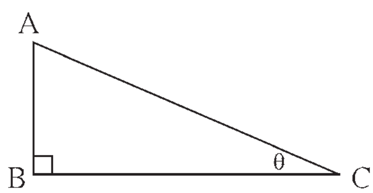
6 علم مثلث Trigonometry

آیئے سیکھیں

- مثلثیاتی نسبتیں
- مثلثیاتی متماثلہ مساوات
- صعودی زاویہ اور نزولی زاویہ
- اونچائی اور فاصلے پر مشتمل مثالیں

آیئے ذرا یاد کریں

.1 شکل 6.1 کی مدد سے خالی جگہ پر کیجیے۔



شکل 6.1

$\sin\theta = \frac{\square}{\square}$, $\cos\theta = \frac{\square}{\square}$,

$\tan\theta = \frac{\square}{\square}$

.2 ذیل کی نسبتوں کے تعلق کو مکمل کیجیے۔

(i) $\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \square$

(ii) $\sin\theta = \cos(90 - \square)$

(iii) $\cos\theta = \sin(90 - \square)$

(iv) $\tan\theta \tan(90 - \theta) = \square$

.3 ذیل کی مساوات مکمل کیجیے۔

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = \square$

.4 ذیل کی مثلثیاتی نسبتوں کی قیمت لکھیے۔

(i) $\sin 30° = \frac{1}{\square}$

(ii) $\cos 30° = \frac{\square}{\square}$

(iii) $\tan 30° = \frac{\square}{\square}$

(iv) $\sin 60° = \frac{\square}{\square}$

(v) $\cos 45° = \frac{\square}{\square}$

(vi) $\tan 45° = \square$

ہم نویں جماعت میں حادہ زاویہ کی بعض مثلثیاتی نسبتوں کا مطالعہ کر چکے ہیں۔ اس سال حادہ زاویہ کی مزید مثلثیاتی نسبتوں سے متعلق مطالعہ کریں گے۔

آیئے سمجھ لیں

cosec، sec اور cot نسبتیں (cosec, sec and cot ratios)

زاویہ کی sine نسبت کی معکوس نسبت کو cosecant نسبت کہتے ہیں۔اس مختصراً cosec لکھتے ہیں۔

$$\therefore \ \operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta}$$

اسی طرح cosine اور tangent نسبتوں کی معکوس نسبتوں کو بالترتیب secant اور cotangent نسبتیں کہتے ہیں، اور اسے مختصراً بالترتیب sec اور cot لکھتے ہیں۔

$\sec\theta = \dfrac{1}{\cos\theta}$ اور $\cot\theta = \dfrac{1}{\tan\theta}$

شکل 6.2 میں،

$$\sin\theta = \frac{AB}{AC}$$

$$\therefore \ \operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta} = \frac{1}{\frac{AB}{AC}} = \frac{AC}{AB}$$

لہٰذا،

$$\operatorname{cosec}\theta = \frac{\text{وتر}}{\text{مقابل کا ضلع}}$$

$$\tan\theta = \frac{AB}{BC}$$

$$\therefore \ \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} = \frac{1}{\frac{AB}{BC}}$$

$$\cot\theta = \frac{BC}{AB} = \frac{\text{متصلہ ضلع}}{\text{مقابل کا ضلع}}$$

$$\cos\theta = \frac{BC}{AC}$$

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = \frac{1}{\frac{BC}{AC}} = \frac{AC}{BC}$$

لہٰذا،

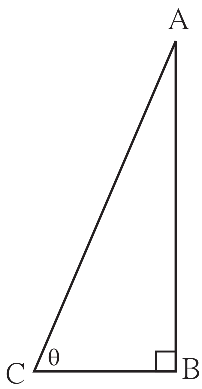
$$\sec\theta = \frac{\text{وتر}}{\text{متصلہ ضلع}}$$

یہ تو آپ کو معلوم ہی ہے کہ،

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$\therefore \ \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} = \frac{1}{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$\therefore \ \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

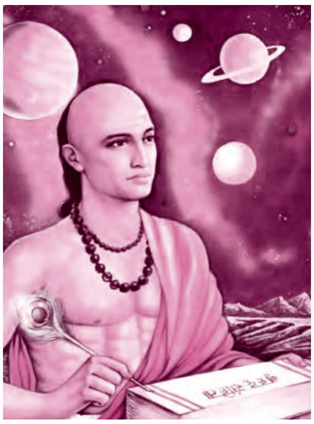


شکل 6.2

اسے ذہن نشین کرلیں

مثلثیاتی نسبتوں میں ایک دوسرے سے تعلق cosec، sec اور cot ان نسبتوں کی تعریف کی بنا پر،

- $\frac{1}{\sin\theta} = \operatorname{cosec}\theta \quad , \quad \therefore \; \sin\theta \times \operatorname{cosec}\theta = 1$
- $\frac{1}{\cos\theta} = \sec\theta \quad , \quad \therefore \; \cos\theta \times \sec\theta = 1$
- $\frac{1}{\tan\theta} = \cot\theta \quad , \quad \therefore \; \tan\theta \times \cot\theta = 1$



مزید معلومات کے لیے

عظیم بھارتی سائنس داں آریا بھٹ کی پیدائش 476 عیسوی میں کُسُم پور میں ہوئی۔ یہ مقام موجودہ ریاست بہار میں پٹنہ شہر کے قریب تھا۔ انھوں نے علم حساب، الجبرا اور علم ہندسہ، ریاضی کی شاخوں میں قابل ذکر کام کیا ہے۔ ’آریہ بھٹیئ‘ نامی کتاب میں کئی ریاضیاتی نتائج ضابطوں کی صورت میں لکھے ہوئے ہیں۔ مثلاً

(1) حسابی تصاعد میں n واں رکن معلوم کرنا اور پہلے n ارکان کی جمع کا ضابطہ

(2) $\sqrt{2}$ کی قیمت معلوم کرنے کا ضابطہ

(3) انھوں نے π عدد کی قیمت 3.1416 معلوم کی جو چار اعشاریہ مقام تک کی صحیح قیمت ہے۔ وغیرہ۔

علم فلکیات کے مطالعہ میں انھوں نے علم مثلث کا استعمال کیا اور ’جیا نسبت‘ یعنی sine نسبت (sine ratio) کا تصور پہلی مرتبہ استعمال کیا۔

ریاضی کے علم کے بارے میں غور کریں تو انھوں نے اپنے زمانے میں ریاضی میں عظیم خدمات انجام دیں۔ اس وجہ سے ان کی کتاب کی ترسیل سارے بھارت میں ہوئی۔ اسی طرح عربوں کے توسط سے یہ یورپ میں بھی پہنچی۔

سورج زمین کے گرد گردش نہیں کرتا ہے بلکہ سورج کے گرد زمین گردش کرتی ہے۔ اس خیال کو سب سے پہلے کوپرنیکس نے پیش کیا، ایسا مانا جاتا ہے لیکن اس سے تقریباً 1000 سال قبل ”سورج زمین کے گرد گردش ہوا نظر آتا ہے، ایسا تصور کیا جاتا تھا۔“ ایسا آریہ بھٹ نے اس کتاب میں واضح طور پر لکھا ہے۔

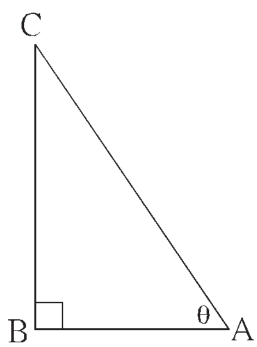
19 اپریل 1975 کے روز بھارت نے اپنا پہلا مصنوعی سیارچہ آسمان میں داغا۔ اس ذیلی سیارچہ کو ’آریا بھٹ‘ نام دے کر ہمارے ملک نے عظیم ریاضی داں کو مناسب خراج تحسین پیش کی۔

0°، 30°، 45°، 60° اور 90° پیمائش کے زاویوں کی مثلثیاتی نسبتوں کی جدول

مثلثیاتی نسبتیں	زاویوں کی پیمائش (θ)				
	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\theta$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	طے نہیں کر سکتے
$\text{cosec}\,\theta = \frac{1}{\sin\theta}$	طے نہیں کر سکتے	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1
$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	طے نہیں کر سکتے
$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$	طے نہیں کر سکتے	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

آیئے سمجھ لیں

مثلثیاتی متماثلہ مساواتیں (Trigonometrical identities) :



شکل 6.3

بازو کی شکل 6.3 میں، $\triangle ABC$، قائمۃ الزاویہ مثلث ہے جس میں $\angle B = 90°$

(i) $\sin\theta = \dfrac{BC}{AC}$ (ii) $\cos\theta = \dfrac{AB}{AC}$

(iii) $\tan\theta = \dfrac{BC}{AB}$ (iv) $\text{cosec}\,\theta = \dfrac{AC}{BC}$

(v) $\sec\theta = \dfrac{AC}{AB}$ (vi) $\cot\theta = \dfrac{AB}{BC}$

اسی طرح فیثاغورث کے مسئلہ سے،

$$AB^2 + BC^2 = AC^2 \quad \ldots \text{(I)}$$

مساوات (I) کے طرفین کو AC^2 سے تقسیم دینے پر

$$\frac{BC^2 + AB^2}{AC^2} = \frac{AC^2}{AC^2}$$

$$\therefore \frac{BC^2}{AC^2} + \frac{AB^2}{AC^2} = 1$$

$$\therefore \left(\frac{BC}{AC}\right)^2 + \left(\frac{AB}{AC}\right)^2 = 1$$

$$\therefore (\sin\theta)^2 + (\cos\theta)^2 = 1$$

[ہم $(\sin\theta)^2$ کو $\sin^2\theta$ اور $(\cos\theta)^2$ کو $\cos^2\theta$ لکھتے ہیں]

$$\therefore \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \qquad \text{... (II)}$$

اب مساوات (II) کے طرفین کو $\sin^2\theta$ سے تقسیم کرنے پر،

$$\frac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta} + \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} = \frac{1}{\sin^2\theta}$$

$$\therefore 1 + \cot^2\theta = \operatorname{cosec}^2\theta \qquad \text{... (III)}$$

اسی طرح، مساوات (II) کے طرفین کو $\cos^2\theta$ سے تقسیم کرنے پر،

$$\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} + \frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta}$$

$$\therefore \tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$$

$$\therefore 1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta \qquad \text{... (IV)}$$

مساوات (I)، (II)، (III) اور (IV) یہ بنیادی مثلثیاتی متماثلہ مساواتیں ہیں۔

حل کردہ مثالیں

مثال (1) : اگر $\sin\theta = \frac{20}{29}$ ہو تو $\cos\theta$ کی قیمت معلوم کیجیے۔

حل : طریقہ I

ہمیں معلوم ہے کہ

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

$$\left(\frac{20}{29}\right)^2 + \cos^2\theta = 1$$

$$\frac{400}{841} + \cos^2\theta = 1$$

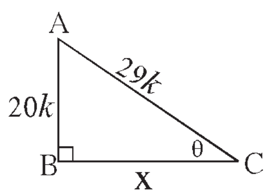
$$\cos^2\theta = 1 - \frac{400}{841}$$

$$= \frac{441}{841}$$

طرفین کا جذر المربع لینے پر،

$$\therefore \cos\theta = \frac{21}{29}$$

طریقہ II



شکل 6.4

$$\sin\theta = \frac{20}{29}$$

$$\sin\theta = \frac{AB}{AC} \qquad \text{... (لیکن شکل 6.4 سے)}$$

$\therefore$ فرض کیجیے $AB = 20k$، $AC = 29k$ اور $BC = x$

فیثاغورث کے مسئلہ سے،

$$AB^2 + BC^2 = AC^2$$

$$(20k)^2 + x^2 = (29k)^2$$

$$400k^2 + x^2 = 841k^2$$

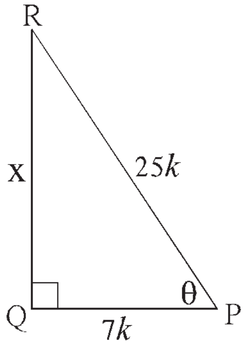
$$x^2 = 841k^2 - 400k^2$$

$$= 441k^2$$

$$\therefore x = 21k$$

$$\therefore \cos\theta = \frac{BC}{AC} = \frac{21k}{29k} = \frac{21}{29}$$

مثال (2) : اگر $\sec\theta = \frac{25}{7}$ ہوتو $\tan\theta$ کی قیمت معلوم کیجیے۔



شکل 6.5

حل : طریقہ I

ہمیں معلوم ہے کہ

$$\therefore \quad 1 + \tan^2\theta = \left(\frac{25}{7}\right)^2$$

$$\therefore \quad \tan^2\theta = \frac{625}{49} - 1$$

$$= \frac{625 - 49}{49}$$

$$= \frac{576}{49}$$

جذرالمربع لینے پر،

$$\therefore \quad \tan\theta = \frac{24}{7}$$

طریقہ II

$$\sec\theta = \frac{PR}{PQ}$$

فرض کیجیے،

$QR = X$ اور $PQ = 7k$ ،$PR = 25k$

فیثاغورث کے مسئلہ سے،

$$PQ^2 + QR^2 = PR^2$$

$$\therefore \quad (7k)^2 + QR^2 = (25k)^2$$

$$\therefore \quad QR^2 = 625k^2 - 49k^2 = 576k^2$$

$$\therefore \quad QR = 24k$$

جذرالمربع لینے پر،

اب , $\tan\theta = \frac{QR}{PQ} = \frac{24k}{7k} = \frac{24}{7}$

مثال (3) : اگر $5\sin\theta - 12\cos\theta = 0$ ہوتو $\sec\theta$ اور $\operatorname{cosec}\theta$ کی قیمت معلوم کیجیے۔

حل : $5\sin\theta - 12\cos\theta = 0$

$$\therefore \quad 5\sin\theta = 12\cos\theta$$

$$\therefore \quad \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{12}{5}$$

$$\therefore \quad \tan\theta = \frac{12}{5}$$

ہمیں معلوم ہے کہ

$$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$$

$$\therefore 1 + \left(\frac{12}{5}\right)^2 = \sec^2\theta$$

$$\therefore \quad 1 + \frac{144}{25} = \sec^2\theta$$

$$\therefore \quad \frac{25 + 144}{25} = \sec^2\theta$$

$$\therefore \quad \sec^2\theta = \frac{169}{25}$$

$$\therefore \quad \sec\theta = \frac{13}{5}$$

$$\therefore \cos\theta = \frac{5}{13}$$

اب، $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$$\therefore \quad \sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$$

$$\therefore \quad \sin^2\theta = 1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2$$

$$= 1 - \frac{25}{169}$$

$$= \frac{144}{169}$$

$$\therefore \quad \sin\theta = \frac{12}{13}$$

$$\therefore \quad \operatorname{cosec}\theta = \frac{13}{12}$$

مثال (4) : اگر $\cos 0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ تو $\frac{1-\sec\theta}{1+\operatorname{cosec}\theta}$ کی قیمت معلوم کیجیے۔

حل : طریقہ I

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad , \quad \therefore \ \sec\theta = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

$$\therefore \ \sin^2\theta + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1$$

$$\therefore \ \sin^2\theta = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

$$\therefore \ \sin\theta = \frac{1}{2} \quad , \quad \therefore \ \operatorname{cosec}\theta = 2$$

$$\therefore \ \frac{1-\sec\theta}{1+\operatorname{cosec}\theta} = \frac{1-\frac{2}{\sqrt{3}}}{1+2}$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{3}-2}{\sqrt{3}}}{3}$$

$$= \frac{\sqrt{3}-2}{3\sqrt{3}}$$

طریقہ II

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \text{... (یہ ہم جانتے ہیں)}$$

$$\therefore \quad \theta = 30^\circ$$

$$\therefore \quad \sec\theta = \sec 30^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\operatorname{cosec}\theta = \operatorname{cosec} 30^\circ = 2$$

$$\therefore \quad \frac{1-\sec\theta}{1+\operatorname{cosec}\theta} = \frac{1-\frac{2}{\sqrt{3}}}{1+2}$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{3}-2}{\sqrt{3}}}{3}$$

$$= \frac{\sqrt{3}-2}{3\sqrt{3}}$$

مثال (5) : دکھائیے کہ $\sec x + \tan x = \sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}$

حل :

$$\sec x + \tan x = \frac{1}{\cos x} + \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$= \frac{1+\sin x}{\cos x}$$

$$= \sqrt{\frac{(1+\sin x)^2}{\cos^2 x}}$$

$$= \sqrt{\frac{(1+\sin x)(1+\sin x)}{1-\sin^2 x}}$$

$$= \sqrt{\frac{(1+\sin x)(1+\sin x)}{(1-\sin x)(1+\sin x)}}$$

$$= \sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}$$

مثال (6) : درج ذیل مساوات میں θ کا اخراج کیجیے۔

$$x = a\cot\theta - b\,\mathrm{cosec}\,\theta$$
$$y = a\cot\theta + b\,\mathrm{cosec}\,\theta$$

حل :

$$x = a\cot\theta - b\,\mathrm{cosec}\,\theta \quad \ldots \text{(I)}$$
$$y = a\cot\theta + b\,\mathrm{cosec}\,\theta \quad \ldots \text{(II)}$$

مساوات (I) اور (II) دونوں کی جمع کرنے پر،

$$x + y = 2a\cot\theta$$
$$\therefore \cot\theta = \frac{x+y}{2a} \quad \ldots \text{(III)}$$

مساوات (II) سے (I) تفریق کرنے پر،

$$y - x = 2b\,\mathrm{cosec}\,\theta$$
$$\therefore \mathrm{cosec}\,\theta = \frac{y-x}{2b} \quad \ldots \text{(IV)}$$

اب , $\mathrm{cosec}^2\theta - \cot^2\theta = 1$

$$\therefore \left(\frac{y-x}{2b}\right)^2 - \left(\frac{y+x}{2a}\right)^2 = 1$$
$$\therefore \frac{(y-x)^2}{4b^2} - \frac{(y+x)^2}{4a^2} = 1$$

یا , $\left(\frac{y-x}{b}\right)^2 - \left(\frac{y+x}{a}\right)^2 = 4$

مشقی سیٹ 6.1

.1 اگر $\sin\theta = \frac{7}{25}$ ہوتو $\cos\theta$ اور $\tan\theta$ کی قیمتیں معلوم کیجیے۔

.2 اگر $\tan\theta = \frac{3}{4}$ ہوتو $\sec\theta$ اور $\cos\theta$ کی قیمتیں معلوم کیجیے۔

.3 اگر $\cot\theta = \frac{40}{9}$ ہوتو $\mathrm{cosec}\,\theta$ اور $\sin\theta$ کی قیمتیں معلوم کیجیے۔

.4 اگر $5\sec\theta - 12\,\mathrm{cosec}\,\theta = 0$ ہوتو $\sec\theta$، $\cos\theta$ اور $\sin\theta$ کی قیمتیں معلوم کیجیے۔

.5 اگر $\tan\theta = 1$ ہوتو $\frac{\sin\theta + \cos\theta}{\sec\theta + \mathrm{cosec}\,\theta}$ کی قیمت معلوم کیجیے۔

.6 ثابت کیجیے کہ

(1) $\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta} + \cos\theta = \sec\theta$

(2) $\cos^2\theta(1 + \tan^2\theta) = 1$

(3) $\sqrt{\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}} = \sec\theta - \tan\theta$

(4) $(\sec\theta - \cos\theta)(\cot\theta + \tan\theta) = \tan\theta\sec\theta$

(5) $\cot\theta + \tan\theta = \operatorname{cosec}\theta \cdot \sec\theta$

(6) $\frac{1}{\sec\theta - \tan\theta} = \sec\theta + \tan\theta$

(7) $\sin^4\theta - \cos^4\theta = 1 - 2\cos^2\theta$

(8) $\sec\theta + \tan\theta = \frac{\cos\theta}{1-\sin\theta}$

(9) اگر $\tan\theta + \frac{1}{\tan\theta} = 2$ ہوتو دکھایئے کہ $\tan^2\theta + \frac{1}{\tan^2\theta} = 2$

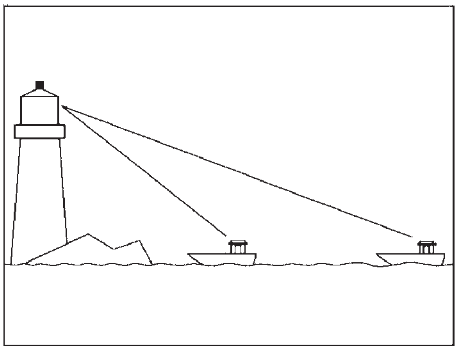
(10) $\frac{\tan A}{(1+\tan^2 A)^2} + \frac{\cot A}{(1+\cot^2 A)^2} = \sin A \cos A$

(11) $\sec^4 A\,(1 - \sin^4 A) - 2\tan^2 A = 1$

(12) $\frac{\tan\theta}{\sec\theta - 1} = \frac{\tan\theta + \sec\theta + 1}{\tan\theta + \sec\theta - 1}$

آیئے سمجھ لیں

علم مثلث کا اطلاق (Application of Trigonometry)



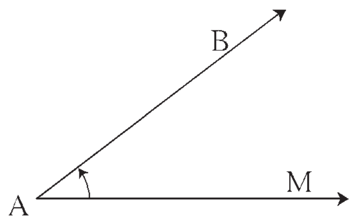
شکل 6.6

بسا اوقات مینار کی بلندی، عمارت یا درخت کی اونچائی اسی طرح جہازوں کا روشنی کے مینار سے فاصلہ یا ندی کی پاٹ کی چوڑائی وغیرہ کی جانکاری کی ضرورت ہوتی ہے یہ فاصلے ہم عملی طور پر معلوم نہیں کر سکتے، لیکن مثلثیاتی نسبتوں کا استعمال کر کے اونچائی یا فاصلے معلوم کر سکتے ہیں۔

اونچائی یا فاصلہ معلوم کرنے کے لیے، دی ہوئی معلومات کے مطابق پہلے ہم کچی شکل بناتے ہیں۔ درخت، ٹیکری، مینار وغیرہ جیسی اشیا زمین پر عموداً ایستادہ ہوتی ہیں یہ دکھانے کے لیے ہم شکل میں عمودی قطعہ کا استعمال کرتے ہیں۔ یہاں ہم ناظر کی اونچائی نظر انداز کردیں گے۔ عام حالت میں ایسا مان لیا جاتا ہے کہ ناظر کی نظر، افقی خط کے متوازی ہوتی ہے۔

اب ہم اس سے مربوط چند اصطلاحات کا مطالعہ کریں گے۔

(i) بصری خط **(Line of Vision) :** اگر کوئی شخص نقطہ A کے مقام سے کسی جسم B کو دیکھتا ہے تب خط AB کو بصری خط کہتے ہیں۔



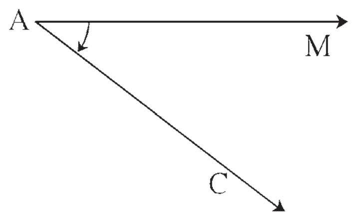
شکل **6.7**

(ii) صعودی زاویہ یا زاویہ فراز **(Angle of Elevation) :**

خط AM ناظر کا بصری خط عام حالت میں، افقی خط کے متوازی ہوتا ہے۔

مشاہدہ کیا جانے والا نقطہ B، اگر A کی نسبت سے زیادہ اونچائی پر ہو تو، بصری خط AB یہ خط AM کے ساتھ جو زاویہ بناتا ہے اسے صعودی زاویہ کہتے ہیں۔

شکل میں $\angle MAB$ صعودی زاویہ ہے۔



شکل **6.8**

(iii) نزولی زاویہ یا نشیبی زاویہ **(Angle of Depression) :**

مشاہدہ کیا جانے والا نقطہ C اگر افقی خط AM سے نیچے کی جانب ہو تو بصری خط AC یہ خط AM کے ساتھ جو زاویہ بناتا ہے اسے نزولی زاویہ کہتے ہیں۔

شکل میں $\angle MAC$، نزولی زاویہ ہے۔

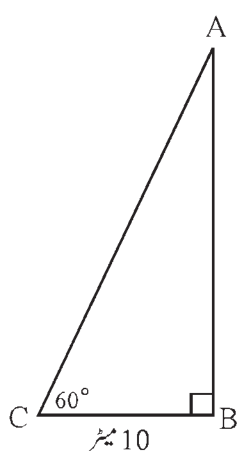
جب ہم افق کے متوازی خط سے اوپر کی جانب واقع کسی شے کو دیکھتے ہیں تو بننے والا زاویہ صعودی زاویہ ہوتا ہے۔

جب ہم افق کے متوازی خط سے نیچے کی جانب واقع کسی شے کو دیکھتے ہیں تو بننے والا زاویہ نزولی زاویہ ہوتا ہے۔

حل کردہ مثالیں

مثال **(1) :** ایک درخت کے تنے سے 10 میٹر فاصلے پر کھڑے ہو کر ایک ناظر درخت کے اوپری سرے کو دیکھتا ہے تو $60°$ پیمائش کا صعودی زاویہ بنتا ہے تو درخت کی اونچائی کتنی ہے؟ $(\sqrt{3} = 1.73)$ شکل میں C نقطہ کے پاس ناظر ہے اور AB درخت ہے۔

حل **:** شکل 6.9 میں،



شکل **6.9**

درخت کی اونچائی $= h = AB$ قطعہ

ناظر کا درخت سے فاصلہ $= BC = 10$ میٹر

صعودی زاویہ $= \theta = \angle BCA = 60°$

$\tan\theta = \dfrac{AB}{BC}$ ... (شکل سے) ... (I)

$\tan 60° = \sqrt{3}$ ... (II)

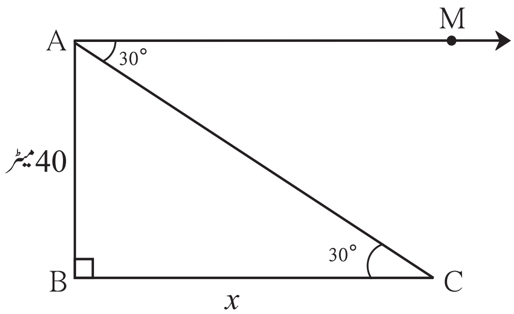
$\therefore \dfrac{AB}{BC} = \sqrt{3}$ ... [(I) اور (II) سے]

$\therefore AB = BC\sqrt{3} = 10\sqrt{3}$

$\therefore AB = 10 \times 1.73 = 17.3$ میٹر

اس لیے درخت کی اونچائی 17.3 میٹر ہے۔

مثال (2) : 40 میٹر بلند عمارت کی چھت سے، اس عمارت سے کچھ فاصلے پر کھڑے اسکوٹر کا مشاہدہ کرنے پر $30°$ کا نزولی زاویہ بنتا ہے۔ اسکوٹر عمارت سے کتنے فاصلے پر کھڑا ہے؟ $(\sqrt{3} = 1.73)$



شکل 6.10

حل : شکل 6.10 میں، قطعہ AB عمارت ظاہر کرتا ہے۔ عمارت سے 'x' میٹر فاصلے پر مقام 'C' پر اسکوٹر کھڑا ہے۔

شکل میں عمارت کی چھت کے مقام A پر ناظر کھڑا ہے۔ خط AM افق کے متوازی ہے $\angle MAC$ نزولی زاویہ ہے۔ $\angle MAC$ اور $\angle ACB$ متبادلہ زاویے ہیں اسے دھیان میں رکھیے۔

$\therefore$ $\triangle ABC$ میں، $\angle B = 90°$

$$\tan 30° = \frac{AB}{BC} \quad \text{... (شکل کی بناپر)}$$

$$\therefore \quad \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{40}{x}$$

$$\therefore \quad x = 40\sqrt{3}$$

$$= 40 \times 1.73$$

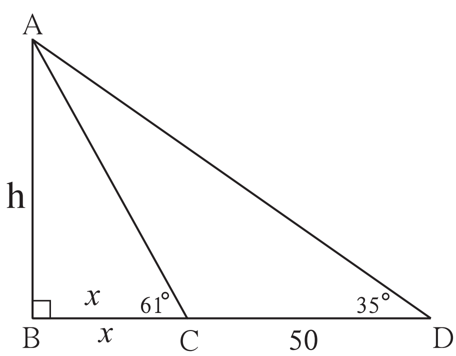
$$= 69.20 \text{ میٹر}$$

$\therefore$ وہ اسکوٹر عمارت سے 69.20 میٹر فاصلے پر ہے۔

مثال (3) : ندی کے پاٹ کی چوڑائی معلوم کرنے کے لیے ایک شخص ندی کے ایک کنارے پر کھڑے ہوکر دوسرے کنارے پر موجود مینار کے اوپری سرے کو دیکھتا ہے تو $61°$ پیمائش کا صعودی زاویہ بنتا ہے۔ اسی خط میں ندی کے پاٹ کے کنارے سے 50 میٹر فاصلے پیچھے جاکر مینار کے اوپری سرے کو دیکھنے پر $35°$ پیمائش کا صعودی زاویہ بنتا ہے۔ ندی کی چوڑائی اور مینار کی بلندی معلوم کیجیے۔ $(\tan 61° \approx 1.8, \tan 35° \approx 0.7)$

حل : قطعہ AB کو مینار سے ظاہر کیا گیا ہے۔ 'A' مینار کا اوپری سرا ہے قطعہ BC ندی کی چوڑائی ظاہر کرتا ہے۔ فرض کریں مینار کی اونچائی h میٹر اور ندی کی چوڑائی x میٹر ہے۔

$$\tan 61° = \frac{h}{x} \quad \text{... (شکل میں)}$$



شکل 6.11

$$\therefore \quad 1.8 = \frac{h}{x}$$

$$h = 1.8 \times x \qquad \text{... (I)}$$

$$10h = 18x$$ (طرفین کو 10 سے ضرب کرنے پر) ...

قائمۃ الزاویہ میں $\triangle ABD$ میں،

اسی طرح ، $\tan 35 = \dfrac{h}{x + 50}$

$$0.7 = \frac{h}{x + 50}$$

$$\therefore \quad 10h = 7\,(x + 50) \qquad \text{... (II)}$$

(I) اور (II) سے،

$$18x = 7(x + 50)$$

$$\therefore\ 18x = 7x + 350$$

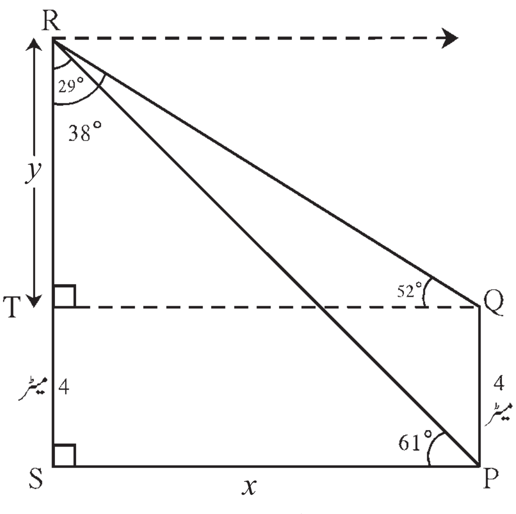
$$\therefore\ 11x = 350$$

$$\therefore \quad x = \frac{350}{11} = 31.82$$

اب ، $h = 1.8x = 1.8 \times 31.82$

$= 57.28$ میٹر

$\therefore$ ندی کے پاٹ کی چوڑائی 31.82 میٹر اور مینار کی بلندی 57.28 میٹر



شکل 6.12

مثال (4) : جویریہ گھر کے دروازے میں کھڑی ہے۔ گھر سے کچھ فاصلے پر واقع ایک درخت کے اوپر بیٹھی ہوئی چیل کو دیکھتی ہے تو °61 پیمائش کا صعودی زاویہ بنتا ہے۔ چیل کو واضح طور پر دیکھنے کے لیے وہ گھر کی چھت پر گئی جو 4 میٹر کی اونچائی پر ہے وہاں سے °52 پیمائش کا صعودی زاویہ بنتا ہے۔ بتایئے وہ چیل زمین سے کتنی بلندی پر ہے۔

(اپنا جواب مکمل صحیح عدد میں لکھیے)

($\tan 61° = 1.80$, $\tan 52° = 1.28$, $\tan 29° = 0.55$, $\tan 38° = 0.78$)

حل : فرض کیجیے، شکل 6.10 میں، گھر PQ اور درخت SR ہے۔اور چیل کا مقام نقطہ R ہے۔

RS قطعہ $\perp$ QT قطعہ کھینچیے۔

اس لیے TSPQ$\square$ ایک مستطیل ہے۔

فرض کیجیے $TR = y$ اور $SP = x$

اب $\triangle RSP$ میں، $\angle PRS = 90° - 61° = 29°$

اسی طرح، $\triangle RTQ$ میں، $\angle QRT = 90° - 52° = 38°$

$\therefore \tan \angle PRS = \tan 29° = \dfrac{SP}{RS}$

$\therefore 0.55 = \dfrac{x}{y+4}$

$\therefore x = 0.55(y + 4)$ ... (I)

اسی طرح ، $\tan \angle QRT = \dfrac{TQ}{RT}$

$\therefore \tan 38° = \dfrac{x}{y}$ ... $[\because SP = TQ = x]$

$\therefore 0.78 = \dfrac{x}{y}$

$\therefore x = 0.78\,y$ ... (II)

$\therefore 0.78\,y = 0.55(y + 4)$ ... [(I) اور (II) سے]

$\therefore 78y = 55(y + 4)$

$\therefore 78y = 55y + 220$

$\therefore 23y = 220$

$\therefore y = 9.565 \approx 10$ ... (قریبی صحیح عدد میں)

$\therefore RS = y + 4 = 10 + 4 = 14$

$\therefore$ چیل زمین سے 14 میٹر اونچائی پر تھی۔

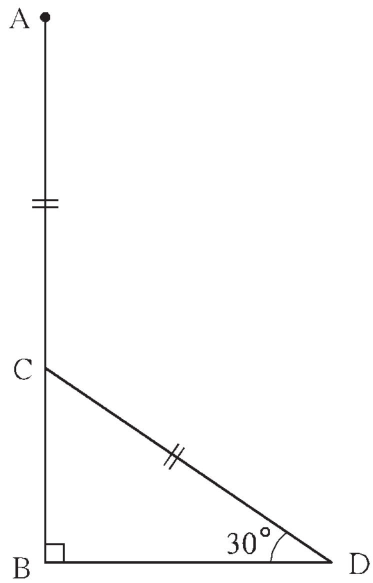
مثال (5) : تیز طوفانی ہوا کی وجہ سے ایک درخت ٹوٹ گیا۔اس کا اوپری سرا زمین سے 30° کا زاویہ بناتے ہوئے زمین سے ٹک گیا۔اگر درخت کے اوپری سرے اور اس کے تنے کے نچلے حصے کے درمیان کا فاصلہ 10 میٹر ہو تو درخت کی کل اونچائی معلوم کیجیے۔

حل : فرض کیجیے کہ شکل 6.11 میں درخت AB کا اوپری سرا 'A' ہے۔طوفانی ہوا کی وجہ سے درخت 'C' مقام سے ٹوٹ گیا اور 'D' مقام پر ٹک گیا۔

$\angle CDB = 30°$ ،$BD = 10$ میٹر ،$BC = x$ میٹر

$CA = CD = y$ میٹر

قائمۃ الزاویہ $\triangle CBD$ میں،



شکل 6.11

$$\tan 30° = \frac{BC}{BD}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{x}{10}$$

$$x = \frac{10}{\sqrt{3}}$$

$$y = \frac{20}{\sqrt{3}}$$

$$x + y = \frac{10}{\sqrt{3}} + \frac{20}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{30}{\sqrt{3}}$$

$$x + y = 10\sqrt{3}$$

لہٰذا درخت کی کل اونچائی $10\sqrt{3}$ میٹر ہے۔

مشقی سیٹ 6.2

1. ایک شخص، ایک گرجا گھر سے 80 میٹر کے فاصلہ پر کھڑا ہے۔ وہ شخص گرجا گھر کی چھت کی جانب دیکھتا ہے تو $45°$ پیمائش کا صعودی زاویہ بناتا ہے۔ گرجا گھر کی اونچائی کتنی ہے؟

2. مینارۂ نور سے ایک جہاز کو دیکھنے پر $60°$ پیمائش کا نزولی زاویہ بنتا ہے۔ اگر مینارۂ نور کی بلندی 90 میٹر ہو تب وہ جہاز مینارۂ نور سے کتنے فاصلے پر ہے؟ $(\sqrt{3} = 1.73)$

3. 12 میٹر چوڑے راستے کے دونوں جانب ایک دوسرے کے مقابل دو عمارتیں ہیں۔ ان میں سے ایک عمارت کی بلندی 10 میٹر ہے۔ اس عمارت کی چھت پر سے دوسری عمارت کی چھت کو دیکھنے پر $60°$ پیمائش کا صعودی زاویہ بنتا ہے۔ بتایئے کہ دوسری عمارت کی بلندی کتنی ہے؟

4. 18 میٹر اور 7 میٹر اونچائی کے دو ستون زمین پر نصب کیے گئے ہیں۔ 22 میٹر کے لمبے تار سے ستون کے اوپری سروں کو باندھ دیا گیا ہے۔ تب تار کے ذریعے افقی خط کے ساتھ بننے والا زاویہ معلوم کیجیے۔

5. طوفانی ہوا کے ذریعے ایک درخت ٹوٹ گیا۔ اس کا اوپری سرا تنے کے نچلے حصے سے 20 میٹر فاصلے پر سطح زمین سے $60°$ کا زاویہ بناتے ہوئے ٹکا ہوا ہے۔ درخت کی کل اونچائی معلوم کیجیے۔

.6 سطح زمین سے 60 میٹر بلندی پر ایک پتنگ اڑ رہی ہے۔ پتنگ کی ڈور سطح زمین سے عارضی طور پر باندھ دی گئی۔ ڈور کا زمین کے ساتھ $60°$ کی پیمائش کا زاویہ بناتا ہے۔ ڈور کی لمبائی معلوم کیجیے یہ مانتے ہوئے کہ ڈور میں کسی قسم کا جھول نہیں ہے۔ $(\sqrt{3}=1.73)$

مجموعہ سوالات 6

.1 درج ذیل سوالوں کے متبادلات میں سے صحیح جواب کا انتخاب کیجیے۔

(1) $\sin\theta\operatorname{cosec}\theta = ?$

(A) 1 (B) 0 (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\sqrt{2}$

(2) بتائیے کہ $\operatorname{cosec} 45°$ کی قیمت درج ذیل میں سے کون سی ہے؟

(A) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (B) $\sqrt{2}$ (C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (D) $\frac{2}{\sqrt{3}}$

(3) $1 + \tan^2\theta = ?$

(A) $\cot^2\theta$ (B) $\operatorname{cosec}^2\theta$ (C) $\sec^2\theta$ (D) $\tan^2\theta$

(4) جب ہم افقی خط کے اوپری سمت دیکھتے ہیں تب، .... زاویہ بنتا ہے۔

(A) صعودی زاویہ (B) نزولی زاویہ (C) صفر (D) خطی

.2 اگر $\sin\theta = \frac{11}{61}$ ہو تو متماثلہ مساوات کا استعمال کر کے $\cos\theta$ کی قیمت معلوم کیجیے۔

.3 جب $\tan\theta = 2$ ہو تو دیگر مثلثیاتی نسبتیں معلوم کیجیے۔

.4 اگر $\sec\theta = \frac{13}{12}$ ہو، تب دیگر مثلثیاتی نسبتیں معلوم کیجیے۔

.5 ثابت کیجیے کہ،

(1) $\sec\theta\,(1 - \sin\theta)\,(\sec\theta + \tan\theta) = 1$

(2) $(\sec\theta + \tan\theta)\,(1 - \sin\theta) = \cos\theta$

(3) $\sec^2\theta + \operatorname{cosec}^2\theta = \sec^2\theta\,\operatorname{cosec}^2\theta$

(4) $\cot^2\theta - \tan^2\theta = \operatorname{cosec}^2\theta - \sec^2\theta$

(5) $\tan^4\theta + \tan^2\theta = \sec^4\theta - \sec^2\theta$

(6) $\frac{1}{1-\sin\theta} + \frac{1}{1+\sin\theta} = 2\sec^2\theta$

(7) $\sec^6 x - \tan^6 x = 1 + 3\sec^2 x \times \tan^2 x$

(8) $\dfrac{\tan\theta}{\sec\theta+1}=\dfrac{\sec\theta-1}{\tan\theta}$

(9) $\dfrac{\tan^3\theta-1}{\tan\theta-1} = \sec^2\theta + \tan\theta$

(10) $\dfrac{\sin\theta-\cos\theta+1}{\sin\theta+\cos\theta-1}=\dfrac{1}{\sec\theta-\tan\theta}$

.6 ایک لڑکا ایک عمارت سے 48 میٹر کے فاصلے پر کھڑا ہوا ہے۔ وہ عمارت کے اوپری سرے کو دیکھتے ہوئے 30° پیمائش کا صعودی زاویہ بناتا ہے تو اس عمارت کی بلندی معلوم کیجیے۔

.7 مینارۂ نور سے ایک جہاز کو دیکھنے پر، ناظر 30° پیمائش کا نزولی زاویہ بناتا ہے۔ اگر مینارۂ نور کی اونچائی 100 میٹر ہو تب جہاز سے مینارۂ نور کے درمیان کا فاصلہ معلوم کیجیے۔

.8 15 میٹر چوڑے راستے کے دونوں جانب ایک دوسرے کے مقابل دو عمارتیں ہیں۔ ان میں سے ایک عمارت کی بلندی 12 میٹر ہے۔ اس کی چھت سے دوسری عمارت کی چھت دیکھنے پر 30° پیمائش کا صعودی زاویہ بنتا ہے۔ اس عمارت کی بلندی معلوم کیجیے۔

.9 آگ بجھانے والی گاڑی پر نصب سیڑھی زیادہ سے زیادہ 70° پیمائش کے زاویہ میں اُٹھائی جاسکتی ہے۔ اس وقت اس کی لمبائی زیادہ سے زیادہ 20 میٹر ہوتی ہے۔ گاڑی پر رکھی ہوئی سیڑھی کا سرا زمین سے 2 میٹر اونچائی پر ہے۔ تو سیڑھی کا دوسرا سرا زمین سے زیادہ سے زیادہ کتنی اونچائی تک پہنچ سکتا ہے۔ $(\sin 70 \approx 0.94)$

.10* آسمان میں پرواز کرتے ہوئے ہوائی جہاز کے پائلٹ نے ہوائی اڈے پر اترنا شروع کرتے وقت 20° پیمائش کا نزولی زاویہ بناتا ہے۔ تب ہوائی جہاز کی اوسط رفتار 200 کلومیٹر فی گھنٹا تھی۔ وہ ہوائی جہاز 54 سیکنڈ میں ہوائی اڈے پر اترتا ہے۔ ہوائی اڈے پر اترنا شروع کرنے کے وقت، وہ جس مقام پر تھا وہاں سے زمین سے کتنی اونچائی پر تھا؟ $(\sin 20^\circ \approx 0.342)$

Q9X5KV