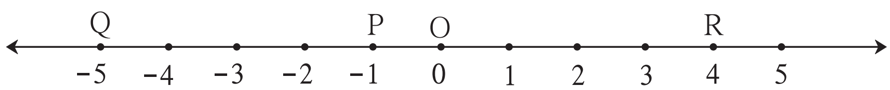
5 محددی علم ہندسہ Co-ordinate Geometry

آیئے سیکھیں

- فاصلہ کا ضابطہ (Distance formula)
- حصے کا ضابطہ (Section formula)
- خط کی ڈھلان (Slope of a line)

آیئے ذرا یاد کریں

ہم جانتے ہیں کہ عددی خط پر واقع دو نقاط کے درمیان کا فاصلہ کس طرح معلوم کیا جاتا ہے۔ P، Q اور R نقاط کے محدد بالترتیب -1 ، -5 ، اور 4 ہیں۔ تب قطعہ PQ اور قطعہ QR کی لمبائی معلوم کیجیے۔



شکل 5.1

اگر نقاط A اور B کے محدد x_1 اور x_2 ہوں اور $x_1 > x_2$ ہو تب

قطعہ خط AB کی لمبائی $= d\,(A, B) = x_2 - x_1$

شکل کے مطابق نقاط P، Q اور R بالترتیب -1 ، -5 ، اور 4 ہیں۔

$\therefore\quad d\,(P, Q) = (-1) - (-5) = -1 + 5 = 4$

اور، $d\,(Q, R) = 4 - (-5) = 4 + 5 = 9$

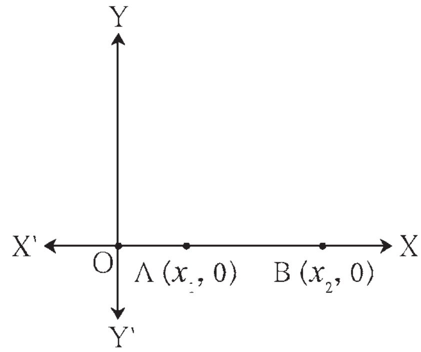
اس تصور کا استعمال کر کے ہم XY مستوی میں، ایک ہی محور پر واقع دو نقاط کے درمیان فاصلہ معلوم کریں گے۔

آیئے سمجھ لیں

1. ایک ہی محور پر واقع دو نقاط کے درمیان فاصلہ معلوم کرنا۔

ایک ہی محور پر واقع دو نقاط یعنی ایک ہی عددی خط پر واقع دو نقاط ہوتے ہیں۔ اسے ذہن نشین رکھیں کہ X-محور پر نقاط کے محددین $(2, 0)$، $(\frac{-5}{2}, 0)$، $(8, 0)$ اس طرح ہوتے ہیں اور Y-محور پر نقاط کے محددین $(0, 1)$، $(0, \frac{17}{2})$، $(0, 3)$ اس طرح ہوتے ہیں۔ X-محور کا منفی محدد دکھانے والا حصہ، شعاع OX' ہے اور Y-محور کا منفی محدد دکھانے والا حصہ، شعاع OY' ہے۔

(i) X -محور پر دو نقاط کا درمیانی فاصلہ معلوم کرنا۔



شکل 5.2

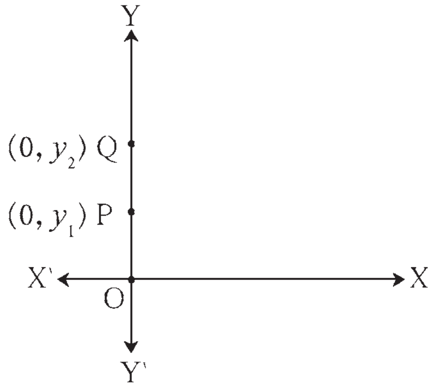
اوپر کی شکل میں،

$A(x_1, 0)$ اور $B(x_2, 0)$ یہ دو نقاط

X-محور پر اس طرح واقع ہیں کہ $x_2 > x_1$،

$\therefore\ d(A, B) = x_2 - x_1$

(ii) Y - محور پر واقع دو نقاط کا درمیانی فاصلہ معلوم کرنا۔



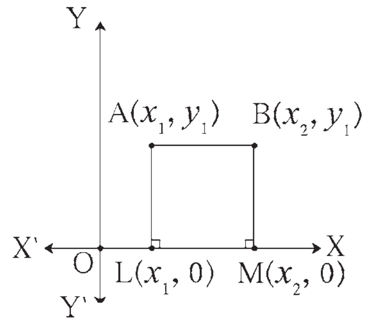
شکل 5.3

اوپر کی شکل میں،

$P(0, y_1)$ اور $Q(0, y_2)$ یہ دو نقاط Y-محور پر اس طرح واقع ہیں کہ $y_2 > y_1$،

$\therefore\ d(A, B) = y_2 - y_1$

(2) دو نقاط کو ملانے والا XY مستوی کا قطعہ کسی محور کے متوازی ہو تو ان دو نقاط کے درمیان کا فاصلہ معلوم کرنا۔



شکل 5.4

(i) شکل 5.4 میں، قطعہ AB، X-محور کے متوازی ہے۔

اس لیے نقطہ A اور نقطہ B کے y-محدد مساوی ہیں۔

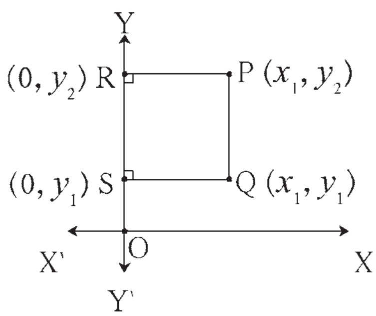
X-محور پر قطعہ AL اور قطعہ BM عمود کھینچیے۔

$\therefore\ \square ABML$ مستطیل ہے۔

$\therefore\ AB = LM$

لیکن، $LM = x_2 - x_1$

$\therefore\ d(A, B) = x_2 - x_1$



شکل 5.5

(ii) شکل 5.5 میں، قطعہ PQ، Y-محور کے متوازی ہے۔

اس لیے نقطہ P اور نقطہ Q کے x-محدد مساوی ہیں۔

Y- محور پر قطعہ PR اور قطعہ QS عمود کھینچیے۔

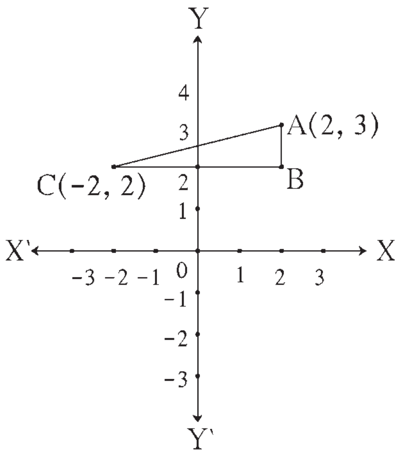
$\therefore\ \square PQSR$ مستطیل ہے۔

$\therefore\ PQ = RS$

لیکن، $RS = y_2 - y_1$

$\therefore\ d(P, Q) = y_2 - y_1$

عملی کام :



شکل 5.6

شکل 5.6 میں Y–محور $\parallel$ AB قطعہ اور X–محور $\parallel$ CB قطعہ ہے۔

نقاط A اور C کے محددین دیے ہوئے ہیں۔

AC کی لمبائی معلوم کرنے کے لیے ذیل کی خانہ پری کیجیے۔

ΔABC قائمۃ الزاویہ مثلث ہے۔

فیثاغورث کے مسئلہ کی رُو سے،

$$(AB)^2 + (BC)^2 = \boxed{}$$

AB اور BC معلوم کرنے کے لیے نقطہ B کے محددین معلوم کریں گے۔

CB $\parallel$ X-محور ، $\therefore$ B کا Y-محدد = $\boxed{}$

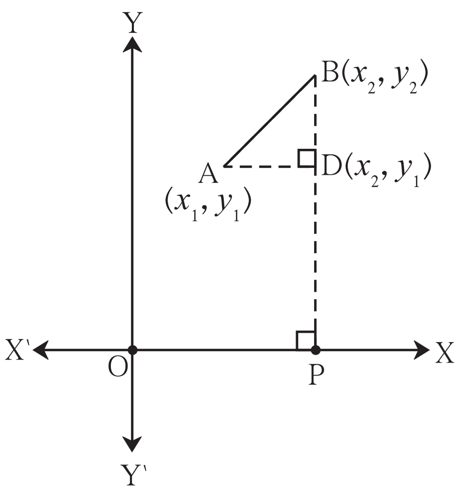
BA $\parallel$ Y-محور ، $\therefore$ B کا X-محدد = $\boxed{}$

$$AB = \boxed{3} - \boxed{} = \boxed{} \quad , \quad BC = \boxed{} - \boxed{} = \boxed{4}$$

$$\therefore\ AC^2 = \boxed{} + \boxed{} = \boxed{} \quad , \quad \therefore\ AC = \boxed{\sqrt{17}}$$

آیئے سمجھ لیں

فاصلے کا ضابطہ (Distance Formula)



شکل 5.7

شکل 5.7 میں، $A(x_1, y_1)$ اور $B(x_2, y_2)$ یہ XY-مستوی میں واقع کوئی دو نقاط ہیں۔

نقطہ B سے X–محور پر BP ایک عمود کھینچیے۔اسی طرح نقطہ A سے قطعہ BP پر عمود AD کھینچیے۔ Y-محور کے متوازی قطعہ BP ہے۔

$\therefore$ نقطہ D کا x محدد x_2 ہے۔

X–محور کے متوازی قطعہ AD ہے۔

$\therefore$ نقطہ D کا y محدد y_1 ہے۔

$$\therefore\ AD = d(A, D) = x_2 - x_1,\ BD = d(B, D) = y_2 - y_1$$

$\triangle ABD$ قائمۃ الزاویہ مثلث میں،

$$AB^2 = AD^2 + BD^2$$

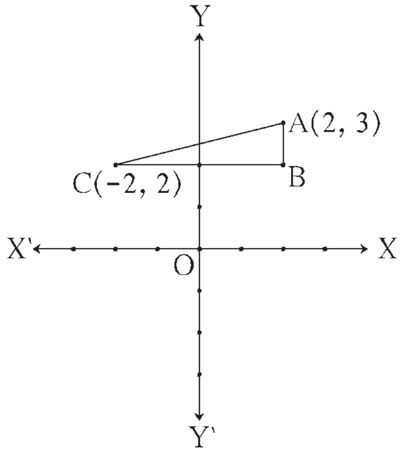
$$= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

$$\therefore\ AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

اس نتیجے کو فاصلہ کا ضابطہ کہتے ہیں۔

$$\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} = \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$ ... (اسے ذہن نشین رکھیے)

پچھلے صفحہ پر ہم نے AC کی لمبائی معلوم کرنے کے لیے AB اور BC کی لمبائی معلوم کرکے فیثا غورث کا مسئلہ استعمال کیا۔ اب فاصلہ کا ضابطہ استعمال کرکے اسی قطعہ خط کی لمبائی معلوم کریں گے۔



شکل 5.8

دیا ہوا ہے : A(2, 3) اور C(−2, 2)

فرض کیجیے : $A(x_1, y_1)$ ، $C(x_2, y_2)$

یہاں $x_1 = 2, y_1 = 3, x_2 = -2, y_2 = 2$

$$AC = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$
$$= \sqrt{(-2-2)^2+(2-3)^2}$$
$$= \sqrt{(-4)^2+(-1)^2}$$
$$= \sqrt{16+1}$$
$$= \sqrt{17}$$

قطعہ AB ‖ Y–محور اور قطعہ BC ‖ X–محور

∴ نقطہ B کے محدد (2, 2) ہیں۔

$$\therefore\ AB = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} = \sqrt{(2-2)^2+(2-3)^2} = \sqrt{0+1} = 1$$

$$BC = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} = \sqrt{(-2-2)^2+(2-2)^2} = \sqrt{(-4)^2+0} = 4$$

شکل 5.1 میں نقاط P اور Q کا درمیانی فاصلہ ’(−1) − (−5) = 4‘ ہم نے معلوم کیا ہے۔ انہی نقاط کے محددی مستوی میں (−1, 0) اور (−5, 0) ہوں تو فاصلہ کا ضابطہ استعمال کرکے P اور Q کا درمیانی فاصلہ بھی اتنا آئے گا۔ تصدیق کیجیے۔

اسے ذہن نشین کرلیں

- مبداء O کے محددین (0, 0) ہوتے ہیں۔ اس لیے نقطہ P کے محددین (x, y) ہوں تو $d(O, P) = \sqrt{x^2+y^2}$ اسے ذہن نشین کرلیں۔
- $P(x_1, y_1)$ ، $Q(x_2, y_2)$ یہ دو نقاط XY–مستوی پر واقع ہوں تو

$$d(P, Q) = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

یعنی , $PQ^2 = (x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2 = (x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2$

مثال **(1)** : $P(-1, 1)$ ، $Q(5, -7)$ ان دونقاط کا درمیانی فاصلہ معلوم کیجیے۔

حل : فرض کیجیے $P(x_1, y_1)$ اور $Q(x_2, y_2)$

یہاں $x_1 = -1, \quad y_1 = 1, \quad x_2 = 5, \quad y_2 = -7$

$$d(P, Q) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \qquad \text{... (فاصلے کے ضابطے سے)}$$

$$= \sqrt{[5-(-1)]^2 + [(-7)-1]^2}$$

$$= \sqrt{(6)^2 + (-8)^2}$$

$$= \sqrt{36+64}$$

$$d(P, Q) = \sqrt{100} = 10$$

$\therefore$ P اور Q نقاط کا درمیانی فاصلہ 10 ہے۔

مثال **(2)** : $A(-3, 2)$، $B(1, -2)$ اور $C(9, -10)$ دکھائیے کہ یہ تینوں نقاط ہم خطی ہیں۔

حل : اگر $d(A, B)$; $d(B, C)$ اور $d(A, C)$ ان میں سے کوئی دو فاصلوں کا مجموعہ تیسرے فاصلے کے برابر ہو تو A، B، C ہم خطی نقاط ہوں گے۔

$\therefore$ $d(A, B)$ ، $d(B,C)$ اور $d(A, C)$ کی لمبائی معلوم کریں۔

فاصلے کا ضابطہ	نقطہ B کے محدد	نقطہ A کے محدد
$d(A,B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$	$(1, -2)$ (x_2, y_2)	$(-3, 2)$ (x_1, y_1)

$$\therefore d(A, B) = \sqrt{[1-(-3)]^2 + [(-2)-2]^2} \qquad \text{... (فاصلے کے ضابطے سے)}$$

$$= \sqrt{(1+3)^2 + (-4)^2}$$

$$= \sqrt{16+16}$$

$$= \sqrt{32} = 4\sqrt{2} \qquad \ldots(I)$$

$$d(B, C) = \sqrt{(9-1)^2 + (-10+2)^2}$$

$$= \sqrt{64+64} = 8\sqrt{2} \qquad \ldots(II)$$

$$d(A, C) = \sqrt{(9+3)^2 + (-10-2)^2}$$

$$= \sqrt{144+144} = 12\sqrt{2} \qquad \ldots(III)$$

$$4\sqrt{2} + 8\sqrt{2} = 12\sqrt{2} \qquad \text{... [بیان (I)، (II) اور (III) کی رو سے]}$$

$$\therefore d(A, B) + d(B, C) = d(A, C)$$

$\therefore$ A، B اور C ہم خطی نقاط ہیں۔

مثال (3) : $P(6,-6)$، $Q(3,-7)$ اور $R(3,3)$ کیا یہ تینوں نقاط ہم خطی ہیں؟ طے کیجیے۔

حل : (فاصلے کے ضابطے سے) $PQ = \sqrt{(6-3)^2+(-6+7)^2}$

$$= \sqrt{(3)^2+(1)^2} \quad = \sqrt{10} \qquad \ldots (I)$$

$$QR = \sqrt{(3-3)^2+(-7-3)^2}$$

$$= \sqrt{(0)^2+(-10)^2} \quad = \sqrt{100} \qquad \ldots (II)$$

$$PR = \sqrt{(3-6)^2+(3+6)^2}$$

$$= \sqrt{(3)^2+(9)^2} \quad = \sqrt{90} \qquad \ldots (III)$$

بیان (I)، (II) کی بنا پر $\sqrt{10}$، $\sqrt{100}$ اور $\sqrt{90}$ ان میں سے $\sqrt{100}$ سب سے بڑا عدد ہے۔

اب $\left(\sqrt{100}\right)$ اور $\left(\sqrt{10}+\sqrt{90}\right)$ یہ اعداد مساوی ہیں یا نہیں یہ دیکھیں گے۔

اس لیے $\left(\sqrt{100}\right)^2$ اور $\left(\sqrt{10}+\sqrt{90}\right)^2$ کا موازنہ کیجیے۔

اس بنا پر ہمیں اس بات کا پتا چلتا ہے کہ

$$\left(\sqrt{10}+\sqrt{90}\right) > \left(\sqrt{100}\right), \therefore\ PQ + PR \neq QR$$

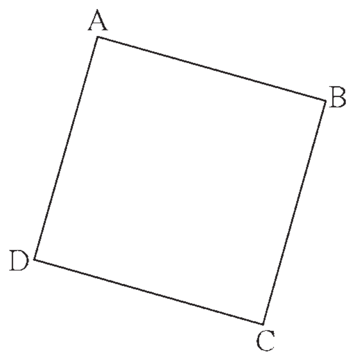
$\therefore$ $P(6,-6)$، $Q(3,-7)$ اور $R(3,3)$ یہ نقاط غیر ہم خطی ہیں۔

مثال (4) : دکھائیے کہ $(1,7)$, $(4,2)$, $(-1,-1)$, $(-4,4)$ یہ مربع کے راس ہیں۔

حل : جب ذواربعۃ الاضلاع کے تمام اضلاع مساوی لمبائی کے ہوں اور وتر بھی مساوی ہوں تب ذواربعۃ الاضلاع مربع ہوتا ہے۔

$\therefore$ تمام اضلاع کی لمبائیاں اور وتروں کی لمبائیاں فاصلے کے ضابطے سے معلوم کریں۔

فرض کیجیے : $A(1,7)$, $B(4,2)$, $C(-1,-1)$ اور $D(-4,4)$ دیے ہوئے نقاط ہیں۔



شکل 5.9

$$AB = \sqrt{(1-4)^2+(7-2)^2} = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$$

$$BC = \sqrt{(4+1)^2+(2+1)^2} = \sqrt{25+9} = \sqrt{34}$$

$$CD = \sqrt{(-1+4)^2+(-1-4)^2} = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$$

$$DA = \sqrt{(1+4)^2+(7-4)^2} = \sqrt{25+9} = \sqrt{34}$$

$$AC = \sqrt{(1+1)^2+(7+1)^2} = \sqrt{4+64} = \sqrt{68}$$

$$BD = \sqrt{(4+4)^2+(2-4)^2} = \sqrt{64+4} = \sqrt{68}$$

$\therefore\ AB = BC = CD = DA$

اور , $AC = BD$

اس سے ہمیں پتا چلتا ہے ذواربعۃ الاضلاع کے چاروں اضلاع کی لمبائیاں مساوی ہے اور دونوں وتر AC اور BC کی لمبائیاں بھی مساوی ہے۔

$\therefore$ (1, 7)، (4, 2)، (−1, −1) اور (−4, 4) راسوں سے بننے والا ذواربعۃ الاضلاع مربع ہے۔

مثال (5) : Y-محور پر واقع ایسے نقطہ کے محددین معلوم کیجیے کہ وہ M(−5, −2) اور N(3, 2) سے ہم فاصلہ ہو۔

حل : فرض کیجیے، Y-محور پر نقطہ $P(0, y)$ نقطہ M اور N سے ہم فاصلہ ہے۔

$$\therefore\ PM = PN \quad , \quad \therefore\ PM^2 = PN^2$$

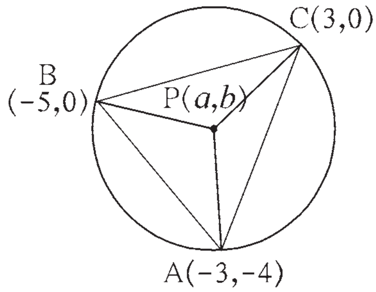
$$\therefore\ [0-(-5)]^2 + [y-(-2)]^2 = (0-3)^2 + (y-2)^2$$

$$\therefore\ 25 + (y+2)^2 = 9 + y^2 - 4y + 4$$

$$\therefore\ 25 + y^2 + 4y + 4 = 13 + y^2 - 4y$$

$$\therefore\ 8y = -16 \quad , \quad \therefore\ y = -2$$

$\therefore$ M(−5, −2) اور N(3, 2) ان نقاط سے ہم فاصلہ، Y-محور پر نقطہ کے محددین (0, −2) ہیں۔



شکل **5.10**

مثال (6) : A(−3, −4)، B(−5, 0)، C(3, 0) یہ $\triangle ABC$ کے راس ہیں۔

$\triangle ABC$ کے حائط مرکز کے محددین معلوم کیجیے۔

حل : فرض کیجیے : نقطہ $P(a, b)$، $\triangle ABC$ کا حائط مرکز ہے۔

$\therefore$ نقطہ P، نقاط A، B، C سے ہم فاصلہ ہے۔

$$\therefore\ PA^2 = PB^2 = PC^2 \quad \ldots (I) \quad , \quad \therefore\ PA^2 = PB^2$$

$$(a+3)^2 + (b+4)^2 = (a+5)^2 + (b-0)^2$$

$$\therefore a^2 + 6a + 9 + b^2 + 8b + 16 = a^2 + 10a + 25 + b^2$$

$$\therefore\ -4a + 8b = 0$$

$$\therefore\ a - 2b = 0 \quad \ldots (II)$$

اسی طرح , $PA^2 = PC^2$ ... [(I) سے]

$$\therefore\ (a+3)^2 + (b+4)^2 = (a-3)^2 + (b-0)^2$$

$$\therefore a^2 + 6a + 9 + b^2 + 8b + 16 = a^2 - 6a + 9 + b^2$$

$$\therefore\ 12a + 8b = -16$$

$$\therefore\ 3a + 2b = -4 \quad \ldots (III)$$

مساوات (II) اور (III) حل کرنے پر $a = -1$ اور $b = -\frac{1}{2}$

$\therefore$ حائط مرکز کے محددین $\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$ ہیں۔

مثال (7) : نقطہ (x, y) نقاط $(7, 1)$ اور $(3, 5)$ سے ہم فاصلہ ہو تو دکھایئے کہ $y = x - 2$

حل : فرض کیجیے : نقطہ $P(x, y)$ یہ نقاط $A(7, 1)$ اور $B(3, 5)$ سے ہم فاصلہ ہے۔

$$\therefore\ AP = BP$$

$$\therefore\ AP^2 = BP^2$$

$$\therefore\ (x - 7)^2 + (y - 1)^2 = (x - 3)^2 + (y - 5)^2$$

$$\therefore\ x^2 - 14x + 49 + y^2 - 2y + 1 = x^2 - 6x + 9 + y^2 - 10y + 25$$

$$\therefore - 8x + 8y = -16$$

$$\therefore\ x - y = 2$$

$$\therefore\ y = x - 2$$

مثال (8) : نقطہ $A(2, -2)$ اور نقطہ $B(-1, y)$ کے درمیان فاصلہ 5 ہے۔تو y کی قیمت معلوم کیجیے۔

حل : (فاصلہ کے ضابطے کی مدد سے)،

$$\therefore\ AB^2 = [(-1) - 2]^2 + [y - (-2)]^2$$

$$\therefore\ 5^2 = (-3)^2 + (y + 2)^2$$

$$\therefore\ 25 = 9 + (y + 2)^2$$

$$\therefore\ 16 = (y + 2)^2$$

$$\therefore\ y + 2 = \pm\sqrt{16}$$

$$\therefore\ y + 2 = \pm 4$$

$$\therefore\ y = 4 - 2 \quad \text{یا} \quad y = -4 - 2$$

$$\therefore\ y = 2 \quad \text{یا} \quad y = -6$$

مشقی سیٹ 5.1

1. مندرجہ ذیل نقاط کے ہر جوڑی کا درمیانی فاصلہ معلوم کیجیے۔

(1) $A(2, 3), B(4, 1)$ (2) $P(-5, 7), Q(-1, 3)$ (3) $R(0, -3), S(0, \frac{5}{2})$

(4) $L(5, -8), M(-7, -3)$ (5) $T(-3, 6), R(9, -10)$ (6) $W(\frac{-7}{2}, 4), X(11, 4)$

2. مندرجہ ذیل نقاط ہم خطی ہیں یا نہیں طے کیجیے۔

(1) $A(1, -3), B(2, -5), C(-4, 7)$ (2) $L(-2, 3), M(1, -3), N(5, 4)$

(3) $R(0, 3), D(2, 1), S(3, -1)$ (4) $P(-2, 3), Q(1, 2), R(4, 1)$

.3 X-محور پر ایسا نقطہ معلوم کیجیے جو نقطہ $A(-3, 4)$ اور $B(1, -4)$ سے ہم فاصلہ ہو۔

.4 دکھائیے کہ نقاط $P(-2, 2)$، $Q(2, 2)$ اور $R(2, 7)$ قائمۃ الزاویہ مثلث کے راس ہیں۔ اس کی تصدیق کیجیے۔

.5 دکھائیے کہ نقاط $P(-2, 2)$، $Q(7, 3)$، $R(11, -1)$ اور $S(6, -6)$ متوازی الاضلاع کے راس ہیں۔

.6 دکھائیے کہ نقاط $A(-4, -7)$، $B(-1, 2)$، $C(8, 5)$ اور $D(5, -4)$ معین ABCD کے راس ہیں۔

.7 اگر نقاط $L(x, 7)$ اور $M(1, 15)$ کا درمیانی فاصلہ 10 ہے تو x کی قیمت معلوم کیجیے۔

.8 دکھائیے کہ نقاط $A(1, 2)$، $B(1, 6)$، $C(1 + 2\sqrt{3}, 4)$ متساوی الاضلاع مثلث کے راس ہیں۔

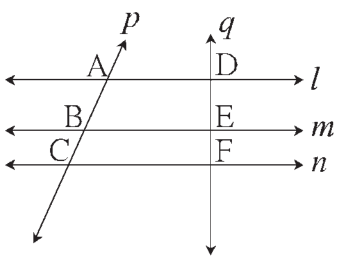
آیئے ذرا یاد کریں

تین متوازی خطوط پر بنے حائل قطعات کی خصوصیت

شکل میں خط n || خط m || خط l

اور خطوط p اور q تقاطع ہیں۔

$$\therefore \frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$$



شکل **5.11**

آیئے سمجھ لیں

قطعہ خط کی تقسیم (Division of a line Seqment)

شکل میں $AP = 6$ اور $PB = 10$

$$\therefore \frac{AP}{PB} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

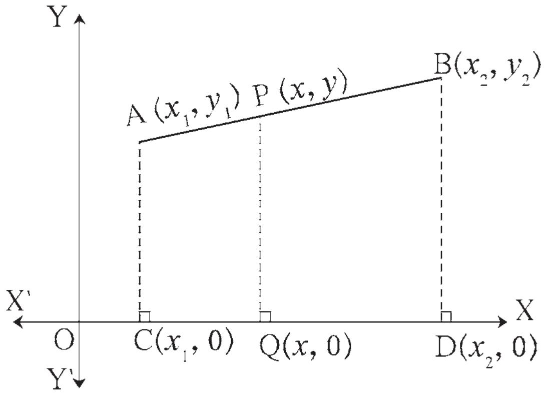
شکل 5.12

اسے دوسرے الفاظ میں یوں کہتے ہیں کہ نقطہ P، قطعہ AB کو 5 : 3 کی نسبت میں تقسیم کرتا ہے۔

آیئے دیکھتے ہیں کہ جب کسی قطعہ خط پر کوئی نقطہ، اسی قطعہ خط کو دی ہوئی نسبت میں تقسیم کرتا ہو تب اس تقسیم کرنے والے نقطے کے محددین کس طرح معلوم کریں گے۔

آیئے سمجھ لیں

حصے کا ضابطہ (Section Formula)



شکل 5.13

شکل 5.13 میں XY-مستوی میں قطعہ AB پر واقع نقطہ P، قطعہ AB کو $m : n$ کی نسبت میں تقسیم کرتا ہے۔

فرض کیجیے : A(x_1, y_1)، B(x_2, y_2)، P(x, y) ہے۔

قطعہ AC، قطعہ PQ اور قطعہ BD عمودی قطعات X-محور پر کھینچے گئے ہیں۔

اس لیے، C(x_1, 0) ، Q(x, 0) اور D(x_2,0)

$$\therefore \left.\begin{aligned} CQ &= x - x_1 \\ QD &= x_2 - x \end{aligned}\right\} \qquad \ldots (I)$$

اسی طرح BD قطعہ || PQ قطعہ || AC قطعہ

$\therefore$ تین متوازی خطوط سے بننے والے حائل قطعات کی خصوصیات کی بنا پر،

$$\frac{AP}{PB} = \frac{CQ}{QD} = \frac{m}{n}$$

اب, $CQ = x - x_1$, $QD = x_2 - x$ ... [(1) سے]

$$\therefore \frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{m}{n}$$

$$\therefore n(x - x_1) = m(x_2 - x)$$

$$\therefore nx - nx_1 = mx_2 - mx$$

$$\therefore mx + nx = mx_2 + nx_1$$

$$\therefore x(m + n) = mx_2 + nx_1$$

$$\therefore x = \frac{mx_2 + nx_1}{m + n}$$

اس طرح نقاط A، P اور B سے Y-محور پر عمود کھینچ کر اوپر کے مطابق عمل کر کے ہم $y = \dfrac{my_2 + ny_1}{m + n}$ حاصل کر سکتے ہیں۔

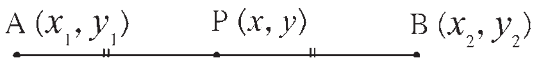
$\therefore$ نقطہ A(x_1, y_1) اور B(x_2, y_2) کو ملانے والا قطعہ AB کو $m : n$ کی نسبت میں تقسیم کرنے والے نقطہ کے محددین

$\left(\dfrac{mx_2 + nx_1}{m + n}, \dfrac{my_2 + ny_1}{m + n}\right)$ ہوتے ہیں۔

قطعہ خط کے وسطی نقطے کا ضابطہ

نقاط $A(x_1, y_1)$ اور $B(x_2, y_2)$ میں نقطہ $P(x, y)$، قطعہ AB کا وسطی نقطہ ہو تو، $m = n$

اب حصے کے ضابطے کی رو سے x اور y کی قیمتیں لکھیں گے۔



شکل 5.14

$$x = \frac{mx_2 + nx_1}{m+n}$$

$$= \frac{mx_2 + mx_1}{m+m} \quad \ldots (\because m = n)$$

$$= \frac{m(x_1 + x_2)}{2m}$$

$$= \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$y = \frac{my_2 + ny_1}{m+n}$$

$$= \frac{my_2 + my_1}{m+m} \quad \ldots (\because m = n)$$

$$= \frac{m(y_1 + y_2)}{2m}$$

$$= \frac{y_1 + y_2}{2}$$

$\therefore$ نقطہ P کے محددین $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$ ہیں۔اسی کو وسطی نقطے کے محددین کا ضابطہ کہتے ہیں۔

ہم نے گذشتہ جماعت میں دکھایا ہے کہ دو ناطق اعداد a اور b کو عددی خط پر ظاہر کر کے اور انھیں ملانے والے قطعات کا $\frac{a+b}{2}$، وسطی نقطہ ہوتا ہے۔وہ نتیجہ یعنی ابھی ہمیں حاصل ہوئے ضابطے کی مخصوص قسم ہے۔اسے ذہن نشین کر لیں۔

حل کردہ مثالیں

مثال (1) : اگر $A(3, 5)$، $B(7, 9)$ اور نقطہ Q قطعہ AB کو $3 : 2$ کی نسبت میں تقسیم کرتا ہے تو نقطہ 'Q' کے محددین معلوم کیجیے۔

حل : دی ہوئی مثال میں فرض کیجیے،

$(x_1, y_1) = (3,5)$ اور

$(x_2, y_2) = (7,9)$

اسی طرح, $m : n = 2 : 3$

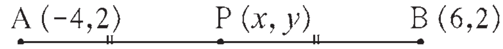
قطعہ خط کے وسطی نقطے کے ضابطے کی رو سے،

$$x = \frac{mx_2 + nx_1}{m+n} = \frac{2\times7 + 3\times3}{2+3} = \frac{23}{5} \quad , \quad y = \frac{my_2 + ny_1}{m+n} = \frac{2\times9 + 3\times5}{2+3} = \frac{33}{5}$$

$\therefore$ نقطہ Q کے محددین $\left(\frac{23}{5}, \frac{33}{5}\right)$

مثال **(2)** : اگر A(–4, 2)، B(6, 2) اس قطعہ کا وسطی نقطہ P ہو تو نقطہ P کے محددین معلوم کیجیے۔

حل : شکل 5.15 کی مثال میں،



شکل **5.15**

فرض کیجیے نقطہ P کے محددین (x, y) ہیں اور $(x_1, y_1) = (-4, 2)$، $(x_2, y_2) = (6, 2)$

وسطی نقطے کے ضابطے کی رو سے،

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-4+6}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{2+2}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

وسطی نقطہ P کے محددین (1, 2) ہوں گے۔

آیئے ذرا یاد کریں

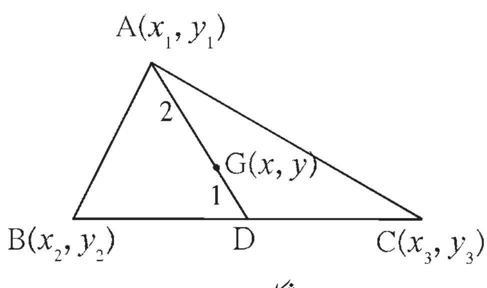
ہم جانتے ہیں کہ مثلث کے وسطانیے متراکز ہوتے ہیں۔

نقطہ تراکز (Centroid) یعنی ہندسی مرکز وسطانیہ کو 1 : 2 کی نسبت میں تقسیم کرتا ہے۔

آیئے سمجھ لیں

ہندسی مرکز کا ضابطہ **(Centroid Formula)**

مثلث کے تینوں راس کے محددین دیے ہوئے ہوں تو، حصے کے ضابطے کا استعمال کر کے ہندسی مرکز کے محددین کس طرح معلوم کریں گے، آیئے دیکھتے ہیں۔



شکل **5.16**

فرض کیجیے۔ $A(x_1, y_1)$، $B(x_2, y_2)$، $C(x_3, y_3)$

$\triangle ABC$ کے راس ہیں۔ اور $\triangle ABC$ کا وسطانیہ قطعہ AD

ہے۔ نقطہ $G(x, y)$ اس مثلث کا ہندسی مرکز ہے۔

نقطہ D قطعہ BC کا وسطی نقطہ ہے۔

اس لیے نقطہ D کے محددین،

(قطعہ کے وسطی نقطے کے ضابطہ کی رو سے) ... $x = \dfrac{x_2 + x_3}{2}$ ، $y = \dfrac{y_2 + y_3}{2}$

یہاں، $\triangle ABC$ کا ہندسی مرکز نقطہ $G\,(x, y)$ ہے۔

$$\therefore \ AG : GD = 2 : 1$$

$\therefore$ قطعہ خط کے حصے کے ضابطے کی رو سے،

$$x = \frac{2\left(\dfrac{x_2 + x_3}{2}\right) + 1 \times x_1}{2+1} = \frac{x_2 + x_3 + x_1}{3} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$$

$$y = \frac{2\left(\dfrac{y_2 + y_3}{2}\right) + 1 \times y_1}{2+1} = \frac{y_2 + y_3 + y_1}{3} = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$$

یعنی (x_1, y_1)، (x_2, y_2)، (x_3, y_3) راس والے مثلث کے ہندسی مرکز کے محددین $\left(\dfrac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \dfrac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$ ہیں۔

اسے ہی ہندسی مرکز کا ضابطہ کہتے ہیں۔

اسے ذہن نشین کرلیں

- **حصے کا ضابطہ :**

(x_1, y_1)، (x_2, y_2) ان دو متفرق نقاط کو جوڑنے والے قطعہ خط کو $m : n$ کی نسبت میں تقسیم کرنے والے نقطہ کے محددین $\left(\dfrac{mx_2 + nx_1}{m+n}, \dfrac{my_2 + ny_1}{m+n}\right)$ ہیں۔

- **وسطی نقطے کا ضابطہ :**

(x_1, y_1)، (x_2, y_2) ان دو متفرق نقاط کو جوڑنے والے قطعہ خط کے وسطی نقطہ کے محددین $\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}, \dfrac{y_1 + y_2}{2}\right)$ ہیں۔

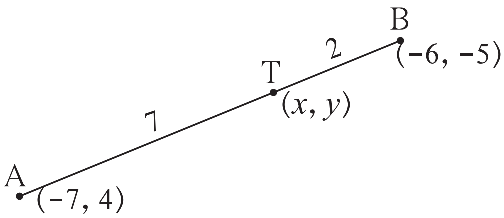
- **ہندسی مرکز کا ضابطہ :**

(x_1, y_1)، (x_2, y_2)، (x_3, y_3) یہ مثلث کے راس کے محددین ہیں۔ تو ہندسی مرکز کے محددین $\left(\dfrac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \dfrac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$ ہیں۔

حل کردہ مثالیں

مثال **(1)** : $A(-7, 4)$ اور $B(-6, -5)$ ہے۔نقطہ T قطعہ AB کو $7 : 2$ کی نسبت میں تقسیم کرتا ہے۔تو نقطہ T کے محددین معلوم کیجیے۔

حل : فرض کیجیے T کے محددین (x, y) ہیں۔



شکل **5.17**

$\therefore$ قطعہ خط کی حصے کے ضابطہ کی رو سے،

$$x = \frac{mx_2 + nx_1}{m+n} = \frac{7\times(-6)+2\times(-7)}{7+2}$$

$$= \frac{-42-14}{9} = \frac{-56}{9}$$

$$y = \frac{my_2 + ny_1}{m+n} = \frac{7\times(-5)+2\times(4)}{7+2}$$

$$= \frac{-35+8}{9} = \frac{-27}{9} = -3$$

نقطہ T کے محددین $\left(\frac{-56}{9}, -3\right)$ ہیں۔

مثال **(2)** : $A(-6, 10)$ اور $B(r, s)$ ان کو جوڑنے والے قطعہ خط کو $P(-4, 6)$، $2 : 1$ کی نسبت میں تقسیم کرتا ہے،تو نقطہ B کے محددین معلوم کیجیے۔

حل : قطعہ خط کی حصے کے ضابطے کی رو سے،

$$-4 = \frac{2\times r + 1\times(-6)}{2+1}$$

$$\therefore\ -4 = \frac{2r-6}{3}$$

$$\therefore\ -12 = 2r - 6$$

$$\therefore\ 2r = -6$$

$$\therefore\ r = -3$$

$$6 = \frac{2\times s + 1\times 10}{2+1}$$

$$\therefore\ 6 = \frac{2s+10}{3}$$

$$\therefore\ 18 = 2s + 10$$

$$\therefore\ 2s = 8$$

$$\therefore\ s = 4$$

$\therefore$ نقطہ B کے محددین $(-3, 4)$ ہیں۔

مثال **(3)** : معلوم کیجیے کہ $A(15, 5)$ ، $B(9, 20)$ اور $P(11, 15)$ اس طرح ہیں کہ A–P–B، تو قطعہ AB کو نقطہ P کس نسبت میں تقسیم کرتا ہے۔

حل : فرض کیجیے نقطہ $P(11, 15)$ قطعہ AB کو $m : n$ کی نسبت میں تقسیم کرتا ہے۔

$\therefore$ حصے کے ضابطے کی رو سے،

اسی طرح Y-محددین کی قیمت رکھ کر حاصل ہونے والی نسبت کیا آئے گی؟ اسے معلوم کیجیے۔اپنا نتیجہ لکھیے۔

$$x = \frac{mx_2 + nx_1}{m+n}$$

$$\therefore\ 11 = \frac{9m+15n}{m+n}$$

$$\therefore\ 11m + 11n = 9m + 15n$$

$$\therefore\ 2m = 4n$$

$$\therefore\ \frac{m}{n} = \frac{4}{2} = \frac{2}{1}$$

$\therefore$ تقسیم کی نسبت 2 : 1 ہے۔

مثال **(4)** : نقطہ $A(2, -2)$ اور $B(-7, 4)$ ان کو جوڑنے والے قطعہ خط کو ثلاثی تقسیم کار نقاط کے محددین معلوم کیجیے۔

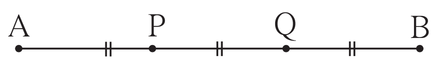
(قطعہ خط کو جو دو نقاط، اس قطعہ خط کے تین مساوی حصے کرتے ہیں۔ان نقاط کو اس قطعہ خط کے ثلاثی تقسیم کار نقاط کہتے ہیں)

حل : فرض کیجیے۔نقاط P اور Q نقاط A اور B کو جوڑنے والے قطعہ خط AB کے ثلاثی تقسیم کار نقاط ہیں۔یعنی نقطہ P اور نقطہ Q کی وجہ سے قطعہ AB کے تین مساوی حصے ہوتے ہیں۔

$$AP = PQ = QB \qquad .. (I)$$

$$\frac{AP}{PB} = \frac{AP}{PQ+QB} = \frac{AP}{AP+AP} = \frac{AP}{2AP} = \frac{1}{2}$$

نقطہ P قطعہ AB کو 2 : 1 کی نسبت میں تقسیم کرتا ہے۔



شکل **5.18**

$$\frac{1\times(-7)+2\times 2}{1+2} = \frac{-7+4}{3} = \frac{-3}{3} = -1$$

$$\frac{1\times 4+2\times(-2)}{1+2} = \frac{4-4}{3} = \frac{0}{3} = 0$$

اس طرح نقطہ Q قطعہ AB کو 1 : 2 کی نسبت میں تقسیم کرتا ہے۔یعنی $\frac{AQ}{QB} = \frac{2}{1}$

$$\frac{2\times(-7)+1\times 2}{2+1} = \frac{-14+2}{3} = \frac{-12}{3} = -4$$

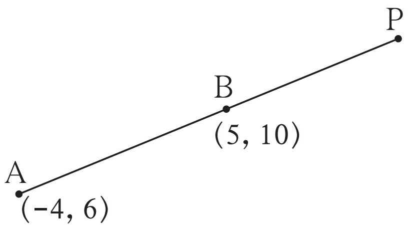
$$\frac{2\times 4+1\times(-2)}{2+1} = \frac{8-2}{3} = \frac{6}{3} = 2$$

$\therefore$ قطعہ خط کے ثلاثی تقسیم کار نقاط کے محددین $(-1, 0)$ اور $(-4, 2)$ ہیں۔

مزید معلومات کے لیے :

آئیے دیکھتے ہیں کہ دو نقاط A اور B کو جوڑنے والے قطعہ خط کی خارجی تقسیم کیسے کی جاتی ہے۔

آئیے دیکھتے ہیں کہ $A(-4, 6)$، $B(5, 10)$ اس طرح دو نقاط ہوں تو قطعہ خط AB کی $3 : 1$ کی نسبت میں خارجی تقسیم کرنے والے نقطہ P کی محددین کس طرح معلوم کر سکتے ہیں۔



شکل **5.19**

$\frac{AP}{PB} = \frac{3}{1}$ یعنی AP، PB کی بہ نسبت بڑا ہے اور A–B–P ہے۔

$\frac{AP}{PB} = \frac{3}{1}$ یعنی $AP = 3k$, $BP = k$ تب $AB = 2k$

$$\therefore \frac{AB}{BP} = \frac{2}{1}$$

اب نقطہ B قطعہ خط AP کو $1 : 2$ کی نسبت میں تقسیم کرتا ہے۔

A اور B کے محددین دیے ہوں تو P کے محددین معلوم کرنا ہم سیکھ چکے ہیں۔

مشقی سیٹ 5.2

.1 اگر نقطہ P، $A(-1, 7)$ اور $B(4, -3)$ کو ملانے والے قطعہ خط کو $2 : 3$ کی نسبت میں تقسیم کرتا ہو تو نقطہ P کے محددین معلوم کیجیے۔

.2 ذیل کی ہر مثال میں قطعہ PQ کو $a : b$ کی نسبت میں تقسیم کرنے والے نقطہ A کے محددین معلوم کیجیے۔

(1) $P(-3, 7)$, $Q(1, -4)$, $a : b = 2 : 1$

(2) $P(-2, -5)$, $Q(4, 3)$, $a : b = 3 : 4$

(3) $P(2, 6)$, $Q(-4, 1)$, $a : b = 1 : 2$

.3 P–T–Q ہو تو نقطہ $P(-3,10)$ اور نقطہ $Q(6,-8)$ کو ملانے والے قطعہ خط کو نقطہ $T(-1,6)$ کس نسبت میں تقسیم کرتا ہے ؟

.4 دائرے کا قطر قطعہ AB ہے اور نقطہ P دائرے کا مرکز ہے۔ $A(2,-3)$ اور $P(-2, 0)$ ہو تو نقطہ B کے محددین معلوم کیجیے۔

.5 نقطہ $A(8, 9)$ اور $B(1, 2)$ کو ملانے والے قطعہ AB کو نقطہ $P(k, 7)$ کس نسبت میں تقسیم کرتا ہے، معلوم کیجیے اور k کی قیمت بھی معلوم کیجیے۔

.6 $(22, 20)$ اور $(0, 16)$ ان کو ملانے والے قطعہ خط کے وسطی نقطہ کے محددین معلوم کیجیے۔

.7 درج ذیل مثلث کے راس ہیں۔ ہر مثلث کے ہندسی مرکز کے محددین معلوم کیجیے۔

(1) $(-7, 6)$, $(2, -2)$, $(8, 5)$

(2) $(3, -5)$, $(4, 3)$, $(11, -4)$

(3) $(4, 7)$, $(8, 4)$, $(7, 11)$

8. $\triangle ABC$ کا ہندسی مرکز $G(-4, -7)$ ہے $A(-14, -19)$، $B(3, 5)$ ہے تو نقطہ C کے محددین معلوم کیجیے۔

9. ہندسی مرکز $G(1, 5)$ والے مثلث کے $A(h, -6)$ ، $B(2, 3)$ اور $C(-6, k)$ راس ہیں تو h اور k کی قیمت معلوم کیجیے۔

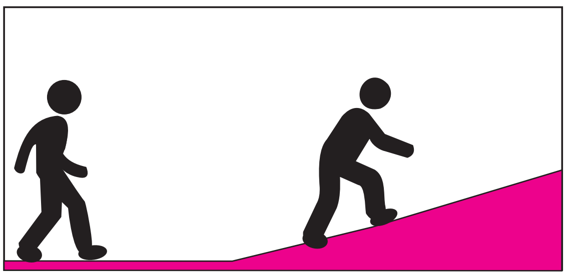
10. نقطہ $A(2, 7)$ اور $B(-4, -8)$ کو ملانے والے قطعہ AB کے تقسیم ثلاثی کرنے والے نقاط کے محددین معلوم کیجیے۔

11. $A(-14, -10)$، $B(6, -2)$ والے قطعہ AB کے چار متماثل قطعات میں تقسیم کرنے والے نقاط کے محددین معلوم کیجیے۔

12. $A(20, 10)$، $B(0, 20)$ والے قطعہ AB کے پانچ متماثل قطعات میں تقسیم کرنے والے نقاط کے محددین معلوم کیجیے۔

آیئے سمجھ لیں

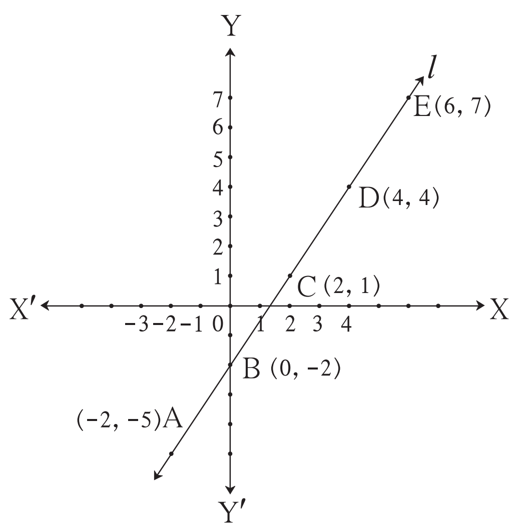
خط کا ڈھلان (Slope of Line)



ہم سائنس میں پڑھ چکے ہیں کہ جب ہم ہموار زمین پر چلتے ہیں تب محنت ومشقت اٹھانی پڑتی۔ چڑھائی (ڈھلان) پر چڑھتے وقت کچھ محنت وطاقت کی ضرورت پیش آتی ہے۔ انسان کا دَم بھر جاتا ہے۔ چڑھائی پر چڑھتے وقت کشش ثقل کی قوت کے مخالف سمت میں کام کرنا پڑتا ہے۔

مستوی محددی علم ہندسہ میں خط کی ڈھلان کا بھی ایک اہم تصور ہے۔ ذیل میں دیے ہوئے عملی کام کے ذریعے اس تصور کو سمجھیں گے۔

عملی کام (I) : متصلہ شکل میں $A(-2, -5)$، $B(0, -2)$، $C(2, 1)$، $D(4, 4)$، $E(6, 7)$ یہ خط l کے نقاط ہیں۔ ان محددین کا استعمال کر کے بننے والی درج ذیل جدول کا مشاہدہ کیجیے۔



شکل 5.20

نمبر شمار	پہلا نقطہ	دوسرا نقطہ	پہلے نقطے کے محددین (x_1, y_1)	دوسرے نقطے کے محددین (x_2, y_2)	$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$
1	C	E	$(2, 1)$	$(6, 7)$	$\frac{7-1}{6-2} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$
2	A	D	$(-2, -5)$	$(4, 4)$	$\frac{4-(-5)}{4-(-2)} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$
3	D	A	$(4, 4)$	$(-2, -5)$	$\frac{-5-4}{-2-4} = \frac{-9}{-6} = \frac{3}{2}$
4	B	C	--	--	--
5	C	A	--	--	--
6	A	C	--	--	--

جدول کے باقی خانوں کو پر کر کے جدول مکمل کیجیے۔اسی طرح خط l پر واقع مزید نقاط کی کچھ جوڑیاں لیجیے اور ہر جوڑی کے لیے $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ نسبت معلوم کیجیے۔

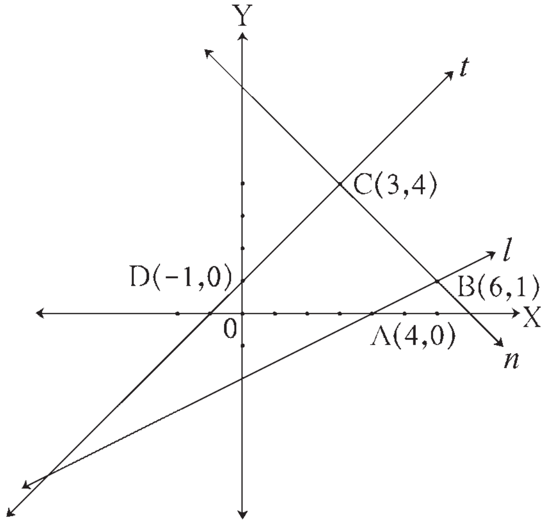
اس عملی کام سے پتا چلتا ہے کہ خط l کے (x_1, y_1) اور (x_2, y_2) ایسے کوئی دو نقاط کے لیے $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ نسبت مستقل ہوتی ہے۔

خط l کے (x_1, y_1) اور (x_2, y_2) ایسے کوئی بھی دو نقاط ہوں تو $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ نسبت کو خط l کی ڈھلان کہتے ہیں۔

خط کی ڈھلان کو عام طور پر حرف m سے ظاہر کرتے ہیں۔

$$\therefore \quad m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

عملی کام (II) :



شکل 5.21

متصلہ شکل 5.21 میں خطوط l، t اور n ہیں اور ان پر کچھ نقاط دیے ہوئے ہیں۔ اس کی مدد سے ان خطوط کی ڈھلان معلوم کیجیے۔

آپ کو پتا چلے گا کہ

(1) خط l اور خط t ان دونوں کی ڈھلان مثبت ہیں۔

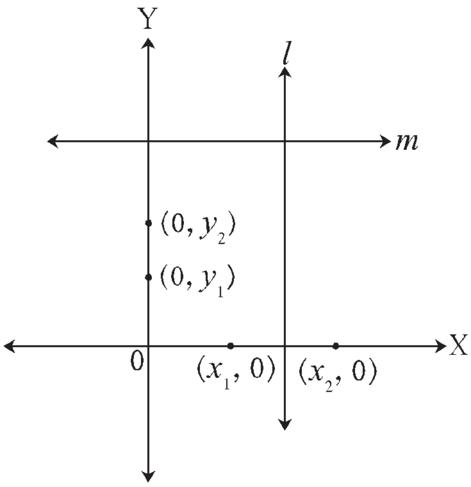
(2) خط n کی ڈھلان منفی ہے۔

(3) خط t کی ڈھلان، خط l کی ڈھلان کی بہ نسبت زیادہ ہے۔

(4) X-محور کے مثبت سمت حادہ زاویہ بنانے والے l اور t خطوط کی ڈھلان مثبت ہیں۔

(5) X-محور کے مثبت سمت منفرجہ زاویہ بنانے والے خط n کی ڈھلان منفی ہے۔

X-محور، Y-محور اور محوروں کے متوازی خطوط کی ڈھلان



شکل 5.22

شکل 5.22 میں $(x_1, 0)$ اور $(x_2, 0)$ یہ X-محور پر واقع دو نقاط ہیں۔

$$\text{X-محور کی ڈھلان} = \frac{0-0}{x_2 - x_1} = 0$$

اسی طرح $(0, y_1)$ اور $(0, y_2)$ Y-محور پر واقع دو نقاط ہیں۔

$$\text{Y-محور کی ڈھلان} = \frac{y_2 - y_1}{0-0} = \frac{y_2 - y_1}{0}$$

لیکن 0 سے تقسیم نہیں کی جاسکتی، اس Y-محور کی ڈھلان طے نہیں کیا جاسکتا۔

اسی طرح خط m کے جیسے X-محور کے متوازی کوئی بھی خط کی ڈھلان معلوم کر کے دیکھتے ہیں۔ وہ صفر آئے گی۔ اسی طرح ہمیں سمجھ میں آتا ہے کہ جیسے Y-محور کے متوازی خط کی ڈھلان طے نہیں کی جاسکتی۔

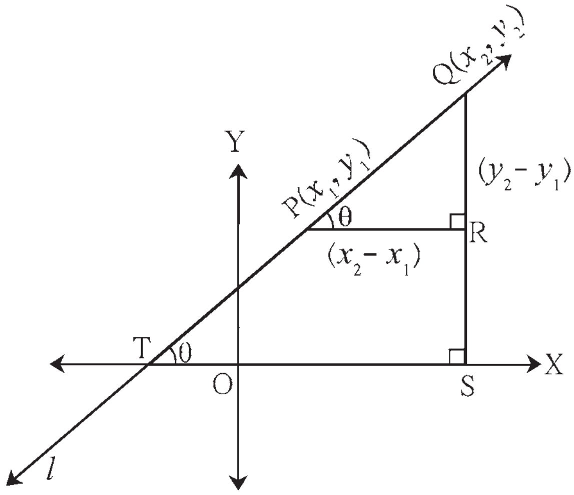
خط کی ڈھلان – علم مثلث کی مثلثیاتی نسبت کا استعمال کر کے

شکل 5.23 میں $P(x_1, y_1)$ اور $Q(x_2, y_2)$ یہ خط l پر واقع دو نقاط ہیں۔ خط l یہ X-محور کو نقطہ T پر قطعہ کرتا ہے۔

X-محور $\perp$ قطعہ QS، قطعہ QS $\perp$ قطعہ PR،

$\therefore$ قطعہ TS $\perp$ قطعہ PR ... (نظیری زاویوں کی آزمائش)

$PR = x_2 - x_1$ اور $QR = y_2 - y_1$



شکل 5.23

$$\therefore \quad \frac{QR}{PR} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \qquad \text{... (I)}$$

خط TQ، X-محور سے θ زاویہ بناتا ہے۔

$$\therefore \quad \frac{QR}{PR} = \tan\theta \qquad \text{... (II)}$$

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \tan\theta$$ ... [(I) اور (II) سے]

$$\therefore \quad m = \tan\theta$$

اب، TS قطعہ $\parallel$ PR قطعہ اور خط l تقاطع ہے۔

$\therefore \quad \angle QPR = \angle QTS$ ... (نظیری زاویے)

اس بنا پر خط کے ذریعے X-محور کے مثبت سمت بنائے گئے زاویے کی tan نسبت یعنی اس خط کی ڈھلان ہے۔ اس طرح بھی ڈھلان کی تعریف کی جاسکتی ہے۔

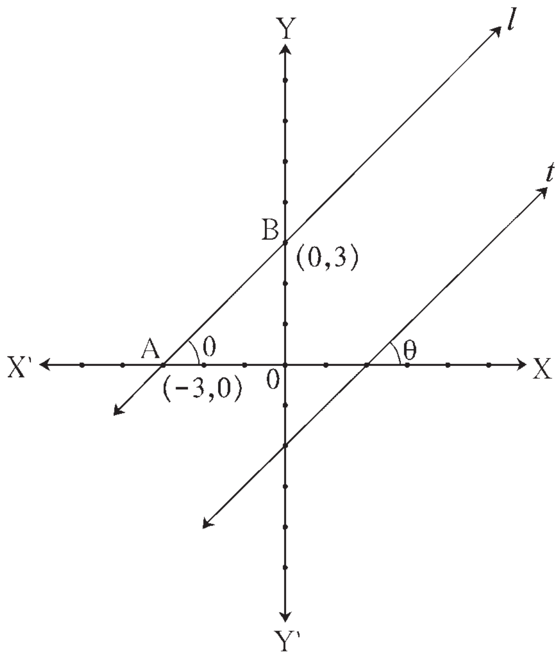
دو خطوط کی ڈھلان مساوی ہوتی ہیں تب وہ خطوط X-محور کے مثبت سمت میں ایک ہی زاویہ یا مساوی زاویہ بناتے ہیں۔

$\therefore$ وہ دونوں متوازی ہوتے ہیں۔

متوازی خطوط کی ڈھلان **(Slope of parallel lines) :**

عملی کام :

شکل 5.24 میں، خط l اور خط t یہ دونوں خطوط X-محور کے مثبت سمت زاویہ θ بناتے ہیں۔



شکل 5.24

$\therefore$ خط $l \parallel$ خط t ... (نظیری زاویوں کی آزمائش)

خط l پر نقطہ $A(-3, 0)$ اور نقطہ $B(0, 3)$ پر غور کیجیے۔ خط AB کی ڈھلان معلوم کیجیے۔

$$\text{خط AB کی ڈھلان} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$= \frac{\boxed{} - \boxed{}}{\boxed{} - \boxed{}} = \frac{\boxed{}}{\boxed{}}$$

$$= \boxed{}$$

اسی طرح t پر اپنی سہولت کے مطابق نقاط لے کر اس کی ڈھلان معلوم کیجیے۔ اس بناء پر متوازی خطوط کی ڈھلان مساوی ہوتی ہیں۔ اس کی تصدیق آپ کرسکتے ہیں۔

یہاں پر $\theta = 45°$ ہے۔

ڈھلان $m = \tan\theta$ کا استعمال کرکے متوازی خطوط کی ڈھلان مساوی ہوتی ہیں۔اس کی تصدیق کیجیے۔

اسی طرح $\theta = 30°$، $\theta = 60°$ لے کر متوازی خطوط کی ڈھلان مساوی ہوتی ہیں۔اس کی تصدیق کیجیے۔

اسے ذہن نشین کرلیں

شکل میں X-محور کے یا X-محور کے متوازی خطوط کی ڈھلان صفر ہوتی ہیں۔

Y-محور یا Y-محور کے متوازی خط کی ڈھلان طے نہیں کی جاسکتی۔

حل کردہ مثالیں

مثال (1) : $A(-3, 5)$ اور $B(4, -1)$ ان نقاط سے گذرنے والے خط کی ڈھلان معلوم کیجیے۔

حل : فرض کیجیے۔ $x_1 = -3$، $x_2 = 4$، $y_1 = 5$، $y_2 = -1$

$$\therefore \text{خط AB کی ڈھلان} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-1-5}{4-(-3)} = \frac{-6}{7}$$

مثال (2) : $P(-2, 3)$، $Q(1, 2)$، $R(4, 1)$ ان نقاط کو ہم خطی بتایئے۔

حل : $P(-2, 3)$، $Q(1, 2)$، $R(4, 1)$

$$\text{خط PQ کی ڈھلان} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2-3}{1-(-2)} = -\frac{1}{3}$$

$$\text{خط QR کی ڈھلان} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1-2}{4-1} = -\frac{1}{3}$$

خط PQ اور QR کی ڈھلان مساوی ہے۔

لیکن نقطہ Q دونوں خطوط پر واقع ہے۔

$\therefore$ نقاط P، Q، R ہم خطی ہیں۔

مثال (3) : اگر $P(k, 0)$ اور $Q(-3, -2)$ ان دو نقاط کو ملانے والے خط کی ڈھلان $\frac{2}{7}$ ہے تو k کی قیمت معلوم کیجیے۔

حل : $P(k, 0)$، $Q(-3, -2)$

$$\text{خط PQ کی ڈھلان} = \frac{-2-0}{-3-k} = \frac{-2}{-3-k}$$

خط PQ کی ڈھلان $\frac{2}{7}$ دی ہوئی ہے۔

$$\therefore \frac{-2}{-3-k} = \frac{2}{7} \quad , \quad \therefore k = 4$$

مثال **(4)** : A(6,1)، B(8,2)، C(9,4)، D(7,3) یہ □ABCD کے راس ہیں تو دکھایئے □ABCD متوازی الاضلاع ہے۔

حل : آپ کو معلوم ہے کہ

$$\text{خط کی ڈھلان} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\text{خط AB کی ڈھلان} = \frac{2-1}{8-6} = \frac{1}{2} \quad \text{... (I)}$$

$$\text{خط BC کی ڈھلان} = \frac{4-2}{9-8} = 2 \quad \text{... (II)}$$

$$\text{خط CD کی ڈھلان} = \frac{3-4}{7-9} = \frac{1}{2} \quad \text{... (III)}$$

$$\text{خط DA کی ڈھلان} = \frac{3-1}{7-6} = 2 \quad \text{... (IV)}$$

[(I) اور (III) سے] ... خط CD کی ڈھلان = خط AB کی ڈھلان

∴ خط AB || خط CD

[(II) اور (IV) سے] ... خط DA کی ڈھلان = خط BC کی ڈھلان

∴ خط BC || خط DA

یعنی ذو اربعۃ الاضلاع کے مقابل کے ضلعوں کی دونوں جوڑیاں ایک دوسرے کے متوازی ہیں۔

∴ □ABCD متوازی الاضلاع ہے۔

مشقی سیٹ 5.3

.1 ذیل میں خط کے ذریعے X-محور کی مثبت سمت بنائے گئے زاویے دیے ہوئے ہیں، اس کی مدد سے اس خط کی ڈھلان معلوم کیجیے۔

(1) 45° (2) 60° (3) 90°

.2 ذیل میں دیے ہوئے نقاط سے گذرنے والے خطوط کی ڈھلان معلوم کیجیے۔

(1) A(2, 3) اور B(4, 7) (2) P(−3, 1) اور Q(5, −2)

(3) C(5, −2) اور D(7, 3) (4) L(−2, −3) اور M(−6, −8)

(5) E(−4, −2) اور F(6, 3) (6) T(0, −3) اور S(0, 4)

.3 ذیل میں دیے ہوئے نقاط ہم خطی ہیں یا نہیں، اسے طے کیجیے۔

(1) A(−1, −1), B(0, 1), C(1, 3) (2) D(−2, −3), E(1, 0), F(2, 1)

(3) L(2, 5), M(3, 3), N(5, 1) (4) P(2, −5), Q(1, −3), R(−2, 3)

(5) R(1, −4), S(−2, 2), T(−3, 4) (6) A(−4, 4), K$\left(-2, \frac{5}{2}\right)$, N(4, −2)

.4 $A(1, -1)$، $B(0, 4)$، $C(-5, 3)$ یہ مثلث کے راس ہیں تو ہر ضلع کی ڈھلان معلوم کیجیے۔

.5 $A(-4, -7)$، $B(-1, 2)$، $C(8, 5)$ اور $D(5, -4)$ دکھائیے کہ یہ متوازی الاضلاع ABCD کے راس ہیں۔

.6 $R(1, -1)$، $S(-2, k)$، ہے اور خط RS کی ڈھلان -2 ہو تو k کی قیمت معلوم کیجیے۔

.7 $B(k, -5)$، $C(1, 2)$ اور خط BC کی ڈھلان 7 ہو تو k کی قیمت معلوم کیجیے۔

.8 $P(2, 4)$، $Q(3, 6)$، $R(3, 1)$ اور $S(5, k)$ ہے اور خط PQ، خط RS کے متوازی ہے تو k کی قیمت معلوم کیجیے۔

مجموعہ سوالات 5

.1 درج ذیل سوالوں کے متبادلات میں سے صحیح جواب کا انتخاب کر کے خالی جگہ پر کیجیے۔

(1) قطعہ AB، Y-محور کے متوازی ہے۔ نقطہ A کے محددین (1, 3) ہیں تو نقطہ B کے محددین .... ہوں گے۔

(A) (3,1) (B) (5,3) (C) (3,0) (D) (1,-3)

(2) درج ذیل میں سے نقطہ .... X-محور پر مبدا کے دائیں سمت میں واقع ہے۔

(A) (-2,0) (B) (0,2) (C) (2,3) (D) (2,0)

(3) (-3, 4) اس نقطہ کا مبداء سے فاصلہ .... ہے۔

(A) 7 (B) 1 (C) 5 (D) -5

(4) ایک خط X-محور سے مثبت سمت میں $30°$ کا زاویہ بناتا ہے، تو اس خط کی ڈھلان .... ہے۔

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (C) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (D) $\sqrt{3}$

.2 ذیل کے نقاط ہم خطی ہیں یا نہیں طے کیجیے۔

(1) $A(0, 2)$, $B(1, -0.5)$, $C(2, -3)$

(2) $P(1, 2)$, $Q(2, \frac{8}{5})$, $R(3, \frac{6}{5})$

(3) $L(1, 2)$, $M(5, 3)$, $N(8, 6)$

.3 $P(0, 6)$ اور $Q(12, 20)$ نقاط کو ملانے والے قطعہ کے وسطی نقطہ کے محددین معلوم کیجیے۔

.4 $A(3, 8)$ اور $B(-9, 3)$ ان نقاط کو ملانے والے قطعہ کو Y-محور کس نسبت میں تقسیم کرتا ہے۔

.5 X-محور پر ایسا نقطہ لیجیے کہ جو $P(2, -5)$ اور $Q(-2, 9)$ سے ہم فاصلہ ہے۔

.6 ذیل کے نقاط کے درمیان فاصلہ معلوم کیجیے۔

(1) $A(a, 0)$, $B(0, a)$ (2) $P(-6, -3)$, $Q(-1, 9)$ (3) $R(-3a, a)$, $S(a, -2a)$

.7 ایک مثلث کے راس $A(-3, 1)$، $B(0, -2)$ اور $C(1, 3)$ ہیں۔ تو اس مثلث کا حائط مرکز معلوم کیجیے۔

8. کیا ذیل کے نقاط کو ملانے والے قطعات مثلث بنا سکیں گے؟ مثلث بن جانے پر اس کے اضلاع کی وجہ سے بننے والے مثلث کی قسم بتائیے۔

(1) $L(6,4)$, $M(-5,-3)$, $N(-6,8)$

(2) $P(-2,-6)$, $Q(-4,-2)$, $R(-5,0)$

(3) $A(\sqrt{2}, \sqrt{2})$, $B(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, $C(-\sqrt{6}, \sqrt{6})$

9. اگر $P(-12, -3)$ اور $Q(4, k)$ اس خط کی ڈھلان $\frac{1}{2}$ ہے تو k کی قیمت معلوم کیجیے۔

10. $A(4, 8)$ اور $B(5, 5)$ ان نقاط کو ملانے والا خط $C(2, 4)$ اور $D(1, 7)$ ان نقاط کو ملانے والے خط کے متوازی ہے۔ اسے دکھائیے۔

11. $P(1, -2)$، $Q(5, 2)$، $R(3, -1)$، $S(-1, -5)$ دکھائیے کہ یہ متوازی الاضلاع کے راس ہیں۔

12. اگر $P(2, 1)$، $Q(-1, 3)$، $R(-5, -3)$ اور $S(-2, -5)$ ہو تو دکھائیے کہ $\square PQRS$ ایک مستطیل ہے۔

13. $A(-1, 1)$، $B(5, -3)$، $C(3, 5)$ راس والے مثلث کے وسطانیوں کی لمبائیاں معلوم کیجیے۔

***14.** اگر $D(-7, 6)$، $E(8, 5)$ اور $F(2, -2)$ یہ مثلث کے اضلاع کے وسطی نقاط ہیں تو اس مثلث کے وسطانیوں کے ہندسی مرکز کے محددین معلوم کیجیے۔

15. $A(4, -1)$، $B(6, 0)$، $C(7, -2)$ اور $D(5, -3)$ تو دکھائیے کہ یہ مربع کے راس ہیں۔

16. $A(7, 1)$، $B(3, 5)$ اور $C(2, 0)$ راس والے مثلث کے حائط دائرہ کے مرکز کے محددین اور حائط دائرہ کا نصف قطر معلوم کیجیے۔

.17 $A(4, -3)$ اور $B(8, 5)$ ہے تو قطعہ AB کے $1 : 3$ کی نسبت میں حصہ کرنے والے نقطہ کے محددین معلوم کیجیے۔

***18.** $A(-4, -2)$، $B(-3, -7)$، $C(3, -2)$ اور $D(2, 3)$ ان نقاط کو ترتیب سے جوڑیں تو بننے والے ذو اربعۃ الاضلاع ABCD کی قسم لکھیے۔

***19.** نقاط P، Q، R اور S کی وجہ سے قطعہ AB کو 5 متماثل قطعات میں تقسیم اس طرح ہوتی ہے۔ کہ A–P–Q–R–S–B اگر $Q(12, 14)$ اور $S(4, 18)$ ہے تو A، P، R اور B کے محددین معلوم کیجیے۔

20. $P(6, -6)$، $Q(3, -7)$ اور $R(3, 3)$ ان نقاط سے گزرنے والے دائرہ کے مرکز کے محددین معلوم کیجیے۔

***21.** متوازی الاضلاع کے تین راسوں کے محددین $A(5,6)$، $B(1, -2)$ اور $C(3, -2)$ ہوں تو چوتھے نقطے کے محددین کی ممکن ہو تو تمام جوڑیاں معلوم کیجیے۔

22. $A(1, 7)$، $B(6, 3)$، $C(0, -3)$ اور $D(-3, 3)$ راسوں والا ایک ذو اربعۃ الاضلاع ہے۔ اس ذو اربعۃ الاضلاع کے ہر وتر کی ڈھلان معلوم کیجیے۔