 40 + \frac{25}{6} = 40 + 4\frac{1}{6} = 44\frac{1}{6}$$

अनुमानित माध्य के लिए A अनुमानित माध्य से विचलन के लिए d और विचलन के माध्य के लिए $\overline{d}$ चिह्न मानने पर $\overline{X} = A + \overline{d}$ सूत्र प्राप्त होता है ।

इसी उदाहरण को हम अनुमानित माध्य 43 लेकर देखें । प्रत्येक प्राप्तांक से 43 घटाने पर प्राप्त अंतर अर्थात माध्य से विचलन प्राप्त करें ।

$40 - 43 = -3,\ 42 - 43 = -1,\ 43 - 43 = 0,\ 45 - 43 = 2,\ 47 - 43 = 4,\ 48 - 43 = 5$

अनुमानित माध्य से विचलन को जोड़ने पर $= -3 -1 + 0 + 2 + 4 + 5 = 7$

अब $\overline{X} = A + \overline{d}$

$= 43 + \left(\frac{7}{6}\right)$ (यहाँ कुल विचलन 6 है ।)

$= 43 + 1\frac{1}{6}$

$= 44\frac{1}{6}$

हमें ध्यान में आता है कि, इस प्रकार अनुमानित माध्य का उपयोग कर उदाहरण हल करने से गणितीय संक्रियाएँ कम करनी पड़ती हैं । इसी प्रकार प्राप्तांको में से या सुविधाजनक अन्य किसी भी संख्या को माध्य मानने पर सामग्री का माध्य नहीं बदलता है ।

अब हम दी गई बारंबारता सारिणी के लिए इस पद्धति का उपयोग करने हेतु, इसके एक उदाहरण का अध्ययन करेंगे ।

उदा. 100 सब्जी विक्रेताओं की दैनिक बिक्री की बारंबारता सारिणी नीचे दी गई है । अनुमानित माध्य पद्धति से दैनिक बिक्री का माध्य ज्ञात कीजिए ।

दैनिक बिक्री रूपये	1000−1500	1500−2000	2000−2500	2500−3000
विक्रेताओं की संख्या	15	20	35	30

हल : अनुमानित माध्य A = 2250, $d_i = x_i - A$ यह विचलन है ।

वर्ग दैनिक बिक्री (रुपयों में)	वर्ग मध्य x_i	$d_i = x_i - A$ $= x_i - 2250$	विक्रेताओं की संख्या f_i	बारंबारता × विचलन $f_i d_i$
1000−1500	1250	−1000	15	−15000
1500−2000	1750	−500	20	−10000
2000−2500	2250→A	0	35	0
2500−3000	2750	500	30	15000
कुल			$N = \sum f_i = 100$	$\sum f_i d_i = -10000$

सोपान का उपयोग कर सारिणी बनाइए ।

(1) अनुमानितमाध्य A = 2250 लिया गया । (साधारणत: सारिणी में सर्वाधिक बारंबारता वाले वर्ग मध्य को अनुमानित माध्य मानते हैं ।

(2) पहले स्तंभ में बिक्री का वर्ग लिखा है ।

(3) दूसरे स्तंभ में वर्ग मध्य लिखा ।

(4) तीसरे स्तंभ में $d_i = x_i - A = x_i - 2250$ का मान लिखा है ।

(5) चौथे स्तंभ में प्रत्येक वर्ग के विक्रेताओं की संख्या लिखीं तथा योग $\sum f_i$ लिखा है ।

(6) पाँचवें स्तंभ में $(f_i \times d_i)$ का गुणा करके उसका योग $\sum f_i d_i$ किया है ।

(7) सूत्र का उपयोग करके $\overline{d}$ तथा $\overline{X}$ ज्ञात किया है ।

$\overline{d} = \frac{\sum f_i d_i}{\sum f_i} = -\frac{10000}{100} = -100$ $\therefore$ माध्य $\overline{X} = A + \overline{d} = 2250 - 100 = 2150$

दैनिक बिक्री का माध्य = 2150 रुपये है ।

कृति : इस उदाहरण को प्रत्यक्ष पद्धति से हल कीजिए ।

हल किए गए उदाहरण

उदा. (1) निम्नलिखित सारिणीं में एक व्यापारी के पास कार्यरत 50 कर्मचारियों के दैनिक वेतन का बारंबारता बंटन दिया गया है इस आधार पर एक कर्मचारी के दैनिक वेतन का माध्य, अनुमानित माध्य पद्धति से ज्ञात कीजिए ।

प्रत्येक कर्मचारी का दैनिक वेतन (रुपयों में)	200-240	240-280	280-320	320-360	360-400
कर्मचारियों की संख्या (बारंबारता)	5	10	15	12	8

हल : माना, अनुमानित माध्य A = 300

वर्ग (वेतन रुपयों में)	वर्ग मध्य x_i	$d_i = x_i - A$ $d_i = x_i - 300$	बारंबारता कर्मचारियों की संख्या f_i	बारंबारता × विचलन $f_i d_i$
200-240	220	-80	5	-400
240-280	260	-40	10	-400
280-320	300→A	0	15	0
320-360	340	40	12	480
360-400	380	80	8	640
कुल			$\sum f_i = 50$	$\sum f_i d_i = 320$

$$\bar{d} = \frac{\sum f_i d_i}{\sum f_i} = \frac{320}{50} = 6.4$$

माध्य $\overline{X} = A + \bar{d}$

$= 300 + 6.4$

$= 306.40$

कर्मचारियों के दैनिक वेतन का माध्य = 306.40 रुपये है ।

सोपान विचलन पद्धति (Step deviation method)

हमने माध्य ज्ञात करने के लिए प्रत्यक्ष पद्धति तथा अनुमानित माध्य पद्धति का अध्ययन किया है और अधिक सरलता से माध्य ज्ञात करने के लिए एक अन्य पद्धति का अध्ययन उदाहरण के माध्यम से करेंगे ।

- सर्व प्रथम A अनुमानित माध्य को d_i से घटाकर स्तंभ बनाएँ ।
- सभी d_i का मसावि g आसानी से मिलता है तो $u_i = \frac{d_i}{g}$ का स्तंभ बनाएँ ।
- सभी u_i संख्याओं का माध्य $\bar{u}$ ज्ञात कीजिए ।
- $\overline{X} = A + \bar{u}g$ इस सूत्र की सहायता से माध्य ज्ञात कीजिए ।

नमूना उदाहरण –

100 परिवारों द्वारा स्वास्थ बीमा के लिए निवेश की वार्षिक राशि दी गई है । सोपान विचलन पद्धति से परिवारों की वार्षिक निवेश राशि का माध्य ज्ञात कीजिए ।

प्रत्येक परिवारों की बीमा राशि (रुपयों में)	800-1200	1200-1600	1600-2000	2000-2400	2400-2800	2800-3000
परिवारों की संख्या	3	15	20	25	30	7

हल : माना, A = 2200, सभी d_i को देखने पर $g = 400$ है ।

वर्ग बीमा की राशि (रुपयों में) वर्ग	वर्ग मध्य x_i	$d_i = x_i - A$ $= x_i - 2200$	$u_i = \frac{d_i}{g}$	बारंबारता परिवारों की संख्या f_i	$f_i u_i$
800-1200	1000	-1200	-3	3	-9
1200-1600	1400	-800	-2	15	-30
1600-2000	1800	-400	-1	20	-20
2000-2400	2200→A	0	0	25	0
2400-2800	2600	400	1	30	30
2800-3000	3000	800	2	7	14
कुल				$\sum f_i = 100$	$\sum f_i u_i = -15$

ऊपरोक्त सारिणी दिए गई सोपान के अनुसार बनाई गई है ।

(1) सारिणी के पहले स्तंभ में बीमा की निवेश की राशि को वर्ग में लिखा है ।

(2) दूसरे स्तंभ में वर्ग मध्य x_i का मान लिखा है ।

(3) तीसरे स्तंभ में $d_i = x_i - A$ का मान लिखा है ।

(4) d_i के सभी मान का मसावि 400 है इसलिए $g = 400$ लिया गया । चौथे स्तंभ में $u_i = \frac{d_i}{g} = \frac{d_i}{400}$ का मान लिखा है ।

(5) पाँचवें स्तंभ में, प्रत्येक वर्ग की बारंबारता (परिवारों की संख्या) लिखा है ।

(6) छठे स्तंभ में $f_i \times u_i$ का गुणनफल प्रत्येक वर्ग के लिए लिखा है ।

u_i का माध्य निम्नलिखित सूत्र से ज्ञात किया है ।

$$\overline{u} = \frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i} = \frac{-15}{100} = -0.15$$

$\overline{X} = A + \overline{u}\, g$

$= 2200 + (-0.15)(400)$

$= 2200 + (-60.00)$

$= 2200 - 60 = 2140$

$\therefore$ परिवारों की बीमा की निवेश की राशि का माध्य 2140 रुपये है ।

कृति : प्रत्यक्ष पद्धति, अनुमानित माध्य पद्धति से ऊपरोक्त उदाहरण हल कीजिए । आपको यह अनुभव होगा कि किसी भी पद्धति से ज्ञात किए गए माध्य समान होते हैं ।

हल किए गए उदाहरण

उदा. (1) विद्यालय के 50 विद्यार्थियों द्वारा बाढ़पीड़ितों के लिए जमा की गई धन राशि बारंबारता सारिणी में दी गई है । इसके आधार पर जमा की गई धनराशि का माध्य ज्ञात कीजिए ।

निधि (रूपये में)	0-500	500-1000	1000-1500	1500-2000	2000-2500	2500-3000
विद्यार्थी	2	4	24	18	1	1

संलग्न वर्गों में बहुत कम प्राप्तांक हों तो उसको मिलाकर एक वर्ग बनाना सुविधाजनक होगा । इस उदाहरण में 0 - 500 तथा 500 - 1000 का एक वर्ग और 2000 - 2500 तथा 2500 - 3000 का एक वर्ग बनाया ।

निधि की धनराशि (रुपयों में)	0-1000	1000-1500	1500-2000	2000-3000
विद्यार्थी संख्या	6	24	18	2

हल : माना, A = 1250, सभी d_i के आधार पर g = 250 लें ।

वर्ग निधि (रुपयों में)	वर्ग मध्य x_i	$d_i = x_i - A$ $= x_i - 1250$	$u_i = \frac{d_i}{g}$	बारंबारता f_i	$f_i u_i$
0-1000	500	-750	-3	6	-18
1000-1500	1250→A	0	0	24	0
1500 - 2000	1750	500	2	18	36
2000-3000	2500	1250	5	2	10
कुल				$\sum f_i = 50$	$\sum f_i u_i = 28$

$$\bar{u} = \frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i} = \frac{28}{50} = 0.56,$$

$$\bar{u} g = 0.56 \times 250 = 140$$

$$\bar{X} = A + g\bar{u} = 1250 + 140 = 1390$$

∴ जमा की गई राशियों का माध्य 1390 रूपये है ।

कृति –

1. इस उदाहरण को प्रत्यक्ष पद्धति से हल कीजिए ।

2. ऊपरोक्त उदाहरण में ज्ञात किया गया माध्य, अनुमानित माध्य पद्धति से ज्ञात करके जाँच कीजिए ।

3. A = 1750 लेकर ऊपरोक्त उदाहरण हल कीजिए ।

प्रश्नसंग्रह 6.1

(1) 10 वीं कक्षा के 50 विद्‌यार्थियों द्‌वारा दैनिक अध्ययन के लिए व्यतीत किए घंटे तथा विद्‌यार्थियों की संख्या की बारंबारता बंटन सारिणी दी गई है । इसके आधार विद्‌यार्थियों द्‌वारा अध्ययन के लिए दिए गए समय (घंटे) का प्रत्यक्ष पद्‌धति से माध्य ज्ञात कीजिए ।

समय (घंटों में)	0-2	2-4	4-6	6-8	8-10
विद्‌यार्थियों की संख्या	7	18	12	10	3

(2) किसी महामार्ग के टोल नाके पर सुबह 6 बजे से शाम 6 बजे तक जमा किया गया कर रुपयों में तथा वाहनों की संख्या की बारंबारता सारिणी दी गई है । इस आधार पर जमा किए गए कर का माध्य 'अनुमानित माध्य' पद्‌धति से ज्ञात कीजिए ।

जमा कर (रुपयों में)	300-400	400-500	500-600	600-700	700-800
वाहनों की संख्या	80	110	120	70	40

(3) किसी दूध बिक्री केंद्र पर 50 ग्राहकों को वितरित किए गए दूध (लीटर में) की बारंबारता बंटन सारिणी दी गई है। इस आधार पर वितरित किए गए दूध का (लीटर में) माध्य प्रत्यक्ष पद्‌धति से ज्ञात कीजिए ।

दूध वितरण (लीटर में)	1-2	2-3	3-4	4-5	5-6
ग्राहक संख्या	17	13	10	7	3

(4) कुछ बागान मालिकों के संतरे के उत्पादन की बारंबारता बंटन सारिणी दी गई है । इस आधार पर उत्पादन का माध्य 'अनुमानित माध्य' पद्‌धति से ज्ञात कीजिए ।

उत्पादन (हजार रूपयों में)	25-30	30-35	35-40	40-45	45-50
बाग मालिकों की संख्या	20	25	15	10	10

(5) किसी कंपनी के 120 कर्मचारियों से अकालपीड़ितों के लिए जमा की गई राशि की बारंबारता बंटन सारिणी दी गई है । कर्मचारियों की जमा राशि का माध्य 'सोपान विचलन' पद्‌धति से ज्ञात कीजिए ।

जमा राशि (रुपयों में)	0-500	500-1000	1000-1500	1500-2000	2000-2500
कर्मचारी संख्या	35	28	32	15	10

(6) किसी कारखाने के 150 कर्मचारियों के साप्ताहिक वेतन की बारंबारता बंटन सारिणी दी गई है । इसके आधार पर कर्मचारियों के साप्ताहिक वेतन का माध्य 'सोपान विचलन' पद्‌धति से ज्ञात कीजिए ।

साप्ताहिक वेतन (रुपयों में)	1000-2000	2000-3000	3000-4000	4000-5000
कर्मचारियों की संख्या	25	45	50	30

थोड़ा याद करें

विज्ञान प्रदर्शनी में भाग लेने के लिए किसी विद्यालय के दो छात्र तथा दो छात्राएँ, दो दिन के लिए दूसरे शहर गए थे । उन्हें रात के भोजन का स्थान निश्चित करना था । उनके कार्यस्थल से 1 किलोमीटर की दूरी पर भोजन उपलब्ध कराने वाले दस होटल थे । उनके भोजन का दर (रुपयों में) आरोही क्रम में निम्नानुसार है :-

40, 45, 60, 65, 70, 80, 80, 90, 100 और 500

सभी होटलों में भोजन का औसत दर $\frac{1130}{10} = 113$ रु. थी ।

विद्यार्थियों ने किस होटल में भोजन करने का निश्चय किया होगा ? 500 रू. दर से भोजन देने वाले होटल को छोड़कर अन्य सभी होटलों के दर 113 रूपये से कम थे । विद्यार्थियों ने मध्यम दर वाले होटल का चुनाव करने का निश्चय किया । पहले दिन 70 रू. की दर से तथा दूसरे दिन 80 रू. की दर से भोजन लिया ।

कई बार प्राप्तांकों के औसत की अपेक्षा उसकी 'माध्यिका' उपयोग में लाई जाती है । उसका यह उदाहरण है ।

पिछली कक्षा में अवर्गीकृत सामग्री के लिए हमने 'माध्यिका' इस संकल्पना का अध्ययन किया है ।

- दी गई सामग्री में संख्याएँ आरोही या अवरोही क्रम से रखी गई हों, तो रखी हुई सामग्री के माध्य में आनेवाली संख्या को सामग्री की माध्यिका कहते हैं ।
- माध्यिका दी हुई सामग्री को दो समान भाग में विभाजित करती है । अर्थात दी हुई सामग्री के लिए माध्यिका के ऊपर और नीचे दोनों ओर समान प्राप्तांक होते हैं ।
- दिए गए प्राप्तांकों को $k_1 \le k_2 \le k_3 \ldots \ldots \le k_n$ इस प्रकार लिखते हैं ।
- सामग्री में प्राप्तांक विषम हों तो $\frac{n+1}{2}$ वीं प्राप्तांक सामग्री की माध्यिका होती है, क्योंकि $k_{\frac{n+1}{2}}$ के पहले $\frac{n-1}{2}$ इतने प्राप्तांक तथा बाद में $\frac{n-1}{2}$ इतने प्राप्तांक होते हैं । n = 2m + 1 लेकर इसकी जाँच कीजिए ।
- सामग्री में प्राप्तांक n यदि सम हो तो सामग्री का माध्य यह माध्य की दो संख्यांओं का औसत होता है । क्योंकि $k_{\frac{n}{2}}$ के पहले तथा $k_{\frac{n+2}{2}}$ के बाद प्रत्येक $\frac{n-2}{2}$ प्राप्तांक होता है । n = 2m लेकर इसकी जाँच कीजिए ।
- अर्थात् $\frac{n}{2}$ वीं संख्या तथा $\frac{n+2}{2}$ वीं संख्या का औसत लेने पर प्राप्त होने वाली संख्या उस सामग्री की माध्यिका होती है ।

उदा. (1) 32, 33, 38, 40, 43, 48, 50 इन प्राप्तांकों में से चौथी संख्या मध्य में आती है, इसलिए दी गई सामग्री की माध्यिका = 40

उदा. (2) 61, 62, 65, 66, 68, 70, 74, 75 में प्राप्तांकों की संख्या 8 अर्थात सम संख्या है, इसलिए चौथी तथा पाँचवीं दो संख्याएँ माध्य में हैं । यह 66 तथा 68 हैं इसलिए दी गई सामग्री की माध्यिका = $\frac{66+68}{2} = 67$

आओ जानें

वर्गीकृत बारंबारता बंटन सारिणी से माध्यिका (Median group frequency distribution)

प्राप्तांकों की संख्या अधिक होने पर पूर्व उल्लेखित प्रकार से रखने पर माध्यिका ज्ञात करना कठिन होता है, इसलिए अब हम उदाहरण की सहायता से वर्गीकृत बारंबारता बंटन की अनुमानित माध्यिका ज्ञात करने की विधि का अध्ययन करेंगे ।

उदा. 6, 8, 10.4, 11, 15.5, 12, 18 इन प्राप्तांकों की वर्गीकृत सारिणी आगे दी गई है ।

वर्ग	गणनचिह्न	बारंबारता
6−10	||	2
11−15	||	2
16−20	|	1

वर्ग	गणनचिह्न	बारंबारता
5.5−10.5	|||	3
10.5−15.5	||	2
15.5−20.5	||	2

पहली सारिणी में 10.4 तथा 15.5 इन दोनों प्राप्तांकों को समाविष्ट नहीं किया गया है क्योंकि यह संख्या 6−10, 11−15, 16−20 इनमें से किसी भी वर्ग में समाविष्ट नहीं होती ।

हम जानते हैं कि ऐसे समय वर्ग सतत किया जाता है ।

इस सारिणी में निम्न वर्ग सीमा 0.5 से कम तथा उच्च वर्ग सीमा 0.5 से अधिक बढ़ाई जाय तो प्राप्त दूसरी बंटन सारिणी बनेगी । यहाँ प्राप्तांक 15.5 वर्ग 15.5 − 20.5 में समाविष्ट होगा ।

ऊपरोक्त सारिणी से ध्यान में आता है कि सतत करने की पद्धति बदलने पर बारंबारता बदल सकती है ।

इसे ध्यान में रखें

ऊपरोक्त सारिणी में वर्ग 6−10 का माध्य $= \frac{6+10}{2} = \frac{16}{2} = 8$;

इसी प्रकार वर्ग 5.5−10.5 इस वर्ग का माध्य $= \frac{5.5+10.5}{2} = \frac{16}{2} = 8.$

अर्थात वर्ग की रचना अलग पद्धति से की गई तब भी वर्ग मध्य नहीं बदलता, इसे ध्यान में रखें ।

उदाहरण :

कक्षा 10 वीं की अभ्यास परीक्षा में 100 विद्यार्थियों के प्राप्तांकों की बारंबारता बंटन सारिणी नीचे दी गई है । विद्यार्थियों के प्राप्तांकों की माध्यिका ज्ञात कीजिए ।

परीक्षा में प्राप्त अंक	0−20	20−40	40−60	60−80	80−100
विद्यार्थियों की संख्या	4	20	30	40	6

हल : N = 100

$\frac{N}{2}$ = 50 अर्थात 50 वीं अनुमानित माध्यिका है । हमें इसकी जानकारी प्राप्त करनी है कि इसके लिए 50 वीं संख्या कौन-से वर्ग में आती है । 'उच्च वर्ग सीमा से कम' इस प्रकार की संचयी बारंबारता सारिणी से ज्ञात होगा। इसके लिए हम ऊपर्युक्त बारंबारता सारिणी के आधार पर 'से कम' संचयी बारंबारता बंटन सारिणी बनाएँ।

वर्ग (विद्यार्थियों के प्राप्त गुण)	बारंबारता विद्यार्थी संख्या fi	संचयी बारंबारता (से कम) cf
0-20	4	4
20-40	20	24
40-60	30	54
60-80	40	94
80-100	6	100

सारिणी से -

- $\frac{N}{2}$ = 50 इस क्रमांक का प्राप्तांक 40-60 वर्ग में है । जिस वर्ग में वर्ग माध्यिका आती है, उस वर्ग को माध्यिका वर्ग कहते हैं । वर्ग 40-60 वर्ग माध्यिका है ।
- 40-60 वर्ग की निम्न वर्ग सीमा 40 है तथा बारंबारता 30 है ।
- पहले 50 प्राप्तांकों में से पहले 24 प्राप्तांक 40 से कम हैं । शेष 50-24 = 26 प्राप्तांक वर्ग (40-60) में है । इनमें 50 वें प्राप्तांक का अनुमान इसप्रकार है ।
- इस वर्ग में कुल 30 में से 26 प्राप्तांक 50 वे प्राप्तांक तक हैं तथा वर्गांतर 20 है इसलिए ऐसा माना जाता है कि 50 वाँ प्राप्तांक 40 से $\frac{26}{30} \times 20$ बड़ा है ।

  यह लगभग $40 + \frac{26}{30} \times 20 = 40 + \frac{52}{3} = 57\frac{1}{3}$ है ।

  $\therefore$ माध्यिका $= 57\frac{1}{3}$

• सूत्र के रूप में इसे हम निम्नलिखित प्रकार से लिख सकते हैं ।

$$\text{माध्यिका} = L + \left[\frac{\frac{N}{2} - cf}{f}\right] \times h$$

इस सूत्र में L = माध्यिका वर्ग की निम्न वर्ग सीमा N = कुल बारंबारता

h = माध्यिका वर्ग का वर्गअंतराल, f = माध्यिका वर्ग की बारंबारता

cf = माध्यिका वर्ग के पहले वर्ग की संचयी बारंबारता

ऊपरोक्त उदाहरण में; $\frac{N}{2} = 50$, $cf = 24$, $h = 20$, $f = 30$, $L = 40$,

$$\text{माध्यिका} = L + \left[\frac{\frac{N}{2} - cf}{f}\right] \times h$$

$$= 40 + \left(\frac{50 - 24}{30}\right) \times 20$$

$$= 40 + \frac{26 \times 20}{30}$$

$$= 40 + 17\frac{1}{3}$$

$$= 57\frac{1}{3}$$

इसे ध्यान में रखें

✦ माध्यिका ज्ञात करने के लिए दिए गए वर्ग सतत न हों तब उस वर्ग को सतत बनाना होता है।

✦ प्राप्तांकों की संख्या बहुत अधिक होने पर प्रत्येक प्राप्तांक को आरोही क्रम में लिखना कठिन होता है । इसलिए सामग्री को वर्गीकृत स्वरूप में रखते हैं । ऐसे वर्गीकृत सामग्री की सही माध्यिका ज्ञात करना संभव नहीं होता । किंतु अनुमानित माध्यिका ज्ञात करने के लिए दिए गए सूत्र का उपयोग करते हैं ।

$$\text{माध्यिका} = L + \left[\frac{\frac{N}{2} - cf}{f}\right] \times h$$

हल किए गए उदाहरण

उदा. (1) सार्वजनिक परिवहन सेवा की 60 बसों द्वारा एक दिन में तय की गई दूरी बारंबारता सारिणी में दी गई है । बस द्वारा एक दिन में तय की गई दूरी की माध्यिका ज्ञात कीजिए ।

तय की गई दैनिक दूरी (किमी)	200-209	210-219	220-229	230-239	240-249
बसों की संख्या	4	14	26	10	6

हल : सारिणी में दिए गए वर्ग सतत नहीं हैं ।

यहाँ किसी वर्ग की उच्च वर्ग सीमा तथा अगले वर्ग की निम्न वर्ग सीमा में अंतर 1 है ।

$\therefore$ $1 \div 2 = 0.5$ यह मान प्रत्येक वर्ग की निम्न वर्ग सीमा से घटाकर और उच्च वर्ग सीमा में जोड़कर वर्ग सीमा निश्चित करेंगे । इस प्रकार वर्ग को सतत कर नई सारिणी लिखेंगे ।

इसके पश्चात 'से कम' की संचयी बारंबारता स्तंभ बनाएँगे ।

दिया गया वर्ग	सतत किया गया वर्ग	बारंबारता	संचयी बारंबारता (से कम)
200-209	199.5-209.5	4	4
210-219	209.5-219.5	14	18 $\rightarrow$ cf
220-229	219.5-229.5	26 $\rightarrow$ f	44
230-239	229.5-239.5	10	54
240-249	239.5-249.5	6	60

कुल बारंबारता $= \sum f_i = N = 60$ $\therefore$ $\frac{N}{2} = 30$ $\therefore$ 30 वाँ प्राप्तांक अनुमानित माध्यिका है।

पहले 18 प्राप्तांक 219.5 से कम तथा शेष $30 - 18 = 12$ प्राप्तांक 219.5 - 229.5 वाले वर्ग में हैं । इसलिए यह माध्यिका का वर्ग है ।

219.5 - 229.5 वर्ग की संचयी बारंबारता 44 है ।

सूत्र में

L = माध्यिका वर्ग की निम्न सीमा = 219.5, h = माध्यिका वर्ग का अंतर = 10

cf = माध्यिका वर्ग के पहले वाले वर्ग की संचयी बारंबारता = 18

f = माध्यिका वर्ग की बारंबारता = 26

$$\text{माध्यिका} = L + \left[\frac{\frac{N}{2} - cf}{f}\right] \times h$$

$\therefore$ माध्यिका $= 219.5 + \left(\frac{30-18}{26}\right) \times 10$

$= 219.50 + \left(\frac{12 \times 10}{26}\right)$

$= 219.5 + 4.62$

$= 224.12$

बसों द्वारा तय की गई दैनिक दूरी की माध्यिका = 224.12 किलोमीटर

उदा.(2) निम्नलिखित सारिणी में एक दिन में एक वस्तुसंग्रहालय में आने वाले व्यक्तियों की आयु दी गई है । इस आधार पर व्यक्तियों की आयु की माध्यिका ज्ञात कीजिए ।

आयु (वर्ष में)	व्यक्तियों की संख्या
10 से कम	3
20 से कम	10
30 से कम	22
40 से कम	40
50 से कम	54
60 से कम	71

हल : सारिणी में 'से कम' संचयी बारंबारता बंटन दिया गया है । सर्वप्रथम इन सभी वर्गों की सही वर्ग सीमा प्राप्त करना होगा । हम जानते हैं कि 'से कम' संचयी बारंबारता वर्ग की उच्च वर्ग सीमा से संबंधित है । पहले वर्ग की उच्च वर्ग सीमा 10 है । किसी भी व्यक्ति की आयु धन संख्या होती है । इसलिए पहला वर्ग 0–10 ऐसा होगा । दूसरे वर्ग की उच्च वर्ग सीमा 20 है इसलिए दूसरा वर्ग 10–20 होगा । इसप्रकार वर्गांतर 10 लेकर क्रम से वर्ग बनाये गए । इसप्रकार अंतिम वर्ग 50–60 हुआ । अतः हमें निम्नलिखित प्रकार से वर्ग लिखने होते हैं ।

आयु (वर्ष)	वर्ग	व्यक्तियों की संख्या बारंबारता	संचयी बारंबारता (से कम)
10 से कम	0–10	3	3
20 से कम	10–20	10 – 3 = 7	10
30 से कम	20–30	22 – 10 = 12	22 $\rightarrow cf$
40 से कम	30–40	40 – 22 = 18 $\rightarrow f$	40
50 से कम	40–50	54 – 40 = 14	54
60 से कम	50–60	71 – 54 = 17	71

यहाँ N = 71 $\therefore \frac{N}{2} = 35.5$ और $h = 10$

35.5 यह 30-40 वर्ग में है । इसलिए यह माध्यिका वर्ग है । इसके पहले वाले वर्ग की संचयी बारंबारता 22 है अतः $cf = 22$, $L = 30$, $f = 18$

$$\text{माध्यिका} = L + \left[\frac{\frac{N}{2} - cf}{f}\right] \times h$$

$$= 30 + (35.5 - 22)\frac{10}{18}$$

$$= 30 + (13.5)\frac{10}{18}$$

$$= 30 + 7.5$$

$$= 37.5$$

$\therefore$ वस्तुसंग्राहलय में आने वाले व्यक्तियों के आयु की माध्यिका = 37.5 वर्ष

प्रश्नसंग्रह 6.2

1. नीचे दी गई सारिणी में एक सॉफ्टवेअर कंपनी में दैनिक कार्य के घंटों तथा उतनी देर कार्य करने वाले व्यक्तियों की संख्या दी गई है । इस आधार पर कंपनी के कर्मचारियों के दैनिक कार्य के घंटों की माध्यिका ज्ञात कीजिए ।

दैनिक कार्य के घंटे	8-10	10-12	12-14	14-16
कर्मचारियों की संख्या	150	500	300	50

2. किसी आमराई में आम के पेड़ तथा प्रत्येक पेड़ से प्राप्त होने वाले आमों की संख्या का बारंबारता वितरण दिया गया हो तो दी गई सामग्री की माध्यिका ज्ञात कीजिए ।

आम की संख्या	50-100	100-150	150-200	200-250	250-300
पेड़ों की संख्या	33	30	90	80	17

3. मुंबई-पुणे द्रुतगति मार्ग का परिवहन नियंत्रित करने वाली पुलिस चौकी पर किए गए सर्वेक्षण में निम्नलिखित निरीक्षण प्राप्त हुये । दिए गए प्राप्तांकों की माध्यिका ज्ञात कीजिए ।

वाहनों की गति (किमी/घंटा)	60-64	65-69	70-74	75-79	80-84	85-89
वाहनों की संख्या	10	34	55	85	10	6

4. विभिन्न कारखानों में बनने वाले दीयों की संख्या (सारिणी में) दी गई है । इसके आधार पर दीयों के उत्पादन की माध्यिका ज्ञात कीजिए ।

दीयों की संख्या (हजार)	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90	90-100
कारखानों की संख्या	12	35	20	15	8	7	8

आओ जानें

वर्गीकृत बारंबारता बंटन से बहुलक (Mode from grouped frequency distribution)

हम जानते हैं कि दिए गए प्राप्तांकों में अधिक से अधिक बार आने वाला प्राप्तांक ही समूह का बहुलक होता है ।

उदा. कोई दुपहिया वाहन निर्माता कंपनी विभिन्न रंगों में दुपहिया वाहन बनाती है । किस रंग की गाड़ी की पसंद सर्वाधिक है, इसे जानने के लिए उस कंपनी को रंगों के बहुलक को जानना आवश्यक है । इसी प्रकार विभिन्न उत्पाद बनाने वाली किसी कंपनी के लिए यह जानने की आवश्यकता होती है कि किस उत्पाद की माँग सर्वाधिक है । ऐसे समय उस उत्पाद का बहुलक ज्ञात करना होगा ।

हमने देखा है कि अवर्गीकृत बारंबारता सारिणी से बहुलक कैसे ज्ञात करेंगे ।

अब हम इसका अध्ययन करेंगे वर्गीकृत बारंबारता बंटन से बहुलक कैसे ज्ञात करना है ।

इसके लिए दिए गए सूत्र का उपयोग करते हैं ।

बहुलक = $L+\left[\dfrac{f_1-f_0}{2f_1-f_0-f_2}\right] \times h$

ऊपरोक्त सूत्र में, L = बहुलक वर्ग की निम्न सीमा

f_1 = बहुलक वर्ग कि बारंबारता

f_0 = बहुलक वर्ग के पूर्व वर्ग की बारंबारता

f_2 = बहुलकीय वर्ग के पश्चात वर्ग की बारंबारता

h = बहुलकीय वर्ग का वर्ग अंतराल

इस सूत्र का उपयोग करके अनुमानित बहुलक कैसे प्राप्त करते हैं इसे उदाहरण द्वारा समझेंगे ।

हल किए गए उदाहरण

उदा.(1) दी गई बारंबारता बंटन सारिणी में खेल के मैदान पर खेलने आने वाले लड़कों की संख्या तथा उनका आयु गट दिया गया है । खेल के मैदान पर खेलने वाले लड़कों की आयु का बहुलक ज्ञात कीजिए ।

लड़कों का आयु गट(वर्ष में)	6-8	8-10	10-12	12-14	14-16
लड़कों की संख्या	43	$58 \rightarrow f_0$	$70 \rightarrow f_1$	$42 \rightarrow f_2$	27

ऊपरोक्त सारिणी से यह ध्यान आता है कि 10-12 आयु गट के लड़कों की संख्या सर्वाधिक है । अर्थात 10 -12 यह बहुलक वर्ग है ।

हल : f_1 = 70, और वर्ग 10-12 बहुलक वर्ग है ।

∴ दिए गए उदाहरण में,

L = बहुलक वर्ग की निम्न सीमा = 10

h = बहुलक वर्ग का वर्ग अंतराल = 2

f_1 = बहुलक वर्ग की बारंबारता = 70

f_0 = बहुलक वर्ग के पूर्व वर्ग की बारंबारता = 58

f_2 = बहुलक वर्ग के बाद आने वाले वर्ग की बारंबारता = 42

बहुलक = $L + \left[\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right] \times h$

$= 10 + \left[\frac{70-58}{2(70)-58-42}\right] \times 2$

$= 10 + \left[\frac{12}{140-100}\right] \times 2$

$= 10 + \left[\frac{12}{40}\right] \times 2$

$= 10 + \frac{24}{40}$

$= 10 + 0.6$

$= 10.6$

∴ खेल के मैदान पर खेलने वाले लड़कों की आयु का बहुलक = 10.6 वर्ष है ।

उदा. (2) नीचे दी गई बारंबारता बंटन सारिणी में एक पेट्रोल पंप पर पेट्रोल भरवाने वाले वाहनों की संख्या और वाहनों में भरे गए पेट्रोल की मात्रा की जानकारी दी गई है । इससे वाहनों में भरे गए पेट्रोल के आयतन का बहुलक ज्ञात कीजिए ।

भरा गया पेट्रोल (लीटर में)	1-3	4-6	7-9	10-12	13-15
वाहनों की संख्या	33	40	27	18	12

हल : दिया गया वर्ग सतत नहीं है । इसलिए इसे सतत करके बारंबारता बनाते हैं ।

वर्ग	वास्तविक वर्ग सीमा	बारंबारता
1-3	0.5-3.5	$33 \rightarrow f_0$
4-6	3.5-6.5	$40 \rightarrow f_1$
7-9	6.5-9.5	$27 \rightarrow f_2$
10-12	9.5-12.5	18
13-15	12.5-15.5	12

f_1 = बहुलक वर्ग की बारंबारता = 40, बहुलक वर्ग 3.5-6.5

बहुलक = $L + \left[\dfrac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right] \times h$

बहुलक = $3.5 + \left[\dfrac{40-33}{2(40)-33-27}\right] \times h$

$= 3.5 + \left[\dfrac{7}{80-60}\right] \times 3$

$= 3.5 + \dfrac{21}{20}$

$= 3.5 + 1.05$

$= 4.55$

$\therefore$ वाहनों में भरे गए पेट्रोल के आयतन का बहुलक = 4.55 लीटर

प्रश्नसंग्रह 6.3

1. किसी दूध संकलन केंद्र में किसानों की ओर से संकलित किए गए दूध तथा लैक्टोमीटर से मापे गए दूध में वसा (स्निग्धांश) की मात्रा दी गई है । इससे दूध में वसा की मात्रा का बहुलक ज्ञात कीजिए।

दूध में वसा (%)	2-3	3-4	4-5	5-6	6-7
संकलित दूध (लीटर में)	30	70	80	60	20

2. कुछ परिवारों के मासिक विद्युत उपभोग की वर्गीकृत बारंबारता सारणी नीचे दी गई है । इस आधार पर विद्युत उपभोग करने वाले परिवारों का बहुलक ज्ञात कीजिए ।

विद्युत उपभोग (युनिट)	0-20	20-40	40-60	60-80	80-100	100-120
परिवारों की संख्या	13	50	70	100	80	17

3. 100 होटलों में चाय बनाने के लिए आपूर्ति किया गया दूध तथा होटलों की संख्या की वर्गीकृत बारंबारताा सारिणी दी गई है, इससे आपूर्ति किए गए दूध का बहुलक ज्ञात कीजिए ।

दूध (लीटर)	1-3	3-5	5-7	7-9	9-11	11-13
होटलों की संख्या	7	5	15	20	35	18

4. किसी सप्ताह में 200 मरीजों की आयु और उपचार लेने वाले मरीजों की संख्या निम्नलिखित बारंबारता बंटन सारिणी में दी गई है । इसके आधार पर मरीजों की आयु का बहुलक ज्ञात कीजिए ।

आयु (वर्ष)	5 से कम	5-9	10-14	15-19	20-24	25-29
मरीजों की संख्या	38	32	50	36	24	20

कृति :-

- अपनी कक्षा के 20 लड़कों के वजन का माध्य ज्ञात कीजिए ।
- अपनी कक्षा के लड़कों के शर्ट के माप का बहुलक ज्ञात कीजिए ।
- कक्षा का प्रत्येक विद्यार्थी अपनी नाड़ी का एक मिनट में होने वाला स्पंदन गिने तथा उसे कॉपी में दर्ज कीजिए । इससे सारिणी बनाइए तथा इसके आधार पर नाड़ी के स्पंदन का बहुलक ज्ञात कीजिए ।
- कक्षा के प्रत्येक विद्यार्थी की ऊँचाई को दर्ज कीजिए, उस ऊँचाई का वर्गीकरण कीजिए तथा उसकी माध्यिका ज्ञात कीजिए ।

इसे ध्यान में रखें

हमने केंद्रीय प्रवृत्ति के माध्य, माध्यिका तथा बहुलक इन परिणामों का अध्ययन किया है । केंद्रीय प्रवृत्ति के किस परिमाण का चयन करना है, इसे निश्चित करने के लिए हमें उद्देश्य की स्पष्ट रूप से जानकारी होनी आवश्यक है ।

माना किसी विद्यालय में 10 वीं के पाँच वर्गों में से कौन-सा वर्ग अंतर्गत परीक्षा में अधिक अच्छा है, यह निश्चित करने के लिए उन पाँचों वर्गों की अंतर्गत परीक्षा के अंकों का 'माध्य' ज्ञात करना होगा ।

किसी कक्षा के विद्यार्थियों के परीक्षा में प्राप्त अंकों के दो समूह करना हो तो उस कक्षा के विद्यार्थियों के प्राप्तांकों की 'माध्यिका' इस परिमाण को चुनना होगा ।

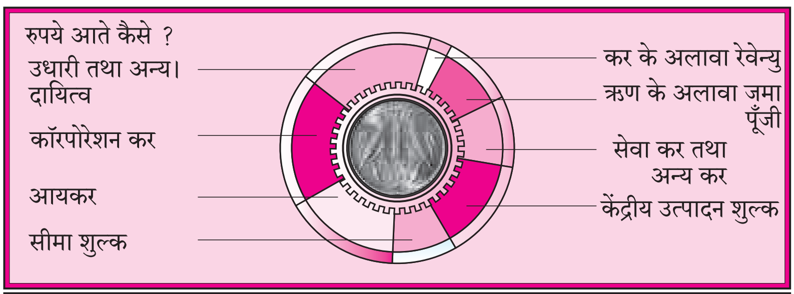
खड़िया बनानेवाले किसी बचत समूह को यदि यह ज्ञात करना हो कि किन रंगों के खड़ियों की माँग सर्वाधिक है तो केंद्रीय प्रवृत्ति 'बहुलक' परिमाण को चुनना होगा ।

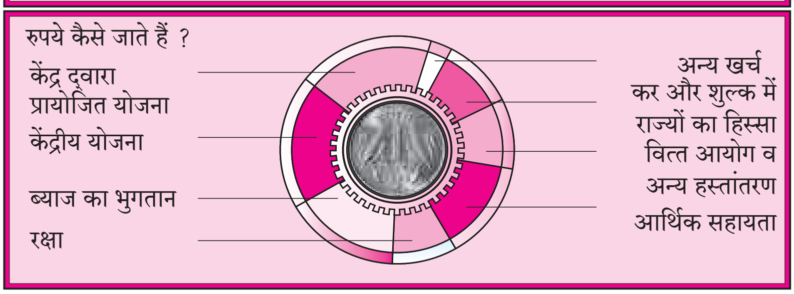
सांख्यिकीय आँकड़े का चित्ररूप प्रतिरूपण (Pictorial representation of statistical data)

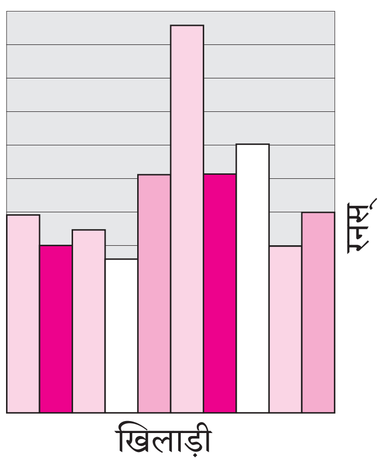
सांख्यिकीय जानकारियों का माध्य, माध्यिका, बहुलक के आधार पर या जानकारियों का विश्लेषण कर उसका उपयोग कुछ विशिष्ट निष्कर्ष प्राप्त करने के लिए होता है ।

हम जानते हैं, सांख्यिकीय जानकारी को संक्षिप्त रूप में प्रस्तुत करने की पद्धति अर्थात सारिणी के रूप में सामग्री को रखना । किंतु सारिणी के रूप में होने के कारण कुछ मुद्दे तुरंत ध्यान में नहीं आते हैं । इसे सामान्य व्यक्तियों को समझने के लिए अर्थात सर्वसामान्य लोगों का ध्यान सामग्री के महत्वपूर्ण मुद्दों की ओर आकर्षित करने के लिए, उस जानकारी का प्रस्तुतीकरण अलग तरह से करना होगा इस पर विचार करें ।

उदाहरण के लिए अर्थनियोजन के मुद्दे, खेलों की जानकारी इत्यादि ।

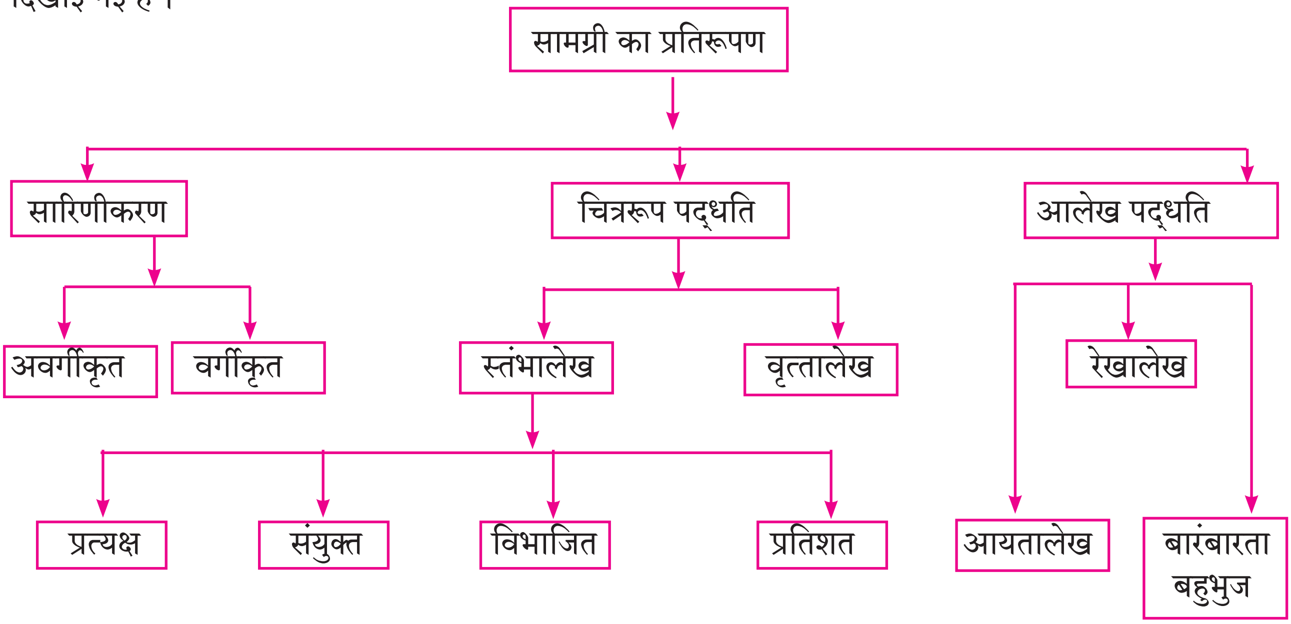






सामग्री का प्रतिरूपण (Presentation of Data)

चित्ररूप तथा आलेख स्वरूप में प्रतिरूपण यह सामग्री का अर्थ स्पष्ट करने और ध्यान आकर्षित करने का एक प्रकार है । सामग्री के प्रतिरूपणों का विभिन्न प्रकार के पद्‌धति को दर्शानेवाली शाखाकृति (Tree chart) नीचे दिखाई गई है ।



पिछली कक्षा में हमने इनमें से कुछ पद्‌धतियों तथा आलेखों का अध्ययन किया है । अब हम आयतालेख, बारंबारता बहुभुज तथा वृत्तालेख की सहायता से सामग्री का प्रतिरूपण कैसे करें यह देखेंगे ।

फ्लॉरेन्स नाइटिंगेल (1820-1910) इस महान महिला को उत्कृष्ट तथा ध्येयनिष्ठ परिचारिका (नर्स) के रूप में पहचाना जाता है । क्रीमियन युद्‌ध में जख्मी सैनिकों की सेवा कर उन्होंने अनेकों के प्राण बचाए । संख्याशास्त्र में फ्लॉरेन्स नाईटिंगेल ने अद्‌भुत काम किया है। अनेक सैनिकों की अवस्था, उनका उपचार तथा उनका उपयोग इन सभी को ठीक तरह से दर्ज कर उन्होंने महत्वपूर्ण निष्कर्ष निकाले । सैनिकों की मृत्यु उनके जख्मों की अपेक्षा, टायफॉइड, कॉलरा जैसे रोगों (बीमारी) के कारण अधिक होती थी । आसपास की अस्वच्छता, अस्वच्छ पानी तथा मरीजों के रहन-सहन (सघन निवास) के कारण यह बीमारियाँ फैलती थीं । इन कारणों को तुरंत ध्यान में लाने के लिए उन्होंने पायचार्ट जैसे आलेख बनाए । उचित उपचार और स्वच्छता के नियम का पालन कराकर उन्होंने सैनिकों की मृत्यु दर में हुई कमी को दिखाया । शहरी स्वास्थ्य ठीक रखने के लिए उचित तरीके से मल निस्सारण करने वाली नालियाँ और सभी को स्वच्छ/शुद्‌ध पीने का पानी आवश्यक है, उनका यह अवलोकन (निरीक्षण) नगरपालिका को पसंद आया । उनके कार्य में अनेक निरीक्षणों का व्यवस्थित रूप में किया लेखन, सांख्यिकी के आधार पर विश्वसनीय निष्कर्ष प्राप्त करने में मदद करता है, आपके कार्यों में भी यह दिखता है ।

आओ जानें

आयतालेख : Histogram

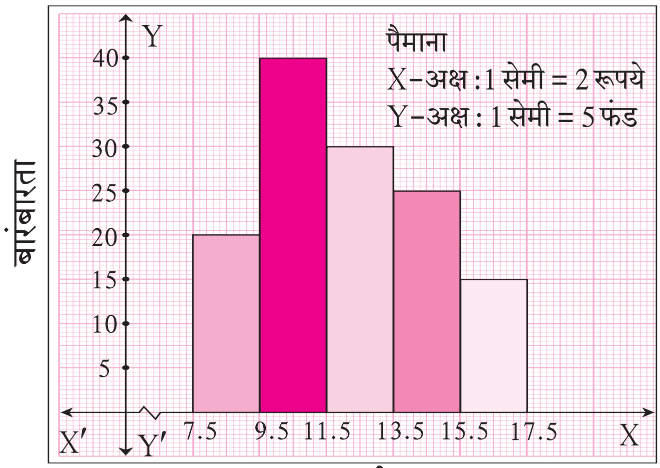
आयतालेख व इसे ज्ञात करने की पद्धति हम एक उदाहरण से समझेंगे ।

उदा : नीचे सारिणी में विभिन्न कंपनी के म्युच्यअल फंडों के एक युनिट का कुल संपत्ति का मूल्य (Net asset-value) दिया गया है । इसके आधार पर आयतालेख खींचिए ।

कुल संपत्ति का मूल्य (रूपये में) (NAV)	8-9	10-11	12-13	14-15	16-17
म्युच्यअल फंड की संख्या	20	40	30	25	15

हल : ऊपरोक्त सारिणी के लिए वर्ग सतत नहीं है । सर्वप्रथम इन्हें सतत कर लें ।

विस्तारित वर्ग (रुपयों में)	7.5-9.5	9.5-11.5	11.5-13.5	13.5-15.5	15.5-17.5
बारंबारता	20	40	30	25	15



आकृति 6.1

आयतालेख बनाने की कृति

1. वर्ग सतत न हो तो उसे सतत कीजिए । ऐसे वर्ग को विस्तारित (सतत) वर्ग (extended class intervals) कहते हैं ।

2. यह विस्तारित वर्ग X- अक्ष पर उचित पैमाना लेकर दर्शाइए ।

3. Y- अक्ष पर बारंबारता उचित पैमाना लेकर दर्शाइए ।

4. X- अक्ष पर प्रत्येक विस्तारित (सतत) वर्ग को आधार लेकर उसपर आयत खींचिए । आयत की ऊँचाई संगत बारंबारता के बराबर लीजिए ।

ध्यान रखें :

X-अक्ष पर आरंभ बिंदु और पहले वर्ग में '—∕|—' ऐसा चिह्न है । (इस चिह्न को अक्ष संकोच, krink mark, कहते हैं ।) इसका अर्थ है कि, आरंभ बिंदु से पहले वर्ग तक किसी भी तरह का निरीक्षण नहीं है । इसलिए X- अक्ष की मुड़ी हुई रेखा यह चिह्न है । आवश्यक हो तब ही Y- अक्ष पर इस चिह्न का उपयोग करते हैं । इससे उचित आकार का आलेख खींचा जा सकता है ।

प्रश्नसंग्रह 6.4

1. दी गई सामग्री (आँकड़ों) को दर्शानेवाला आयतालेख खींचिए ।

विद्‌यार्थियों की ऊँचाई (सेमी)	135-140	140-145	145-150	150-155
विद्‌यार्थियों की संख्या	4	12	16	8

2. दी गई सारिणी में ज्वार का उत्पादन प्रति एकड़ के अनुसार दिया गया है । उसे दर्शाने वाला आयतालेख खींचिए ।

प्रति एकड़ उत्पादन (क्विंटल)	2-3	4-5	6-7	8-9	10-11
किसानों की संख्या	30	50	55	40	20

3. नीचे दी गई सारिणी में 210 परिवारों का वार्षिक निवेश दिया गया है । इसे दर्शाने वाला आयतालेख खींचिए ।

निवेश (हजार रुपयों में)	10-15	15-20	20-25	25-30	30-35
परिवारों की संख्या	30	50	60	55	15

4. निम्नलिखित सारिणी में विद्‌यार्थियों द्‌वारा परीक्षा की तैयारी हेतु समय दिया गया है । इसे दर्शाने वाला आयतालेख खींचिए।

समय (मिनिटों में)	60-80	80-100	100-120	120-140	140-160
विद्‌यार्थी संख्या	14	20	24	22	16

आओ जानें

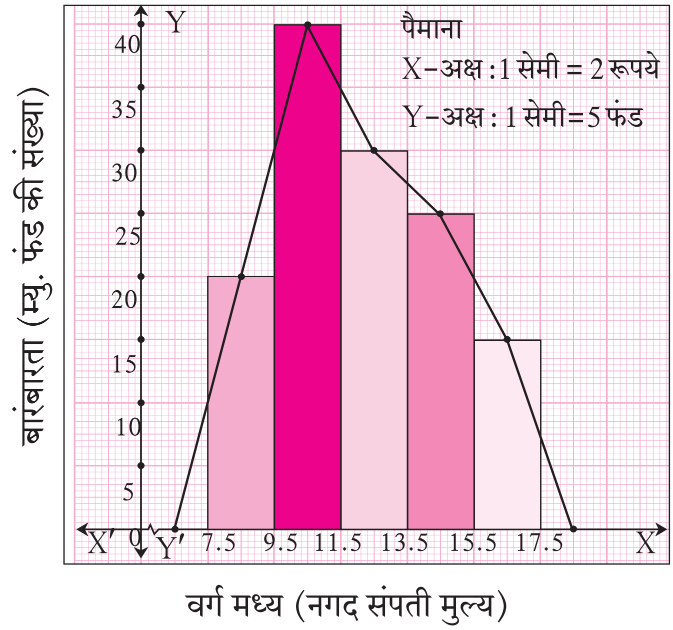
बारंबारता बहुभुज (Frequency polygon)

बारंबारता सारिणी में जानकारी को भिन्न प्रकार से दर्शाया जाता है । हमने आयतालेख का अध्ययन किया है । इसका दूसरा प्रकार 'बारंबारता बहुभुज' है ।

बारंबारता बहुभुज खींचने के लिए दो पद्‌धतियाँ हैं :-

(1) आयतालेख का उपयोग करके । (2) आयतालेख का उपयोग न करते हुए ।

(1) आयतालेख की सहायता से बारंबारता बहुभुज खींचनें की विधि समझने के लिए हम आकृति 6.1 में दिखाए अनुसार आयतालेख का ही उपयोग करेंगे ।



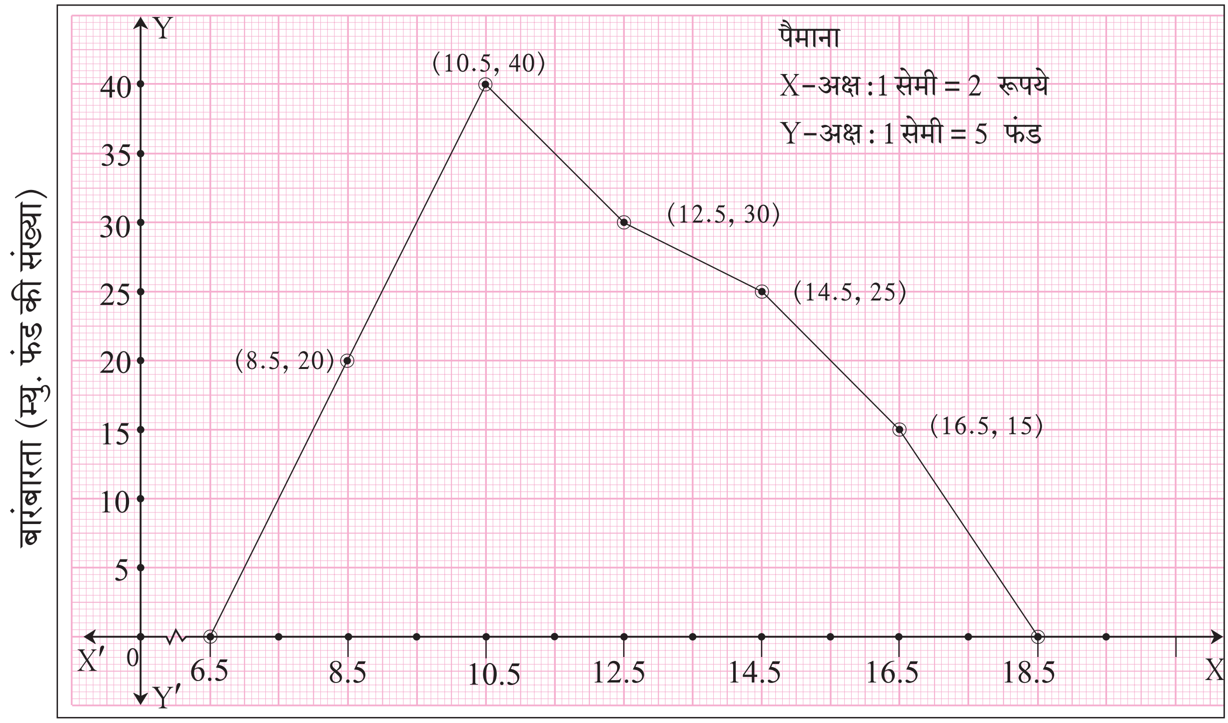
आकृति 6.2

1. आयतालेख में प्रत्येक आयत के ऊपरी भुजा का मध्यबिंदु दर्शाइए ।
2. माना पहले आयत के पहले शून्य ऊँचाई का आयत है तथा उसका मध्यबिंदु दर्शाइए । इसी प्रकार अंतिम आयत के बाद एक शून्य ऊँचाई का आयत मान कर उसके भी मध्यबिंदु पर चिह्न अंकित करें । बिंदु X- अक्ष पर मिलाइए ।
3. सभी मध्यबिंदु को क्रम से सरल रेखा में मिलाइए ।
4. प्राप्त बंद आकृति ही बारंबारता बहुभुज होती है ।

(2) आयतालेख न बनाते हुए बारंबारता बहुभुज खींचने (बनाने) के लिए बिंदु का निर्देशांक कैसे निश्चित करते हैं इसे निम्नलिखित सारिणी से समझेंगे ।

वर्ग	सतत वर्ग	वर्ग मध्य	बारंबारता	बिंदु के निर्देशांक
6 - 7	5.5 - 7.5	6.5	0	(6.5, 0)
8 - 9	7.5 - 9.5	8.5	20	(8.5, 20)
10 - 11	9.5 - 11.5	10.5	40	(10.5, 40)
12 -13	11.5 - 13.5	12.5	30	(12.5, 30)
14 - 15	13.5 - 15.5	14.5	25	(14.5, 25)
16 - 17	15.5 - 17.5	16.5	15	(16.5, 15)
18 - 19	17.5 - 19.5	18.5	0	(18.5, 0)

सारिणी में पाचवें स्तंभ में निर्देशांक के संगत बिंदु आलेख कागज पर स्थापित करते हैं । उसे क्रम से मिलाने पर बारंबारता बहुभुज प्राप्त होता है । यह बहुभुज आकृति 6.3 में दिखाया गया है । उसका अवलोकन कीजिए ।



वर्ग मध्य (नगद संपत्ति मूल्य)

आकृति 6.3

हल किए गए उदाहरण

उदा. (1) संलग्न आकृति में दर्शाएनुसार बारंबारता बहुभुज के आधार पर दिए गए प्रश्नों के उत्तर लिखिए ।

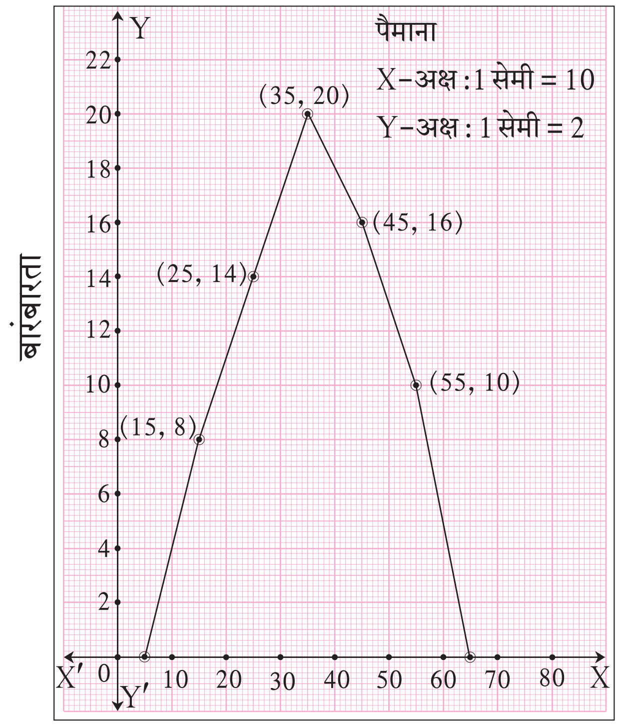
(1) 50–60 वर्ग की बारंबारता लिखिए ।

(2) जिस वर्ग की बारंबारता 14 है ऐसा वर्ग लिखिए ।

(3) ऐसा वर्ग जिसका वर्ग मध्य 55 है लिखिए ।

(4) सबसे अधिक बारंबारतावाला वर्ग लिखिए ।

(5) शून्य बारंबारतावाला वर्ग लिखिए ।



वर्ग

आकृति 6.4

हल :

(1) वर्ग मध्य X-अक्ष पर दिखाया गया है । X-निर्देशांक 55 वाले बिंदु का (50-60 का वर्ग मध्य 55 है) Y- निर्देशांक 10 है । इसलिए 50-60 इस वर्ग की बारंबारता 10 है ।

(2) Y-अक्ष पर बारंबारता दिखाया गया है । Y-निर्देशांक 14 वाले बिंदु का X-निर्देशांक 25 है । Y-अक्ष पर 14 बारंबारता वाले चिह्न को देखिए । 20-30 वर्ग का वर्ग मध्य 25 है । इसलिए बारंबारता 14 वाला वर्ग 20-30 है ।

(3) 55 यह वर्ग मध्य 55-60 वर्ग में है ।

(4) बारंबारता Y-अक्ष पर दर्शाई गई है । बहुभुज पर Y-निर्देशांक का सर्वाधिक मान 20 है । उसके संगत X-निर्देशांक 35 है । वर्ग मध्य 35 वाला वर्ग 30-40 है । इसलिए 30-40 इस वर्ग की बारंबारता सबसे अधिक है ।

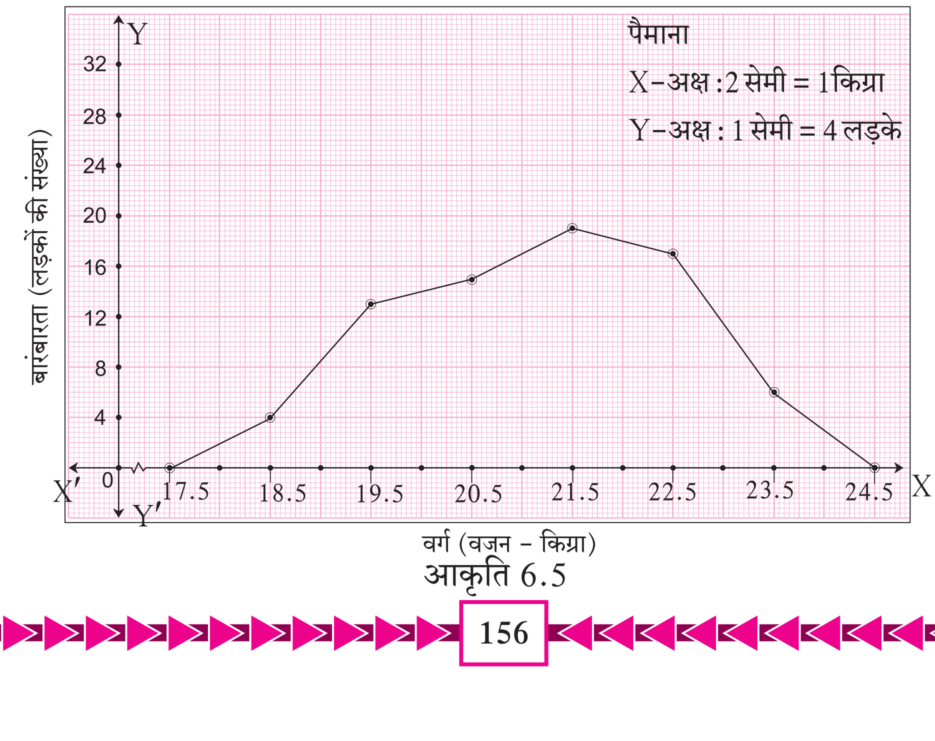
(5) शून्य बारंबारतावाला वर्ग 0-10 और 60-70 है ।

उदा. (2) नीचे सारिणी में लड़कों का वजन तथा उनकी संख्या दी गई है इसके आधारपर बारंबारता बहुभुज खींचिए ।

लड़कों का वजन (किग्रा)	18-19	19-20	20-21	21-22	22-23	23-24
लड़कों की संख्या	4	13	15	19	17	6

बारंबारता बहुभुज खींचने के लिए आवश्यक बिंदु के साथ निम्नलिखित सारिणी बनाइए तथा बारंबारता बहुभुज खींचिए ।

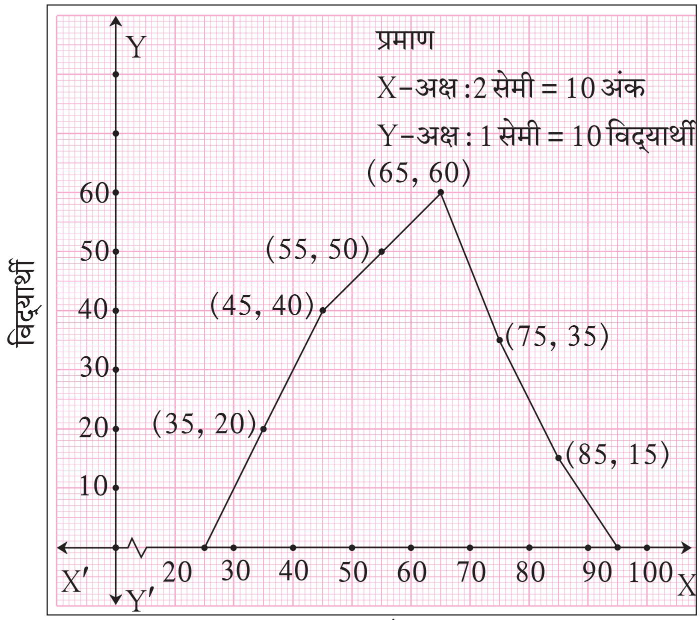
वर्ग	18-19	19-20	20-21	21-22	22-23	23-24
वर्ग मध्य	18.5	19.5	20.5	21.5	22.5	23.5
बारंबारता	4	13	15	19	17	6
बिंदु के निर्देशांक	(18.5, 4)	(19.5,13)	(20.5,15)	(21.5,19)	(22.5,17)	(23.5,6)



आकृति 6.5

प्रश्नसंग्रह 6.5

1. निम्नलिखित आकृति में बहुभुज का निरीक्षण कर दिए गए प्रश्नों के उत्तर लिखिए ।



आकृति 6.6

(1) सबसे अधिक विद्यार्थी किस वर्ग में हैं ?

(2) शून्य बारंबारता वाला वर्ग लिखिए ।

(3) 50 विद्यार्थियों वाले वर्ग का वर्ग मध्य कितना है ?

(4) वर्ग मध्य 85 वाले वर्ग की निम्न वर्ग सीमा और उच्च वर्ग सीमा लिखिए ।

(5) 80-90 अंक प्राप्त करने वाले विद्यार्थी कितने हैं ?

2. निम्नलिखित सामग्री के लिए बारंबारता बहुभुज खींचिए ।

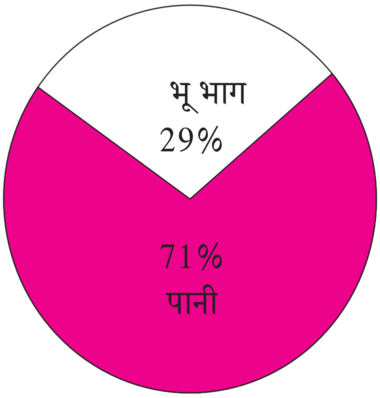
विद्युत बिल (रुपयों में)	0-200	200-400	400-600	600-800	800-1000
परिवार	240	300	450	350	160

3. किसी परीक्षा के परिणाम के प्रतिशत का वर्ग और उस वर्ग वाले विद्यार्थियों की संख्या निम्नलिखित सारिणी में दी गई है । इस सारिणी के आधार पर बारंबारता बहुभुज खींचिए ।

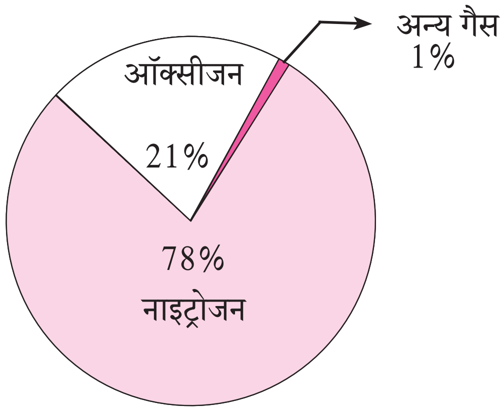
परिणाम (प्रतिशत)	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90	90-100
विद्यार्थियों की संख्या	7	33	45	65	47	18	5

वृत्तालेख (Pie diagram)

हमने पिछली कक्षा में भूगोल तथा विज्ञान विषयों की पुस्तकों में नीचे दिए गए आलेख देखे हैं । ऐसे आलेख को वृत्तालेख कहते हैं ।



पृथ्वी पर भू भाग तथा पानी का अनुपात



हवा में विभिन्न घटकों का अनुपात

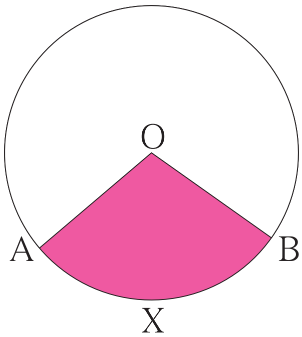
आकृति 6.7

वृत्तालेख में सांख्यिकीय सामग्री संपूर्ण वृत्त में दर्शाई जाती है। सामग्री के विभिन्न घटक निश्चित अनुपात में उस वृत्त के द्वैत्रिज्य के रूप में दर्शाए जाते हैं ।

आकृति 6.8 में O केंद्रवाले वृत्त में OA तथा OB त्रिज्या है ।

$\angle$ AOB केंद्रीय कोण हैं ।

O - AXB यह छायांकित भाग अर्थात द्वैत्रिज्य (sector of a circle) है ।



आकृति 6.8

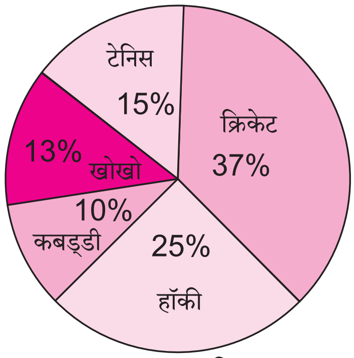
आओ जानें

वृत्तालेख का वाचन Reading of Pie diagram

वृत्तालेख को देखते ही जानकारी कैसे प्राप्त होती है यह दिए गए उदाहरण से समझें ।

कक्षा 10 वीं के 120 छात्रों से 'आपका पसंदीदा खेल' कौन-सा है ? यह प्रश्न पूछा गया ।

प्राप्त उत्तर (जानकारी) वृत्तालेख में दर्शाई गई है । सर्वाधिक पसंदीदा खेल कौन-सा है ? कितने प्रतिशत छात्रों को खो-खो पसंद है ? कबड्डी को पसंद करने वाले लड़के कितने प्रतिशत हैं ?



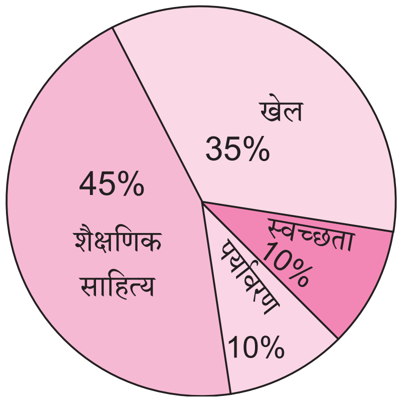
आकृति 6.9

इसप्रकार के प्रश्नों के उत्तर हमें एक दृष्टि में इस वृत्तालेख से मिल जाते हैं ।

एक और वृत्तालेख देखिए ।

संलग्न आकृति में वृत्तालेख किसी विद्यालय के वार्षिक आर्थिक नियोजन (बजट) का है । इस वृत्तालेख से हमें यह समझ में आता है कि-

- 45% राशि शैक्षणिक साहित्य के लिए सुरक्षित है ।
- खेल सामग्री के लिए 35% राशि दी गई है ।
- स्वच्छता की सामग्री के लिए 10% राशि रखी गई है ।
- पर्यावरण की सुरक्षा के लिए 10% राशि रखी गई है।



आकृति 6.10

इसप्रकार की जानकारी वृत्तालेख से हमें एक ही दृष्टि डालने पर मिलती है ।

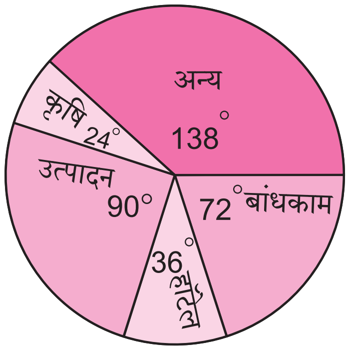
अब हम वृत्तालेख की अधिक जानकारी प्राप्त करेंगे ।

कई बार वृत्तालेख द्वारा दी गई विभिन्न जानकारी हम समाचारपत्रों में देखते हैं, जैसे वार्षिक बजट, ओलंपिक स्पर्धा में विभिन्न देशों का प्रदर्शन, देश में पैसा कैसे आता है और कैसे जाता है आदि ।

इसके लिए हमें वृत्तालेख जानकारी कैसे ज्ञात करनी है, इसे एक उदाहरण से समझेंगे ।

नमूना उदाहरण :

किसी सर्वेक्षण में प्राप्त कार्यकुशल व्यक्तियों का वर्गीकरण वृत्तालेख में दिखाया गया है। यदि उत्पादन क्षेत्र में कार्यरत व्यक्ति 4500 हों तो दिए गए प्रश्नों के उत्तर लिखिए।



आकृति 6.11

(i) सभी क्षेत्रों के कुल कार्यकुशल व्यक्ति कितने हैं ?

(ii) निर्माण कार्य के क्षेत्र में कार्यकुशल व्यक्तियों की संख्या कितनी होगी ?

(iii) कृषी क्षेत्र में कार्यकुशल व्यक्तियों की संख्या कितनी है ?

(iv) उत्पादन व निर्माण कार्य क्षेत्र में कुशल व्यक्तियों की संख्या में अंतर कितना है ?

हल : (i) माना कि सभी क्षेत्रों के कार्य में कुशल कुल व्यक्तियों की संख्या x है।

$\therefore$ x व्यक्तियों के लिए केंद्रीय कोण = 360°

उत्पादन के क्षेत्र में कार्यकुशल व्यक्तियों के लिए केंद्रीय कोण = $\dfrac{\text{उत्पादन क्षेत्रवाले व्यक्ति}}{\text{कुल व्यक्ति}} \times 360$

$$90 = \frac{4500}{x} \times 360$$

$$\therefore x = 18000$$

$\therefore$ सभी क्षेत्रों के कार्यकुशल व्यक्ति = 18000.

(ii) निर्माणकार्य के लिए केंद्रीय कोण 72° दिखाया गया है।

$$72 = \frac{\text{निर्माण कार्य क्षेत्रवाले व्यक्ति}}{18000} \times 360$$

$$\therefore \text{निर्माण कार्य क्षेत्रवाले व्यक्ति} = \frac{72 \times 18000}{360}$$

$$= 3600$$

(iii) कृषि क्षेत्र के लिए केंद्रीय कोण = 24° है।

$$24 = \frac{\text{कृषि क्षेत्रवाले व्यक्ति}}{\text{कार्य में कुशल कुल व्यक्ति}} \times 360$$

$$24 = \frac{\text{कृषि क्षेत्रवाले व्यक्ति}}{18000} \times 360$$

$$\therefore \text{कृषि क्षेत्रवाले व्यक्ति} = \frac{24 \times 18000}{360}$$

$$= 1200$$

(iv) उत्पादन तथा निर्माण कार्य क्षेत्रों के केंद्रीय कोण में अंतर = $90^\circ - 72^\circ = 18^\circ$ ।

$$\therefore \text{ केंद्रीय कोण में अंतर} = \frac{\text{दो क्षेत्रों के व्यक्तियों की संख्या में अंतर}}{\text{कार्य में कुशल कुल व्यक्ति}} \times 360$$

$$18 = \frac{\text{दो क्षेत्रों के व्यक्तियों की संख्या में अंतर}}{18000} \times 360$$

$$\text{उत्पादन तथा निर्माण कार्य क्षेत्रों में कुशल व्यक्तियों की संख्या में अंतर} = \frac{18 \times 18000}{360}$$

$$= 900$$

इसे ध्यान में रखें

- सामग्री के प्रत्येक घटक उससे संबंधित द्‌वैत्रिज्य में दिखाए जाते हैं ।
- द्‌वैत्रिज्य के केंद्रीय कोण का माप उस विशिष्ट घटकों की संख्या के अनुपात में होता है ।
- केंद्रीय कोण का माप $(\theta) = \dfrac{\text{संबंधित घटकों की संख्या}}{\text{कुल घटकों की संख्या}} \times 360$
- उचित त्रिज्या का वृत्त खींचिए । प्रत्येक घटक की संख्या के अनुपात में केंद्रीय कोण लेकर द्‌वैत्रिज्य में विभाजन किया जाता है ।

आओ जानें

वृत्तालेख बनाना (To draw Pie diagram)

हमने दिए गए वृत्तलेख से जानकारी का वाचन करना देखा है । अब वृत्तालेख कैसे बनाया जाता है, यह देखेंगे ।

1. वृत्तालेख बनाते समय संपूर्ण वृत्त को निश्चित अनुपात में विभाजित करके द्‌वैत्रिज्य की रचना करते हैं ।
2. प्रत्येक घटक से संबंधित द्‌वैत्रिज्य के केंद्रीय कोण का माप नीचे दिए गए सूत्र से ज्ञात कीजिए ।

$$\text{द्‌वैत्रिज्य के केंद्रीय कोण का माप } \theta = \frac{\text{उस घटक की संख्या}}{\text{सभी घटकों की कुल संख्या}} \times 360$$

उचित त्रिज्यावाला वृत्त खींचकर सामग्री में जितने घटक हैं उतने ही द्‌वैत्रिज्यों में वृत्त को विभाजित करते हैं ।

वृत्तालेख बनाने की कृति नीचे दिए गए उदाहरण से समझेंगे ।

हल किए गए उदाहरण

उदा. (1) किसी दुकान में दुपहिया वाहन खरीदने के लिए रंगों की पसंद दी गई है । यह जानकारी वृत्तालेख में दर्शाने के लिए प्रत्येक घटक दर्शाने वाले द्वैत्रिज्य के केंद्रीय कोण का माप निश्चित कीजिए ।

हल : दुपहिया वाहन की कुल माँग 36 है । इनमें से 10 वाहन सफेद रंग के हैं ।

$\therefore$ सफेद रंग वाले दुपहिया वाहन दर्शाने वाले द्वैत्रिज्य के केंद्रीय कोण का माप

$$= \frac{\text{सफेद रंगवाली दुपहिया वाहनों की संख्या}}{\text{दुपहिया वाहन की कुल संख्या}} \times 360$$

$$= \frac{10}{36} \times 360 = 100$$

इसप्रकार अन्य रंगोवाले दुपहिया वाहनों की संगत द्वैत्रिज्य के केंद्रीय कोण का माप ज्ञात कर सारिणी में दर्शाई गई है ।

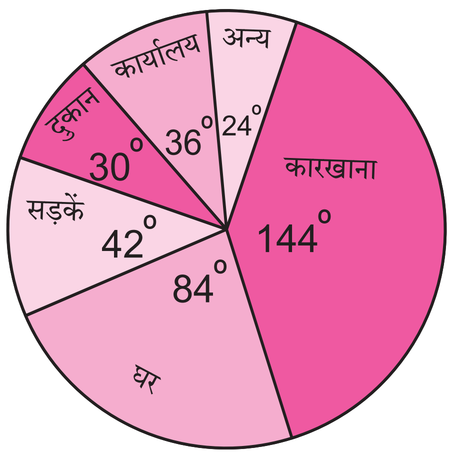
रंग	दुपहियों की माँग	द्वैत्रिज्य का केंद्रीय कोण
सफेद	10	$\frac{10}{36} \times 360^\circ = 100^\circ$
काला	9	$\frac{9}{36} \times 360^\circ = 90^\circ$
नीला	6	60°
भूरा	7	70°
लाल	4	40°
कुल	36	360°

उदा (2) किसी गाँव में विविध स्थानों की प्रतिदिन विद्युत आपूर्ति निम्नलिखित सारिणी में दर्शाई गई है । इस जानकारी के आधार पर वृत्तालेख खींचिए ।

स्थान	कारखाना	घर	सड़कें	दुकान	कार्यालय	अन्य
विद्युत आपूर्ति (हजार इकाई)	24	14	7	5	6	4

हल : कुल विद्युत आपूर्ति 60 हजार इकाई है । इससे केंद्रीय कोणों के माप ज्ञात कर सारिणी में दिखाएँगे ।

विद्युत आपूर्ति	यूनिटस्	केंद्रीय कोण का माप
कारखाना	24	$\frac{24}{60} \times 360 = 144^\circ$
घर	14	$\frac{14}{60} \times 360 = 84^\circ$
सड़कें	7	$\frac{7}{60} \times 360 = 42^\circ$
दुकान	5	$\frac{5}{60} \times 360 = 30^\circ$
कार्यालय	6	$\frac{6}{60} \times 360 = 36^\circ$
अन्य	4	$\frac{4}{60} \times 360 = 24^\circ$
कुल	60	360°



आकृति 6.12

वृत्तालेख बनाने के सोपान –

(1) सर्वप्रथम आकृति के अनुसार वृत्त बनाकर एक त्रिज्या खींचे । बाद में सारिणी से प्राप्त किए गए केंद्रीय कोण के माप के द्‌वैत्रिज्य, एक के बाद एक (144°, 84°, 42°, 30°, 36°, तथा 24°) घड़ी की सुई की दिशा में बनाए । (द्‌वैत्रिज्य एक ही दिशा में एक के बाद एक खींचते समय उसके क्रम में परिवर्तन का कोई असर नहीं होता ।)

(2) प्रत्येक द्‌वैत्रिज्य में संबंधित घटकों को दर्ज किया ।

कृति :

किसी परिवार में विभिन्न मदों पर होने वाला मासिक खर्च दिया गया है । इसके आधार पर केंद्रीय कोण ज्ञात कर वृत्तालेख खींचिए ।

विभिन्न मद	प्रतिशत खर्च	केंद्रीय कोण के माप
अन्न	40	$\frac{40}{100} \times 360 = \square$
कपड़ा	20	$\square \times \square = \square$
किराया	15	$\square \times \square = \square$
शिक्षा	20	$\square \times \square = \square$
अन्य खर्च	05	$\square \times \square = \square$
कुल	100	360°

प्रश्नसंग्रह 6.6

1. किसी रक्तदान शिविर में विभिन्न आयु गट के 200 व्यक्तियों द्‌वारा किया गया रक्तदान दिया गया है । इसके आधार पर वृत्तालेख खींचिए ।

आयु गट (वर्ष में)	20-25	25-30	30-35	35-40
व्यक्तियों की संख्या	80	60	35	25

2. किसी विद्‌यार्थी को विभिन्न विषयों में 100 में से प्राप्त अंक दिए गए हैं । इस जानकारी को वृत्तालेख द्‌वारा दिखाइए ।

विषय	अंग्रेजी	मराठी	विज्ञान	गणित	स. शास्त्र	हिंदी
अंक	50	70	80	90	60	50

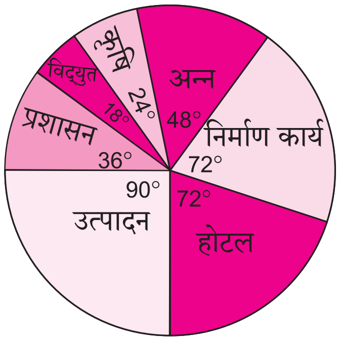
3. वृक्षारोपण कार्यक्रम के अंतर्गत विद्‌यालय की विभिन्न कक्षाओं के विद्‌यार्थियों द्‌वारा लगाये गए वृक्षों की संख्या सारिणी में दी गई है । यह जानकारी वृत्तालेख द्‌वारा दिखाइए ।

कक्षा	5 वीं	6 वीं	7 वीं	8 वीं	9 वीं	10 वीं
पेड़ों की संख्या	40	50	75	50	70	75

4. किसी फल विक्रेता के पास आए विभिन्न फलों की माँग का प्रतिशत निम्नलिखित सारिणी में दिया है । इस जानकारी के अनुसार वृत्तालेख खींचिए ।

फल	आम	मोसंबी	सेब	चीकू	संतरा
माँग (प्रतिशत में)	30	15	25	20	10

5. किसी गाँव में भिन्न-भिन्न व्यवसायों के व्यवसायियों का प्रतिशत दिखानेवाला वृत्तालेख आकृति 6.13 में दिया गया है । इसके आधार दिए गए प्रश्नों के उत्तर लिखिए ।



आकृति 6.13

(1) कुल व्यवसायियों की संख्या 10000 हो तो निर्माण कार्य के क्षेत्र में कितने व्यवसायी हैं ?

(2) प्रशासन के क्षेत्र में कितने व्यवसायी कार्यरत हैं ?

(3) उत्पादन के क्षेत्र में कितने प्रतिशत व्यवसायी हैं?

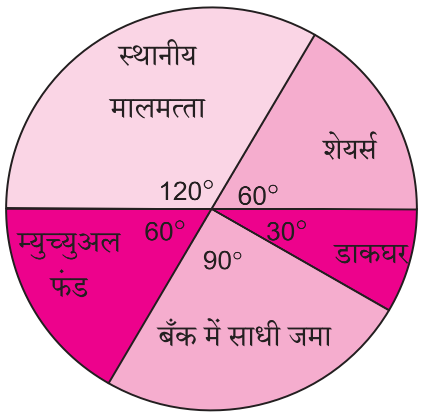
6. किसी परिवार में वार्षिक निवेश का वृत्तालेख साथ की आकृति में दिया गया है । इसके आधार पर नीचे दिए गए प्रश्नों के उत्तर लिखिए ।

(1) शेयर्स में निवेश राशि रु. 2000 हो तो कुल निवेश कितना होगा ?

(2) बैंक में जमा राशि कितनी होगी ?

(3) शेयर्स की अपेक्षा म्युच्युअल फंड में कितनी अधिक राशि निवेश की गई है ?

(4) डाकघर में निवेश कितना है ?



आकृति 6.14

प्रकीर्ण प्रश्नसंग्रह 6

1. वैकल्पिक प्रश्नों के उत्तर दिए गए विकल्पों में से चुनकर लिखिए ।

(1)विभिन्न रक्त गटों के व्यक्तियों का रक्त गट के अनुसार वर्गीकरण वृत्तालेख में दिखाना है । O- रक्त गट वाले व्यक्ति 40% हों तो O- रक्त गट वाले व्यक्तियों के लिए वृत्तालेख में केंद्रीय कोण कितना लेंगे ?

(A) 114° (B) 140° (C) 104° (D) 144°

(2) किसी इमारत के निर्माण कार्य के विभिन्न खर्च को वृत्तालेख द्वारा दिखाया गया है, सीमेंट का खर्च 75° के केंद्रीय कोण से दिखाया गया है । सीमेंट का खर्च रु. 45000 हो तो इमारत के निर्माण कार्य का कुल खर्च रु. . . . . . .

(A) 2,16,000 (B) 3,60,000 (C) 4,50,000 (D) 7,50,000

(3) वर्गीकृत बारंबारता सारिणी में संचयी बारंबारता का उपयोग . . . . . ज्ञात करने के लिए होता है ।

(A) माध्य (B) माध्यिका (C) बहुलक (D) इनमें से सभी

(4) वर्गीकृत बारंबारता सारिणी में सामग्री का माध्य ज्ञात करने के लिए सूत्र $\overline{X} = A + \frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i} \times g$ में $u_i = . . .$

(A) $\frac{x_i + A}{g}$ (B) $(x_i - A)$ (C) $\frac{x_i - A}{g}$ (D) $\frac{A - x_i}{g}$

(5)

प्रतिलीटर तय की गई दूरी (किमी)	12-14	14-16	16-18	18-20
कार की संख्या	11	12	20	7

ऊपरोक्त सामग्री के लिए कार द्वारा प्रतिलीटर तय की गई दूरी की माध्यिका . . . . . इस वर्ग में है ।

(A) 12-14 (B) 14-16 (C) 16-18 (D) 18-20

(6)

प्रत्येक विद्यार्थी द्वारा लगाये गए वृक्ष	1-3	4-6	7-9	10-12
विद्यार्थी संख्या	7	8	6	4

ऊपरोक्त बारंबारता सारिणी में दिए गए आँकड़ों के लिए बारंबारता बहुभुज ज्ञात करना है । 4-6 वर्ग में विद्यार्थियों की संख्या दर्शाने वाला बिंदुओं का निर्देशांक . . . . . है ।

(A) (4, 8) (B) (3, 5) (C) (5, 8) (D) (8, 4)

2. अंगूर के मौसम में बागान मालिकों को प्राप्त उत्पादन की वर्गीकृत बारंबारता सारिणी नीचे दी गई है । इससे उत्पादन का माध्य ज्ञात कीजिए ।

उत्पादन (हजार रूपये में)	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80
बागान मालिक	10	11	15	16	18	14

3. नीचे दी गई वर्गीकृत बारंबारता सारिणी में एक बैंक द्वारा तालाब के लिए उपलब्ध कराया गया कर्ज दिया गया है। बैंक द्वारा दी गई रकम का माध्य ज्ञात कीजिए ।

कर्ज (हजार रुपयों में)	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90
तालाबों की संख्या	13	20	24	36	7

4. किसी कारखाने में 120 मजदूरों के साप्ताहिक वेतन की वर्गीकृत बारंबारता बंटन सारिणी नीचे दी गई है, इसके आधार पर मजदूरों के वेतन का माध्य ज्ञात कीजिए ।

साप्ताहिक वेतन (रुपयों में)	0-2000	2000-4000	4000-6000	6000-8000
मजदूरों की संख्या	15	35	50	20

5. बाढ़पीड़ितों के 50 परिवारों को दी गई सहायता की राशि निम्नलिखित वर्गीकृत बारंबारता सारिणी में दी गई है । इसके आधार पर सहायता की राशि का माध्य ज्ञात कीजिए ।

सहायता की राशि (हजार रुपयों में)	50-60	60-70	70-80	80-90	90-100
परिवारों की संख्या	7	13	20	6	4

6. दी गई वर्गीकृत बारंबारता सारिणी में सार्वजनिक बस सेवा के 250 बसों से एक दिन में तय की गई दूरी दी गई है। इस आधार पर एक दिन में तय की गई दूरी की माध्यिका ज्ञात कीजिए ।

दूरी (किलोमीटर)	200-210	210-220	220-230	230-240	240-250
बसों की संख्या	40	60	80	50	20

7. किसी जनरल स्टोर्स में विभिन्न वस्तुओं की कीमत तथा उनकी माँग को वर्गीकृत बारंबारता सारिणी में दिखाया गया है । इसके आधार पर कीमत की माध्यिका ज्ञात कीजिए ।

कीमत (रुपयों में)	20 से कम	20-40	40-60	60-80	80-100
वस्तुओं की संख्या	140	100	80	60	20

8. निम्नलिखित वर्गीकृत बारंबारता बंटन सारिणी में किसी मिठाई की दुकान में भिन्न-भिन्न वजनवाली मिठाई की माँग दी गई है । इस आधार पर वजन के माँग का बहुलक ज्ञात कीजिए ।

मिठाई का वजन (ग्राम)	0-250	250-500	500-750	750-1000	1000-1250
ग्राहक संख्या	10	60	25	20	15

9. दी गई बारंबारता बंटन सारिणी से आयतालेख खींचिए ।

विद्युत का उपभोग (यूनिटस्)	50-70	70-90	90-110	110-130	130-150	150-170
परिवारों की संख्या	150	400	460	540	600	350

10. किसी हथकरघा कारखाने में मजदूरों को एक साड़ी बनाने में लगने वाले दिन और मजदूरों की संख्या की वर्गीकृत बारंबारता सारिणी दी गई है । इस सामग्री के लिए बारंबारता बहुभुज खींचिए ।

दिन	8-10	10-12	12-14	14-16	16-18	18-20
मजदूरों की संख्या	5	16	30	40	35	14

11. किसी कक्षा में विद्यार्थियों को विज्ञान का प्रयोग करने के लिए लगनेवाला समय वर्गीकृत बारंबारता सारिणी में दिया गया है । इस जानकारी का आयतालेख बनाकर बारंबारता बहुभुज खींचिए ।

प्रयोग में लगने वाला समय (मिनटों में)	20-22	22-24	24-26	26-28	28-30	30-32
विद्यार्थियों संख्या	8	16	22	18	14	12

12. निमलिखित वर्गीकृत बारंबारता सारिणी के लिए बारंबारता बहुभुज खींचिए ।

रक्तदाताओं की आयु (वर्षे)	20-24	25-29	30-34	35-39	40-44	45-49
रक्तदाताओं की संख्या	38	46	35	24	15	12

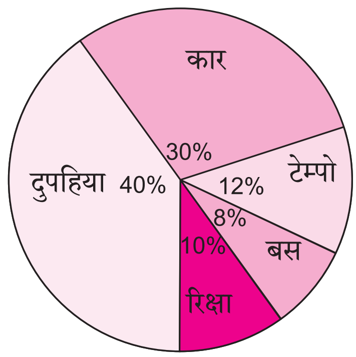
13. निम्नलिखित सारिणी में 150 गाँवों में होने वाली वर्षा का वार्षिक औसत दिया गया है । इसका बारंबारता बहुभुज खींचिए ।

औसत वर्षा की मात्रा (सेंटीमीटर)	0-20	20-40	40-60	60-80	80-100
गाँवों की संख्या	14	12	36	48	40

14. सुबह 8 से 10 बजे तक शहर के एक चौक के सिग्नल से आगे जाने वाले विविध वाहनों की संख्याओं का प्रतिशत संलग्न वृत्तालेख में दिया गया है –

(1) प्रत्येक प्रकार के वाहन के लिए केंद्रीय कोण का माप ज्ञात कीजिए ।

(2) दुपहिया वाहनों की संख्या 1200 हो तो वाहनों की कुल संख्या कितनी होगी ?



आकृति 6.15

15. दी गई सारिणी में ध्वनि प्रदूषण फैलाने वाले घटक दिए गए हैं । इसका वृत्तालेख बनाइए ।

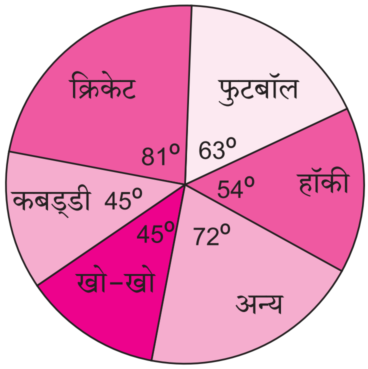
निर्माण कार्य	यातायात	हवाई जहाज की उड़ानें	उद्योग	रेल गाड़ी
10%	50%	9%	20%	11%

16. किसी सर्वेक्षण में शालेय विद्‌यार्थियों की विभिन्न खेलों में रुचि जानने के लिए किए गए सर्वेक्षण से प्राप्त जानकारी संलग्न वृत्तालेख में दिखाई गई है । कुल विद्‌यार्थियों की संख्या 1000 हो तो –

(1) क्रिकेट पसंद करने वाले विद्‌यार्थी कितने हैं ?

(2) फुटबॉल का खेल कितने विद्‌यार्थियों को पसंद है ?

(3) अन्य खेलों को पसंद करने वाले विद्‌यार्थियों की संख्या कितनी है ?



आकृति 6.16

17. किसी गाँव के स्वास्थ्य केंद्र पर 180 महिलाओं की जाँच हुई । उनमें से 50 स्त्रियों में हीमोग्लोबीन की कमी थी, 10 स्त्रियों में मोतिया बिंदु की तकलीफ थी, 25 स्त्रियों में साँस का विकार था । शेष स्त्रियाँ निरोगी (स्वस्थ) थीं यह जानकारी दर्शाने वाला वृत्तालेख खींचिए ।

18. वनीकरण के प्रकल्प में किसी विद्‌यालय के विद्‌यार्थियों ने पर्यावरण दिवस के उपलक्ष्य में 120 वृक्ष लगाये । उसकी निम्नलिखित जानकारी सारिणी में दी गई है । यह जानकारी दर्शाने वाला वृत्तालेख बनाइए ।

वृक्षों के नाम	आम	गुड़हल	पीपल	बबूल	नीम
वृक्षों की संख्या	20	28	24	22	26

❏❏❏

उत्तरसूची

1. दो चरांकवाले रेखीय समीकरण

प्रश्नसंग्रह 1.1

2. (1) (2, 4) (2) (3, 1) (3) (6,1) (4) (5, 2)
   (5) (−1, 1) (6) (1, 3) (7) (3, 2) (8) (7, 3)

प्रश्नसंग्रह 1.2

1. (1)

x	3	**−2**	0
y	**0**	5	3
(x, y)	(3, 0)	**(−2, 5)**	(0, 3)

(2)

x	**4**	−1	0
y	0	**−5**	−4
(x, y)	**(4, 0)**	**(−1,−5)**	(0,−4)

2. (1) (5, 1) (2) (4, 1) (3) (3, −3) (4) (−1, −5) (5) (1, 2.5) (6) (8, 4)

प्रश्नसंग्रह 1.3

1. $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 3 \times \boxed{5} - \boxed{2} \times 4 = \boxed{15} - 8 = \boxed{7}$
2. (1) −18 (2) 21 (3) $-\frac{4}{3}$
3. (1) (2, −1) (2) (−2, 4) (3) (3, −2) (4) (2, 6) (5) (6, 5) (6) $(\frac{5}{8}, \frac{1}{4})$

प्रश्नसंग्रह 1.4

1. (1) $(\frac{1}{9}, 1)$ (2) (3, 2) (3) $(\frac{5}{2}, -2)$ (4) (1, 1)

प्रश्नसंग्रह 1.5

1. वह संख्या 5 और 2 **2.** $x = 12$, $y = 8$ क्षेत्रफल = 640 वर्ग इकाई, परिमिती = 112 इकाई
3. पुत्र की आयु 15 वर्ष, पिता की आयु 40 वर्ष **4.** $\frac{7}{18}$
5. A = 30 किग्रा, B = 5.5 किग्रा **6.** 150 किमी.

प्रकीर्ण प्रश्नसंग्रह 1

1. (1) B (2) A (3) D (4) C (5) A
2.

x	−5	$\frac{3}{2}$
y	$-\frac{13}{6}$	0
(x, y)	$(-5, -\frac{13}{6})$	$(\frac{3}{2}, 0)$

3. (1) (3, 2)   (2) (−2, −1)   (3) (0, 5)   (4) (2, 4)   (5) (3, 1)

4. (1) 22 (2) −1 (3) 13

5. (1) $(-\frac{2}{3}, 2)$ (2) (1, 4)   (3) $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ (4) $(\frac{7}{11}, \frac{116}{33})$ (5) (2, 6)

6. (1) (6, −4)   (2) $(-\frac{1}{4}, -1)$ (3) (1, 2)   (4) (1, 1)   (5) (2, 1)

7. (2) चायपत्ती की दर ₹300 प्रति किग्रा
शक्कर की दर ₹ 4० प्रति किग्रा
(3) ₹100 के नोटोंकी संख्या 20
₹50 के नोटोंकी संख्या 10
(4) मनीषा की वर्तमान आयु 23 वर्ष
सविता की वर्तमान आयु 8 वर्ष
(5) कुशल मजदूर की मजदूरी 450 रु.
अकुशल मजदूर की मजदूरी 270 रु.
(6) हमीद की गति 50 किमी/घंटा
जोसेफ की गति 40 किमी/घंटा

2. वर्गसमीकरण

प्रश्नसंग्रह 2.1

1. $m^2 + 5m + 3 = 0$, $y^2 - 3 = 0$ (इस प्रकार की कोई भी)
2. (1), (2), (4), (5) यह वर्गसमीकरण हैं।
3. (1) $y^2 + 2y - 10 = 0$, $a = 1, b = 2, c = -10$
(2) $x^2 - 4x - 2 = 0$, $a = 1, b = -4, c = -2$
(3) $x^2 + 4x + 3 = 0$, $a = 1, b = 4, c = 3$
(4) $m^2 + 0m + 9 = 0$, $a = 1, b = 0, c = 9$
(5) $6p^2 + 3p + 5 = 0$, $a = 6, b = 3, c = 5$
(6) $x^2 + 0x - 22 = 0$, $a = 1, b = 0, c = -22$
4. (1) 1 है, −1 नहीं है। (2) $\frac{5}{2}$ है, 2 नहीं है।
5. k = 3   6. k = −7

प्रश्नसंग्रह 2.2

1. (1) 9, 6   (2) −5, 4   (3) $-13, -\frac{1}{2}$ (4) $5, -\frac{3}{5}$
(5) $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ (6) $\frac{2}{3}, -\frac{1}{2}$ (7) $-\frac{5}{\sqrt{2}}, -\sqrt{2}$ (8) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$
(9) 25, −1   (10) $-\frac{3}{5}, \frac{3}{5}$ (11) 0, 3   (12) $-\sqrt{11}, \sqrt{11}$

प्रश्नसंग्रह 2.3

1. (1) 4, –5 (2) $(\sqrt{6}-1), (-\sqrt{6}-1)$ (3) $\frac{\sqrt{13}+5}{2}, \frac{-\sqrt{13}+5}{2}$

(4) $\frac{\sqrt{2}+2}{3}, \frac{-\sqrt{2}+2}{3}$ (5) $-\frac{5}{4}, -\frac{5}{2}$ (6) $\frac{2+\sqrt{39}}{5}, \frac{2-\sqrt{39}}{5}$

प्रश्नसंग्रह 2.4

1. (1) 1, –7, 5 (2) 2, –5, 5 (3) 1, –7, 0

2. (1) –1, –5 (2) $\frac{3+\sqrt{17}}{2}, \frac{3-\sqrt{17}}{2}$ (3) $\frac{-1+\sqrt{22}}{3}, \frac{-1-\sqrt{22}}{3}$

(4) $\frac{2+\sqrt{14}}{5}, \frac{2-\sqrt{14}}{5}$ (5) $\frac{-1+\sqrt{73}}{6}, \frac{-1-\sqrt{73}}{6}$ (6) $-1, -\frac{8}{5}$

3. $-\sqrt{3}, -\sqrt{3}$

प्रश्नसंग्रह 2.5

1. (1) 5 होने पर मूल भिन्न वास्तविक संख्या होगी, –5 होने पर वास्तविक संख्या नहीं होगी

(2) $x^2 + 7x + 5 = 0$ (3) $\alpha + \beta = 2, \alpha \times \beta = -\frac{3}{2}$

2. (1) 53 (2) –55 (3) 0

3. (1) वास्तविक एवं समान. (2) अवास्तविक एवं भिन्न (3) वास्तविक संख्या नहीं है ।

4. (1) $x^2 - 4x = 0$ (2) $x^2 + 7x - 30 = 0$

(3) $x^2 - \frac{1}{4} = 0$ (4) $x^2 - 4x - 1 = 0$

5. k = 3 **6.** (1) 18 (2) 50

7. (1) k = 12 या k = –12 (2) k = 0 या k = 6

प्रश्नसंग्रह 2.6

1. 9 वर्ष **2.** 10 एवं 12 **3.** खड़ी कतार में एवं आड़ी कतार में 10 व आड़ी कतार में 15.

4. किशोर की वर्तमान आयु 10 वर्ष एवं विवेक की वर्तमान आयु 15 वर्ष

5. 10 अंक **6.** बर्तनों की संख्या 6 तथा प्रत्येक बर्तन का लागत मूल्य 100 रूपये.

7. 6 किमी/घंटा **8.** निशू को 6 दिन एवं पिंटू को 12 दिन

9. भाजक = 9, भागफल = 51 **10.** AB = 7 सेमी, CD = 15 सेमी, AD = BC = 5 सेमी.

प्रकीर्ण प्रश्नसंग्रह 2

1. (1) B (2) A (3) C (4) B (5) C (6) B (7) C (8) C

2. (1) एवं (3) वर्गसमीकरण होगा ।

3. (1) −15 (2) 1 (3) 21

4. k = 3 **5.** (1) $x^2 - 100 = 0$ (2) $x^2 - 2x - 44 = 0$ (3) $x^2 - 7x = 0$

6. (1) वास्तविक संख्या नहीं हैं। (2) वास्तविक एवं असमान. (3) वास्तविक एवं समान.

7. (1) $\frac{1+\sqrt{21}}{2}, \frac{1-\sqrt{21}}{2}$ (2) $\frac{1}{2}, -\frac{1}{5}$ (3) 1, −4

(4) $\frac{-5+\sqrt{5}}{2}, \frac{-5-\sqrt{5}}{2}$ (5) मूल वास्तविक संख्या नहीं है। (6) $(2+\sqrt{7}), (2-\sqrt{7})$

8. $m = 14$ **9.** $x^2 - 5x + 6 = 0$ **10.** $x^2 - 4pqx - (p^2 - q^2)^2 = 0$

11. सागर के पास 100 रूपये व मुकुंद के पास 150 रूपये.

12. 12 आणि $\sqrt{24}$ या 12 और $-\sqrt{24}$ **13.** विद्‌यार्थियों की संख्या 60

14. चौड़ाई 45 मी. लंबाई 100 मी, खेत में बने तालाब की भुजा 15 मी.

15. बड़े नल से 3 घंटे एवं छोटे नल से 6 घंटे

3. अंकगणितीय श्रेणी

प्रश्नसंग्रह 3.1

1. (1) है, $d = 2$ (2) है, $d = \frac{1}{2}$ (3) है, $d = 4$ (4) नहीं है

(5) है, $d = -4$ (6) है, $d = 0$ (7) है, $d = \sqrt{2}$ (8) है, $d = 5$

2. (1) 10, 15, 20, 25, . . . (2) −3, −3, −3, −3, . . . (3) −7, −6.5, −6, −5.5, . .

(4) −1.25, 1.75, 4.75, 7.75, . . .(5) 6, 3, 0, −3 . . . (6) −19, −23, −27, −31

3. (1) $a = 5, d = -4$ (2) $a = 0.6, d = 0.3$ (3) $a = 127, d = 8$ (4) $a = \frac{1}{4}, d = \frac{1}{2}$

प्रश्नसंग्रह 3.2

1. (1) $d = 7$ (2) $d = 3$ (3) $a = -3, d = -5$ (4) $a = 70, d = -10$

2. है, 121 **3.** 104 **4.** 115 **5.** −121 **6.** 180

7. 55 **8.** 55 वाँ **9.** 60 **10.** 1

प्रश्नसंग्रह 3.3

1. 1215 **2.** 15252 **3.** 30450 **5.** 5040

5. 2380 **6.** 60 **7.** 4, 9, 14 या 14, 9, 4 **8.** −3, 1, 5, 9

प्रश्नसंग्रह 3.4

1. 70455 रूपये **2.** पहली किश्त 100 रूपये, अंतिम किश्त 560 रूपये. **3.** 1,92,000 रूपये

4. 48, 1242 **5.** −20°, −25°, −30°, −35°, −40°, −45° **6.** 325

प्रकीर्ण प्रश्नसंग्रह 3

1. (1) B (2) C (3) B (4) D (5) B (6) C (7) C (8) A (9) A (10) B

2. 40 **3.** 1, 6, 11, . . . **4.** −195 **5.** 16, −21 **6.** −1 **7.** 6, 10

8. 8 **9.** 67, 69, 71 **10.** 3, 7, ...147. 11, 15, . . . **14.** 2000 रूपये.

4. अर्थनियोजन

प्रश्नसंग्रह 4.1

1. CGST 6%, SGST 6%   2. SGST 9%, GST 18%
3. CGST ₹ 784 तथा SGST ₹ 784
4. वह बेल्ट ग्राहक को 691.48 रुपयों में मिलेगी ।
5. खिलौना कार का करपात्र मूल्य ₹ 1500 उसपर CGST ₹ 135 SGST ₹ 135
6. (1) SGST की दर 14%   (2) एसीपर GST की दर 28%
   (3) एसीका करपात्र मूल्य 40,000 रु.   (4) GST की कुल राशि 11,200 रु.
   (5) CGST 5600 रु.   (6) SGST 5600 रु.
7. प्रसाद को वह वॉशिंग मशीन 48,640 रुपयों में मिलेगी तथा बिल पर CGST 5320 रु. एवं SGST 5320 रु.

प्रश्नसंग्रह 4.2

1. चेतना स्टोर्स को 22,000 रु. देय होगा जीएसटी
2. नझमा को ₹ 12,500 का इनपुट टैक्स क्रेडिट मिलेगा । उसकी देय जी एसटी ₹ 2250.
3. अमीर इंटरप्राइजेज की देय जीएसटी 300 रु. उसमें से केंद्र की देय कर 150 रु. व राज्य को देय कर 150 रु.
   अकबरी ब्रदर्स की देय जीएसटी 400 रु. उसमें से केंद्र की देय कर 200 रु. व राज्य को देय कर 200 रु.
4. देय जीएसटी ₹ 100, CGST ₹ 50, UTGST ₹ 50.   5. CGST = SGST = ₹ 900

प्रश्नसंग्रह 4.3

1. (1) बाजार मूल्य100 रूपये (2) अंकित मूल्य 75 रूपये (3) अवमूल्य 5 रूपये.
2. 25%   3. 37,040 रूपये   4. 800 शेयर्स
5. प्रतिफल की दर 5.83%   6. कंपनी A में निवेश लाभप्रद है ।

प्रश्नसंग्रह 4.4

1. 200.60 रूपये   2. 999 रूपये
3.

शेयर्सकी संख्या	शेयर्सका बाजारमूल्य	शेयर्सका मूल्य	दलालीकी दर 0.2%	दलालीपर CGST 9%	दलालीपर SGST 9%	शेयर्सकी कुल मूल्य
100 B	₹ 45	₹ 4500	₹ 9	₹ 0.81	₹ 0.81	₹ 4510.62
75 S	₹ 200	₹15000	₹ 30	₹ 2.70	₹ 2.70	₹ 14964.60

4. 100 शेयर्स बिके   5. हानि 8560 रूपये.

प्रकीर्ण प्रश्नसंग्रह 4A

1. (1) C (2) B (3) D (4) B (5) A (6) B
2. कुल बिल 28,800 रु. सीजीएसटी 3150 रु. एसजीएसटी 3150 रु.

3. ₹ 997.50　　4. ₹ 12,500　　5. ₹ 4250 ITC देय कर ₹ 250

6. ITC ₹ 1550 केंद्र का कर ₹ 5030, देय एसजीएसटी 5030 रूपये.

7. करपात्र मूल्य ₹ 75,000, केंद्र का कर ₹ 4500, राज्य का कर ₹ 4500

8. थोक व्यापारी की करबीजक सीजीएसटी 16200 रूपये; एसजीएसटी 16200 रूपये.

खुदरा व्यापारी की करबीजक सीजीएसटी 19,800 रूपये; एसजीएसटी 19,800 रूपये.

थोक व्यापारी की देय कर (CGST) 2700 तथा (SGST) 2700,

खुदरा व्यापारी की देय कर (CGST) 3600 तथा (SGST) 3600

9. (1) अण्णा पाटिल द्वारा दिए गए करबीजक में सीजीएसटी ₹ 1960, एसजीएसटी ₹ 1960

(2) वसईके व्यापारी द्वारा ग्राहक से प्राप्त सीजीएसटी ₹ 2352 तथा एसजीएसटी ₹ 2352

(3) वसईके व्यापारी देय सीजीएसटी ₹ 392 तथा देय एसजीएसटी ₹ 392

10.

(1)

व्यक्ति	देय सीजीएसटी (₹)	देय एसजीएसटी (₹)	देय जीएसटी(₹)
उत्पादक	300	300	600
वितरक	360−300 =60	60	120
खुदरा व्यापारी	390−360 = 30	30	60
कुल कर	390	390	780

(2) अंततः ग्राहक को वह वस्तु 7280 रुपयों में मिलेगी ।

(3) उत्पादक से वितरक B2B, वितरक से खुदरा व्यापारी B2B, खुदरा व्यापारी से ग्राहक B2C

प्रकीर्ण प्रश्नसंग्रह 4B

1. (1) B　(2) B　(3) A　(4) C　(5) A

2. ₹ 130.39　　3. 22.2%　　4. 21,000 रूपये मिलेंगे ।

5. 500 शेयर्स मिलेंगे ।　　6. लाभ 887.70 रूपये　　7. कंपनी B

8. 1000 शेयर्स मिलेंगे ।　　9. 118 रूपये.

10. (1) 1,20,000 रूपये (2) 360 रूपये (3) 64.80 रूपये (4) 120424.80 रूपये.

11. 2%

5. संभाव्यता

प्रश्नसंग्रह 5.1

1. (1) 8 (2) 7 (3) 52 (4) 11

प्रश्नसंग्रह 5.2

1. (1) S = {1H, 1T, 2H, 2T, 3H, 3T, 4H, 4T, 5H, 5T, 6H, 6T}　　n(S) = 12

(2) S = {23, 25, 32, 35, 52, 53} n(S) = 6

2. S = {लाल, जामुनी, हरा, नीला, पीला, केशरिया} n(S) = 6

3. S = {मंगलवार, रविवार, शुक्रवार, बुधवार, सोमवार, शनिवार} n(S) = 6

4. (1) B_1B_2 (2) G_1G_2 (3) B_1G_1 B_2G_1 B_1G_2 B_2G_2

(4) $S = \{B_1B_2, B_1G_1, B_1G_2, B_2G_1, B_2G_2, G_1G_2,\}$

प्रश्नसंग्रह 5.3

1. (1) S = {1, 2, 3, 4, 5, 6} n(S) = 6

A = {2, 4, 6} n(A) = 3, B = {1, 3, 5} n(B) = 3, C = {2, 3, 5} n(C) = 3

(2) S = {(1,1), . . ., (1, 6), (2,1), . . ., (2, 6), (3, 1), . . .,(3, 6),
(4, 1), . . .,(4,6),(5, 1), . . .,(5, 6),(6, 1), . . .,(6, 6)} n(S) = 36

A = {(1, 5) (2, 4) (3, 3) (4, 2) (5, 1) (6, 6)} n(A) = 6

B = {(4, 6) (5, 5) (5, 6) (6, 4) (6, 5) (6, 6)} n(B) = 6

C = {(1, 1) (2, 2) (3, 3) (4, 4) (5, 5) (6, 6)} n(C) = 6

(3) S = {HHH, HHT, HTT, HTH, THT, TTH, THH, TTT} n(S) = 8

A = {HHH, HHT, HTH, THH} n(A) = 4

B = {TTT} n(B) = 1

C = {HHH, HHT, THH} n(C) = 3

(4) S = {10, 12, 13, 14, 15, 20, 21, 23, 24, 25, 30, 31, 32, 34, 35, 40, 41, 42, 43, 45, 50, 51, 52, 53, 54} n(S) = 25

A = {10, 12, 14, 20, 24, 30, 32, 34, 40, 42, 50, 52, 54} n(A) = 13

B = {12, 15, 21, 24, 30, 42, 45, 51, 54} n(B) = 9

C = {51, 52, 53, 54} n(C) = 4

(5) $S = \{M_1M_2, M_1M_3, M_1F_1, M_1F_2, M_2M_3, M_2F_1, M_2F_2, M_3F_1, M_3F_2, F_1F_2\}$
n(S) = 10

$A = \{M_1F_1, M_1F_2, M_2F_1, M_2F_2, M_3F_1, M_3F_2, F_1F_2\}$ n(A) = 7

$B = \{M_1F_1, M_1F_2, M_2F_1, M_2F_2, M_3F_1, M_3F_2\}$ n(B) = 6

$C = \{M_1M_2, M_1M_3, M_2M_3\}$ n(C) = 3

(6) S = {H1, H2, H3, H4, H5, H6 T1, T2, T3, T4, T5, T6} n(S) = 12

A = {H1, H3, H5} n(A) = 3

B = {H2, H4, H6, T2, T4, T6} n(B) = 6

C = { } n(C) = 0

प्रश्नसंग्रह 5.4

1. (1) $\frac{1}{2}$, (2) $\frac{1}{2}$ 2. (1) $\frac{3}{4}$, (2) $\frac{1}{4}$ 3. (1) $\frac{1}{6}$ (2) 0 (3) $\frac{5}{12}$

4. (1) $\frac{7}{15}$ (2) $\frac{1}{5}$ **5.** (1) $\frac{4}{5}$ (2) $\frac{1}{5}$ **6.** (1) $\frac{1}{13}$ (2) $\frac{1}{4}$

प्रकीर्ण प्रश्नसंग्रह – 5

1. (1) B (2) B (3) C (4) A (5) A **2.** वसीमकी **3.** (1) $\frac{1}{11}$ (2) $\frac{6}{11}$

4. $\frac{5}{26}$ **5.** (1) $\frac{2}{9}$ (2) $\frac{1}{3}$ (3) $\frac{4}{9}$ **6.** $\frac{1}{2}$ **7.** (1) $\frac{1}{3}$ (2) $\frac{1}{6}$

8. (1) $\frac{1}{2}$ (2) $\frac{1}{6}$ **9.** $\frac{1}{25}$ **10.** (1) $\frac{1}{8}$ (2) $\frac{1}{2}$ (3) $\frac{3}{4}$ (4) 1

11. (1) $\frac{5}{6}$ (2) $\frac{1}{6}$ (3) 1 (4) 0 **12.** (1) $\frac{1}{3}$ (2) $\frac{2}{3}$ (3) $\frac{2}{3}$ **13.** $\frac{2}{11}$

14. $\frac{13}{40}$ **15.** (1) $\frac{3}{10}$ (2) $\frac{3}{10}$ (3) $\frac{1}{5}$ **16.** $\frac{1}{36}$

6. सांख्यिकी

प्रश्नसंग्रह 6.1

(1) 4.36 घंटा (2) 521.43 रु. (3) 2.82 लीटर (4) 35310 रूपये

(5) 985 रूपये या 987.5 रूपये. (6) 3070 रु. या 3066.67 रूपये.

प्रश्नसंग्रह 6.2

(1) 11.4 घंटा (2) 184.4 अर्थात लगभग 184 आम (3) 74.558 $\approx$ 75 वाहन (4) 52.750 दिये

प्रश्नसंग्रह 6.3

1. 4.33 लीटर **2.** 72 यूनिट **3.** 9.94 लीटर **4.** 12.31 वर्ष

प्रश्नसंग्रह 6.5

1. (1) 60–70 (2) 20–30 व 90–100 (3) 55 (4) 80 व 90 (5) 15

प्रश्नसंग्रह 6.6

5. (1) 2000 (2) 1000 (3) 25%

6. (1) 12000 रूपये (2) 3000 रूपये (3) 2000 रूपये (4) 1000 रूपये.

प्रकीर्ण प्रश्नसंग्रह 6

1. (1) D (2) A (3) B (4) C (5) C (6) C

2. 52,500 रूपये **3.** 65,400 रूपये **4.** 4250 रूपये

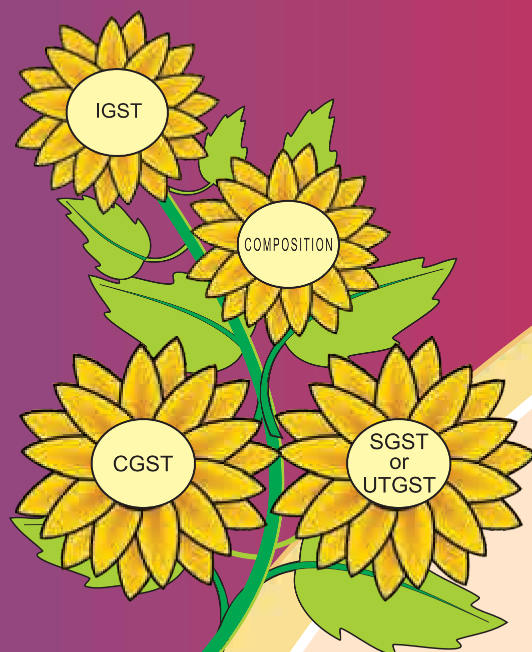
5. 72,400 रूपये **6.** 223.13 किमी. **7.** 32 रूपये **8.** 397.06 ग्राम

14. (1) कार – 108°, टेम्पो – 43°, बस – 29°, रिक्षा – 36°, दुपहिया – 144°

(2) वाहनों की कुल संख्या – 3000

16. (1) क्रिकेट पसंद करनेवाले – 225, (2) फुटबॉल पसंद करनेवाले – 175

(3) अन्य खेल पसंद करनेवाले – 200



महाराष्ट्र राज्य पाठ्यपुस्तक निर्मिती व अभ्यासक्रम संशोधन मंडळ, पुणे-४११००४.

हिंदी गणित इ.१०वी भाग-१ **₹ 80.00**